

RIYAZIYYAT

DƏRSLİK

9

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

$$a_n = a_k + (n - k)d \quad \bullet \quad l = \frac{m}{360} \cdot 2\pi r$$



Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin*,
sözləri *Əhməd Cavadındır*.

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu!
Sinən hər bə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştəqdir!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!



HEYDƏR ƏLİYEV
AZƏRBAYCAN XALQININ ÜMUMMİLLİ LİDERİ

Nayma Qəhrəmanova
Məhəmməd Kərimov
İlham Hüseynov

Ümumtəhsil məktəblərinin **9**-cu sinfi üçün

RİYAZİYYAT

fənni üzrə

DƏRSLİK

Bu nəşrlə bağlı irad və təkliflərinizi
radius_n@hotmail.com və derslik@edu.gov.az
elektron ünvanlarına göndərməyiniz xahiş olunur.
Əməkdaşlığınız üçün əvvəlcədən təşəkkür edirik!



RADIUS

Mündəricat

1

n -ci dərəcədən kök. Rasional üstlü qüvvət

Həqiqi ədədlər	6
Ədəd oxu	7
Həqiqi ədədin mütləq qiyməti	9
Ədədi çoxluqlar və təqdim formaları	10
n -ci dərəcədən kök	12
n -ci dərəcədən kökün xassələri	16
Vuruğun kök işarəsi altından çıxarılması ...	18
Vuruğun kök işarəsi altına daxil edilməsi ...	19
Rasional üstlü qüvvət	21
Rasional üstlü qüvvətin xassələri	22
Bölmə üzrə ümumiləşdirici tapşırıqlar	26

2

Çevrə

Mərkəzi bucaq. Çevrə qövsü	28
Qövsün uzunluğu	30
Vəterin xassələri	31
Çevrə daxilinə çəkilmiş bucaq	36
Çevrəyə toxunan	39
Çevrəyə çəkilmiş toxunanlar və kəsənlər arasındakı bucaqlar	42
Çevrədə vətər və kəsənlərin parçalarının mütənəsibliyi	46
Bölmə üzrə ümumiləşdirici tapşırıqlar	49

3

Funksiyalar. Qrafiklər

Kvadratik funksiya və onun qrafiki	51
Kvadratik funksiyanın müxtəlif formalarda təqdimi	57
$y = ax^2 + bx + c$ funksiyanın qrafikinə qurulması	62
$y = ax^2 + bx + c$ funksiyanın araşdırılması	64
Kvadratik funksiyanın tətbiqi ilə məsələ həlli	67
$y = x $ funksiyası və onun qrafiki	70
$y = x^3$ funksiyası və onun qrafiki	74
Bölmə üzrə ümumiləşdirici tapşırıqlar	75

4

Çevrənin tənliyi

İki nöqtə arasındakı məsafə düsturu	77
Çevrənin tənliyi	82
Çevrə üzərindəki nöqtələrin koordinatları və triqonometrik nisbətlər	87
Dairə sektoru və seqmentinin sahəsi	90
Bölmə üzrə ümumiləşdirici tapşırıqlar	92

5

Tənliklər. Tənliklər sistemi

Yüksək dərəcəli tənliklər	94
Rasional tənliklər. Rasional tənliklərin tətbiqi ilə məsələ həlli	97
Modullu tənliklər	100
İrrasional tənliklər	103
Tənliklər sistemi	106
Bir tənliyi birdərəcəli, digəri ikidərəcəli olan tənliklər sistemi	107
Tənliklər sisteminin cəbri üsulla həlli	109
Hər iki tənliyi ikidərəcəli olan tənliklər sistemi	112
Tənliklər sisteminə gətirilən məsələlər həlli	114
Bölmə üzrə ümumiləşdirici tapşırıqlar	116

6

Çoxbucaqlılar

Çoxbucaqlılar	118
Qabarıq çoxbucaqlının daxili və xarici bucaqlarının cəmi	120
Çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş çoxbucaqlılar	123
Üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələr	123
Çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının xassələri	127
Düzgün çoxbucaqlının daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələr	129
Düzgün çoxbucaqlının sahəsi	132
Bölmə üzrə ümumiləşdirici tapşırıqlar	137

7

Bərabərsizliklər

Xətti bərabərsizliklər sistemi.

Bərabərsizliklər heyəti	139
Modullu bərabərsizliklər	143
Kvadrat bərabərsizliklər	145
İntervallar üsulu	153
Rasional bərabərsizliklərin intervallar üsulu ilə həlli	155
İrrasional bərabərsizliklər	157
Bölmə üzrə ümumiləşdirici tapşırıqlar	159

8

Vektorlar

Vektorlar	162
Dekart koordinat müstəvisində vektorlar	164
Vektorun istiqaməti. Meyil bucağı	167
Triqonometrik nisbətlər və vektorun komponentləri	169
Vektorların toplanması və çıxılması	171
Kollinear vektorların toplanması	171
Kollinear olmayan vektorların toplanması və çıxılması	173
Vektorların komponentlərindən istifadə etməklə toplanması	177
Vektorun ədədə vurulması	179
Komponentləri ilə verilmiş vektorlar üzərində əməllər	181
Paralel köçürmə	182
Hərəkət və konqruyent fiqurlar	185
Bölmə üzrə ümumiləşdirici tapşırıqlar	188



9

Ədədi ardıcılıqlar

Ədədi ardıcılıq	190
Ədədi silsilə	194
Ədədi silsilənin n -ci həddinin düsturu	195
Ədədi silsilənin xassələri	199
Ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturu	201
Həndəsi silsilə	205
Həndəsi silsilənin n -ci həddinin düsturu	207
Həndəsi silsilənin xassələri	210
Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturu	211
Sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi	214
Bölmə üzrə ümumiləşdirici tapşırıqlar	216

10

Məlumatın təqdimi.
Birləşmələr. Ehtimal

Tezlik paylanması cədvəli	218
Nisbi tezlik	220
Tezlik histoqramı. Tezlik poliqonu	222
Tezlik paylanmasına görə ədədi orta	226
Birləşmələr	228
Permutasiya-yerdəyişmə, ${}_n P_n$	229
Təkrarlı permutasiyalar	230
Permutasiya-yerləşdirmə, ${}_n P_k$	231
Kombinezon, ${}_n C_k$	233
Ehtimalın hesablanmasına aid məsələ həlli	235
Bölmə üzrə ümumiləşdirici tapşırıqlar	241
Ümumiləşdirici tapşırıqlar	243

1

n-ci dərəcədən kök. Rasional üstlü qüvvət

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz

- ✓ Həqiqi ədədlər üzərində əməllərin xassələrini
- ✓ *n*-ci dərəcədən kök və onun xassələrini
- ✓ Rasional üstlü qüvvət və onun xassələrini

1-1

Həqiqi ədədlər

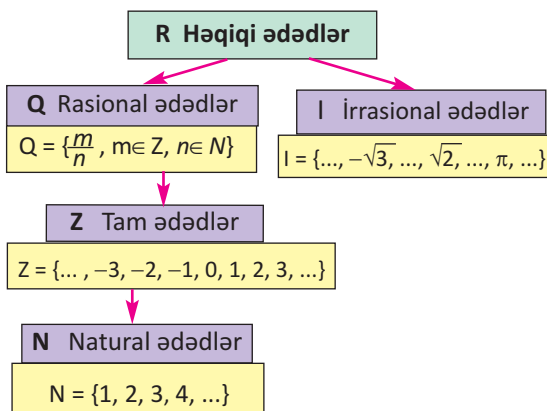
Rasional ədədlər və irrasional ədədlər çoxluqlarının birləşməsinə həqiqi ədədlər çoxluğu deyilir. Hər bir həqiqi ədəd ya rasional, ya da irrasionaldır. Natural (N), tam (Z), rasional (Q), irrasional (I) və həqiqi (R) ədədlər çoxluqları üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

$N \subset Z \subset Q \subset R$; $I \subset R$; $Q \cap I = \emptyset$; $Q \cup I = R$. İstənilən rasional ədəd sonsuz dövrü onluq kəsr şəklində göstərilə bilər. Dövrü olmayan sonsuz onluq kəsrlər irrasional ədədləri ifadə edir.

Beləliklə, istənilən həqiqi ədədi sonsuz onluq kəsr kimi ifadə etmək olar.

İki həqiqi ədədin cəmi, fərqi, hasili və nisbəti (bölən sıfırdan fərqli olmaqla) həqiqi ədəddir.

Cədvəldə həqiqi ədədlər üzərində əməllərin xassələri verilmişdir.



$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	Yerdəyişmə xassəsi
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Qruplaşdırma xassəsi
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$		Paylama xassəsi
$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \ (a \neq 0)$	Əks ədədin və tərs ədədin varlığı
$a + 0 = a$	$a \cdot 0 = 0, \ a \cdot 1 = a$	Sıfırın və vahidin varlığı
$-(-a) = a$	$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -ab$	Mənfi ədədlər
$a + (-b) = a - b$	$(-a) \cdot (-b) = ab$	üzərində əməllərin
$a - (-b) = a + b$	$a : (-b) = a \cdot (-\frac{1}{b}) = -\frac{a}{b}$	xassələri

Nümunə. $2 - \sqrt{3}$ ədədinin tərsi ilə əksinin cəmini tapın.

Həlli. $a = 2 - \sqrt{3}$ ədədinin tərsi $\frac{1}{a} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}$,
surət və məxrəc $(2 + \sqrt{3})$ -ə vurulur

əksi isə $-a = -(2 - \sqrt{3}) = -2 + \sqrt{3}$ olduğundan alırıq:

$$\frac{1}{a} + (-a) = (2 + \sqrt{3}) + (-2 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

Öyrənmə tapşırıqları

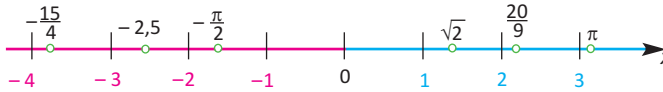
- 1 > Verilən həqiqi ədədlərin hansı natural; tam; rasional; irrasional ədəddir?
 - a) $\sqrt{16}$
 - b) $-\frac{9}{11}$
 - c) $1,(7)$
 - d) $\sqrt{8}$
 - e) $-\sqrt{9}$
- 2 > $x^2 = a$ tənliyində a -nın yerinə elə ədəd yazın ki, tənliyin:
 - a) iki rasional kökü olsun;
 - b) iki irrasional kökü olsun;
 - c) həqiqi kökü olmasın.
- 3 > n -in 2; 3; 4; 5 qiymətlərindən hansında \sqrt{n} rasional ədəddir?
- 4 > İfadənin qiymətinin rasional və ya irrasional ədəd olduğunu müəyyən edin.
 - a) $(\sqrt{7} + 3)(\sqrt{7} - 3)$
 - b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6}$
 - c) $(2 - \sqrt{2})^2$
- 5 > Elə iki irrasional ədəd yazın ki: a) cəmi rasional; b) hasil rasional olsun.
- 6 > Verilmiş ədədin tərsi ilə əksinin fərqi tapın.
 - a) $0,(3)$
 - b) $\sqrt{2} + 1$
 - c) $2 - \sqrt{3}$



Ədəd oxu

Tərif. Üzərində başlanğıc nöqtə, istiqamət və ölçü vahidi qeyd edilmiş düz xəttə ədəd oxu deyilir.

✓ Ədəd oxunun hər bir nöqtəsinə müəyyən bir həqiqi ədəd uyğundur və tərsinə, hər bir həqiqi ədədi ədəd oxu üzərindəki nöqtə ilə göstərmək olar.



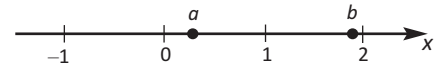
İstənilən a və b həqiqi ədədləri üçün

$a > b$, $a = b$, $a < b$ münasibətlərindən yalnız biri doğrudur. Ədəd oxu üzərində

iki müxtəlif həqiqi ədəddən böyüyünə uyğun nöqtə daha sağda yerləşir. Adətən, "a ədədinə uyğun nöqtə" əvəzinə sadəcə "a nöqtəsi" deyilir.

✓ İki həqiqi ədəd arasında sonsuz sayda həqiqi ədəd var.

Verilən ədədləri sonsuz onluq kəsr şəklində ifadə etməklə bunu aydın görmək olar. Məsələn, $\frac{1}{9} = 0,(1) = 0,111\dots$ və $\frac{1}{10} = 0,1 = 0,100\dots$ olduğundan aydındır ki, bu ədədlər arasında $0,101$; $0,1001$; $0,10001$; ... (1 rəqəmlərini ayıran sıfırların sayı hər dəfə bir vahid artır) və s. kimi sonsuz sayda ədəd yazıla bilər.



a nöqtəsi b-dən solda yerləşir: $a < b$

Hər bir həqiqi a ədədi üçün elə m tam ədədi var ki, $m \leq a < m + 1$ münasibəti ödənilir.

Nümunə. $a = 7 + \sqrt{2}$ ədədi ədəd oxu üzərində hansı iki ardıcıl tam ədəd arasında yerləşir?

Həlli. $1 < \sqrt{2} < 2$ bərabərsizliyinin hər tərəfinə 7 əlavə edək: $8 < 7 + \sqrt{2} < 9$. Deməli, verilmiş ədədə uyğun nöqtə 8 və 9 arasında yerləşir.

Verilmiş a ədədindən böyük olmayan ən böyük tam ədədə onun tam hissəsi deyilir və $[a]$ ilə işarə edilir. a ədədi ilə tam hissəsinin fərqi a -nın kəsr hissəsi deyilir və $\{a\}$ ilə işarə olunur: $\{a\} = a - [a]$. Aydındır ki, $0 \leq \{a\} < 1$ olur.

Nümunə. a) 7,2; b) -7,2 ədədinin tam və kəsr hissələrini tapın.

Həlli. a) $[7,2] = 7$, $\{7,2\} = 7,2 - [7,2] = 7,2 - 7 = 0,2$

b) $[-7,2] = -8$, $\{-7,2\} = -7,2 - [-7,2] = -7,2 - (-8) = 0,8$

Öyrənmə tapşırıqları

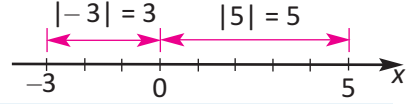
- 7 > Verilən ədədləri ədəd oxu üzərində iki ardıcıl tam ədəd arasında göstərin.
 $-\frac{9}{4}$ | 1,6 | $\sqrt{5}$ | $-0,(8)$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$
- 8 > Ədədləri müqayisə edin:
 a) $-2\sqrt{3}$ və $-\sqrt{9}$ b) $-\frac{7}{12}$ və $-\frac{7}{\sqrt{12}}$ c) $\sqrt{14}$ və 3 d) $\sqrt{\frac{8}{3}}$ və π
- 9 > a) 0,63-dən böyük olan həqiqi ədədlərdən ən kiçiyi varmı?
 b) 0,9 ədədindən kiçik olub, onluq kəsr şəklində yazılışında 9 rəqəmi iştirak etməyən ən böyük həqiqi ədədi göstərin.
- 10 > Nemət deyir ki, $-2 + \sqrt{3}$ və $-1 + \sqrt{2}$ ədədlərinin hər ikisi ədəd oxunun mənfi ədədlərə aid hissəsində yerləşir. Siz necə fikirləşirsiniz?
- 11 > Verilən ədədlər üçün hansı hökm doğrudur?
 1) $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $-\sqrt{2}$. 2) $\sqrt{\frac{36}{5}}$, $\sqrt{\frac{49}{8}}$, $\sqrt{\frac{81}{11}}$.
 A: -1-dən böyükdür A: 1 ilə 2 arasındadır
 B: -2 ilə -1 arasındadır B: 2 ilə 3 arasındadır
- 12 > Ədədləri artan sıra ilə düzün.
 1) $-\sqrt{49}$; $-\sqrt{7}$; 0; $-\sqrt{51}$; -6,8 2) $-\sqrt{8}$; -3,1; $\sqrt{15}$; $(-2)^2$; $-\sqrt{11}$
- 13 > $\frac{1}{3}$ və $\frac{1}{2}$ ədədləri arasında yerləşən bir neçə:
 a) rasional; b) irrasional ədəd yazın.
- 14 > Verilmiş ədədin tam və kəsr hissələrini tapın.
 a) 2,3 b) -6,2 c) 2,(3) d) -2,(3) e) 2,1(6) f) $\sqrt{3}$ g) $\sqrt{5} + 1$

✓ Həqiqi ədədin mütləq qiyməti

Tərif. Həqiqi a ədədinin mütləq qiyməti (və ya modulu) $a \geq 0$ olduqda həmin ədədin özünə, $a < 0$ olduqda isə onun əksi olan ədədə deyilir.

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \text{ olduqda} \\ -a, & a < 0 \text{ olduqda} \end{cases}$$

✓ Həqiqi ədədin mütləq qiyməti ədəd oxu üzərində bu ədədə uyğun nöqtənin koordinat başlanğıcından məsafəsini göstərir.



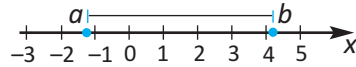
● Nümunələr.

$$|3| = 3; \quad |-3| = -(-3) = 3; \quad |0| = 0; \quad |3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$$

Mütləq qiymətin xassələri

xassə	nümunə	sözlə ifadəsi
1. $ a \geq 0$	$ -3 = 3 > 0$	Ədədin mütləq qiyməti mənfi deyil
2. $ a = -a $	$ 5 = -5 $	Qarşılıqlı əks ədədlərin mütləq qiymətləri bərabərdir
3. $ ab = a \cdot b $	$ -2 \cdot 5 = -2 \cdot 5 $	Hasilin mütləq qiyməti vuruqların mütləq qiymətləri hasilinə bərabərdir
4. $\left \frac{a}{b}\right = \frac{ a }{ b }$	$\left \frac{12}{-3}\right = \frac{ 12 }{ -3 }$	Nisbətin mütləq qiyməti bölünən və bölənin mütləq qiymətləri nisbətində bərabərdir

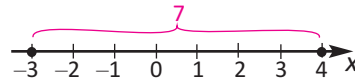
✓ Ədəd oxu üzərində a və b nöqtələri arasındakı məsafə $|a - b|$ kimi tapılır.



$|a - b| = |b - a|$ olduğuna diqqət edin.

● **Nümunə.** Ədəd oxu üzərində -3 və 4 nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

Həlli. $|4 - (-3)| = |7| = 7$



Öyrənmə tapşırıqları

15 > Ədədləri müqayisə edin.

a) $|-4|$ və $|4|$

b) $-(-3)$ və $|-3|$

c) $1 - \sqrt{2}$ və $|1 - \sqrt{2}|$

16 > Hesablayın.

a) $|-2, (2) - (-3)|$

b) $|-2\frac{1}{3} \cdot (-3\frac{6}{7})|$

c) $\frac{|-4 \cdot (-3)|}{|-2|}$

17 > Sadələşdirin.

a) $|\sqrt{2} - 3| + |\sqrt{2} - 1|$

b) $|\sqrt{3} - 1| + |\sqrt{3} + 1|$

c) $|\pi - 3| - |3 - \pi|$

18 > a və b nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.










a) $a = 2, (3); b = 3, 5$

b) $a = -\frac{2}{3}; b = 0, (3)$

c) $a = \sqrt{2} - 1; b = 3 + \sqrt{2}$

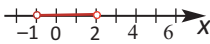
✓ Ədədi çoxluqlar və təqdim formaları

Bütün elementləri həqiqi ədədlər olan çoxluğa ədədi çoxluq deyilir. Ədədi çoxluqlar bərabərsizliklə və ya aralıq şəklində verilə bilər. $(-\infty; +\infty)$ yazılışı bütün həqiqi ədədlər çoxluğunu ifadə edir.

Aralıq	Bərabərsizliklə yazılış	Ədəd oxu üzərində
$(a; b)$	$a < x < b$	
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$[a; b)$	$a \leq x < b$	
$(a; b]$	$a < x \leq b$	
$(a; +\infty)$	$a < x$	
$[a; +\infty)$	$a \leq x$	
$(-\infty; b)$	$x < b$	
$(-\infty; b]$	$x \leq b$	
$(-\infty; +\infty)$	R (bütün həqiqi ədədlər)	

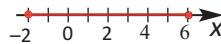
1. Nümunə. Bərabərsizliyi ödəyən ədədlər çoxluğunu ədəd oxu üzərində təsvir edin, aralıq şəklində yazın.

Həlli. a) $-1 < x < 2$



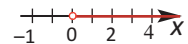
$(-1; 2)$

b) $-2 \leq x \leq 6$



$[-2; 6]$

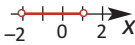
c) $x > 0$



$(0; +\infty)$

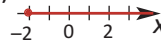
2. Nümunə. Verilmiş aralığı ədəd oxu üzərində təsvir edin, bərabərsizliklə təqdim edin.

Həlli. a) $(-2; 1)$



$-2 < x < 1$

b) $[-2; +\infty)$



$x \geq -2$

Öyrənmə tapşırıqları

19 > Bərabərsizliyi ödəyən həqiqi ədədlər çoxluğunu ədədi aralıq şəklində yazın.

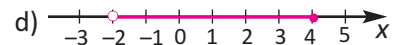
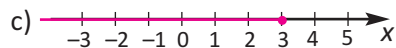
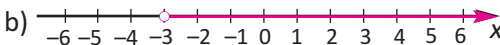
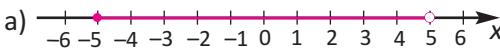
a) $x \leq 2$

b) $-2 < x \leq 5$

c) $-4 \leq x \leq -1,5$

d) $x \geq 10$

20 > Ədəd oxu üzərində təsvir edilmiş aralıqları yazın.



- 21 > Təkliflərə uyğun bərabərsizliklər yazın.
- a) n ədədi -1 -dən böyük, 12 -dən kiçikdir;
 b) k ədədi 3 -dən böyük deyil; c) m ədədi mənfi deyil;
 d) a ədədi ən azı -10 , ən çoxu 22 ola bilər;
 e) b ədədi 5 -dən kiçikdir, lakin -3 -dən kiçik deyil.



Çoxluqların birləşməsi və kəsişməsinin xassələri.

Çoxluqların birləşməsinin və kəsişməsinin bəzi xassələri ədədlər üzərində toplama və vurma əməllərinin yerdəyişmə, qruplaşdırma və paylama xassələrinə oxşardır.

$$1) A \cup B = B \cup A$$

$$2) A \cap B = B \cap A$$

$$3) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$4) (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$5) (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Xüsusi halda, ixtiyari A çoxluğu üçün $A \cup A = A$ və $A \cap A = A$ münasibətləri doğrudur.

Öyrənmə tapşırıqları

- 22 > Aralıqların birləşməsini və kəsişməsini yazın.

Nümunə. $(-2; 4] \cup [0; 9] = (-2; 9];$ $(-2; 4] \cap [0; 9] = [0; 4]$

a) $(-2; 4] \cap [0; 9]$

b) $(-2; 4] \cup [0; 9]$

c) $(-\infty; +\infty) \cap [-\pi; 21]$

d) $(-\infty; 4] \cap (-1; +\infty)$

e) $[3; 4] \cup [4; 9]$

f) $(-\infty; 4] \cap (0; +\infty)$

- 23 > Əməlləri yerinə yetirin.

a) $Q \cap Z$

b) $N \cup R$

c) $N \cup Z \cap Q$

d) $(-4, 8; -3, 5) \cap Z$

- 24 > Verilmiş aralığı ədəd oxu üzərində təsvir edin və bu aralığa daxil olan rəşional ədəd və irrasional ədəd göstərin (\in işarəsindən istifadə edin).

a) $[1; 5]$

b) $(-3; 0)$

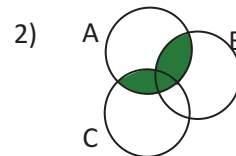
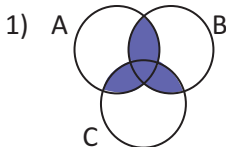
c) $[-2; +\infty)$

- 25 > R həqiqi ədədlər çoxluğunun $A = [-2; 1]$, $B = [0; 3]$ və $C = [-1; 2]$ alt çoxluqları verilmişdir. Ədəd oxu üzərində təsvir etməklə aşağıdakı bərabərliklərin doğru olduğunu yoxlayın.

1) $A \cup B = B \cup A$; 2) $A \cap B = B \cap A$; 3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; 5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

- 26 > Rəngli hissəyə uyğun çoxluğu yazın.



Araşdırma. Planetlərdən Günəşə qədər məsafəni (milyon millə) $\sqrt[3]{6t^2}$ ifadəsinin qiymətini hesabla-
maqla təqribi tapmaq olar. Burada t planet ilini Yer
günlərinin sayı ilə göstərir. Marsda bir planet ili
687 Yer günüdür. Marsın Günəşdən məsafəsi
təxminən neçə mildir?



1-2

n-ci dərəcədən kök

n -ci qüvvəti ($n \geq 2$, $n \in N$) a -ya bərabər olan (yəni $b^n = a$ bərabərliyini ödəyən) b ədədinə a -nın n -ci dərəcədən kökü deyilir.

Məsələn, 32-nin 5-ci dərəcədən kökü 2-dir, çünki $2^5 = 32$.

81-in 4-cü dərəcədən kökləri 3 və -3 -dür, çünki $3^4 = 81$ və $(-3)^4 = 81$.

Həqiqi ədədlər çoxluğunda istənilən ədədin tək dərəcədən yeganə kökü var, mənfi ədədin cüt dərəcədən kökü yoxdur, müsbət ədədin isə cüt dərəcədən iki kökü var və onlar qarşılıqlı əks ədədlərdir.

Birqiymətliliyi təmin etmək üçün hesabi kök anlayışı daxil edilir.

Tərif. Mənfi olmayan a ədədinin n -ci dərəcədən mənfi olmayan kökünə hesabi kök deyilir, $\sqrt[n]{a}$ ilə işarə edilir və belə oxunur: " a -nın n -ci dərəcədən kökü."

Kökün üstü (dərəcəsi)

$$\sqrt[n]{a}$$

Kök (radikal) işarəsi

Kökaltı ifadə

✓ Xüsusi halda, $n = 2$ olduqda kvadrat kök, $n = 3$ olduqda kub kök deyilir.



Nümunə. $\sqrt[4]{81} = 3$, çünki $3^4 = 81$ və $3 > 0$

$\sqrt[3]{8} = 2$, çünki $2^3 = 8$ və $2 > 0$

Diqqət edin!

$\sqrt[4]{81} \neq -3$

Tərifə görə aydındır ki, istənilən $n \geq 2$, $n \in N$ üçün $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{1} = 1$ olur.

Hesabi kökün tapılması qüvvətə yüksəltmə əməlinin tərsidir.

Mənfi olmayan a və b ədədləri üçün $\sqrt[n]{a} = b$ və $b^n = a$ yazılışları ekvivalent yazılışlardır. n cüt ədəd olduqda müsbət a ədədinin n -ci dərəcədən müsbət kökü $\sqrt[n]{a}$ kimi, onunla qarşılıqlı əks olan mənfi kökü isə $-\sqrt[n]{a}$ kimi yazılır.

qüvvətə yüksəltmə	kök alma
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$
$2^4 = 16$	$\sqrt[4]{16} = 2$

n tək ədəd olduqda $a > 0$ ədədinin n -ci dərəcədən kökü də müsbətdir və hesabi kökün tərifinə görə $\sqrt[n]{a}$ ilə işarə olunur. $a < 0$ olduqda tək dərəcədən kökü mənfi-dir və o da $\sqrt[n]{a}$ simvolu ilə göstərilir. Mənfi ədədin tək dərəcədən kökünü əks ədədin həmin dərəcədən hesabi kökü ilə ifadə etmək olar, məsələn, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$. Beləliklə, n cüt ədəd olduqda $\sqrt[n]{a}$ ifadəsi $a \geq 0$ olduqda mənalıdır və onun qiyməti də mənfi olmayan ədəddir, n tək ədəd olduqda isə $\sqrt[n]{a}$ ifadəsi a -nın istənilən qiymətlərində mənalı olub, a ilə eyni işarəlidir.

$\sqrt[n]{a}$ ifadəsinin mənalı olduğu bütün qiymətlərdə $(\sqrt[n]{a})^n = a$ bərabərliyi doğrudur.

- 1. Nümunə.** Hesablayın: a) $(2\sqrt[4]{3})^4$; b) $(3\sqrt[3]{2})^3$; c) $(2\sqrt[5]{-3})^5$
Həlli. a) $(2\sqrt[4]{3})^4 = 2^4 \cdot (\sqrt[4]{3})^4 = 16 \cdot 3 = 48$; b) $(3\sqrt[3]{2})^3 = 3^3 \cdot (\sqrt[3]{2})^3 = 27 \cdot 2 = 54$;
 c) $(2\sqrt[5]{-3})^5 = 2^5 \cdot (\sqrt[5]{-3})^5 = 32 \cdot (-3) = -96$;

Qeyd edək ki, $a > b \geq 0$ olduqda $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ münasibəti doğrudur.

- 2. Nümunə.**
 $\sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{8} > \sqrt[4]{5}$; $\sqrt[5]{8,1} > \sqrt[5]{7,9}$

Öyrənmə tapşırıqları

1 > Hesablayın.

- a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{125}$ c) $\sqrt[4]{256}$ d) $\sqrt[3]{0}$ e) $\sqrt[4]{1}$
 f) $\sqrt{0,64}$ g) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ h) $\sqrt[5]{-32}$ i) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$ j) $\sqrt[3]{0,064}$

2 > İfadələri iki qrupa- mənası olan və mənası olmayan ifadələrə ayırın.

- a) $\sqrt[5]{-27}$ b) $-\sqrt[8]{-19}$ c) $\sqrt[4]{(-2)^4}$ d) $\sqrt[4]{-12}$ e) $\sqrt[6]{(-3)(-7)}$

3 > İfadənin qiymətini tapın.

- a) $5 \cdot \sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 13,5}$ c) $(4 - \sqrt[3]{-64}) : \sqrt[4]{16}$ d) $\sqrt{\sqrt{16}}$
 e) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ f) $\sqrt[4]{13 + \sqrt[3]{27}}$ g) $\sqrt[3]{31 - \sqrt[3]{64}}$ h) $\sqrt[3]{62 + \sqrt[4]{16}}$
 i) $\sqrt[4]{86 - \sqrt[3]{125}}$ j) $\sqrt{7 + \sqrt[3]{7 + \sqrt[4]{1}}}$ k) $\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt{256}}$ l) $\sqrt[3]{\sqrt{16 + 2 \cdot \sqrt[5]{32}}}$

4 > Ədədlərdən hansı rəasional, hansı irrasional ədəddir?

- a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{16}$ c) $\sqrt[3]{-64}$ d) $\sqrt[3]{4}$ e) $\sqrt[3]{\frac{5}{27}}$ f) $\sqrt[3]{0,027}$

5 > n -in bir neçə elə natural qiymətlərini göstərin ki, $\sqrt[n]{n}$ ifadəsinin qiyməti:

- a) rəasional ədəd; b) irrasional ədəd olsun.

6 > İfadənin təqribi qiymətini kalkulyatorla tapın.

- a) $\sqrt{10^3}$ b) $\sqrt[3]{16}$ c) $\sqrt[3]{5^2}$ d) $\sqrt[4]{6^3}$ e) $\sqrt[5]{27}$

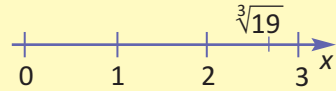
7 > Rəngli xanaların yerinə uyğun müqayisə işarəsini (>, <, =) yazın.

- a) $\sqrt{0,01}$ ■ $\sqrt[3]{0,001}$ b) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ ■ $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ c) $\sqrt[3]{7}$ ■ $\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt[3]{9}$ ■ 2 e) $\sqrt[3]{25}$ ■ 3

- 8 > Ədədləri artan sıra ilə düzün: a) $\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[3]{7}$; 2; $\sqrt[3]{1,2}$ b) $-\sqrt[3]{5}$; -2; $-\sqrt[3]{4}$; -3
- 9 > Ədədləri azalan sıra ilə düzün: a) $\sqrt[4]{17}$; $\sqrt[4]{15}$; 2 b) $\sqrt[5]{9}$; $\sqrt[5]{3}$; $\sqrt[5]{7}$
- 10 > Fərqi işarəsini müəyyən edin: a) $\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{7}$ b) $2 - \sqrt[4]{10}$ c) $\sqrt[3]{24} - 3$
- 11 > Verilən ədədlərin ədəd oxu üzərində yerini təxmini müəyyən edin.
 a) $\sqrt[3]{19}$ b) $\sqrt[3]{-20}$ c) $\sqrt[3]{30}$ d) $\sqrt[3]{36}$ e) $\sqrt[3]{\frac{63}{8}}$

Nümunə. $8 < 19 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{19} < \sqrt[3]{27}$, buradan isə $2 < \sqrt[3]{19} < 3$ olur.

Yəni $\sqrt[3]{19}$ ədədi 2 və 3 arasında yerləşir.



- 12 > Verilmiş ədəd hansı iki ardıcıl tam ədədin arasında yerləşir?
 a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt[5]{28}$ d) $\sqrt[4]{0,7}$ e) $\sqrt[4]{15}$
- 13 > Ədədin tam hissəsini tapın.
 a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{20}$ c) $\sqrt[5]{38}$ d) $\sqrt[4]{17}$ e) $-\sqrt[4]{17}$ f) $\sqrt[4]{17} - 1$
- 14 > Əvvəlcə ədədin tam hissəsini tapın, sonra onun kəsr hissəsini göstərin.
 a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{9}$ c) $\sqrt[4]{12}$ d) $\sqrt[5]{33}$ e) $\sqrt[3]{28} - 2$
- 15 > Hesablayın. a) $(4\sqrt{3})^2$ b) $(5\sqrt[3]{2})^3$ c) $(-2\sqrt[4]{3})^4$ d) $(-2\sqrt[5]{4})^5$
- 16 > Dəyişənin hansı qiymətlərində bərabərlik doğrudur?
 a) $\sqrt[3]{x+1} = 3$ b) $\sqrt[4]{x-1} = 2$ c) $\sqrt[6]{x-7} = -1$ d) $\sqrt[5]{x-3} = -2$
- 17 > Tənliyi həll edin.
 a) $x^3 = 64$ b) $x^6 = -16$ c) $x^4 = 81$ d) $\frac{1}{8}x^4 - 2 = 0$ e) $\frac{1}{2}x^5 + 16 = 0$

Nümunə. 1) $x^3 = 27$ *bir həqiqi kökü var:* $x = \sqrt[3]{27} = 3$

2) $x^4 = -81$ *həqiqi kökü yoxdur, çünki cüt dərəcəli qüvvət mənfi ədədə bərabər ola bilməz.*

3) $x^4 = 16$ *iki həqiqi kökü var:* $x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$



***n*-ci dərəcədən qüvvətin *n*-ci dərəcədən kökü**

1) *n* cüt ədəddirsə, istənilən *a* üçün $a^n = |a|^n$ olduğundan, hesabi kökün tərifinə görə $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{|a|^n} = |a|$ olur.

Nümunələr. $\sqrt[6]{(-\pi)^6} = |-\pi| = \pi$, $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$; $\sqrt[8]{(x-1)^8} = |x-1|$

2) *n* tək ədəddirsə, istənilən həqiqi *a* ədədi üçün $\sqrt[n]{a^n} = a$ bərabərliyi doğrudur.

Nümunələr. $\sqrt[3]{7^3} = 7$, $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$, $\sqrt[7]{x^7} = x$, $\sqrt[3]{(x-1)^3} = x-1$

18 > Hesablayın: a) $3\sqrt[4]{(-2)^4}$ b) $\sqrt[6]{(-8)^2}$ c) $2\sqrt[3]{(-4)^3}$ d) $\sqrt[4]{(-3)^4} + \sqrt[3]{(-3)^3}$

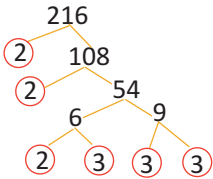
19 > Sadələşdirin: a) $\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[5]{x^5}$ ($x > 0$) b) $\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[5]{x^5}$ ($x < 0$)

c) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} + \sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^4}$ d) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}-3)^3} + \sqrt[4]{(\sqrt{2}-3)^4}$

20 > $1 < x < 2$ olduqda sadələşdirin: $\sqrt[3]{(x-1)^3} + \sqrt{x^2-4x+4}$

Tətbiq tapşırıqları

21 > Sadə vuruqlarını üç eyni qrupa ayırmaqla verilmiş ədədi müəyyən ədədin kubu şəklində yazın və kub kökünü tapın.



$$216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6^3; \quad \sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$$

- 1) 216 2) 512 3) 729
4) 1728 5) 2744 6) 5832

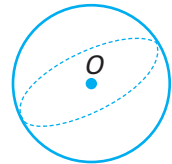
22 > 1) Həcmi 2197 m^3 olan kubun tam səthinin sahəsini tapın.

2) Həcmi 42 sm^3 və 336 sm^3 olan kubların tillərinin uzunluqları nisbətini tapın.

23 > **Həndəsə.** Radiusu *r* olan kürənin həcmi $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ düsturu ilə hesablanır.

a) Həcmi $288\pi \text{ sm}^3$ olan kürənin radiusunu tapın.

b) Həcmi 528 m^3 olan kürənin radiusu təqribən neçə metrdir? Cavabı yüzdəbirlərə qədər dəqiqliklə yazın.



24 > Tilləri 3 sm və 4 sm olan iki dəmir kub əridilərək, bir kub şəklinə salınmışdır. Bu kubun tilinin uzunluğu təqribən neçə santimetrdir? Nəticəni ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

25 > **Biologiya.** Ağacın hündürlüyünü (metrlə) $35\sqrt[3]{d^2}$ ifadəsinin qiymətini hesablamaqla təqribi müəyyən etmək olar. Burada *d* ağacın gövdəsinin diametridir (metrlə). Gövdəsinin diametri 1,1 m olan ağacın hündürlüyü təqribən neçə metrdir?

26 > Səhifə 12-də verilmiş araşdırma tapşırığının həllini yerinə yetirin. Aldığınız nəticəni müxtəlif mənbələrdən alınan məlumatla müqayisə edin.

✓ **n-ci dərəcədən kökün xassələri**

n-ci dərəcədən kökün xassələri		
Burada $a \geq 0$ və $b \geq 0$ həqiqi ədədlər, $m \geq 2$, $n \geq 2$ və k natural ədədlərdir.		
Riyazi yazılış	Xassə	Nümunə
1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	Mənfi olmayan vuruqların hasilinin n-ci dərəcədən kökü bu vuruqların n-ci dərəcədən kökləri hasilinə bərabərdir.	$\sqrt[3]{27 \cdot 64} =$ $= \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64}$ $= 3 \cdot 4 = 12$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ($b \neq 0$)	Surəti mənfi olmayan, məxrəci isə müsbət olan kəsrin n-ci dərəcədən kökü surət və məxrəcin n-ci dərəcədən kökləri nisbətində bərabərdir.	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$
3. $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$	Kökün üstünü (dərəcəsinə) və kökalı ifadənin qüvvət üstünü eyni bir natural ədədə vursaq və ya bölsək, kökün qiyməti dəyişməz.	$\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[3]{x^2}$
4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	Kökün qüvvəti kökalı ifadənin qüvvətinin kökünə bərabərdir.	$(\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	Kökədən kök almaq üçün kökalı ifadə saxlanılır, köklərin üstləri vurulur	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$

Öyrənmə tapşırıqları

27 > İfadənin qiymətini hesablayın.

a) $\sqrt{25 \cdot 64}$ b) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ c) $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$ d) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$ e) $\sqrt[5]{\frac{1}{32} \cdot 243}$

28 > İfadənin qiymətini hesablayın.

Nümunə: $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{54 \cdot 32} = \sqrt[3]{27 \cdot 2 \cdot 32} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{200}$ b) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ c) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$ d) $\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{98}$
e) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{13,5}$ f) $\sqrt[4]{80} \cdot \sqrt[4]{125}$ g) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{162}$ h) $\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[5]{96}$

29 > Xassə 1 və Xassə 2-də verilən eynilikləri sağdan sola oxuduqda üstləri bərabər olan kökləri vurma və bölmə qaydaları alınır. Bu qaydalarda buraxılmış sözləri tamamlayın.

- 1) Üstləri olan kökləri bir-birinə vurmaq üçün kökaltı ifadələri kökün üstünü əvvəlki kimi kafidir.
 2) Üstləri olan kökləri bir-birinə bölmək üçün bölüb, kökün üstünü

30 > Hesablayın. a) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{0,1}}$ e) $\frac{\sqrt[3]{81}}{3\sqrt[3]{3}}$

31 > Hesablayın. a) $\sqrt[4]{32 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 27}$ b) $\sqrt[4]{8 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{2 \cdot 27}$ c) $\sqrt[5]{16 \cdot 9} \cdot \sqrt[5]{2 \cdot 27}$

32 > $a \geq 0, b \geq 0$ olduqda $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ bərabərliyinin aşağıdakı isbatını tamamlayın.

Təklif	Əsası
1. $a \geq 0, b \geq 0$	1. verilir
2. $\sqrt[n]{a} \geq 0, \sqrt[n]{b} \geq 0$	2.
3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$	3.
4. $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n$	4. Hasilin qüvvəti
5. $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = a \cdot b$	5.
6. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	6.

33 > İfadənin qiymətini hesablayın.

- a) $(\sqrt{8} - \sqrt{4,5}) \cdot \sqrt{2}$ b) $(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[3]{4}$ c) $\frac{\sqrt[4]{512} - \sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$ d) $\frac{\sqrt[5]{486} - \sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$
 e) $(\sqrt[4]{8} - 2 \cdot \sqrt[4]{0,5}) \cdot \sqrt[4]{2}$ f) $(\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} + 2 \cdot \sqrt[3]{16}) : \sqrt[3]{2}$ g) $(\sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{121,5}) \cdot \sqrt[5]{2}$

34 > Hesablayın.

- a) $\sqrt[3]{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9 + \sqrt{17}}$ | b) $\sqrt[4]{10 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 + \sqrt{19}}$ | c) $\sqrt[5]{7 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7 + \sqrt{17}}$

35 > Əməlləri yerinə yetirin.

- a) $(\sqrt[6]{8})^2$ b) $(\sqrt[4]{4})^2$ c) $-3 \cdot (\sqrt[4]{9})^2$ d) $(\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{8})^2$

36 > Verilmiş ifadələrin qiymətlərini müqayisə edin:

- a) $\sqrt{\sqrt{81}}$ və $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ və $\sqrt[6]{64}$ c) $\sqrt[4]{2^8}$, $\sqrt[4]{2^8}$ və $\sqrt[8]{2^8}$

- 37> $\sqrt[3]{\frac{5}{64}}$ ədədi $\sqrt[3]{\frac{5}{512}}$ ədədindən neçə dəfə böyükdür?
- 38> a) Uzunluğu $\sqrt[4]{8}$ m, eni $\sqrt[4]{2}$ m olan düzbucaqlının sahəsini tapın.
b) Ölçüləri $\sqrt[3]{6}$ sm, $\sqrt[3]{9}$ sm, $\sqrt[3]{4}$ sm olan düzbucaqlı paralelepipedin həcmi tapın.
- 39> n tək ədəd olduqda 1-ci və 2-ci xassələr a və b mənfəi ədədləri üçün də doğrudur. Bunu nümunələr üzərində göstərin.
- 40> Dəyişənlərin müsbət qiymətlər aldığı bilərəkdən sadələşdirin.
a) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ b) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}$ c) $(\sqrt[6]{x^2})^3$ d) $(\sqrt[4]{a^2})^2$
e) $(\sqrt{ab})^3 \cdot \sqrt{a^3b^3}$ f) $\sqrt[4]{z^2} \cdot \sqrt[4]{81z^6}$ g) $\sqrt[3]{a^3} \cdot (\sqrt[4]{a})^4$ h) $(\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{y})^2 \cdot \sqrt[3]{x^{-1}}$
- 41> Sadələşdirin.
a) $\frac{\sqrt{x^3y^5}}{\sqrt{x^5y^3}}$ b) $\frac{\sqrt[4]{a^5b^{10}}}{\sqrt[4]{ab^2}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{n^4m}}{\sqrt[3]{nm^4}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{x^6z^3}}{\sqrt[4]{x^2z^3}}$
- 42> Dəyişənlərin müsbət qiymətlər aldığı bilərəkdən sadələşdirin.
a) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$ d) $\sqrt[9]{x^6}$ e) $\sqrt[2n]{a^{4n}}$
f) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}}$ g) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{c^5}}$ h) $\sqrt[5]{\sqrt{n}}$ i) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{z^{12}}}$ j) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{y^6}}$
- 43> Kökdən azad edin. Çoxhədli şəkildə yazın.
a) $\sqrt[3]{(a+2)^6}$ b) $\sqrt[4]{(x-3)^8}$ c) $\sqrt[3]{(x^2-1)^3}$ d) $\sqrt[4]{(x^2+2)^4}$



Vuruğun kök işarəsi altından çıxarılması

Vuruğun kök işarəsi altından çıxarılmasında kökün xassələri və n cüt ədəd olduqda $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, n tək ədəd olduqda $\sqrt[n]{a^n} = a$ düsturları tətbiq edilir.



Nümunə. Vuruğu kök işarəsi altından çıxarın:

a) $\sqrt[3]{54}$ b) $\sqrt[3]{a^5b^6}$ c) $\sqrt[4]{48a^6}$

Həlli.

a) $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[3]{a^5b^6} = \sqrt[3]{a^3b^6a^2} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6} \cdot \sqrt[3]{a^2} = ab^2\sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt[4]{48a^6} = \sqrt[4]{16 \cdot 3 \cdot a^4 \cdot a^2} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{3a^2} = 2|a|\sqrt[4]{3a^2}$

44> Vuruğu kök işarəsi altından çıxarın.

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt[3]{24}$ c) $\sqrt[4]{32}$ d) $\sqrt[5]{128}$ e) $\sqrt[3]{\frac{108}{250}}$

45> Dəyişənlərin qiymətinin müsbət olduğunu qəbul edərək sadələşdirin.

a) $\sqrt{16x^3}$ b) $\sqrt[3]{27a^5}$ c) $\sqrt[6]{64a^7}$ d) $\sqrt[3]{54a^5b^7}$ e) $\sqrt{\frac{81a^2b^4}{3b}}$

46> Dəyişənin mümkün qiymətlərini (DMQ) göstərin və ifadəni sadələşdirin.

a) $\sqrt{36x^3}$ b) $\sqrt[4]{16x^5y^8}$ c) $\sqrt[5]{4x^3y^4} \cdot \sqrt[5]{16x^2y}$ d) $\sqrt[3]{4yz^2} \cdot \sqrt[3]{2yz^4}$
 e) $\sqrt[3]{\frac{x^6y^8}{x^3y^4}}$ f) $\frac{\sqrt[5]{x^9y}}{\sqrt[5]{x^3y^8}}$ g) $\sqrt{\frac{9x^3}{32y^4}}$ h) $\sqrt[4]{x^3y} \cdot \frac{\sqrt[4]{16x^4y}}{\sqrt[4]{y}}$

47> Ortaq vuruğu mötərizə çıxarmaqla sadələşdirin.

a) $2\sqrt[5]{y} + 7\sqrt[5]{y}$ b) $-\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{x}$ c) $\sqrt[5]{64x^8} - x\sqrt[5]{2x^3}$ d) $\sqrt[3]{16y^4} - 3y\sqrt[3]{2y}$



Vuruğun kök işarəsi altına daxil edilməsi

Vuruğun kök işarəsi altına daxil edilməsində $a = \sqrt[n]{a^n}$ (n tək ədədirsə),

$|a| = \sqrt[n]{a^n}$ (n cüt ədədirsə) düsturları və kökün xassələri tətbiq olunur.

İstənilən vuruğu tək dərəcədən qüvvətə yüksəldərək, həmin dərəcədən kök işarəsi altına daxil etmək olar.

Müsbət vuruq cüt dərəcədən qüvvətə yüksəldilərək, həmin dərəcədən kök altına daxil edilir, vuruq mənfi olduqda isə əvvəlcə -1 ilə müsbət ədədin hasili şəklində yazılır, müsbət vuruq kök işarəsi altına daxil edilir, kökün qarşısında “-” işarəsi saxlanılır.

Nümunə Vuruğu kök işarəsi altına daxil edin.

a) $2\sqrt[3]{5}$ b) $-2\sqrt[4]{5}$ c) $a \cdot \sqrt[4]{-\frac{3}{a^3}}$

Həlli. a) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$

b) $-2\sqrt[4]{5} = -1 \cdot 2\sqrt[4]{5} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = -\sqrt[4]{80}$ c) $a \cdot \sqrt[4]{-\frac{3}{a^3}} = -\sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{-\frac{3}{a^3}} = -\sqrt[4]{-3a}$
 $a < 0$

48> Vuruğu kök işarəsi altına daxil edin.

a) $3\sqrt[3]{2}$ b) $2\sqrt[4]{2}$ c) $3\sqrt[4]{5}$ d) $-2\sqrt[4]{3}$ e) $-2\sqrt[5]{2}$ f) $x\sqrt[3]{3}$ g) $a\sqrt[5]{2}$

49> Vuruğu kök işarəsi altına daxil edin. DMQ-ni göstərin.

a) $x \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{x}}$ b) $x \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{x}}$ c) $2c \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4c}}$ d) $\frac{2}{x} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^5}{8}}$ e) $c \cdot \sqrt[4]{-\frac{3}{c}}$

50> Ədədləri müqayisə edin. a) $\sqrt[3]{4}$ ilə $\sqrt[4]{3}$ b) $2\sqrt[3]{3}$ ilə $3\sqrt[3]{2}$ c) $2\sqrt[4]{3}$ ilə $3\sqrt[4]{2}$

51> Fərqi işarəsini müəyyən edin. a) $\sqrt[6]{2} - \sqrt[3]{10}$ b) $\sqrt[3]{2} - \sqrt{2}$ c) $\sqrt[4]{5} - \sqrt[6]{7}$

52> Eyni dərəcədən kökə gətirib, əməli yerinə yetirin.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt[6]{8} : \sqrt[4]{2}$ d) $\sqrt[3]{x} : \sqrt[5]{x}$

53> İfadənin qiymətini hesablayın.

a) $\sqrt{4 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt[4]{23 - 8\sqrt{7}}$ b) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}}$

54> Sadələşdirin. a) $\frac{\sqrt{a - \sqrt{b}}}{\sqrt[4]{a - \sqrt[4]{b}}} - \frac{\sqrt{a + \sqrt[4]{ab}}}{\sqrt[4]{a + \sqrt[4]{b}}}$ b) $\frac{a - b}{\sqrt[3]{a - \sqrt[3]{b}}} - \frac{a + b}{\sqrt[3]{a + \sqrt[3]{b}}}$

55> Kökün xassələrini tətbiq edərək sadələşdirin.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6 b^3}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}} \ (a \geq 0)$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} \ (a \geq 0)$

56> $a < 0$ olduqda bərabərlik doğrudurmu?

a) $\sqrt[5]{a^5} = a$ b) $\sqrt[5]{a^5} = -a$ c) $\sqrt[4]{a^4} = -a$ d) $\sqrt[6]{a^6} = |a|$

57> Ədədləri artan sıra ilə düzün.

a) $\sqrt{2}$; $\sqrt[6]{4}$; $\sqrt[3]{3}$. b) $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{5}$. c) $\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{8}$; $\sqrt[3]{6}$.

58> Məxrəci irrasionalıqdan azad edin.

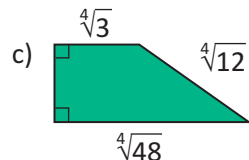
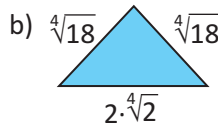
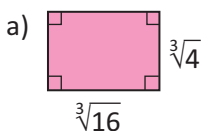
Nümunə. $\frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot \sqrt[3]{2}}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

a) $\frac{9}{\sqrt[4]{27}}$ b) $\frac{5}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\frac{4}{\sqrt[5]{8}}$ d) $\frac{10}{\sqrt[4]{125}}$

59> Əməlləri yerinə yetirin.

a) $\frac{\sqrt[4]{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{4 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{5} - 4} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{5} + 4}}{\sqrt[3]{0,5}}$

60> Şəkildə verilənlərə görə fiqurun sahəsini tapın.



- Araşdırma.** 1) $\sqrt[3]{2^6}$ və $2^{\frac{6}{3}}$ ifadələrinin qiymətlərini müqayisə edin.
 2) m ədədi n natural ədədinə tam bölündükdə $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ bərabərliyinin doğru olduğunu göstərən bir nümunə də siz yazın.
 3) m ədədi n natural ədədinə tam bölünmürsə, $a^{\frac{m}{n}}$ ifadəsinin qiymətini necə hesablamaq olar?

1-3

Rasional üstlü qüvvət

Tərif Müsbət a ədədinin $\frac{m}{n}$ rasional üstlü (burada m -tam, n -natural ədəddir, $n \geq 2$) qüvvəti $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ kimi təyin olunur.

Nümunələr. $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$; $2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{-3}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$m > 0$ olduqda ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) $\sqrt[n]{0^m} = 0$ olduğundan, $0^{\frac{m}{n}} = 0$ olur.

Mənfi ədədlər üçün kəsr üstlü qüvvətə baxılmaz.

Məsələn, $(-4)^{\frac{1}{2}}$ ifadəsinin mənası yoxdur.

Öyrənmə tapşırıqları

1 > Rasional üstlü qüvvətləri köklərlə əvəz edin.

a) $5^{\frac{2}{3}}$; $3^{\frac{3}{4}}$; $8^{-\frac{3}{4}}$; $9^{0,25}$ b) $x^{\frac{2}{3}}$; $y^{1,5}$; $8^{-0,5}$; $c^{-2,5}$ c) $3x^{\frac{1}{2}}$; $(8y)^{\frac{1}{3}}$; $(4c)^{-0,5}$

2 > Hesabi kökü rasional üstlü qüvvətlə əvəz edin (dəyişənlərin qiymətləri müsbətdir).

a) $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[5]{7^3}$ b) $\sqrt[5]{a^3}$; $\sqrt[6]{b^5}$; $\sqrt[3]{2x}$; $\sqrt[8]{2x^3}$

3 > Hesablayın.

a) $100^{\frac{1}{2}}$ b) $9^{-\frac{1}{2}}$ c) $8^{1\frac{1}{3}}$ d) $27^{\frac{1}{3}}$ e) $81^{\frac{3}{4}}$ f) $2 \cdot 125^{\frac{1}{3}}$
 g) $25^{\frac{1}{2}} \cdot 0,001^{\frac{1}{3}}$ h) $8^{\frac{2}{3}} - 27^{\frac{1}{3}}$ i) $16^{\frac{1}{4}} + 32^{\frac{1}{5}}$

4 > Lətif və Sevil $(-8)^{\frac{1}{3}}$ ifadəsinin qiymətini aşağıdakı kimi hesabladılar.

Lətif: $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ **Sevil:** $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

Bu nəticələrə görə "Mənfi ədədlər üçün kəsr üstlü qüvvətə baxılmaz" fikrini izah edin.

5 > Hesablayın. a) $\left(27^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ b) $\left(8^{\frac{2}{3}} + 9^{\frac{3}{2}} + 125^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

- 6 > Lalə və Ənvər kalkulyatorda $4,1^{2,5} \approx 34,0376557653$ olduğunu hesabladılar və hesablamalarını izah etdilər.

Lalənin izahı: $4,1^{2,5} = 4,1^2 \cdot 4,1^{\frac{1}{2}} = 4,1 \cdot 4,1 \cdot \frac{4,1}{2}$ kimi yazıb hesablasaq, təxminən 34 alınar.

Ənvərin izahı: $4,1^{2,5} = 4,1^{\frac{5}{2}}$. Bu isə hər biri 4,1-ə bərabər olan 5 sayda vuruğun hasilinin 2-ci dərəcədən kökü deməkdir.

Kimin izahı doğrudur?

- 7 > Ədədləri müqayisə edin.

a) $5^{\frac{1}{2}}$ ilə $3^{\frac{1}{2}}$

b) $0,1^{\frac{1}{2}}$ ilə $0,2^{\frac{1}{2}}$

c) $3^{\frac{1}{2}}$ ilə $3^{\frac{1}{3}}$

d) $4^{\frac{1}{3}}$ ilə $4^{\frac{1}{4}}$

- 8 > Dəyişənin hansı qiymətlərində ifadənin mənası var?

a) $x^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[3]{x}$

c) $(x-1)^{-\frac{1}{4}}$

d) $(x+1)^{\frac{2}{3}}$



Rasional üstlü qüvvətin xassələri

Tam üstlü qüvvətin xassələri əsası müsbət həqiqi ədəd olan istənilən rasional üstlü qüvvət üçün də doğrudur.

Adı	Yazılışı	Nümunə
Qüvvətlərin hasili	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$5^2 \cdot 5^{\frac{3}{2}} = 5^{2+\frac{3}{2}} = 5^{\frac{7}{2}} = 25$
Qüvvətin qüvvəti	$(a^p)^q = a^{pq}$	$(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4 = 243$
Hasilin qüvvəti	$(ab)^p = a^p b^p$	$(16 \cdot 9)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 3 = 12$
Mənfi üstlü qüvvət	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$36^{-0,5} = \frac{1}{36^{0,5}} = \frac{1}{(6^2)^{0,5}} = \frac{1}{6}$
Sıfır üstlü qüvvət	$a^0 = 1$	$213^0 = 1$
Qüvvətlərin nisbəti	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$\frac{4^{\frac{5}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} = 4^2 = 16$
Nisbətin qüvvəti	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$	$\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{27^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{4}$

Burada a və b müsbət həqiqi ədədlər, p və q istənilən rasional ədədlərdir.

$p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{l}$ (n və l natural ədədlər, m və k tam ədədlərdir) olduqda $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ xassəsinə isbat edək.

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{nk}{nl}} = \sqrt[nl]{a^{ml}} \cdot \sqrt[nl]{a^{nk}} = \sqrt[nl]{a^{ml} \cdot a^{nk}} = \sqrt[nl]{a^{ml+nk}} = a^{\frac{ml+nk}{nl}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{k}{l}} = a^{p+q}$$

Digər xassələr də oxşar qayda ilə isbat edilir.

Öyrənmə tapşırıqları

9 > Rasional üstlü qüvvət şəklində göstərin.

a) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}}$ b) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$ c) $b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}$ d) $a^{0,8} \cdot a^{-5,1} \cdot a^{7,3}$

10 > Sadələşdirin

a) $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{1}{3}}$ b) $y : y^{\frac{2}{3}}$ c) $a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{2}{3}}$ d) $c^{1,2} : c^{-0,8}$

11 > Rasional üstlü qüvvətin xassələrini tətbiq edərək sadələşdirin.

a) $(a^{\frac{5}{7}})^{1,4}$ b) $(m^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$ c) $(b^{0,8})^{0,5}$
d) $(c^{0,7})^{0,5} \cdot c^{0,15}$ e) $y^{\frac{5}{6}} \cdot y^{\frac{2}{3}} : y^{-0,5}$ f) $(a^{-\frac{3}{4}})^{\frac{5}{9}} \cdot a^{\frac{5}{12}}$

12 > Hesablayın.

a) $2 \cdot 4^{0,4} \cdot 4^{\sqrt{2}}$ b) $4^{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt[6]{2}$ c) $25^{0,7} \cdot 5^{0,4}$ d) $3^{0,2} \cdot 3^{-0,25} \cdot 3^{\frac{4}{5}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}}$

13 > İfadənin qiymətini tapın.

a) $(81 \cdot 16)^{\frac{1}{4}}$ b) $(\frac{1}{8} \cdot 27^{-1})^{\frac{1}{3}}$ c) $(0,01 \cdot \frac{1}{49})^{-\frac{1}{2}}$ d) $(\frac{49}{144})^{\frac{1}{2}}$

14 > Sadələşdirin. a) $(125 x^6)^{\frac{2}{3}}$ b) $(27 x^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $(64 c^6)^{-\frac{1}{3}}$ d) $(\frac{1}{81} x^8)^{-\frac{1}{4}}$

15 > Müəyyən ifadənin kvadratı şəklində göstərin ($x > 0$): $x; x^8; x^{\frac{1}{4}}; x^{-\frac{1}{3}}$

16 > Müəyyən ifadənin kubu şəklində göstərin ($a > 0$): $a; a^6; a^{\frac{1}{4}}; a^{-\frac{1}{3}}; \sqrt{a}$

17 > $234^{\frac{1}{2}} = a$ olduğunu bilərək, aşağıdakı ədədləri a ilə ifadə edin.

a) $2,34^{\frac{1}{2}}$ b) $0,0234^{\frac{1}{2}}$ c) $23400^{\frac{1}{2}}$

18 > $x > 0, a > 0$ olduğunu bilərək, x dəyişənini a ilə ifadə edin.

a) $a = x^{\frac{1}{2}}$ b) $a = x^{-\frac{1}{3}}$ c) $a = x^{\frac{2}{3}}$

19 > Tənliyi həll edin. a) $x^{\frac{1}{2}} = 3$ b) $x^{-\frac{1}{3}} = 2$ c) $x^{\frac{3}{5}} \cdot x^{1,4} = 9$

Nümunə. $x^{\frac{2}{3}} = 4$. Hər iki tərəfini $\frac{3}{2}$ qüvvətinə yüksəldək: $(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}}$; $x = 8$

20 > İfadəni rasional üstlü qüvvət şəklində göstərin.

a) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}$ b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$ c) $\sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{x}}$

21 > Sadələşdirin.

$$a) x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$b) \frac{c^{0,4} \cdot \sqrt[5]{c}}{\sqrt{c}}$$

$$c) \frac{\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{x^2}}}{x^{-\frac{1}{5}}}$$

$$d) \frac{\sqrt[4]{x^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{x^{-\frac{1}{8}}}$$

22 > Sadələşdirin.

$$a) (x^{\frac{1}{2}} - 3) \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}}$$

$$b) (x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) \cdot (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$$

$$c) (y^{\frac{1}{3}} - 1) \cdot (y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + 1)$$

23 > Cəm şəklində göstərin.

$$a) (c^{\frac{3}{4}} + 2c^{\frac{1}{4}})^2 - 4c$$

$$b) \sqrt{x} + \sqrt{y} - (x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})^2$$

$$c) (c^{\frac{2}{9}} - 1)(c^{\frac{4}{9}} + c^{\frac{2}{9}} + 1) \cdot (c^{\frac{2}{3}} + 1)$$

Nümunə. $(1 - a^{\frac{1}{2}})^2 + 2 \cdot a^{0,5} = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot a^{\frac{1}{2}} + (a^{\frac{1}{2}})^2 + 2 \cdot a^{0,5} = 1 + a.$

24 > Vuruqlara ayırın.

$$a) b + b^{\frac{1}{2}}$$

$$b) (ab)^{\frac{1}{3}} - (ac)^{\frac{1}{3}}$$

$$c) c^2 - 3$$

$$d) a - b, \quad (a > 0, b > 0)$$

$$e) x^{\frac{1}{2}} - 4$$

$$f) x^{\frac{1}{3}} + 8$$

$$g) x^{\frac{2}{3}} - 9$$

$$h) y - 27, \quad (y > 0)$$

25 > Kəsri ixtisar edin.

$$a) \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$$

$$b) \frac{x^{\frac{1}{2}} - 3}{x - 9}$$

$$c) \frac{a - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a - b}$$

$$d) \frac{b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{6}}}$$

26 > Sadələşdirin və dəyişənin verilmiş qiymətində ifadənin qiymətini tapın.

$$a) \frac{a - 4a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}} - 2a^{\frac{1}{2}}}, \quad a = 81$$

$$b) \frac{c^{\frac{1}{2}} - 4c^{\frac{1}{6}}}{c^{\frac{1}{3}} - 2c^{\frac{1}{6}}}, \quad c = 64$$

27 > İsbat edin ki, ifadənin qiyməti dəyişəndən asılı deyil.

$$a) \frac{(9^n - 5 \cdot 9^{n-1})^{\frac{1}{2}}}{(27^{n-1} - 19 \cdot 27^{n-2})^{\frac{1}{3}}}$$

$$b) \frac{(8^{n-2} - 7 \cdot 8^{n-3})^{\frac{1}{3}}}{(5 \cdot 16^{n-1} + 16^{n-2})^{\frac{1}{4}}}$$

Tətbiq tapşırıqları

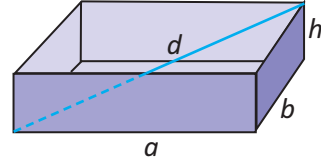
28 > Hər birində $r\%$ olmaqla n dəfə aparılan bahalaşmadan sonra ilkin qiyməti P olan məhsulun qiyməti A olmuşsa, qiymətlərin hər dəfə neçə faiz artdığını

$$r = \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \text{ düsturu ilə hesablamaq olar.}$$

İlkin olaraq 20000 manata təklif olunan avtomobil modelinin satış qiyməti hər il eyni faiz artmaqla son 3 il ərzində bahalaşaraq 26620 manat olmuşdur. Qiymətlər hər il neçə faiz artmışdır?

- 29) Çay, qəhvə və şokoladın tərkibində kofein vardır. $100 \cdot (0,5)^{\frac{n}{5}}$ ifadəsi ilə insan orqanizmində istifadədən n saat sonra qalan kofeinin miqdarını (%-lə) hesablamaq olar. Çay və ya qəhvə qəbul etdikdən:
- 1) a) $\frac{1}{2}$ saat; b) 1,5 saat sonra orqanizmdə neçə faiz kofein qalar?
- 2) Neçə saat sonra orqanizmdə qalan kofein 50% olar?

- 30) Düzbucaqlı paralelepiped şəklində olan qutunun şəkində göstərilmiş diaqonalının uzunluğunu $d = (a^2 + b^2 + h^2)^{1/2}$ düsturuna görə tapmaq olar.



- a) Uzunluğu $a=12$ sm, eni $b=9$ sm, hündürlüyü $h=8$ sm olan qutunun göstərilən diaqonalının uzunluğunu tapın
- b) Uzunluğu $a=4$ sm, eni $b=3$ sm, diaqonalı $d=13$ sm olan qutunun hündürlüyünü (h) tapın.
- 31) Ölçüləri $2^{\frac{1}{3}}$ sm, $4^{\frac{1}{3}}$ sm, $8^{\frac{1}{3}}$ sm olan düzbucaqlı paralelepipedin həcmi tapın. Bu paralelepipedin həcmi tili $6^{\frac{1}{4}}$ sm olan kubun həcmi ilə müqayisə edin.

- 32) **Biologiya.** Bioloqların tədqiqatlarına görə məməlilər sinfindən olan canlıların "səthinin sahəsini" (kvadrat santimetrlə) $k \cdot m^{2/3}$ ifadəsinin qiymətini hesabla- maqla təxmini olaraq müəyyən etmək olar. Burada m canlının kütləsi (qramla), k isə hər bir canlı üçün qəbul edilmiş sabit əmsaldır. Cədvəldə məməlilər sinfindən olan bəzi canlılar üçün k əmsali verilmişdir.

Adı	Sıçan	Pişik	İt	İnək	Dovşan	İnsan
k əmsali	9,0	10,0	11,2	9,0	9,75	11,0

Kütləsi: a) 2 kq olan pişiyin; b) 12 kq olan itin; c) 6 kq olan dovşanın dərisinin səthi neçə kvadrat santimetrdir? Cavabı ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

- 33) 1) Kvadrat çəkin. Sahəsini elə ədəd qəbul edin ki, onun perimetri:
a) rasional ədəd; b) irrasional ədəd olsun.
- 2) Kub çəkin və həcmi elə ədəd qəbul edin ki, tam səthinin sahəsi:
a) rasional ədəd; b) irrasional ədəd olsun.

- 34) Verilən düsturlara görə tələb olunan kəmiyyəti digərləri ilə ifadə edin.

- a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{g}}$ olduqda m -i; b) $c = \sqrt{1 + \frac{a^3}{b^3}}$ olduqda b -ni;
- c) $d = (a^2 + b^2 + h^2)^{1/2}$ olduqda a -nı; d) $r = \left(\frac{A}{p}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$ olduqda A -nı;



Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1 > İfadənin qiymətini tapın.

a) $(\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{0,5}) \cdot \sqrt[4]{2}$ b) $(\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{32}) : \sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$

2 > Ədədləri artan sıra ilə düzün.

a) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[15]{30}$ b) $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[10]{25}$, $\sqrt[6]{3 \cdot \sqrt[5]{3}}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

3 > Kəsrin məxrəcini irrasionalıqdan azad edin.

a) $\frac{12}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\frac{6}{\sqrt[5]{8}}$ c) $\frac{6}{\sqrt[4]{32 + \sqrt[4]{2}}}$ d) $\frac{9}{\sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{3}}}$

4 > Dəyişənin hansı qiymətlərində ifadənin mənası var?

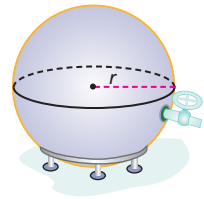
a) $\sqrt[8]{x-3}$ b) $\sqrt[5]{x-1}$ c) $\sqrt[4]{2-x}$ d) $\sqrt[6]{-x}$

5 > Dəyişənin hansı qiymətlərində bərabərlik doğrudur?

a) $2x^3 - 1 = 15$ b) $0,5x^4 + 1 = 9$ c) $(x-1)^3 + 1 = 9$
d) $\sqrt[3]{2x-4} = 2$ e) $\sqrt[4]{3x+4} = 1$ f) $(x+2)^{\frac{1}{3}} = 2$

6 > Radiusu r olan kürənin həcmi $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ düsturu ilə hesablanır.

- a) Həcmi $4,5\pi \text{ m}^3$ olan kürəşəkilli çənin radiusunu tapın.
b) Həcmi $7,2 \text{ m}^3$ olan kürəşəkilli çənin radiusu təxminən neçə metrdir? Nəticəni ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.



7 > Vuruğu kök işarəsi altına daxil edin.

a) $2\sqrt[4]{3}$ b) $-3\sqrt[4]{2}$ c) $a\sqrt[4]{3}$, $a > 0$ d) $a\sqrt[4]{3}$, $a < 0$ e) $c\sqrt[4]{\frac{2}{c}}$ f) $c\sqrt[4]{-\frac{2}{c}}$

8 > Hesablayın. a) $\frac{4 - 3\sqrt[4]{2}}{(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8})^2}$

b) $\frac{\sqrt[4]{17 - 12\sqrt[4]{2}}}{\sqrt{3 - \sqrt{8}}}$

c) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt[6]{2 + \sqrt{3}}}$

d) $\frac{\sqrt[6]{4 - \sqrt{15}}}{\sqrt{4 - \sqrt{15}} \cdot \sqrt[3]{4 + \sqrt{15}}}$

e) $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}) \cdot (\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{16})$ f) $\sqrt[4]{8 + \sqrt{60}} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$

9 > Sadələşdirin.

$$a) \sqrt[3]{a \sqrt[3]{a}}$$

$$b) \frac{\sqrt[5]{b^3 \sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b \sqrt{b}}}$$

$$c) \frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{b} + \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{b} + \sqrt[3]{b}}$$

$$d) \frac{a^{\frac{1}{6}} + 5}{25 - a^{\frac{1}{3}}}$$

$$e) \frac{b - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}}}{a - 2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$$

$$f) \frac{\sqrt[4]{x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x} \cdot x^{\frac{1}{8}}}}{\sqrt[12]{x}}$$

10 > Bərabərliklər üçün uyğunluğu müəyyən edin.

$$1. \sqrt[4]{a^4} = a$$

A) a -nın istənilən qiymətində doğrudur.

$$2. \sqrt[3]{a^3} = -a$$

B) $a \geq 0$ olduqda doğrudur.

$$3. \sqrt[6]{a^6} = |a|$$

C) Yalnız $a = 0$ olduqda doğrudur.

11 > $a < 0$ olduqda, sadələşdirin : $a^2 \cdot \sqrt{a^2} + \sqrt[3]{a^9} - 2\sqrt[4]{a^{12}}$

12 > $\sqrt[8]{3} = a + 1$ olarsa, $(\sqrt[8]{3} + 1) \cdot (\sqrt[4]{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)$ hasilini a ilə ifadə edin.

13 > İfadənin qiymətini hesablayın.

$$a) \left(-\frac{x}{3} + 1\right) \left(\frac{x^2}{3} - x + 3\right); \quad x = \sqrt[3]{3} \text{ olduqda}$$

$$b) x^3 + 3x; \quad x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}} \text{ olduqda}$$

14 > Bank hesabındakı P manat pul ildə r % gəlirlə t ildən sonra A məbləğinə çevrilmişdir. Mürəkkəb faiz artımı düsturuna görə $A = P(1 + r)^t$ olur.

a) illik artım faizinin $r = \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$ düsturu ilə tapıla bildiyini yazılı olaraq izah edin.

b) Bank hesabındakı 2000 ₼ əmanət 2 il ərzində 2332,8 ₼ olmuşdursa, illik artım neçə faiz olmuşdur?

c) Bank hesabındakı 4000 ₼ əmanət 3 il ərzində 4630,5 ₼ olmuşdur. Bankın tətbiq etdiyi faiz artımını hesablayın.

15 > **Biologiya.** Bioloqlar məməli heyvanların beyin kütləsini $0,01\sqrt[3]{m^2}$ ifadəsinin qiymətini hesablamaqla təxmini müəyyən edirlər. Burada m heyvanın kütləsini (kiloqramla) göstərir.

a) Kütləsi 27 kq olan itin; b) Kütləsi 200 kq olan qütb ayısının beyin kütləsi təxminən neçə qramdır? Cavabı təklidlərə qədər yuvarlaqlaşdırmaqla yazın.

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz

- ✓ Çevrə qövsünün dərəcə ölçüsünü və uzunluğunu hesablamağı
- ✓ Çevrənin vətərləri haqqında teoremləri
- ✓ Çevrə daxilinə çəkilmiş bucaqları
- ✓ Çevrənin kəsənləri və toxunanları arasındakı bucaqları
- ✓ Çevrəyə toxunanların xassələrini
- ✓ Çevrəni kəsən parçaların uzunluqları haqqında teoremləri



2-1

Mərkəzi bucaq. Çevrə qövsü

Mərkəzi bucaq. Tərə nöqtəsi çevrənin mərkəzində olan bucağa mərkəzi bucaq deyilir.

Şəkildə O nöqtəsi çevrənin mərkəzi olduqda $\angle AOB$ mərkəzi bucaqdır.

Çevrənin bir neçə radiusu çəkildikdə alınan ortaq daxili nöqtəsi olmayan bütün mərkəzi bucaqların cəmi 360° -dir. Məsələn, şəkildə verilənlərə görə $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$ olur.

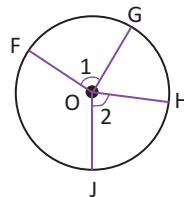
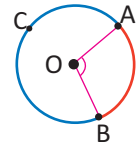
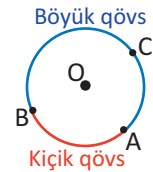
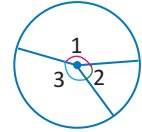
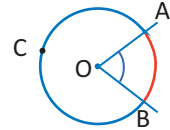
Çevrə qövsü. Çevrə üzərindəki hər hansı iki nöqtə onu iki qövsə ayırır: nöqtələr diametrin ucları deyilsə, böyük qövsə (major qövs) və kiçik qövsə (minor qövs). Çevrə üzərindəki iki nöqtə diametrin uc nöqtələri olarsa, hər iki qövs yarımçevrə olur.

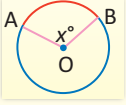
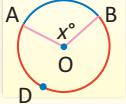
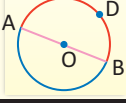
Şəkildəki çevrədə \widehat{AB} kiçik qövs, \widehat{ACB} isə böyük qövsdür (qövsləri fərqləndirmək zərurəti yarandıqda onları üç hərflə işarə edəcəyik). C nöqtəsi AB qövsünün hər hansı nöqtəsidirsə, onda $\widehat{ACB} = \widehat{AC} + \widehat{CB}$ olur.

Çevrə qövsünü xarakterizə edən kəmiyyətlərdən biri qövsün dərəcə ölçüsüdür. Qövsün dərəcə ölçüsü uyğun mərkəzi bucağın dərəcə ölçüsünə bərabərdir: $\widehat{AB} = \angle AOB$

Çevrədə konqruent mərkəzi bucaqlara uyğun qövslər konqruentdir və tərsinə.

O nöqtəsi çevrənin mərkəzi, $\angle 1 \cong \angle 2$ olarsa, onda $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$, $\widehat{FG} \cong \widehat{HJ}$ olarsa, onda $\angle 1 \cong \angle 2$.

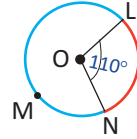


Çevrə qövsləri və onların ölçüləri		
Qövslər	Ölçüləri	
Minor qövs (kiçik qövs)	Minor qövsün dərəcə ölçüsü 180° -dən kiçikdir və uyğun mərkəzi bucağın dərəcə ölçüsünə bərabərdir: $\sphericalangle AB = \sphericalangle AOB$	
Major qövs (böyük qövs)	Major qövsün dərəcə ölçüsü 180° -dən böyükdür və onun qiyməti 360° ilə uyğun minor qövsün fərqi bərabərdir: $\sphericalangle ADB = 360^\circ - \sphericalangle AOB$	
Yarımqövrə	Yarımqövrənin dərəcə ölçüsü 180° -dir: $\sphericalangle ADB = 180^\circ$	

Nümunə. Şəkilə O nöqtəsi çevrənin mərkəzi və $\sphericalangle LON = 110^\circ$ olarsa, LMN qövsünün dərəcə ölçüsünü tapın.

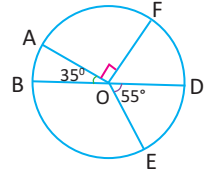
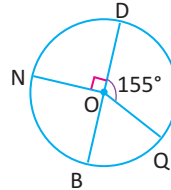
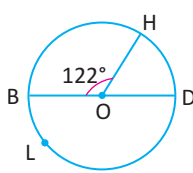
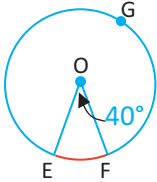
Həlli. $\sphericalangle LN$ minor qövsdür: $\sphericalangle LN = \sphericalangle LON = 110^\circ$

$\sphericalangle LMN$ major qövsdür: $\sphericalangle LMN = 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$



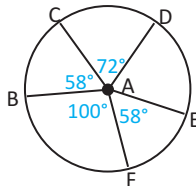
Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Şəkilə verilənlərə görə minor, major qövslərin və ya yarımqövrənin adlarını yazın, dərəcə ölçülərini müəyyən edin. O nöqtəsi çevrənin mərkəzi, BD isə diametrdir.

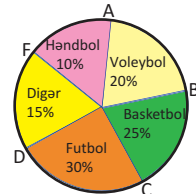


- 2 > Mərkəzi A olan çevrədə qövslərin dərəcə ölçülərini müəyyən edin. Hansı qövslər konqruyentdir?

- $\sphericalangle BC$ və $\sphericalangle EF$
- $\sphericalangle BC$ və $\sphericalangle CD$
- $\sphericalangle CD$ və $\sphericalangle DE$
- $\sphericalangle BFE$ və $\sphericalangle CBF$



- 3 > Dairəvi diaqramla görə hər bir məlumata uyğun qövsün dərəcə ölçüsünü tapın.



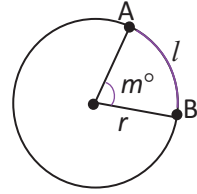
✓ Qövsün uzunluğu

Mərkəzi bucaq tam bucağın (360° -nin) hansı hissəsidirsə, uyğun qövsün uzunluğu da çevrənin uzunluğunun həmin hissəsidir.

1° -li qövsün uzunluğu çevrənin uzunluğunun $\frac{1}{360}$ hissəsidir.

m° -li mərkəzi bucağa uyğun qövsün uzunluğu çevrənin uzunluğunun $\frac{m}{360}$ hissəsini təşkil edir:

$$l = \frac{m}{360} \cdot 2\pi r$$



Qövsün uzunluğu uzunluq ölçü vahidləri ilə (mm, sm, m və s.) ifadə edilir.

- 1. Nümunə.** Uzunluğu 72 sm olan çevrədə 45° -li mərkəzi bucağa uyğun qövsün uzunluğunu tapın.

Həlli. 45° -li mərkəzi bucaq tam bucağın $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$ hissəsi olduğundan, uyğun qövsün uzunluğu çevrənin uzunluğunun $\frac{1}{8}$ -nə bərabərdir:

$$l = \frac{1}{8} \cdot 72 = 9 \text{ (sm)}$$

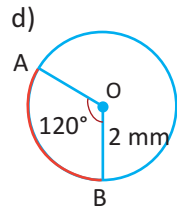
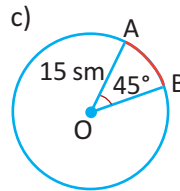
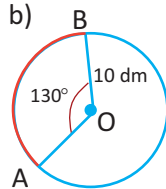
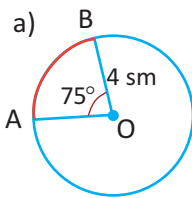
- 2. Nümunə.** Radiusu 15 sm olan çevrədə 72° -li mərkəzi bucağa uyğun qövsün uzunluğu neçə santimetrdir? Cavabı yüzdəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

Həlli. $m = 72$, $r = 15$ qiymətlərini qövsün uzunluğu düsturunda yerinə yazaq:

$$l = \frac{72}{360} \cdot 2\pi \cdot 15 = 6\pi \approx 18,85 \text{ (sm)}$$

Öyrənmə tapşırıqları

- 4 >** Şəkində verilən mərkəzi bucağa uyğun AB qövsünün uzunluğunu tapın. O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.



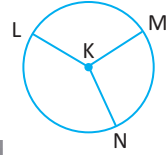
- 5 >** Çevrənin radiusuna və mərkəzi bucağına görə uyğun qövsün uzunluğunu tapın.

a) $r = 3$, $m = 45^\circ$

b) $r = 7$, $m = 80^\circ$

c) $r = 8$, $m = 120^\circ$

- 6 > Radiusu 5 vahid olan çəvrə L, M və N nöqtələri ilə 5 : 3 : 4 nisbətində qövsələrə ayrılmışdır. Bu qövsələrin:
a) dərəcə ölçülərini; b) uzunluqlarını tapın.

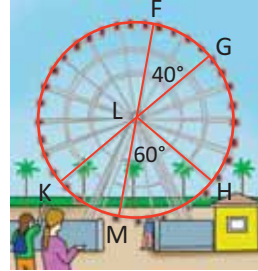


- 7 > Saatin dəqiqə əqrəbinin uzunluğu 20 sm-dir. Saat 12:00-dan 12:30-a qədər müddətdə dəqiqə əqrəbinin uc nöqtəsi neçə santimetr uzunluqda qövs cızır?



- 8 > FM karuselin diametridir və 30 m-ə bərabərdir. Şəkildə verilənlərə görə qövsələrin uzunluqlarını hesablayın.

- 1) $\sim FG$ 5) $\sim FKH$
2) $\sim MF$ 6) $\sim GHM$
3) $\sim GH$ 7) $\sim MKG$
4) $\sim MH$ 8) $\sim HGF$



2-2

Vətərin xassələri



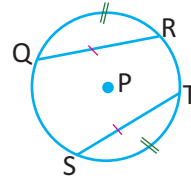
Konqruyent vətərlər haqqında teorem

Teorem 1. Çəvrənin konqruyent qövsələrini gərən vətərləri konqruyentdir.

$$\sim QR \cong \sim ST \text{ olarsa, } QR \cong ST$$

Tərs teorem 1. Çəvrənin konqruyent vətərlərinin gərdikləri qövsələr konqruyentdir.

$$QR \cong ST \text{ olarsa, } \sim QR \cong \sim ST$$

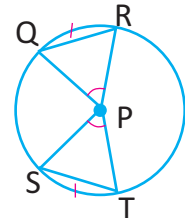


Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > a) Teorem 1-in isbatını araşdırın. Dəftərinizdə uyğun nöqtələri başqa hərflərlə işarələməklə teoremin isbatını yenidən yazın.

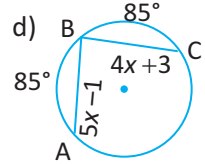
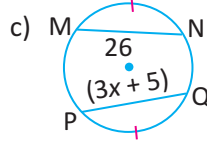
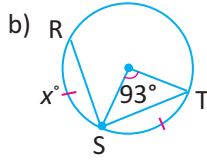
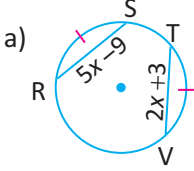
Teorem 1-in isbatı: $\sim QR \cong \sim ST$ olarsa, $QR \cong ST$
Çəvrənin PQ, PR, PS, PT radiuslarını çəkin.

Təklif	Əsası
1. $\sim QR \cong \sim ST$	1. Verilir
2. $\angle QPR \cong \angle SPT$	2. Konqruyent qövsələrə uyğun mərkəzi bucaqlar konqruyentdir
3. $PQ \cong PR \cong PS \cong PT$	3. Çəvrənin radiusları konqruyentdir
4. $\triangle QPR \cong \triangle SPT$	4. Üçbucaqların konqruyentliyinin TBT əlamətinə görə
5. $QR \cong ST$	5. Konqruyent üçbucaqların uyğun tərəfləridir

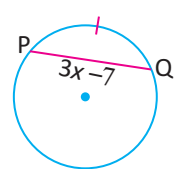
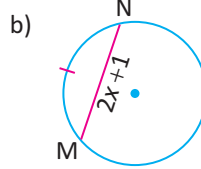
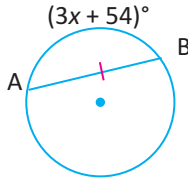
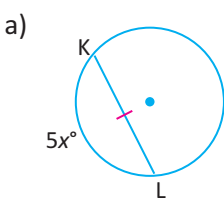


- b) Analoji qayda ilə tərs teorem 1-i isbat edin.

- 2 > Şəkilə verilənlərə görə x dəyişənini tapın. Çevrənin mərkəzi nöqtə ilə qeyd edilmişdir.



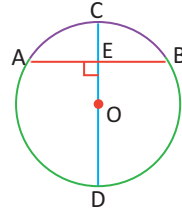
- 3 > Verilmiş çevrələrin konqruent olduqlarını bilərək, x dəyişənini tapın.



Vətərin orta perpendikulyarı haqqında teorem

Teorem 2. Vətərə perpendikulyar olan diametr bu vətəri və onun gərdiyi qövsü yarıya bölür.

$CD \perp AB$ olarsa, $AE \cong EB$ və $\smile AC \cong \smile CB$

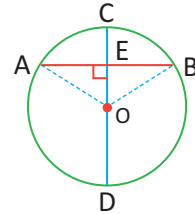


Teorem 2-nin isbatı.

Verilir: O mərkəzli çevrə, CD diametr və $CD \perp AB$.

İsbat edin: $AE \cong EB$, $\smile AC \cong \smile CB$,

Çevrənin OA və OB radiuslarını çəkin.



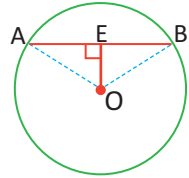
Təklif	Əsası
1. $AB \perp CD$	1. Verilir
2. $\angle AEO$ və $\angle BEO$ düz bucaqlardır.	2. Perpendikulyar düz xətlər düz bucaq altında kəşifir.
3. $OA \cong OB$	3. Çevrənin radiusları konqruentdir.
4. $\triangle AOE \cong \triangle BOE$	4. Hipotenuz və katetə görə düzbucaqlı üçbucaqların konqruentliyi
5. $AE \cong BE$	5. Konqruent üçbucaqların uyğun tərəfləri
6. $\angle AOE \cong \angle BOE$	6. Konqruent üçbucaqların uyğun bucaqları
7. $\smile AC \cong \smile CB$	7. Konqruent mərkəzi bucaqlara uyğun qövslər konqruentdir.

Nəticə 1. Çevrənin mərkəzindən keçən və vətərə perpendikulyar olan düz xətt həm vətəri, həm də onun gərdiyi qövsü yarıya bölür.

Nəticə 2. Çevrənin mərkəzi vətərin orta perpendikulyarı üzərindədir. Vətərin orta perpendikulyarı çevrənin mərkəzindən keçir.

Nümunə. Radiusu 17 vahid olan çevrədə uzunluğu 30 vahid olan vətərin mərkəzdən məsafəsini tapın.

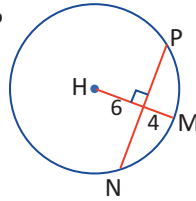
Həlli. $OE \perp AB$ olarsa, $AE = EB = 30 : 2 = 15$. $\triangle AOE$ -dən Pifaqor teoreminə görə alarıq: $OE^2 = OA^2 - AE^2 = 17^2 - 15^2 = 64$, $OE = 8$



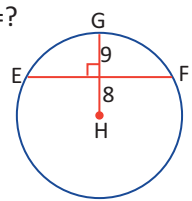
Öyrənmə tapşırıqları

- 4 > Şəkində verilənlərə görə H mərkəzli çevrədə vətərin uzunluğunu tapın.

a) $NP = ?$



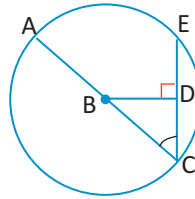
b) $EF = ?$



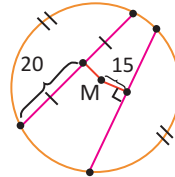
- 5 > Mərkəzi B nöqtəsində yerləşən çevrənin diametri 30 vahiddir.

$\angle ACE = 45^\circ$ olduğuna görə tapın:

- a) BD parçasının uzunluğunu;
b) DC parçasının uzunluğunu;
c) CE vətərinin uzunluğunu.

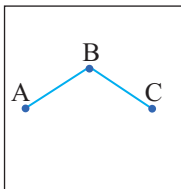


- 6 > Şəkində verilənlərə görə çevrənin radiusunu tapın. M nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.

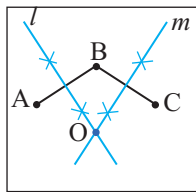


- 7 > Bir düz xətt üzərində olmayan üç nöqtədən keçən çevrənin qurulması.

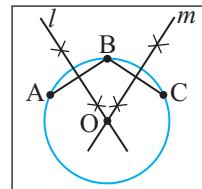
1. Bir düz xətt üzərində olmayan A, B, C nöqtələrini qeyd edin, AB və BC parçalarını çəkin.



2. AB və BC parçalarının orta perpendikulyarlarını qurun. Orta perpendikulyarların kəsişmə nöqtəsini O hərfi ilə işarə edin.



3. $OA = OB = OC$ olduğundan O nöqtəsi A, B, C nöqtələrindən eyni məsafədədir. Mərkəzi O nöqtəsi olmaqla OA radiuslu çevrə çəkin.



- 8 > Proqram təminatı və texniki dəstəklə məşğul olan şirkət planda göstərilən H, M və E şirkətlərinə xidmət göstərir və yeni ofis binası kirayələməyi planlaşdırır. Planın sxematik təsvirini dəftərinizə köçürün və bu şirkətin yeni ofisini elə yerləşdirin ki, hər üç şirkətdən bərabər məsafədə olsun.



Mərkəzdən bərabər məsafədə olan vətərlər haqqında teorem

Teorem 3. Çevrənin konqruyent vətərləri mərkəzdən eyni məsafədədir.

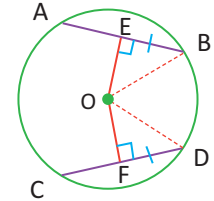
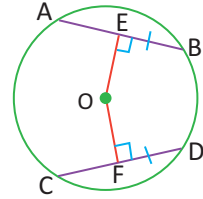
$AB \cong CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$ olarsa, $OE \cong OF$

Tərs teorem 3. Çevrənin mərkəzindən eyni məsafədə olan vətərlər konqruyentdir.

Teorem 3-ün isbatı.

Verilir: O mərkəzli çevrə, $AB \cong CD$,
 $OE \perp AB$, $OF \perp CD$

İsbat edin: $OE \cong OF$



İsbatı (mətnlə): Çevrənin mərkəzindən keçən və vətərə perpendikulyar olan düz xətt vətəri və onun gərdiyi qövsü yarıya bölür. OE və OF konqruyent AB və CD vətərlərinin orta perpendikulyarlarıdır. Konqruyent vətərlərin yarıları olduqlarından, $EB \cong FD$. Çevrənin OB və OD radiuslarını çəkək: $OB \cong OD$. Hipotenuz və katetə görə $\triangle OEB$ və $\triangle OFD$ düzbucaqlı üçbucaqları konqruyentdir. OE və OF bu konqruyent üçbucaqların uyğun tərəfləri olduqlarından alırıq: $OE \cong OF$. Teorem isbat olundu.

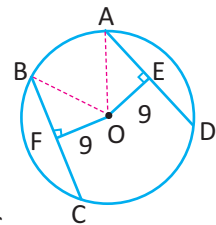
Nümunə. AD və BC vətərləri mərkəzdən bərabər məsafədədir: $OE = OF = 9$. Çevrənin radiusu 41 vahid olarsa, AD və BC-ni tapın.

Həlli. AD və BC vətərləri mərkəzdən bərabər məsafədə olduqları üçün konqruyentdir: $AD \cong BC$.

Çevrənin OA və OB radiuslarını çəkək. $OE \perp AD$ və $OF \perp BC$ olduğundan $\triangle AEO$ və $\triangle BFO$ düzbucaqlı üçbucaqlardır. $\triangle AEO$ düzbucaqlı üçbucağında Pifaqor teoreminə görə alırıq: $AE^2 + OE^2 = OA^2$.

$AE^2 + 9^2 = 41^2$; $AE^2 = 1600$; $AE = 40$; $AD = 2 \cdot AE = 2 \cdot 40 = 80$.

$AD \cong BC$ olduğundan $BC = 80$ olar.



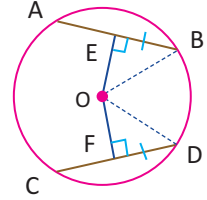
Öyrənmə tapşırıqları

9 > Tərs teorem 3-ü isbat edin.

Verilir: O mərkəzli çevrə, $OE \cong OF$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$

İsbat edin: $AB \cong CD$.

İsbat üçün plan: Üçbucaqların konqruentliyindən istifadə edin.

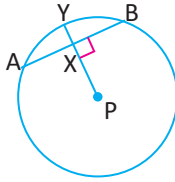


10 > P mərkəzli çevrədə verilənlərə görə tələb olunanları tapın.

a) **Verilir:** $PY = 13$

$AB = 10$

Tapın: $BX = ?$; $PX = ?$

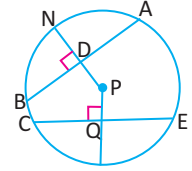


b) **Verilir:** $PD = 10$

$PQ = 10$

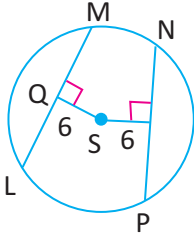
$QE = 24$

Tapın: $AB = ?$, $PN = ?$

11 > a) **Verilir:** Mərkəzi S olan çevrədə:

$LM = x + 8$ və $PN = 2x$

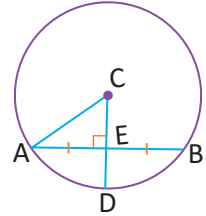
Tapın: çevrənin radiusunu

b) **Verilir:** Mərkəzi C olan

çevrədə $CD \perp AB$

$AB = 8$ sm, $CD = 5$ sm

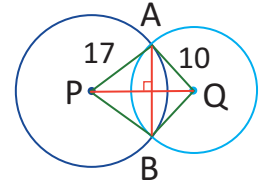
Tapın: $CE = ?$



12 > P və Q mərkəzli çevrələr A və B nöqtələrində kəşişir.

$AP = 17$, $AQ = 10$, $AB = 16$ vahid olarsa, PQ -nü

tapın.



13 > Radiusu 5 sm olan çevrədə uzunluqları 6 sm və 8 sm olan iki paralel vətər arasındakı məsafəni tapın. Neçə hal mümkündür?

14 > Uyğun şəkillər çəkməklə məsələləri həll edin.

a) Çevrənin diametri 30 sm, vətərin uzunluğu isə 18 sm-dir. Vətər çevrənin mərkəzindən hansı məsafədədir?

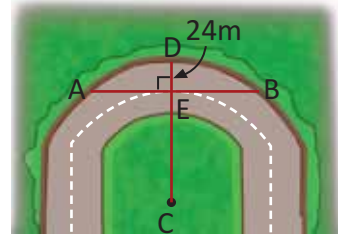
b) Çevrənin uzunluğu 12 sm olan vətəri mərkəzdən 8 sm məsafədədir. Çevrənin radiusunu tapın.

c) Çevrənin diametri 52 sm, vətərin mərkəzdən məsafəsi 10 sm-dir. Vətərin uzunluğunu tapın.

15) > **Açıq tipli sual.** 1) Çevrənin bərabər olmayan iki vətərini və onların orta perpendikulyarlarını çəkin. Hansı vətər mərkəzə daha yaxındır: uzun vətər, yoxsa qısa vətər?

2) Müxtəlif radiuslu iki çevrə çəkin. Hər bir çevrənin elə vətərini çəkin ki, onların uzunluqları bərabər olsun. Bu vətərlərin gərdiyi minor qövsələrə uyğun mərkəzi bucaqları göstərin. Hansı mərkəzi bucaq daha böyük oldu? Fikrinizi izah edin.

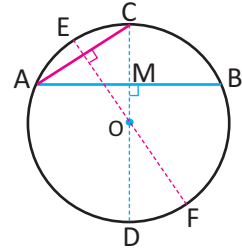
16) > Yolun əyrixətli hissəsi ($\sim ADB$) mərkəzi C nöqtəsində yerləşən və radiusu 120 m olan çevrənin bir hissəsidir. DE -nin uzunluğu 24 m olarsa, AB parçasının uzunluğunu tapın.



17) > **Hər hansı çevrənin mərkəzini necə müəyyən etmək olar?**

Aşağıdakı addımları yerinə yetirməklə bu suala cavab verin.

- 1) Çevrənin AB vətərini çəkin.
- 2) AB vətərini orta M nöqtəsində kəsən və ona perpendikulyar olan CD diametrini çəkin.
- 3) AC vətərini və ona orta perpendikulyar olan EF diametrini çəkin.
- 4) CD və EF diametrlərinin kəsişmə nöqtəsini qeyd edin.



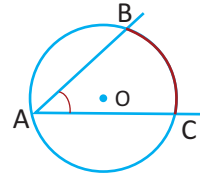
2-3

Çevrə daxilinə çəkilmiş bucaq

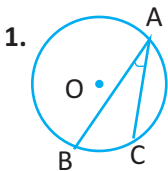
Tərif. Təpəsi çevrə üzərində, tərəfləri çevrəni kəsən bucağa çevrə daxilinə çəkilmiş bucaq deyilir. Çevrə daxilinə çəkilmiş bucağa aid olan qövsə bu bucağın söykəndiyi qövs deyilir.

Şəkilə $\angle BAC$ çevrənin daxilinə çəkilmiş bucaq, BC qövsü isə bu bucağın söykəndiyi qövsdür.

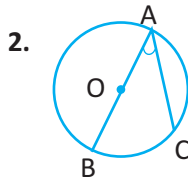
Aşağıda çevrə daxilinə çəkilmiş üç müxtəlif bucaq təsvir edilmişdir.



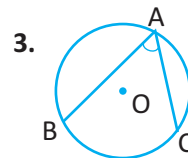
Çevrənin mərkəzi daxilə çəkilmiş bucağın xaricindədir.



Çevrənin mərkəzi daxilə çəkilmiş bucağın tərəfi üzərindədir.



Çevrənin mərkəzi daxilə çəkilmiş bucağın daxilindədir.



Teorem 1. Çevrə daxilinə çəkilmiş bucağın dərəcə ölçüsü sۆykəndiyi qövsün dərəcə ölçüsünün yarısına bərabərdir: $\angle BAC = \frac{\sphericalangle BC}{2}$

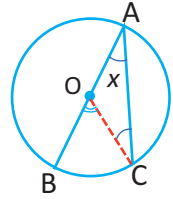
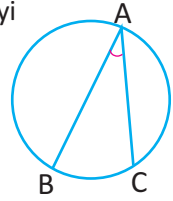
İsbatı (mətnlə). Teoremi çevrənin mərkəzinin daxilə çəkilmiş bucağın tərəfi üzərində olduğu hal üçün isbat edək. Çevrənin OC radiusunu çəkək. OA və OC çevrənin radiusları olduğundan $\triangle AOC$ bərabəryanlıdır. Deməli, $\angle A \cong \angle C$.

$\triangle AOC$ -nin xarici bucağı olduğundan: $\angle BOC = \angle A + \angle C$.

$\angle A = \angle C = x$ qəbul etsək, $\angle BOC = 2x$ olar.

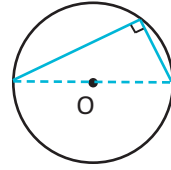
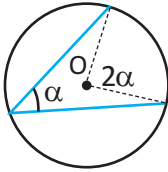
Mərkəzi bucağın və sۆykəndiyi qövsün dərəcə ölçüləri bərabər olduğundan $\sphericalangle BC = \angle BOC = 2x$. Buradan $\angle BAC = \frac{\sphericalangle BC}{2}$ alınır.

Teoremin isbatını ikisütunlu cədvəl şəklində yazın.



Nəticə 1. Çevrə daxilinə çəkilmiş bucaq uyğun mərkəzi bucağın yarısına bərabərdir.

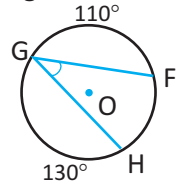
Nəticə 2. Diametrə (yarımçevrəyə) sۆykənən daxilə çəkilmiş bucaq düz bucaqdır.



Nümunə. Şəkilə $\sphericalangle GF = 110^\circ$, $\sphericalangle GH = 130^\circ$ olarsa, FGH bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

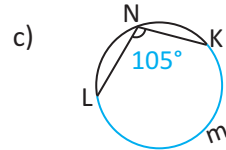
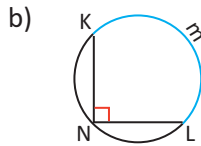
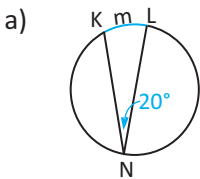
Həlli. $\sphericalangle FH = 360^\circ - (110^\circ + 130^\circ) = 120^\circ$ olduğundan

$$\angle FGH = \frac{\sphericalangle FH}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \text{ tapılır.}$$

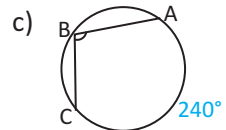
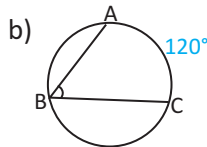
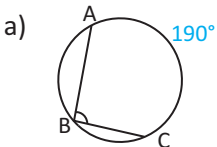


Öyrənmə tapşırıqları

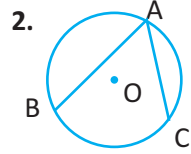
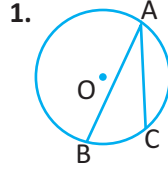
1 > Bucağın sۆykəndiyi çevrə qövsünün dərəcə ölçüsünü tapın.



2 > Verilən çevrə qövsünə görə çevrə daxilinə çəkilmiş bucağın dərəcə ölçüsünü tapın.



- 3 > Teorem 1-in isbatı 2-ci hal üçün səhifə 37-də verilmişdir. Bu teoremi daxilə çəkilmiş bucağın 1-ci və 3-cü vəziyyətinə görə də isbat edin.



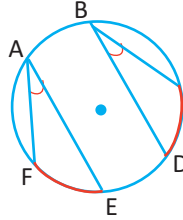
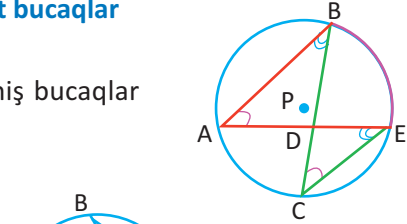
Çevrə daxilinə çəkilmiş konqruyent bucaqlar

Nəticə 3. Eyni qövsə söykənən daxilə çəkilmiş bucaqlar konqruyentdir.

$$\angle EAB \cong \angle BCE, \angle ABC \cong \angle AEC.$$

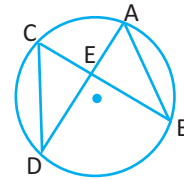
Nəticə 4. Söykəndikləri qövsləri konqruyent olan daxilə çəkilmiş bucaqlar konqruyentdir.

$$\sphericalangle FE \cong \sphericalangle CD \text{ olarsa, } \angle FAE \cong \angle DBC$$



Öyrənmə tapşırıqları

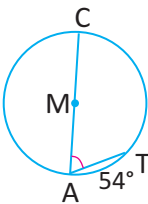
- 4 > **Verilir:** $CD \cong AB$
İsbat edin: $\triangle CDE \cong \triangle ABE$
 İsbat üçün plan: üçbucaqların konqruyentliyinin BTB əlamətindən istifadə edin.



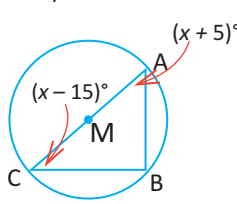
- 5 > Şəkilə verilənlərə görə tələb olunanı tapın

1) M çevrənin mərkəzi, AC diametridir.

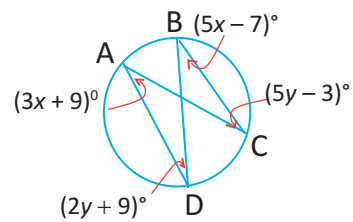
a) $\angle A$



b) $\sphericalangle CB$



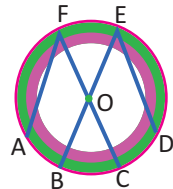
2) $\angle D, \angle B$



- 6 > 1) Kommersiya nişanları olaraq bir çox hallarda dairəşəkilli loqolardan istifadə edilir. Şəkilə iki daxilə çəkilmiş bucaq və mərkəzi bucaqla dizayn edilmiş loqo təsvir edilmişdir.

a) Bu bucaqların adlarını yazın.

b) $\sphericalangle AC \cong \sphericalangle BD$, $\sphericalangle AF = 90^\circ$, $\sphericalangle FE = 45^\circ$, $\sphericalangle ED = 90^\circ$ olarsa, $\angle AFC$ və $\angle BED$ -ni tapın.



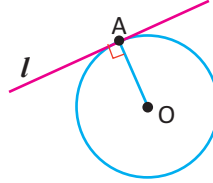
- 7 > Çevrə dörd nöqtə ilə 3:4:5:6 nisbətində bölünmüşdür. Təpələri həmin nöqtələrdə olan dördbucaqların bucaqlarını tapın.

2-4

Çevrəyə toxunan

Tərif. Çevrə ilə yalnız bir ortaq nöqtəsi olan düz xəttə çevrəyə toxunan deyilir.

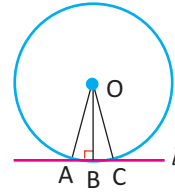
Teorem 1. Çevrəyə toxunan düz xətt (parça) toxunma nöqtəsinə çəkilmiş radiusa perpendikulyardır.



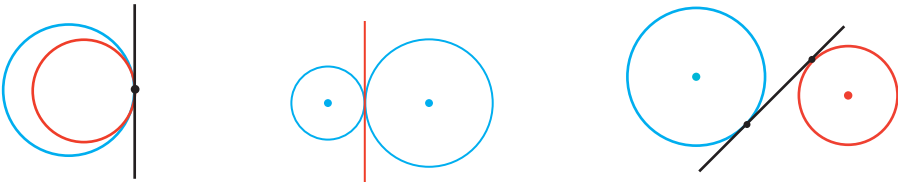
l düz xətti çevrənin toxunanıdır.
 $l \perp OA$

Tərs teorem (toxunanın əlaməti): Çevrənin nöqtəsindən keçən və bu nöqtəyə çəkilmiş radiusa perpendikulyar olan düz xətt çevrəyə toxundur.

Teorem 1-in isbatı: *l* düz xətti çevrəyə toxunandrsa, deməli, çevrə ilə yeganə ortaq nöqtəsi vardır. Fərz edək ki, *l* düz xətti A toxunma nöqtəsinə çəkilmiş OA radiusuna perpendikulyar deyil. $OB \perp l$ çəkək və *l* düz xətti üzərində $AB = BC$ parçası ayıraq. Onda TBT əlamətinə görə $\triangle AOB \cong \triangle COB$ olduğundan $OC = OA = r$ olur. Deməli, C nöqtəsi də çevrənin üzərindədir. Yəni *l* düz xəttinin çevrə ilə iki ortaq nöqtəsi var. Bu isə şərtə ziddir. Deməli, $l \perp OA$.

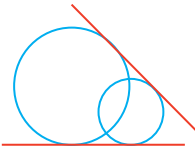


Hər iki çevrəyə toxunan düz xəttə bu çevrələrin ortaq toxunanı deyilir. Çevrələr bir-birinə daxilədən və ya xaricədən toxunmaqla bir nöqtədə eyni toxunana malik ola bilərlər, həmçinin eyni toxunana müxtəlif nöqtələrdə toxuna bilərlər.

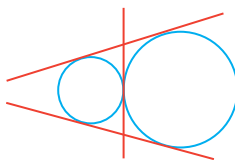


İki çevrənin bir neçə ortaq toxunanı ola bilər və ya heç bir ortaq toxunanı olmaya bilər.

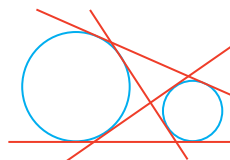
2 ortaq toxunanı var.



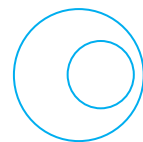
3 ortaq toxunanı var.



4 ortaq toxunanı var.

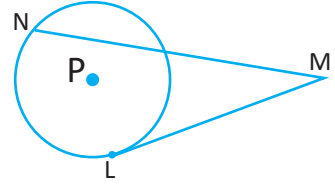


Ortaq toxunanları yoxdur.

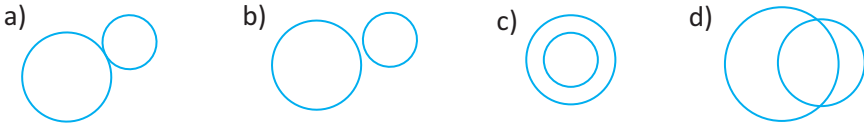


Öyrənmə tapşırıqları

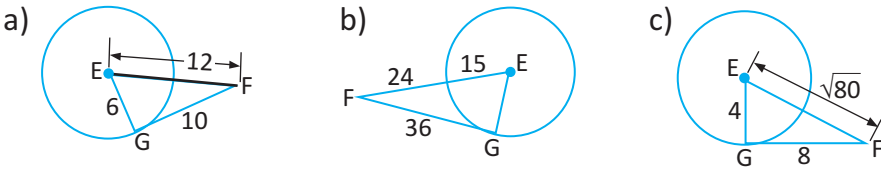
- 1 > Şəkilə görə izah edin: nə üçün MN-ə P mərkəzli çevrəyə toxunan demək olmaz, ML-ə isə toxunan demək olar?



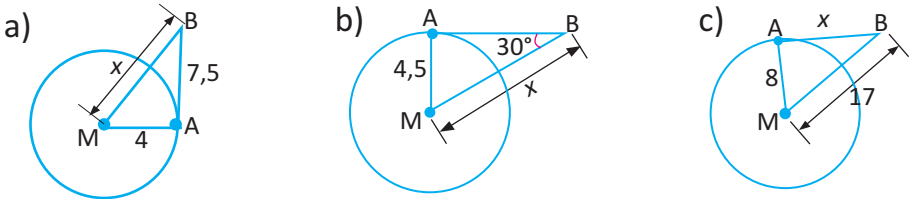
- 2 > Dəftərinizdə şəkildə verildiyi kimi çevrələr və onların orta toxunanlarını çəkin. Orta toxunanı olmayanları qeyd edin.



- 3 > Hansı şəkildə GF parçasının çevrəyə toxunan olduğunu söyləmək olar? Bu suala cavab vermək üçün Pifaqor teoreminə tərs teoremi yazın və məsələnin həllinə tətbiq edin. E nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.

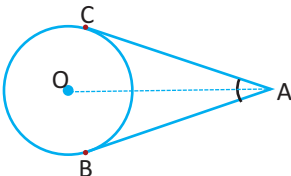


- 4 > AB-nin çevrəyə toxunan olduğunu bilərək, şəkildə verilənlərə görə x-i tapın. M nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.



Eyni nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunanların xassəsi

Teorem 2. Eyni nöqtədən çevrəyə çəkilmiş iki toxunanın toxunma nöqtələrinə qədər olan parçaları konqruyentdir və çevrənin mərkəzi toxunanların əmələ gətirdiyi bucağın tən bölməni üzərində yerləşir.



B və C nöqtələri A nöqtəsindən çəkilmiş toxunanların çevrəyə toxunma nöqtələri, O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.

$AB \cong AC$, $\angle BAO \cong \angle CAO$.

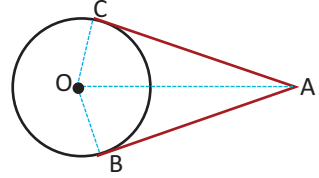
Öyrənmə tapşırıqları

5 > Teorem 2-ni isbat edin.

Verilir: AB və AC A nöqtəsindən O mərkəzli çevrəyə çəkilmiş toxunanların toxunma nöqtələrinə qədər olan parçalarıdır.

İsbat edin: $AB \cong AC$, $\angle BAO \cong \angle CAO$.

İsbat üçün plan: Çevrənin OB və OC radiuslarını və AO parçasını çəkin, uyğun üçbucaqların konqruyentliyindən istifadə edin.

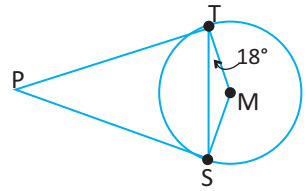
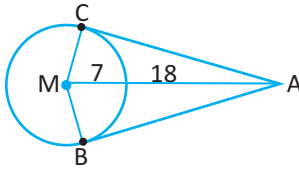
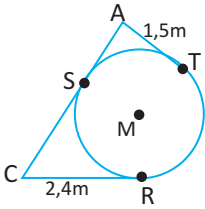


6 > Şəildə çevrə xaricindəki nöqtədən M mərkəzli çevrəyə toxunanlar çəkilmişdir. Verilənlərə görə tələb olunanları tapın.

a) $AC = ?$

b) $AB = ?$

c) $\angle TPS = ?$



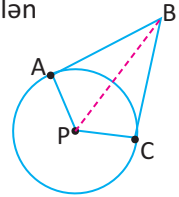
7 > B nöqtəsindən P mərkəzli çevrəyə toxunanlar çəkilmişdir. Verilən təkliflərdən hər birinin hansı əsasla doğru olduğunu yazın.

a) $BA \cong BC$

b) $PA \cong PC$

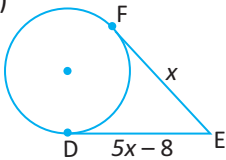
c) $\triangle PAB \cong \triangle PCB$

d) $\angle ABC + \angle APC = 180^\circ$

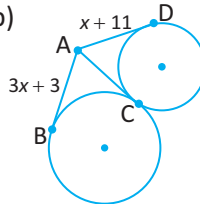


8 > Çevrə xaricindəki nöqtədən çevrəyə toxunanlar çəkilmişdir. Verilənlərə görə dəyişəni tapın.

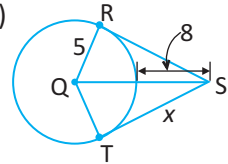
a)



b)

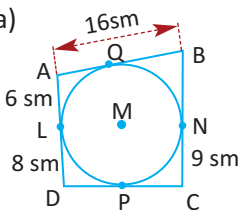


c)

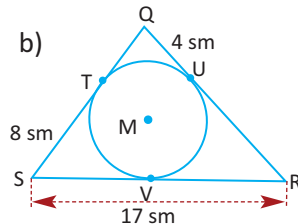


9 > Şəildə verilənlərə görə çoxbucaqlının tərəflərinin uzunluqlarını və perimetrini tapın.

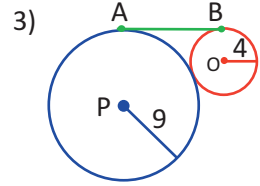
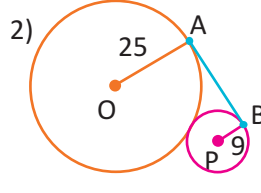
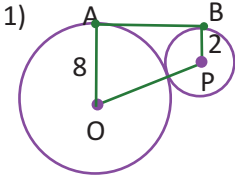
a)



b)

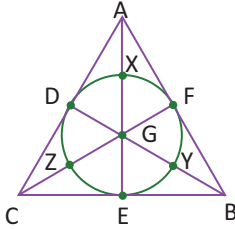


- 10 > Şəkində AB bir-birinə xaricdən toxunan O və P mərkəzli çevrələrin ortaq toxunanıdır. AB parçasının uzunluğunu tapın.

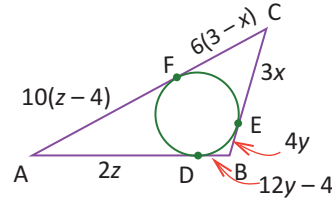


- 11 > Şəkində verilənlərə görə $\triangle ABC$ -nin perimetrini tapın.

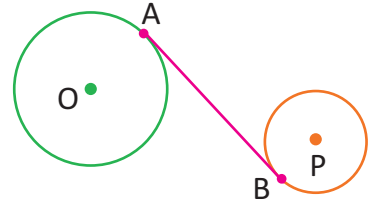
- a) $BY = CZ = AX = 2,5$
çevrənin diametri $EX = 5$



- b)



- 12 > Şəkində AB parçası O və P mərkəzli çevrələrə ortaq toxunanıdır. Çevrələrin radiusları uyğun olaraq 15 sm və 12 sm-dir. $OP=36$ sm olarsa, AB parçasının uzunluğunu tapın.

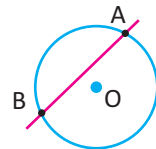


2-5

Çevrəyə çəkilmiş toxunanlar və kəsənlər arasındakı bucaqlar

Tərif. Çevrə ilə iki ortaq nöqtəsi olan düz xəttə çevrənin kəsəni deyilir.

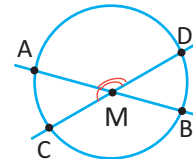
Şəkində AB düz xətti çevrənin kəsənidir.



İki kəsənin arasındakı bucaqlar

Bucağın təpə nöqtəsi çevrə daxilində yerləşir

Teorem 1. Çevrəyə çəkilmiş iki kəsən arasındakı bucağın təpə nöqtəsi çevrə daxilində olarsa, onun dərəcə ölçüsü bu bucağın söykəndiyi qövslə onun qarşılıqlı bucağının söykəndiyi qövslün dərəcə ölçüləri cəminin yarısına bərabərdir.



$$\angle AMC = \frac{\text{m}\widehat{AC} + \text{m}\widehat{DB}}{2}$$

$$\angle AMD = \frac{\text{m}\widehat{AD} + \text{m}\widehat{BC}}{2}$$

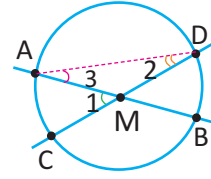
Öyrənmə tapşırıqları

1 > Teoremin isbatını dəftərinizdə tamamlayın.

Verilir: AB və CD çevrənin kəsənləridir.

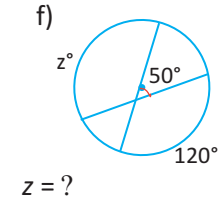
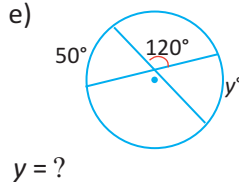
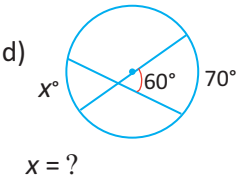
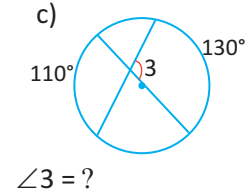
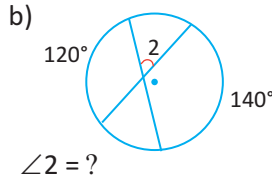
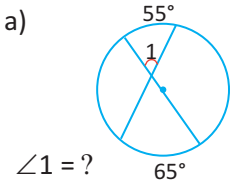
İsbat edin: $\angle 1 = \frac{\sphericalangle AC + \sphericalangle DB}{2}$

Çevrənin AD vətərini çəkin.



Təklif	Əsası
1. $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$	1. $\angle 1$ $\triangle AMD$ -nin bucağıdır
2. $\angle 2 = \frac{\sphericalangle AC}{2}$	2.
3. $\angle 3 = \frac{\sphericalangle DB}{2}$	3.
4. $\angle 1 = \frac{\sphericalangle AC + \sphericalangle DB}{2}$	4.

2 > Şəkildə verilənlərə görə tələb olunanları tapın.

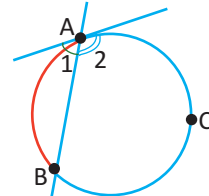


Toxunan və kəsənin arasındakı bucaqlar

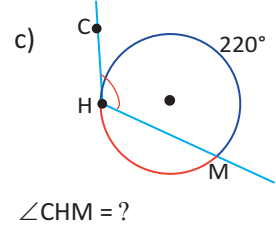
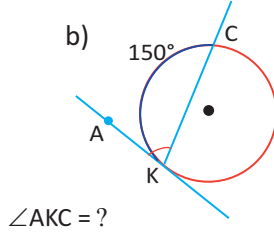
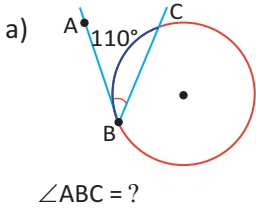
Bucağın təpə nöqtəsi çevrənin üzərində yerləşir

Teorem 2. Toxunan və kəsən arasındakı bucağın təpə nöqtəsi çevrənin üzərində olarsa, onun dərəcə ölçüsü bu bucağın söykəndiyi qövsün dərəcə ölçüsünün yarısına bərabərdir.

$$\angle 1 = \frac{\sphericalangle AB}{2} \quad \angle 2 = \frac{\sphericalangle ACB}{2}$$



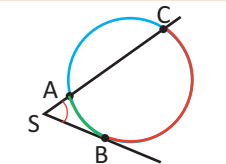
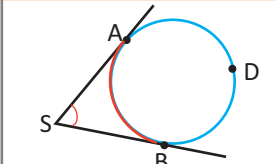
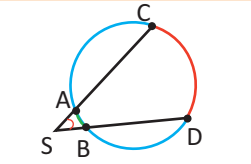
3 > Şəkində verilənlərə görə toxunanla kəsən arasındakı bucağı tapın.



Toxunanlar və kəsənlər arasındakı bucaqlar

Bucağın tərə nöqtəsi çevrə xaricində yerləşir

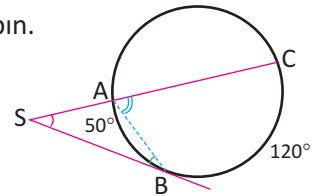
Teorem 3. Çevrəyə çəkilmiş kəsən və toxunanın, iki toxunanın, iki kəsənin arasındakı bucağın (tərə nöqtəsi çevrənin xaricində yerləşirsə) dərəcə ölçüsü bucağın tərəflərinin arasında qalan böyük qövsə kiçik qövsün dərəcə ölçüləri fərqinin yarısına bərabərdir.

1. Toxunan və kəsən arasındakı bucaq	2. İki toxunan arasındakı bucaq	3. İki kəsən arasındakı bucaq
		
$\angle S = \frac{\text{qövs } BC - \text{qövs } AB}{2}$	$\angle S = \frac{\text{qövs } AD - \text{qövs } AB}{2}$	$\angle S = \frac{\text{qövs } CD - \text{qövs } AB}{2}$

Nümunə.

Şəkində verilənlərə görə $\angle S$ -in dərəcə ölçüsünü tapın.

Həlli. Teorem 3-ə görə alırıq: $\angle S = \frac{\text{qövs } BC - \text{qövs } AB}{2}$

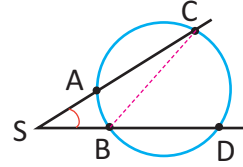


Doğrudan da, AB vətərini çəksək, $\angle CAB$ $\triangle ASB$ -nin xarici bucağı olduğu üçün alırıq: $\angle CAB = \angle S + \angle ABS$. Buradan

$$\angle S = \angle CAB - \angle ABS = \frac{\text{qövs } BC}{2} - \frac{\text{qövs } AB}{2} = \frac{120^\circ - 50^\circ}{2} = 35^\circ \text{ tapılır.}$$

Öyrənmə tapşırıqları

- 4 > Teorem 3-ün isbatını 3-cü hal üçün tamamlayın, 1-ci və 2-ci hallar üçün isə özünüz yazın.
Verilir: SC və SD çevrənin kəsənləridir.

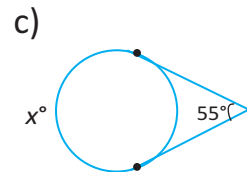
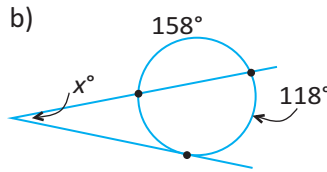
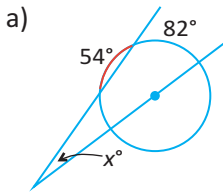


İsbat edin: $\angle S = \frac{\text{m}\widehat{CD} - \text{m}\widehat{AB}}{2}$

İkisütunlu cədvəllə isbatı: CB vətərini çəkin.

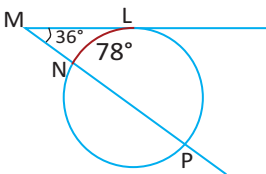
Təklif	Əsası
1. $\angle CBD = \angle CSB + \angle SCB$	1. $\angle CBD$ $\triangle SBC$ -nin xarici bucağıdır.
2. $\angle CBD = \frac{\text{m}\widehat{CD}}{2}$	2.
3. $\angle SCB = \frac{\text{m}\widehat{AB}}{2}$	3.
4. $\angle CSB = \angle CBD - \angle SCB$	4.
5. $\angle CSB = \frac{\text{m}\widehat{CD} - \text{m}\widehat{AB}}{2}$	5.

- 5 > Şəkildə çevrələrə toxunanlar və kəsənlər çəkilmişdir. Verilənlərə görə x -lə işarə edilmiş bucağı və ya qövsü tapın.

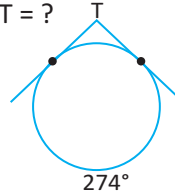


- 6 > Şəkildə çevrələrə toxunanlar və kəsənlər çəkilmişdir. Verilənlərə görə tələb olunanı tapın.

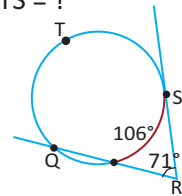
a) $\text{m}\widehat{LP} = ?$



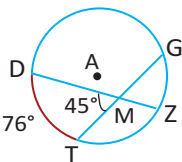
b) $\angle T = ?$



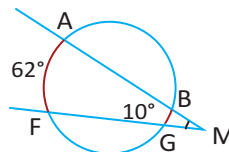
c) $\text{m}\widehat{QTS} = ?$



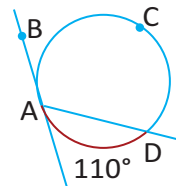
d) $\text{m}\widehat{GZ} = ?$



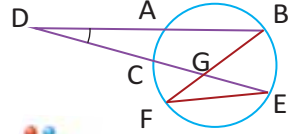
e) $\angle AMF = ?$



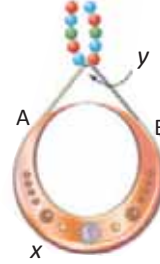
f) $\angle DAB = ?$



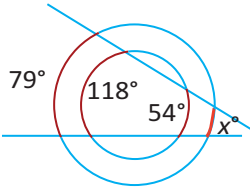
- 7 > **Verilir:** $\sphericalangle AB = 108^\circ$, $\sphericalangle FE = 118^\circ$,
 $\sphericalangle EGB = 52^\circ$, $\sphericalangle EFB = 30^\circ$
Tapın: a) $\sphericalangle AC$ b) $\sphericalangle CF$ c) $\sphericalangle EDB$



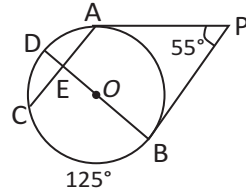
- 8 > Dairəvi şəkildə olan medalyonun ipləri uyğun çevrənin toxunanlarıdır. x -lə işarələnmiş qövs 220° olarsa, iplərin yaratdığı bucağın dərəcə ölçüsünü tapın.



- 9 > Şəkildə konsentrik çevrələr təsvir edilmişdir. Verilənlərə görə x -i tapın.



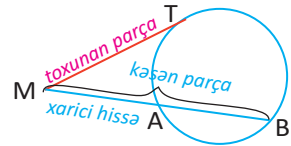
- 10 > **Verilir:** PA və PB toxunanlar, BD diametrdir. $\sphericalangle APB = 55^\circ$, $\sphericalangle CB = 125^\circ$
Tapın: a) $\sphericalangle AB$ b) $\sphericalangle DEC$ c) $\sphericalangle AD$
d) $\sphericalangle PBD$ e) $\sphericalangle PAC$



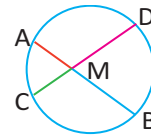
2-6

Çevrədə vətər və kəsənlərin parçalarının mütənəsibliyi

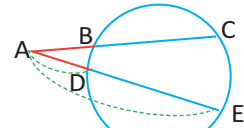
Çevrə xaricindəki nöqtədən çevrəyə şəkildəki kimi toxunan və kəsən çəkilibsə, uyğun parçaları aşağıdakı kimi adlandırmaq: MT -toxunan parça,
MB -kəsən parça,
MA -kəsənin xarici hissəsi.



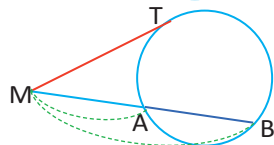
Teorem 1. Çevrənin iki vətəri kəsişirsə, kəsişmə nöqtəsinin birinci vətərdən ayırdığı parçaların hasili, ikinci vətərdən ayırdığı parçaların hasilinə bərabərdir:
 $AM \cdot MB = CM \cdot MD$



Teorem 2. Çevrə xaricindəki nöqtədən çevrəyə kəsənlər çəkilibsə, kəsən parçanın öz xarici hissəsinə hasili sabitdir. $AC \cdot AB = AE \cdot AD$



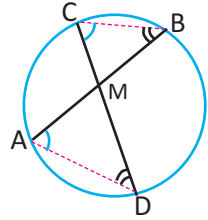
Teorem 3. Nöqtədən çevrəyə toxunan və kəsən çəkilibsə, toxunan parçanın kvadratı kəsən parçanın öz xarici hissəsinə hasilinə bərabərdir. $MT^2 = MA \cdot MB$



Öyrənmə tapşırıqları

1 > **Teorem 1-in** isbatını tamamlayın.

Təklif	Əsası
1. $\angle A \cong \angle C$	1. Eyni qövsə
2. $\angle D \cong \angle B$	2. Eyni
3. $\triangle AMD \sim \triangle CMB$	3.
4. $\frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB}$	4.
5. $AM \cdot MB = CM \cdot MD$	5.

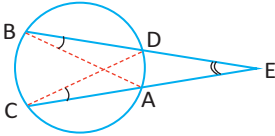


2 > **Teorem 2-ni** verilən şəklə görə yenidən yazın və isbat edin.

Verilir: EB və EC kəsənlərdir.

İsbat edin: $EB \cdot ED = EC \cdot EA$

İsbat üçün plan: $\triangle ABE$ və $\triangle DCE$ -nin oxşarlığından istifadə edin.

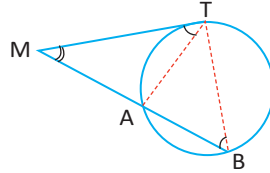


3 > **Teorem 3-ü** isbat edin.

Verilir: MT toxunan, MB isə çevrənin kəsənidir.

İsbat edin: $MT^2 = MA \cdot MB$

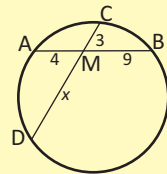
İsbat üçün plan: $\triangle MTA$ və $\triangle MBT$ -nin oxşarlığından istifadə edin.



4 > Verilən nümunələri araşdırın. Çevrəni kəsən parçaların uzunluqlarına aid tapşırıqları həll edin.

Nümunə. Çevrənin AB və CD vətərləri M nöqtəsində kəşir. $AM = 4$, $MB = 9$, $CM = 3$ olarsa, MD-ni tapın

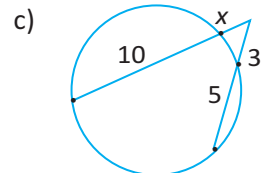
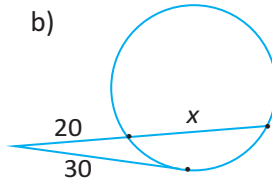
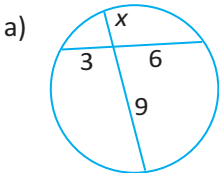
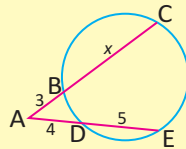
Həlli. Teorem 1-ə görə $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Verilənləri bərabərlikdə yerinə yazaq: $4 \cdot 9 = 3 \cdot MD$. Buradan $MD = 12$



Nümunə. Şəkində verilənlərə görə BC vətərinin uzunluğunu tapın.

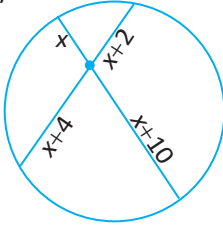
Həlli. Teorem 2-yə görə $AD \cdot AE = AB \cdot AC$.

Buradan alırıq: $4 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot (3 + x)$, $x = 9$

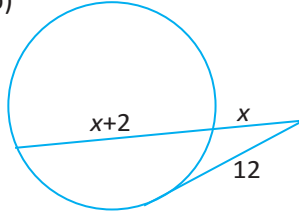


5 > Şəkildə verilənlərə görə x -i tapın.

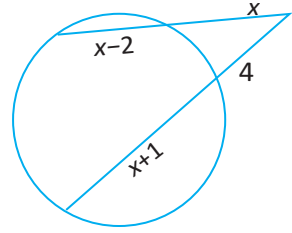
a)



b)

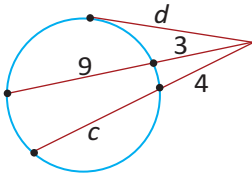


c)

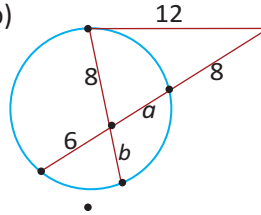


6 > Şəkildə çevrəyə toxunan və kəsənlər çəkilmişdir. Verilənlərə görə məchulların qiymətini tapın.

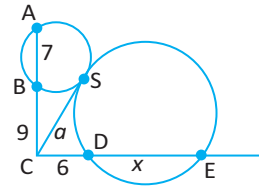
a)



b)

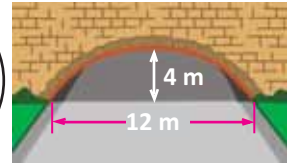
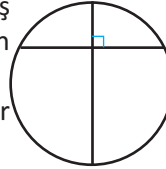


c)



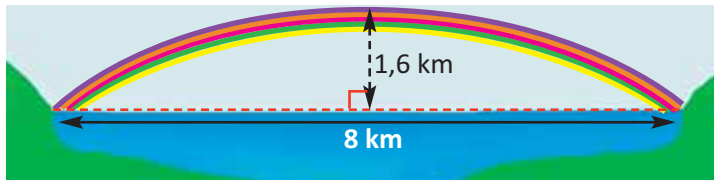
7 > Tunelin planı üzərində verilmiş ölçülərə görə qövsvari hissəyə uyğun çevrənin radiusunu tapın.

Göstəriş: uyğun sxematik təsvir üzərində ölçüləri yazın və həll edin.



8 > Göy qurşağı əslində tam bir çevrədir. Biz isə yalnız onun bir hissəsini, qövsünü görə bilirik. Şəkildə verilən ölçülərə görə tapın:

- a) göy qurşağı qövsünə uyğun çevrənin radiusunu;
b) göy qurşağı çevrəsinin uzunluğunu.



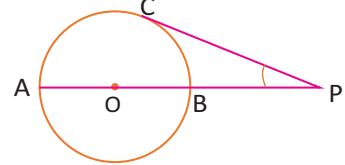
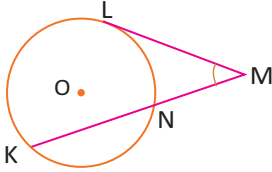
9 > **Ölçmə.** Leyla ağacdən 4 m məsafədə, Kənan isə ağacın dibində dayanmışdır. Leyla ilə Kənan arasındakı məsafə 5 m-dir. Bu situasiyanı sxematik təsvir edin və ağacın diametrini tapın. Sxemdə Leyla və Kənanın durduğu nöqtələri birləşdirən parçanı çevrənin toxunanı qəbul edin.



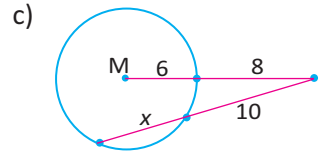
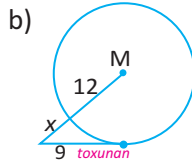
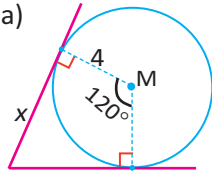


Ümumiləşdirici tapşırıqlar

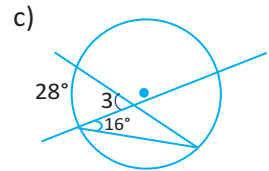
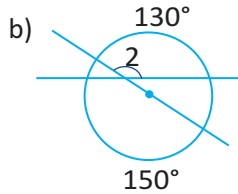
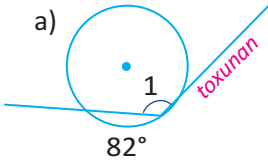
- 1 > **Verilir:** ML O mərkəzli çəvrənin toxunanı, MK isə kəsəndir.
 $\sphericalangle LN : \sphericalangle NK : \sphericalangle KL = 3 : 4 : 5$
Tapın: $\sphericalangle LMK$
- 2 > **Verilir:** PC O mərkəzli çəvrənin toxunanı, PA isə mərkəzdən keçən kəsəndir.
 $\sphericalangle AC : \sphericalangle CB = 7 : 2$
Tapın: $\sphericalangle CPA$



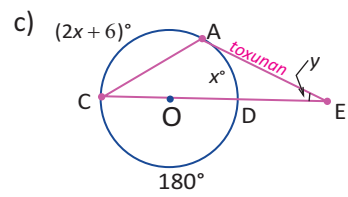
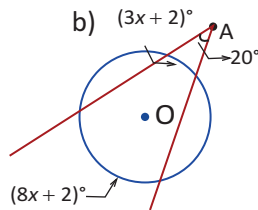
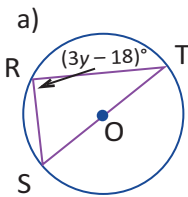
- 3 > Şəkilə verilənlərə görə x-i tapın. M nöqtəsi çəvrənin mərkəzidir.



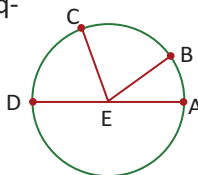
- 4 > Rəqəmlərlə işarələnmiş bucaqların dərəcə ölçülərini tapın.



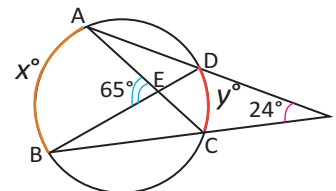
- 5 > Verilənlərə görə dəyişəni tapın. O nöqtəsi çəvrənin mərkəzidir.



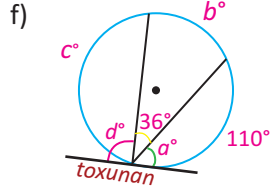
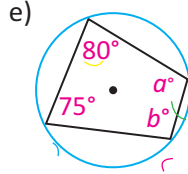
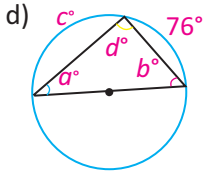
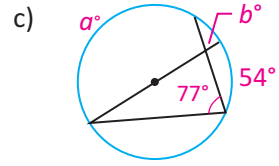
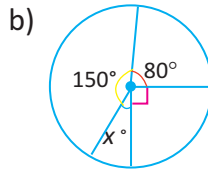
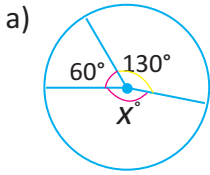
- 6 > Şəkilə E nöqtəsi çəvrənin mərkəzi, AD diametrdir və $AD = 12$ sm. Dərəcə ölçüləri nisbəti $\sphericalangle AEB : \sphericalangle BEC : \sphericalangle CED = 2 : 3 : 4$ kimi olan mərkəzi bucaqlara uyğun qövslərin uzunluqlarını tapın.



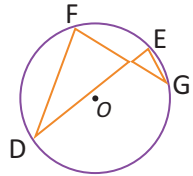
- 7 > Şəkilə verilənlərə görə AB və CD qövslərinin dərəcə ölçülərini tapın.



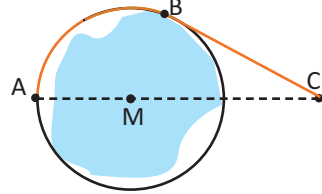
8 > Verilənlərə görə dəyişənləri tapın. Çevrənin mərkəzi nöqtə ilə göstərilib.



9 > Şəkilə O mərkəzli çevrədə DF, FG, EG, ED vətərləri çəkilmişdir. Qövslərin dərəcə ölçüləri nisbəti $\sphericalangle DF : \sphericalangle FE : \sphericalangle EG : \sphericalangle GD = 5 : 2 : 1 : 7$ kimi olarsa, konqruyent bucaqları müəyyən edin və ölçülərini tapın.



10 > Bələdiyyə şəhər kənarındakı gölün təmizlənməsi üçün hər il velosiped yarışı keçirir. İdmançılar burada qət etdikləri hər kilometr məsafə üçün könüllü olaraq müəyyən miqdar pul ödəyirlər. Kənan da bu il yarışda iştirak edir və hər kilometr məsafə üçün 5 manat ödəyəcəyini təşkilatçılara bildirmişdir. Yarış yolu gölün ətrafında salınmış, radiusu 3 km olan dairəvi yolun (uyğun çevrənin mərkəzi şəkilə M nöqtəsi ilə qeyd edilmişdir) qövsü boyunca ayrıxətli hissədən ($\sphericalangle AB$) və uyğun çevrənin toxunanı boyu düzxətli hissədən (BC) ibarətdir. A, M, C nöqtələri bir düz xətt üzərindədir və $AC = 9$ km olduğu məlumdur.

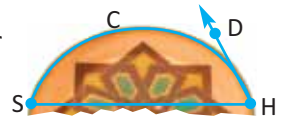


a) Yarış yolunun uzunluğu neçə kilometrdir? Cavabı ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

b) Kənan xeyriyyə məqsədilə təxminən neçə manat ödəyəcək?

11 > Bir çox hallarda arxeoloqlar əşyaların hissələrini aşkar edir, daha sonra bir sıra ölçmələr, araşdırmalar aparmaqla onun əsl formasını bərpa edə bilirlər.

a) Şəkilə təsvir edilən boşqabın üzərində göstərilmiş bucaq $\sphericalangle SHD = 60^\circ$ olarsa, $\sphericalangle SCH$ -in dərəcə ölçüsünü tapın (HD boşqabın çevrəsinə toxunandır).



b) Tutaq ki, siz boşqabın SCH qövsünün uzunluğunu ölçərək 9,5 sm olduğunu müəyyən etmişiniz. Bu məlumata görə boşqabın tam çevrəsinin uzunluğunu necə müəyyən edərdiniz?

3

Funksiyalar. Qrafiklər

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz

- ✓ Kvadratik funksiyanın qrafikini qurmağı
- ✓ Verilmiş qrafikinə görə kvadratik funksiyanın düsturunu yazmağı
- ✓ Kvadratik funksiyanın tətbiqi ilə məsələ həll etməyi
- ✓ $y = |x|$ funksiyanın qrafikini qurmağı
- ✓ $y = x^3$ funksiyanın qrafikini qurmağı



Məsələ. Vurulan zərbədən sonra topun qalxdığı hündürlüyün (metrlə) t uçuş zamanından (saniyə ilə) asılılığı $h(t) = -5t^2 + 12t$ düsturu ilə verilmişdir.

- $t = 1$ san anında top hansı hündürlükdə olar?
- Zamanın hansı anında top yerdən 2,2 metr hündürlükdə olar?
- Topun qalxdığı ən yüksək hündürlüyü necə tapmaq olar?



3-1

Kvadratik funksiya və onun qrafiki

$a \neq 0$ olduqda $y = ax^2 + bx + c$ şəklində funksiya kvadratik funksiya deyilir.

Nümunələr. $y = 3x^2 + x$, $y = -2x^2 + 5$, $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 0,5x^2$

Kvadratik funksiya bütün ədəd oxunda təyin olunmuşdur, yəni argument (x) istənilən həqiqi qiymət ala bilər.

Nümunə. $y = x^2 - 2x + 2$ funksiya verilmişdir.

- $x = 2$ olduqda funksiyanın qiymətini tapın.
- Argumentin hansı qiymətlərində funksiyanın qiyməti 5-ə bərabər olar?

Həlli. a) $x = 2$ qiymətini funksiyanın düsturunda yerinə yazaq: $y = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2$

b) Şərtə görə $y = 5$ olduğundan $5 = x^2 - 2x + 2$ tənliyindən tapırıq: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

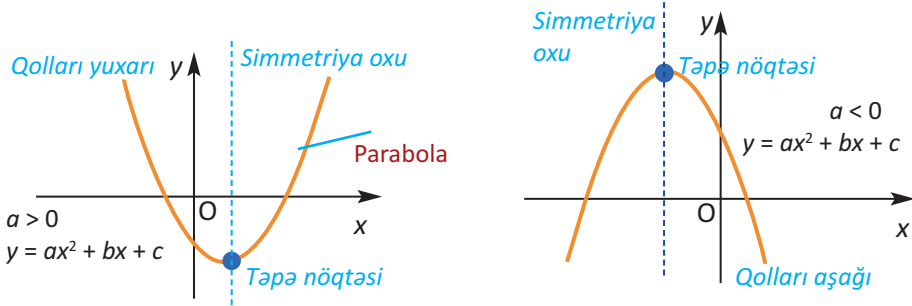
Öyrənmə tapşırıqları

- > Hansı kvadratik funksiya?
a) $y = 2x^2 + x - 3$ b) $y = 2x^2 - 5$ c) $y = 5x + 2$
- > a) $x = -1$; b) $x = -2$; c) $x = 0$ olduqda $y = x^2 - 2x + 1$ funksiyanın qiymətini hesablayın.

- 3 > Arqumentin hansı qiymətlərində $y = x^2 - x - 3$ funksiyanın qiyməti:
a) -1 -ə; b) 3 -ə; c) -3 -ə bərabər olur?
- 4 > $f(x) = x^2 - 2x + c$ funksiyası verilmişdir. $f(1) = 3$ olarsa, $f(-1)$ -i tapın.

✓ **Kvadratlik funksiyanın qrafiki**

Kvadratlik funksiyanın qrafiki paraboladır. Parabolanın simmetriya oxu vardır. Simmetriya oxu ilə parabolanın kəsişməsi təpə nöqtəsi adlanır. a , b , c əmsallarının qiymət və işarələrindən asılı olaraq parabola koordinat müstəvisində müxtəlif vəziyyətlərdə yerləşə bilər.

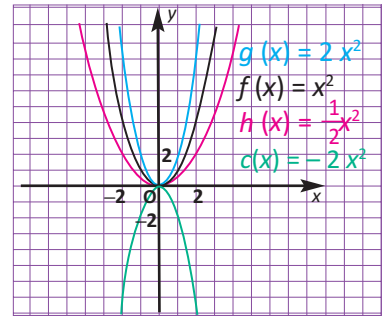


a , b , c əmsallarının qiymət və işarəsinin dəyişməsi ilə alınan kvadratlik funksiyanın xüsusi hallarına baxaq.

1. $b = 0, c = 0$ olduqda $y = ax^2$ funksiyası və onun qrafiki

Nümunə. $y = x^2, y = 2x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = -2x^2$ funksiyaları üçün qiymətlər cədvəlini araşdırın. Şəkildəki hər bir qrafikin hansı funksiya ilə əldə olduğunu müəyyən edin.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = 2x^2$	$h(x) = \frac{1}{2}x^2$	$y = -2x^2$
-3	9	18	4,5	-18
-2	4	8	2	-8
-1	1	2	0,5	-2
0	0	0	0	0
1	1	2	0,5	-2
2	4	8	2	-8
3	9	18	4,5	-18



Həlli. Cədvəldən görüldüyü kimi, $y = x^2$ parabolası üzərindəki hər bir nöqtənin absisini dəyişmədən ordinatını 2 dəfə artırırsa, $y = 2x^2$ funksiyanın qrafiki üzərindəki nöqtələr alınır. Bu halda parabola "daralır".

$y = x^2$ parabolası üzərindəki hər bir nöqtənin absisini dəyişmədən ordinatını 2 dəfə azaltsa, $y = \frac{1}{2}x^2$ funksiyanın qrafiki üzərindəki nöqtələr alınır. Bu halda parabola "genişlənir".

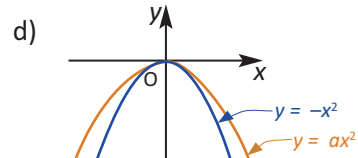
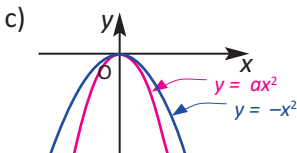
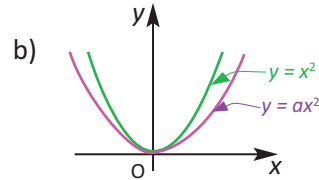
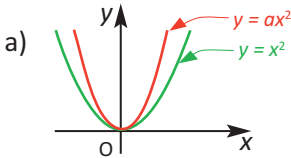
$y = -2x^2$ parabolası $y = 2x^2$ parabolasının absis oxuna nəzərən simmetriya çevrilməsi ilə alınır.

$y = ax^2$ funksiyanın qrafiki təpə nöqtəsi koordinat başlanğıcında yerləşən, simmetriya oxu ordinat oxu olan paraboladır.

- $a > 0$ olduqda parabolanın qolları yuxarı, $a < 0$ olduqda isə aşağı yönəlidir.
- $|a| > 1$ olduqda parabola absis oxundan ordinat oxu boyunca dartılır və budaqları daha dik olmaqla $y = x^2$ parabolasına nəzərən “daralır”.
- $|a| < 1$ olduqda parabola absis oxuna ordinat oxu boyunca sıxılır, $y = x^2$ parabolasına nəzərən “genişlənir”.

Öyrənmə tapşırıqları

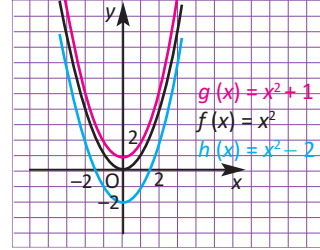
- 5 > $y = x^2$, $y = 3x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun və müqayisə edin. Hansı parabola daha “geniş”, hansı daha “dardır”?
- 6 > $y = x^2$ parabolasının köməyi ilə aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun. Bu qrafikləri qrafik kalkulyatorla da qurun.
- a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = -4x^2$ c) $f(x) = \frac{3}{4}x^2$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$
- 7 > Eyni koordinat müstəvisində $y = \frac{1}{2}x^2$ və $y = \frac{1}{2}x + 1$ funksiyalarının qrafiklərini qurun, kəsişmə nöqtələrini göstərin.
- 8 > $y = ax^2$ parabolası $A(-6; 9)$ nöqtəsindən keçir.
1) a əmsalını müəyyən edin;
2) Bu parabola: a) $B(3; 5)$, b) $C(-2; 1)$ nöqtəsindən keçirmi?
- 9 > Şəkildə təsvir edilmiş qrafiklərə görə a -nın qiymətinin dəyişmə intervalını müəyyən edin.



2. $y = x^2 + n$ funksiyasının qrafiki

Nümunə. $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 2$ funksiyaları cədvəllə və qrafiklə təqdim edilmişdir. Cədvəli və qrafiki dəftərinizdə çəkin. $y = x^2 + n$ funksiyasının qrafikinə n -in qiymətindən asılı olaraq necə dəyişdiyini araşdırın.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 1$	$h(x) = x^2 - 2$
-3	9	10	7
-2	4	5	2
-1	1	2	-1
0	0	1	-2
1	1	2	-1
2	4	5	2
3	9	10	7



Həlli. $y = x^2$ parabolunu quraq və onu Oy oxu boyunca 1 vahid yuxarı sürüsdürək. Parabolun təpə nöqtəsi $(0; 1)$ olacaq, simmetriya oxu isə Oy olaraq qalır. Hər bir nöqtənin absisi əvvəlki kimi qalır, ordinatı isə 1 vahid artır. Yəni, yeni parabolada absisi x olan nöqtənin ordinatı $x^2 + 1$ olur: $y = x^2 + 1$ funksiyasına uyğun parabola $y = x^2$ parabolunun Oy oxu boyunca 1 vahid yuxarı sürüsdürülməsidir. Təpə nöqtəsi: $(0; 1)$
 $y = x^2$ və $y = x^2 - 2$ funksiyalarına uyğun parabolaları müqayisə edək.
 $y = x^2 - 2$ funksiyasına uyğun parabola $y = x^2$ parabolunu Oy oxu boyunca 2 vahid aşağı sürüsdürməklə alınır. Təpə nöqtəsi: $(0; -2)$

Göründüyü kimi, n həddinə görə parabolun vəziyyəti Oy oxu boyunca şaquli olaraq dəyişir. Parabolun təpə nöqtəsinin düzgün qeyd edilməsi önəmlidir.

$y = ax^2 + n$ funksiyasının qrafiki $y = ax^2$ parabolunun Oy oxu boyunca sürüsdürülməsidir.

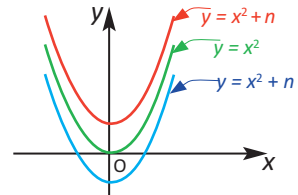
- Parabola Oy oxu boyunca $|n|$ vahid; $n < 0$ olduqda aşağı, $n > 0$ olduqda yuxarı sürüsdürülür.
- Parabolun təpə nöqtəsi $(0; n)$ nöqtəsində yerləşir.
- $x = 0$ düz xətti parabolun simmetriya oxudur.

Öyrənmə tapşırıqları

10 > $y = x^2$ parabolunu sürüsdürməklə verilmiş funksiyaların qrafiklərini sxematik təsvir edin.

- a) $y = x^2 - 2$ b) $y = x^2 + 3$
 c) $y = x^2 + 2$ d) $y = x^2 - 3$
 e) $y = x^2 + 0,5$ f) $y = x^2 - 1,5$

11 > Şəkilə təsvir edilmiş qrafiklərə görə hər bir hal üçün n -nin işarəsini müəyyən edin.

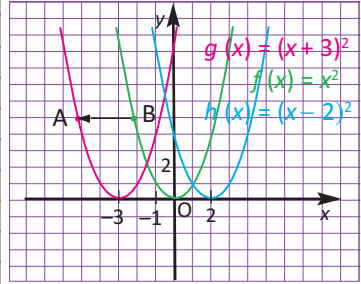


12 > $y = x^2 + n$ funksiyasında n -ə müxtəlif qiymətlər verməklə nümunələr yazın və qrafiklərini qurun. Bu qrafikləri qrafikalkulyatorla da qurun.

3. $y = (x - m)^2$ funksiyasının qrafiki

- 3. Nümunə.** $y = x^2$, $y = (x + 3)^2$, $y = (x - 2)^2$ funksiyaları cədvəllə və qrafiklə təqdim edilmişdir. Cədvəli və qrafiki dəftərinizdə çəkin. $y = (x - m)^2$ funksiyasının qrafikinə m -in qiymətindən asılı olaraq necə dəyişdiyini araşdırın.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = (x + 3)^2$	$h(x) = (x - 2)^2$
-5	25	4	49
-4	16	1	36
-3	9	0	25
-2	4	1	16
-1	1	4	9
0	0	9	4
1	1	16	1
2	4	25	0
3	9	36	1
4	16	49	4



Həlli. $y = x^2$ parabolasını 3 vahid sola sürüşdürək. Parabolanın təpə nöqtəsi $(-3; 0)$ olar. Sürüşdürülmüş parabola üzərində $A(x_1; y_1)$ nöqtəsi verilən parabola üzərində B nöqtəsindən 3 vahid sola sürüşdürməklə alınır. Ona görə B nöqtəsinin absisi $x_1 + 3$ olar, ordinatı isə A-nın ordinatı ilə eynidir. Verilən parabola üzərində istənilən nöqtənin ordinatı absisinin kvadratına bərabər olduğundan, $y_1 = (x_1 + 3)^2$ alınır. Yəni, sürüşdürülmüş parabola üzərindəki $(x_1; y_1)$ nöqtəsi üçün $y_1 = (x_1 + 3)^2$ olur.

$y = x^2$ parabolasını 3 vahid sola sürüşdürsək, $y = (x + 3)^2$ parabolası alınır.

$y = x^2$ parabolasını 2 vahid sağa sürüşdürsək, $y = (x - 2)^2$ parabolası alınır.

$y = a(x - m)^2$ funksiyasının qrafiki $y = ax^2$ parabolasının absis oxu boyunca $|m|$ vahid sürüşdürülməsidir.

- $m > 0$ olarsa, parabola Ox oxu boyu sağa, $m < 0$ olarsa, sola sürüşdürülür.
- m parabolanın təpə nöqtəsinin absisinə uyğundur. Parabolanın təpə nöqtəsi $(m; 0)$ olur.
- $x = m$ düz xətti parabolanın simmetriya oxudur.

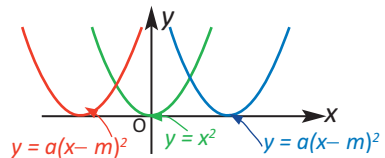
Öyrənmə tapşırıqları

- 13** $y = x^2$ parabolasını sürüşdürməklə $y = (x + 5)^2$ və $y = (x - 5)^2$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun.

- 14** Funksiyanın qrafikini sxematik təsvir edin.

- a) $y = (x - 2)^2$ b) $y = (x + 4)^2$
 c) $y = (x + 2)^2$ d) $y = (x - 4)^2$
 e) $y = (x - 1,5)^2$ f) $y = (x + 1,5)^2$

- 15** Şəkilə təsvir edilmiş qrafiklərə görə m -in işarəsini müəyyən edin.



4. $y = a(x - m)^2 + n$ funksiyasının qrafiki

Yuxarıda nəzərdən keçirdiyimiz qurmaları ümumiləşdirməklə $y = x^2$ parabolasına görə $y = a(x - m)^2 + n$ funksiyasının qrafikinə qurulmasını göstərək. Bunu nümunələr üzərində yerinə yetirək.

4. Nümunə. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5)^2 - 4$ parabolasının qurulmasını araşdırın.

Həlli.

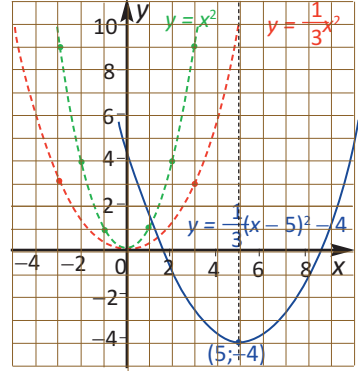
1. $y = x^2$ parabolası qurun.

2. $a = \frac{1}{3} > 0$ olduğundan $y = \frac{1}{3}x^2$ parabolasının qolları yuxarı yönəlidir, $a < 1$ olduğundan parabola "genişlənir": x -in eyni qiymətində y -in qiyməti 3 dəfə kiçilir. Məsələn, $y = x^2$ -nin qrafiki üzərindəki $(3; 9)$ nöqtəsi $y = \frac{1}{3}x^2$ parabolası üçün $(3; 3)$ kimi olacaq.

3. Oy simmetriya oxuna görə $(3; 3)$ nöqtəsinə simmetrik $(-3; 3)$ nöqtəsini qeyd edin.

4. $(3; 3)$, $(0; 0)$, $(-3; 3)$ nöqtələrindən keçən parabolanı çəkin. Bu $y = \frac{1}{3}x^2$ funksiyasının qrafikidir.

5. $m = 5$, $n = -4$ olduğuna görə bu parabolanı 5 vahid sağa, 4 vahid aşağı sürüşdürün. Alınan parabola $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5)^2 - 4$ funksiyasının qrafikidir.



$y = a(x - m)^2 + n$ parabolasının təpə nöqtəsi $(m; n)$ nöqtəsində yerləşir. Bu parabolanın simmetriya oxu $x = m$ düz xəttidir.

5. Nümunə. $y = -2(x - 3)^2 + 1$ funksiyasının qrafikinə qurulmasını araşdırın.

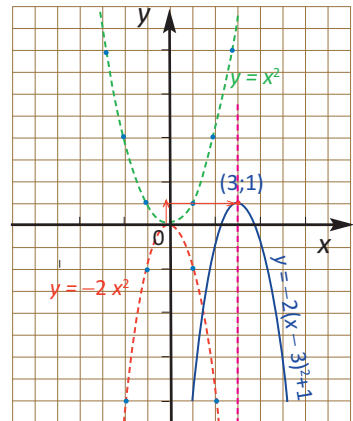
Həlli.

• $y = x^2$ parabolasını qurun.

• $a = -2$ əmsalına görə $y = -2x^2$ funksiyasının qrafiki olan parabolanın qolları aşağı yönəlidir. Bu funksiyanın qrafiki $y = x^2$ funksiyasına uyğun paraboldan "dar" olacaq, çünki absisi eyni olan nöqtənin ordinatı mütləq qiymətcə 2 dəfə böyükdür. Məsələn, nöqtələr uyğun olaraq $(1; 1) \rightarrow (1; -2)$; $(2; 4) \rightarrow (2; -8)$ kimi olacaq. Bu nöqtələri qeyd edin və səliss əyri ilə birləşdirməklə $y = -2x^2$ parabolasını qurun.

• $m = 3$, $n = 1$ olduğundan $y = -2x^2$ parabolasını 3 vahid sağa, 1 vahid isə yuxarı sürüşdürməklə $y = -2(x - 3)^2 + 1$ funksiyasının qrafiki qurulur. Parabolanın təpəsi $(3; 1)$ nöqtəsindədir.

• $x = 3$ düz xətti bu parabolanın simmetriya oxudur.



16 > $y = x^2$ parabolasına görə aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun.

a) $y = 2(x + 3)^2 - 1$ b) $y = -3(x + 1)^2 + 3$ c) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$

17 > $y = \frac{1}{2}x^2$ və $y = 2x^2$ parabolalarını qurun, tərə nöqtəsini aşağıda verilmiş nöqtəyə köçürməklə sürüşdürün. Yeni qrafiklərə uyğun funksiyaların düsturlarını yazın.

a) (0; -1) b) (3; 2) c) (-4; 1) d) (-2; -2)



Kvadratik funksiyanın müxtəlif formalarda təqdimi

Kvadratik funksiya

Qrafiki

1. Tərə nöqtəsinə görə yazılışla
(və ya tam kvadratın ayrılışı ilə)
 $y = a(x - m)^2 + n$

Parabolanın tərə nöqtəsi: $(m; n)$
Simmetriya oxu: $x = m$

2. Absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinə görə yazılışla
 $y = a(x - p)(x - q)$

Qrafik Ox oxunu absisləri p və q olan nöqtələrdə kəşir.
Simmetriya oxu: ucları $(p; 0)$ və $(q; 0)$ olan parçanın orta perpendikulyarıdır.
Tərə nöqtəsinin absisi $m = (p + q) : 2$

Parabolanın tərə nöqtəsi və koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri parabolanın mühüm nöqtələridir.

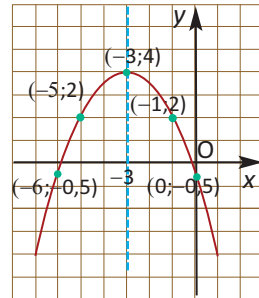
Parabolaları qurma addımları:

1. Tərə nöqtəsi tapılır və koordinat müstəvisində qeyd edilir;
2. Ox oxu ilə (əgər varsa) və Oy oxu ilə kəsişmə nöqtələri tapılır;
3. Simmetriya oxu müəyyən edilir;
4. Simmetriya oxuna görə parabola üzərindəki bir neçə nöqtə qeyd edilir;
5. Qeyd edilmiş nöqtələrdən keçən parabola qurulur.

1. **Nümunə.** $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 4$ funksiyanın qrafikini qurun.

Həlli. $a < 0$ olduğundan parabolanın qolları aşağı yönəlib.

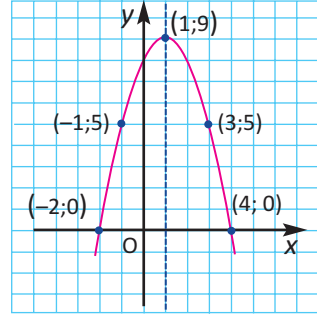
1. Parabolanın tərə nöqtəsini qeyd edək: $(-3; 4)$
2. $x = 0$ olduqda $y = -0,5$ olur, yəni parabola ordinat oxunu $(0; -0,5)$ nöqtəsində kəşir.
3. $x = -3$ simmetriya oxunu çəkək. $x = -1$ olduqda $y = 2$ olur, $(-1; 2)$ nöqtəsini qeyd edək.
4. $x = -3$ düz xəttinə nəzərən $(0; -0,5)$ və $(-1; 2)$ nöqtələrinə simmetrik olan $(-6; -0,5)$, $(-5; 2)$ nöqtələrini qeyd edək.
5. Bu nöqtələrdən keçən parabolanı quraq.



2. **Nümunə.** $y = -(x + 2)(x - 4)$ funksiyasının qrafikini qurun.

Həlli.

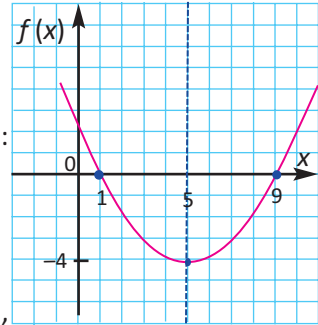
- $a = -1$, $p = -2$, $q = 4$; Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələri: $(-2; 0)$ və $(4; 0)$
- Simmetriya oxu bu nöqtələrdən eyni məsafədə olan nöqtədən keçir: $(p + q) : 2 = (-2 + 4) : 2 = 1$
 $x = 1$ parabolun simmetriya oxudur.
- Parabolun təpə nöqtəsinin absisi $x = 1$, ordinatı $y = -(1 + 2)(1 - 4) = 9$ olur. $(1; 9)$ təpə nöqtəsini koordinat müstəvisi üzərində qeyd edək.
- $x = 1$ simmetriya oxunu çəkək.
Simmetriya oxuna görə simmetrik iki nöqtəni qeyd edək. Məsələn, $x = 3$ və $x = -1$ olduqda, $y = 5$ olur, yəni $(3; 5)$ və $(-1; 5)$ nöqtələrini qeyd edək.
- Qeyd edilmiş nöqtələrdən keçən parabolunu quraq.



3. **Nümunə.** Qrafiki verilmiş funksiyanı təpə nöqtəsinə görə yazılışla ($y = a(x - m)^2 + n$) ifadə edin.

Həlli.

1. Parabolun təpə nöqtəsi $(5; -4)$ olduğundan alırıq: $m = 5$, $n = -4$.
2. Parabolun qolları yuxarı yönəldiyindən $a > 0$ olmalıdır. m və n -nin qiymətini nəzərə almaqla funksiyanı $y = a(x - 5)^2 - 4$ kimi yazmaq olar.
3. Qrafik üzərində olan istənilən nöqtənin, məsələn, $(1; 0)$ və ya $(9; 0)$ nöqtəsinin koordinatlarını funksiyanın düsturunda yerinə yazmaqla a -nı tapa bilərik. $(1; 0)$ nöqtəsini nəzərə alaq:
 $0 = a(1 - 5)^2 - 4$, $16a = 4$, $a = \frac{1}{4}$. Funksiyanın düsturu: $y = \frac{1}{4}(x - 5)^2 - 4$.



Öyrənmə tapşırıqları

18 > Verilən funksiyanın qrafikini qurun. Təpə nöqtəsini və simmetriya oxunu qrafik üzərində qeyd edin.

1) $y = (x - 3)^2$

2) $y = (x + 4)^2$

3) $y = -(x + 3)^2 + 2$

4) $y = 3(x - 2)^2 - 1$

5) $y = -2(x - 2)^2 + 4$

6) $y = -(x + 1)^2 + 3$

7) $y = 2(x + 1)^2 - 5$

8) $y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2$

9) $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$

19 > Verilən funksiyanın qrafikini qurun. Təpə nöqtəsini, simmetriya oxunu, koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini qrafik üzərində qeyd edin.

1) $y = (x + 3)(x - 3)$

2) $y = -(x - 1)(x + 3)$

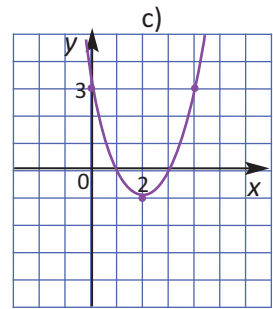
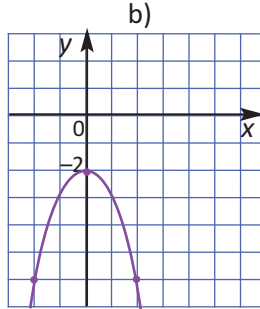
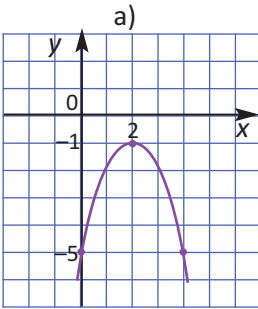
3) $y = 2(x + 2)(x + 4)$

4) $y = 2(x - 5)(x - 1)$

5) $y = -(x - 4)(x - 1)$

6) $y = (x - 3)(x + 7)$

- 20** > **Məntiqi düşüncə.** a) Nə üçün $y = x^2 + 3$ parabolasını qurmaq üçün $y = x^2$ parabolası Oy oxu boyunca yuxarı, $y = (x + 3)^2$ funksiyanın qrafikini qurarkən isə Ox oxu boyunca sola sürüşdürülür? Fikrinizi yazın.
- b) Kvadratik funksiyanın qrafikinin Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin sayı həmişə eyni olmur. Bu fikir Oy oxu üçün də doğrudurmu? Fikrinizi yazın.
- 21** > Qrafik üzərində yerləşən nöqtələr cütünün hansı koordinatlarına görə parabolanın simmetriya oxunun tənliyini yazmaq mümkündür? Mümkün olduqda simmetriya oxunun tənliyini yazın.
- a) (3; 10) və (7; 10) b) (4; 6) və (6; -2) c) (-1; 4) və (5; 4)
- 22** > (2; 3) və (24; 3) nöqtələri kvadratik funksiyanın qrafiki üzərindədir. Bu nöqtələrin koordinatlarına görə parabolanın simmetriya oxunun tənliyini müəyyən edin.
- 23** > Uyğun parabolaya görə kvadratik funksiyanı $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində yazın:
- a) təpəsi (0; 0) nöqtəsində olan və (6; 9) nöqtəsindən keçən;
 b) təpəsi (0; -3) nöqtəsində olan və (3; 24) nöqtəsindən keçən;
 c) təpəsi (2; 5) nöqtəsində olan və (4; -11) nöqtəsindən keçən;
 d) təpəsi (-3; -10) nöqtəsində olan və (2; -5) nöqtəsindən keçən.
- 24** > Funksiyaların qrafikləri $y = x^2$ parabolasına görə hansı çevrilmələrin nəticəsində alınmışdır? Bu funksiyların düsturlarını yazın.



- 25** > **Açıq tipli sual.** $f(x) = x^2$ -na nəzərən "genişlənmiş" olmaqla üfqi və şaquli istiqamətlərdə sürüşmə hərəkətlərinin yerinə yetirilməsi ilə alınan hər hansı kvadratik funksiyanın düsturunu yazın və qrafikini sxematik təsvir edin.

✓ $y = a(x - m)^2 + n$ parabolasının absis oxu ilə kəsişmə nöqtələri

Funksiyanın qrafikinin absis oxunun üzərində olan nöqtələrində funksiyanın qiyməti sifira bərabər olur.

Arqumentin funksiyanı sifra çevirən qiymətləri bu funksiyanın sıfırları adlanır.

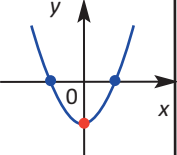
$y = a(x - m)^2 + n$ funksiya üçün sıfırların sayını a və n -in qiymətlərinə görə müəyyən etmək mümkündür.

- a -nın qiymətinə görə parabolanın qollarının yuxarı və ya aşağı yönəldiyini söyləmək olar.

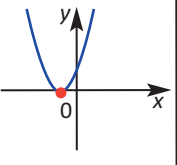
- n -nin qiymətinə görə parabolanın təpə nöqtəsinin absis oxundan yuxarıda, aşağıda və ya absis oxu üzərində olduğunu müəyyən etmək olar.

Parabolanın təpə nöqtəsinə və qollarının yuxarı və ya aşağı yönəlməsinə görə absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin sayını verilmiş nümunələr üçün müəyyən edək.

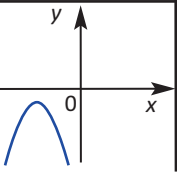
1. Nümunə. $f(x) = 0,8x^2 - 3$

a -nın qiyməti	n -nin qiyməti	Qrafik	Absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin sayı
$a = 0,8 > 0$	$n = -3 < 0$		Qrafik absis oxunu iki nöqtədə kəşir.
Parabolanın qolları yuxarı yönəlmişdir.	Təpə nöqtəsi Ox oxundan aşağıdadır		

2. Nümunə. $f(x) = 2(x + 1)^2$

a -nın qiyməti	n -nin qiyməti	Qrafik	Absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin sayı
$a = 2 > 0$	$n = 0$		Qrafikin absis oxu ilə bir ortaq nöqtəsi var və bu nöqtə absis oxu üzərində olmaqla parabolanın təpə nöqtəsidir.
Parabolanın qolları yuxarı yönəlmişdir.	Təpə nöqtəsi Ox oxu üzərindədir		

3. Nümunə. $f(x) = -3(x + 2)^2 - 1$

a -nın qiyməti	n -nin qiyməti	Qrafik	Absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin sayı
$a = -3 < 0$	$n = -1 < 0$		Qrafik absis oxu ilə kəşmir və qolları aşağı yönəlməklə bütünlüklə Ox oxundan aşağıda yerləşir.
Parabolanın qolları aşağıya yönəlmişdir.	Təpə nöqtəsi Ox oxundan aşağıdadır.		

Öyrənmə tapşırıqları

26> Verilmiş funksiyanın qrafikinin absis oxu ilə ortaq nöqtələrinin sayını müəyyən edin.

a) $f(x) = 5x^2 - 7$

b) $f(x) = -2(x + 1)^2$

c) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 5)^2 - 9$

27 > 1) $y = 5(x - 15)^2 - 100$; 2) $y = -4x^2 + 14$; 3) $y = (x + 18)^2 - 8$ funksiyası üçün qrafiki qurmadan müəyyən edin:

- a) parabolun qollarının istiqamətini; b) təpə nöqtəsinin koordinatlarını;
c) simmetriya oxunun tənliyini; d) absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin sayını.

28 > 1) $f(x) = x^2 - 5x - 24$; 2) $g(x) = x^2 - 2x + 1$; 3) $p(x) = 4x^2 - 20x + 24$ funksiyası verilmişdir.

a) Kvadrat üçhədlini vuruqlara ayırmaqla verilən funksiyanı $y = a(x - p)(x - q)$ şəklində yazın.

b) Ox və Oy oxları ilə kəsişmə nöqtələrini müəyyən edin;

c) Funksiyanın qrafikini qurun.

29 > (10; 0) və (4; 0) nöqtələri təpə nöqtəsinin ordinatı -9 olan parabolun absis oxu ilə kəsişmə nöqtələridir.

a) Funksiyanın düsturunu yazın.

b) Bu parabolun üzərində yerləşməklə simmetriya oxuna nəzərən simmetrik olan üç cüt nöqtənin koordinatlarını yazın.

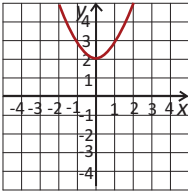
c) Qrafiki qurun.

30 > Hansı qrafikin hansı funksiya aid olduğunu müəyyən edin və qrafikləri dəftərinizdə çəkin.

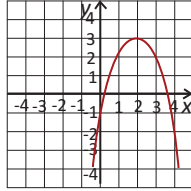
1) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ 2) $g(x) = (x + 3)^2$ 3) $v(x) = (x - 3)^2$ 4) $h(x) = \frac{1}{4}x^2$

5) $t(x) = x^2 + 2$ 6) $s(x) = x^2 - 4$ 7) $p(x) = (x + 1)^2 - 3$ 8) $u(x) = -(x - 2)^2 + 3$

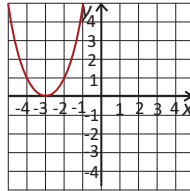
a)



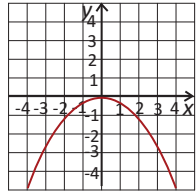
b)



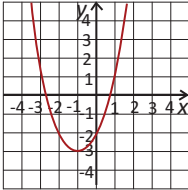
c)



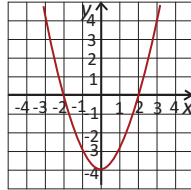
d)



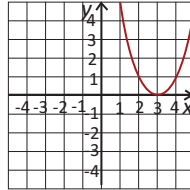
e)



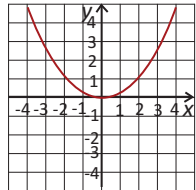
f)



g)



h)



31 > Parabolun koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri verilmişdir. Bu məlumatlara görə parabolun təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

- a) (3; 0), (-1; 0), (0; -6) b) (-2; 0), (-3; 0), (0; 4) c) (-3; 0), (1; 0), (0; 3)

✓ $y = ax^2 + bx + c$ funksiyasının qrafikinə qurulması

$y = ax^2 + bx + c$ şəklində verilmiş istənilən kvadratik funksiya tam kvadrat ayırmaqla $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində göstərilə bilər. Doğrudan da

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

kimi yazıb, $m = -\frac{b}{2a}$, $n = \frac{4ac - b^2}{4a}$ işarə etsək, $y = a(x - m)^2 + n$ alırıq.

$y = ax^2 + bx + c$ parabolasının təpə nöqtəsi $(m; n)$ olur.

Burada $m = \frac{-b}{2a}$, $n = \frac{-D}{4a}$, $D = b^2 - 4ac$

$y = ax^2 + bx + c$ parabolasının simmetriya oxu $x = m$ düz xəttidir.

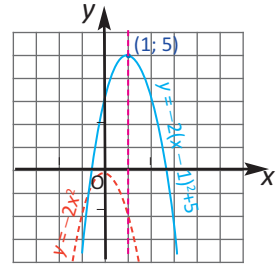
1. Nümunə. Tam kvadrat ayırmaqla $y = -2x^2 + 4x + 3$ funksiyasına uyğun parabolanın təpə nöqtəsinin koordinatlarını və simmetriya oxunun tənliyini yazın.

Həlli. $y = -2x^2 + 4x + 3 = -2 \cdot (x^2 - 2x) + 3 = -2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - 1) + 3 =$
 $= -2 \cdot ((x - 1)^2 - 1) + 3 = -2 \cdot (x - 1)^2 + 2 + 3 = -2 \cdot (x - 1)^2 + 5$

olduğundan verilmiş funksiyanın qrafiki

$y = -2x^2$ parabolasını 1 vahid sağa,
5 vahid yuxarı sürüşdürməklə alınır.

Deməli, parabolanın təpə nöqtəsi $(1; 5)$,
simmetriya oxunun tənliyi $x = 1$ olur.



2. Nümunə. $y = 0,5x^2 - x - 1,5$ funksiyası verilmişdir.

a) Uyğun parabolanın təpə nöqtəsinin koordinatlarını yazın.

b) Simmetriya oxunun tənliyini yazın.

c) Parabolanın koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.

d) Parabolanı qurun.

Həlli. a) $a = 0,5$; $b = -1$; $c = -1,5$;

$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 0,5 \cdot (-1,5) = 4$ olduğundan alırıq:

$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2 \cdot 0,5} = 1; \quad n = \frac{-D}{4a} = \frac{-4}{4 \cdot 0,5} = -2. \text{ Təpə nöqtəsi: } (1; -2)$$

b) Simmetriya oxunun tənliyi: $x = 1$

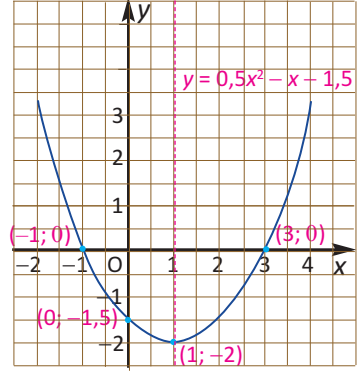
c) $x = 0$ olduqda $y = -1,5$ olur, yəni parabola ordinat oxunu $(0; -1,5)$ nöqtəsində kəsir.

$y = 0$ olduqda $0,5x^2 - x - 1,5 = 0$ tənliyindən

$x_1 = -1, x_2 = 3$ tapılır.

Absis oxu ilə kəsişmə nöqtələri: $(-1; 0)$ və $(3; 0)$

d) təpə nöqtəsini və koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini koordinat müstəvisində qeyd etməklə bu nöqtələrdən keçən parabolanı quraq.



Öyrənmə tapşırıqları

32 > Verilmiş kvadratik funksiyanı $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində yazın.

a) $y = x^2 + 8x + 8$

b) $y = 2x^2 - 16x + 21$

c) $y = -x^2 + 8x - 13$

33 > 1) Verilmiş kvadratik funksiyanı $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində yazın.

2) Uyğun parabolun təpə nöqtəsinin kordinatlarını yazın.

3) Parabolun koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini müəyyən edin.

4) Simmetriya oxunun tənliyini yazın.

5) Parabolanı qurun.

a) $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = -x^2 - 4x + 5$

c) $y = x^2 + 6x + 5$

34 > $f(x) = 2(x + 1)^2 + 2$ və $g(x) = 5(x + 1)^2 + 2$ funksiylarının qrafiklərini qurun. Bu qrafiklərin ortaq və fərqli cəhətlərini araşdırın.

35 > **Açıq tipli sual.** a) Uyğun parabolalarının təpələri $(5; -3)$ nöqtəsində yerləşən iki müxtəlif kvadratik funksiya yazın və qrafiklərini sxematik təsvir edin.

b) Ən böyük qiyməti 5-ə bərabər, uyğun parabolasının simmetriya oxu $x = -3$ olan iki kvadratik funksiya yazın və qrafiklərini qurun.

36 > 1) Funksiyanın qrafikini qurun.

2) Absis oxu ilə kəsişmə nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

3) Simmetriya oxunun tənliyini yazın.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

c) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

✓ $y = ax^2 + bx + c$ funksiyanın araşdırılması

$y = ax^2 + bx + c$ funksiyanın xassələrini onun qrafiki üzərində araşdıraraq.

- Uyğun parabolun qolları $a > 0$ olduqda yuxarı, $a < 0$ olduqda aşağı yönəlidir.
- Parabolun təpə nöqtəsi $(m; n)$ olur. Burada $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{D}{4a}$, $D = b^2 - 4ac$
- Simmetriya oxunun tənliyi: $x = -\frac{b}{2a}$.

- Parabola ordinat oxunu $(0; c)$ nöqtəsində kəsir.
- Parabolun absis oxu ilə ortaq nöqtələrinin sayı $ax^2 + bx + c = 0$ tənliyinin diskriminantının ($D = b^2 - 4ac$) işarəsindən asılıdır:

$D > 0$ olduqda parabola absis oxunu iki nöqtədə kəsir;

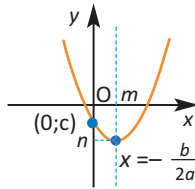
$D = 0$ olduqda təpə nöqtəsi absis oxu üzərində yerləşməklə bir ortaq nöqtəsi var;

$D < 0$ olduqda parabolun absis oxu ilə ortaq nöqtəsi yoxdur.

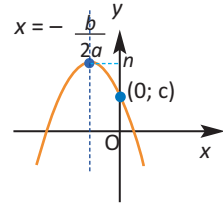
- Təpə nöqtəsinin ordinatının qiyməti (yəni n) $a > 0$ olduqda funksiyanın **ən kiçik qiyməti** (ƏKQ), $a < 0$ olduqda funksiyanın **ən böyük qiyməti** (ƏBQ) olur. Bu qiymətlərə kvadratik funksiyanın uyğun olaraq minimum və maksimum qiymətləri də deyilir.

$a > 0$

$y = ax^2 + bx + c$



$a < 0$
 $y = ax^2 + bx + c$

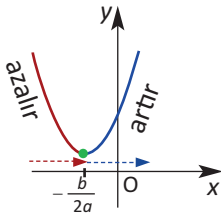


Kvadratik funksiyanın təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. Funksiyanın (y -in) aldığı qiymətlər funksiyanın qiymətlər çoxluğunu əmələ gətirir.

$y = ax^2 + bx + c$ funksiya üçün qiymətlər çoxluğu $a < 0$ olduqda $(-\infty; n]$;

$a > 0$ olduqda isə $[n; +\infty)$ olur. Burada n təpə nöqtəsinin ordinatıdır.

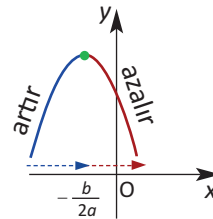
Ümumiyyətlə, verilmiş aralıqda arqumentin böyük qiymətinə funksiyanın böyük qiyməti uyğundursa, bu aralıqda funksiya artandır (qrafik soldan sağa "yuxarı qalxır"). Arqumentin böyük qiymətinə funksiyanın kiçik qiyməti uyğundursa, verilən aralıqda funksiya azalandır (qrafik soldan sağa "aşağı enir").



$a > 0$ olduqda $y = ax^2 + bx + c$ funksiya

$(-\infty; -\frac{b}{2a}]$ aralığında azalır,

$[-\frac{b}{2a}; +\infty)$ aralığında isə artır.



$a < 0$ olduqda $y = ax^2 + bx + c$

funksiya $(-\infty; -\frac{b}{2a}]$ aralığında artır,

$[-\frac{b}{2a}; +\infty)$ aralığında isə azalır.

Öyrənmə tapşırıqları

37> $y = -2x^2 + 4x + 6$ funksiyası verilmişdir. Müəyyən edin:

- uyğun parabolun qollarının istiqamətini;
- koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini;
- simmetriya oxunun tənliyini;
- təpə nöqtəsini;
- funksiyanın ən böyük və ya ən kiçik qiymətini (varsa);
- funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu;
- funksiyanın artma və azalma aralıqlarını.

38> Tam kvadratlar ayırın və 5-ci tapşırığın şərtlərini yerinə yetirin.

- a) $g(x) = x^2 - 8x + 12$ d) $h(x) = x^2 + 4x - 5$ g) $n(x) = 2x^2 + 12x + 13$
 b) $f(x) = 4x^2 + 16x + 19$ e) $p(x) = -3x^2 + 6x - 5$ h) $F(x) = 5x^2 + 10x + 5$
 c) $k(x) = x^2 + 7x + 10$ f) $m(x) = x^2 - x - 6$ i) $Q(x) = -3x^2 + 12x$

39> Funksiyanın ən böyük və ya ən kiçik qiymətini tapın, qiymətlər çoxluğunu göstərin.

- a) $f(x) = 3(x - 5)^2 + 8$ b) $g(x) = -2(x - 1)^2 + 4$ c) $t(x) = -3(x + 7)^2$
 d) $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$ e) $g(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2$ f) $f(x) = -5x^2 + \frac{1}{2}$

40> $y = ax^2 + bx + c$ funksiyasının qrafiki olan parabolun $(m; n)$ təpə nöqtəsinin koordinatları $m = \frac{-b}{2a}$, $n = am^2 + bm + c$ kimi tapıla bilər.

Yalnız təpə nöqtəsinin koordinatlarına görə funksiyanı müəyyən etmək mümkündürmü? Mümkün deyilsə, daha hansı məlumat verilsə, tələb olunan funksiyanı yazmaq olar? Cavabınızı nümunələr üzərində təqdim edin.

41> Verilmiş funksiya uyğun parabolun təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

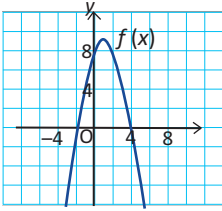
- a) $y = x^2 + 4x + 3$ b) $y = 2x^2 + 16x + 7$ c) $y = 5x^2 + 50x + 7$
 d) $y = 7x^2 - 14x + 21$ e) $y = 3x^2 - 18x + 12$ f) $y = -6x^2 + 24x + 24$

42> Kvadratik funksiyanın ən böyük qiyməti 20-dir. Qrafikin absis oxu ilə kəsişmə nöqtələri $(-15; 0)$ və $(25; 0)$ olarsa, kvadratik funksiyanı əvvəlcə $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində, sonra isə ümumi şəkildə yazın.

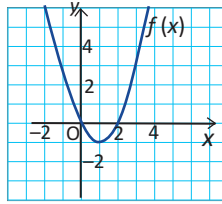
43> Kvadratik funksiyanın qrafikinə görə müəyyən edin:

- simmetriya oxunun tənliyini;
- maksimum və ya minimum qiymətini;
- təpə nöqtəsini;
- təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu;
- x və y oxu ilə kəsişmə nöqtələrini;
- artma, azalma aralıqlarını.

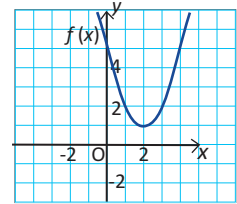
a) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$



b) $f(x) = x^2 - 2x$



c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$



44> **Araşdırma.** 1) $c = 0; 1; 2; -1; -2$ olduqda $y = x^2 - 4x + c$ parabolalarını eyni koordinat müstəvisində qurun. Ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsi və təpə nöqtəsinin koordinatları necə dəyişir?

2) $b = 0; 2; 4; -2; -4$ qiymətləri üçün $y = x^2 + bx + 4$ parabolalarını eyni koordinat müstəvisində qurun. b -nin qiymətinin funksiyanın qrafikini necə dəyişdirdiyini araşdırın.

45> Aşağıdakı fikirlərdən hansı doğru, hansı səhvdir?

- 1) Əgər $y = x^2$ parabolasını 2 vahid sağa, 1 vahid aşağı sürüşdürsək, $y = x^2 - 4x + 3$ funksiyanın qrafikini alarıq.
- 2) $y = x^2 - x + 3$ parabolası Oy oxunu absis oxundan aşağıda kəsir.
- 3) $y = 14 - x^2 - 2x$ funksiyanın ən böyük qiyməti 15-ə bərabərdir.

46> b və c -nin hansı qiymətlərində $y = x^2 + bx + c$ parabolası:

- a) absis oxunu $(-1; 0)$ və $(3; 0)$ nöqtələrində kəsir;
- b) absis oxunu $(1; 0)$, ordinat oxunu $(0; 3)$ nöqtəsində kəsir;
- c) absis oxuna $(2; 0)$ nöqtəsində toxunur?

47> v_0 ($\frac{m}{san}$) başlanğıc sürəti ilə yuxarı atılmış topun yer səthindən h (metrlə) məsafəsinin t uçuş müddətindən (saniyə ilə) asılılığı $h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$ düsturu ilə verilmişdir.

- a) Topun ən yüksək hündürlüyə $t = \frac{v_0}{g}$ saniyədə çatacağını əsaslandırın.
- b) Topun qalxdığı ən yüksək hündürlüyün $\frac{v_0^2}{2g}$ (metr) olduğunu göstərin.

48> **Açıq tipli sual.** Elə kvadratik funksiya yazın ki, qiymətlər çoxluğu verilmiş ədəddən kiçik olmayan bütün həqiqi ədədlər çoxluğu olsun.

3-2

Kvadratlik funksiyanın tətbiqi ilə məsələ həlli

1. **Nümunə.** Perimetri 200 m olan düzbucaqlı hansı ölçülərdə olsa, sahəsi ən böyük olar?

Həlli.

1. Tutaq ki, perimetri 200 m olan düzbucaqlının uzunluğu x -dir. Düzbucaqlının eni və uzunluğu arasındakı asılılığı göstərən ifadəni yazaq:

$$b = (200 - 2x) : 2 = 100 - x$$

2. Düzbucaqlının sahəsinin onun uzunluğundan asılılığını göstərən funksiyayı yazaq: $S(x) = x(100 - x)$ və ya $S(x) = -x^2 + 100x$

3. $S(x) = -x^2 + 100x$ funksiyasından tam kvadrat ayıraq:

$$S(x) = -x^2 + 100x - 2500 + 2500 = -(x - 50)^2 + 2500$$

4. $a = -1 < 0$ olduğundan $S(x)$ funksiyası ən böyük qiymətini $x = 50$ olduqda alır və bu qiymət 2500-ə bərabər olur. Buradan görünür ki, perimetri 200 m olan düzbucaqlının sahəsinin ən böyük olması üçün onun uzunluğu 50 m-dirsə, eni də 50 m olmalıdır (yəni kvadrat olmalıdır).

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > **Sahə.** Eldar müxtəlif düzbucaqlılar çəkir. Lakin bu düzbucaqlıların uzunluğu və eninin cəmi həmişə 12 sm-dir.
- En və uzunluğun müxtəlif qiymətlərində sahəni hesablamaqla cədvəl qurun.
 - Düzbucaqlının enini x qəbul etməklə sahəsinə göstərən ifadəni yazın.
 - Düzbucaqlının sahəsinin enindən asılılığını funksiya şəklində yazın.
 - Düzbucaqlının eni neçə santimetr olduqda sahəsi ən böyük olar?
- 2 > Katetlərinin uzunluqları cəmi 14 sm olan düzbucaqlı üçbucağın sahəsinin ən böyük qiymətini tapın.
- 3 > Turistlər dənizdə voleybol yarışı keçirmək üçün bir tərəfi sahil xətti olmaqla düzbucaqlı şəklində oyun sahəsinə müəyyənləşdirməlidirlər. Onlar üzərində xüsusi nişanlar qoyulmuş 60 metr uzunluqda ipi bu düzbucaqlının qalan üç tərəfinə işlətməklə ən böyük sahəni əhatə etmək istəyirlər. Oyun sahəsi hansı ölçülərdə olmalıdır?
- 4 > a) 12 ədədini elə iki toplananın cəmi şəklində göstərin ki, bu ədədlərin kvadratları cəmi ən kiçik olsun.
b) Özü ilə kvadratının cəmi ən kiçik olan ədədi tapın.

- 2. Nümunə.** Bir idman köynəyinin qiyməti 8 manat olarsa, mağaza gündə 10 köynək satır. Mağaza sahibi düşünür ki, bir köynəyin qiymətinin hər dəfə 2 manat ucuzlaşması gündəlik daha 5 köynəyin artıq satılmasına gətirə bilər. Köynəyin qiyməti neçə manat olsa, satışdan daxil olan pul maksimum olar?

Həlli.

1. 2 manatlıq ucuzlaşmaların sayını x qəbul etsək, bu ucuzlaşmalardan sonra bir köynəyin qiyməti $(8 - 2x)$ olar.

2. Gündəlik satılan köynəklərin sayı isə $(10 + 5x)$ olur.

3. **Satışdan daxil olan pul = bir köynəyin qiyməti \times köynəklərin sayı**

$$S(x) = (8 - 2x)(10 + 5x) = 80 + 40x - 20x^2 - 10x^2 = -10x^2 + 20x + 80$$

$S(x) = -10x^2 + 20x + 80$ funksiyası satışdan daxil olan pulu ifadə edir.

$S(x)$ funksiyasını tam kvadratın ayrılışı ilə $S(x) = -10(x - 1)^2 + 90$ şəklində yazaq.

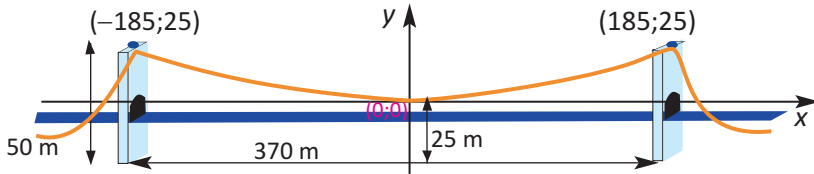
$x=1$ olduqda $S(x)$ funksiyası 90-a bərabər olan ən böyük qiymətini alır.

Deməli, idman köynəyinin biri $8 - 1 \cdot 2 = 6$ manata satılarsa, köynəklərin satışından daxil olan pul maksimum 90 manat olar (mağaza sahibinin düşüdükləri doğrudursa).

Öyrənmə tapşırıqları

- 5 >** Konsertə satılan biletlərin sayı (N) ilə biletlərin satıldığı günlər (n) arasında asılılıq $N(n) = -10n^2 + 60n + 200$ kimidir. Neçənci gün ən çox bilet satılmışdır? Həmin gün satılan biletlərin sayını tapın.
- 6 >** **Biznes. Maksimum mədaxil.** Sərnişindəşımaya ilə məşğul olan nəqliyyat şirkəti gündəlik 200 sərnişinə xidmət göstərir. Bir biletin qiyməti 5 manatdır. Şirkət sahibi düşünür ki, hər 50 qəpik qiymət artımı 10 sərnişinin azalmasına gətirir.
- a) Şirkət neçə dəfə belə bahalaşma aparsa, bilet satışından maksimum mədaxil əldə edər?
- b) Bu bahalaşmalarla şirkətin gündəlik mədaxili ən çoxu neçə manat ola bilər?
- 7 >** Bir qrup universitet tələbəsi kompüter detali istehsal edən şirkət açmışlar. Onların bu istehsaldan əldə etdikləri gəliri (manatla)
- $$P(x) = -2x^2 + 100x - 800$$
- funksiyası ilə ifadə etmək olar. Burada
- x
- , həftə ərzində istehsal olunan detalların sayını göstərir.
- a) Verilən funksiyanın qrafikinə Ox və Oy oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını tapın. Bu koordinatlar reallıqda hansı informasiyanı ifadə edir?
- b) $P(x)$ funksiyasına uyğun parabolun təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapın. Bu koordinatlar reallıqda hansı informasiyaya uyğun gəlir?
- 8 >** **Araşdırma.**
- <http://questgarden.com/127/37/4/110617141445/process.htm> və <http://passyworldofmathematics.com/sydney-harbour-bridge-mathematics/> ünvanından körpü konstruksiyasına aid filmləri evdə və ya sınıfdə izləyin.

3. **Nümunə.** Körpünün ağırlığını saxlayan tros (məftil) aralarındakı məsafə 370 m olan iki dirəyə bərkidilmişdir. Məftil parabola formasında olmaqla ən aşağı nöqtəsinin yerdən səviyyəsi 25 m-dir. Hər bir dirəyin hündürlüyü 50 m-dir. Bərkidici məftil üzərində dirəklərdən birindən üfüqi olaraq 60 m məsafədə olan nöqtə yerdən hansı hündürlükdədir?



Həlli: a) Uyğun sxematik parabolunu çəkin. Üzərində məsələdə verilən məlumatları qeyd edin. Koordinat başlanğıcını $(0; 0)$ parabolunun tərə nöqtəsində (bərkidici məftilin ən aşağı nöqtəsində) yerləşdirin.

Koordinat başlanğıcından dirəklərə qədər məsafə və dirəklərin hündürlüyünə uyğun məlumatlar: $(-185; 25)$, $(185; 25)$

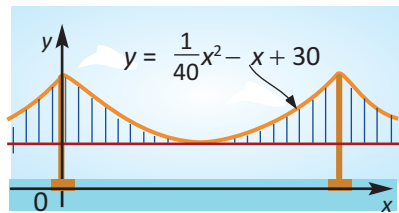
b) Bərkidici məftilin formasını $f(x) = ax^2$ ilə ifadə etmək olar. $(185; 25)$ nöqtəsinə görə a -nı tapın. $25 = a \cdot 185^2$, $a = \frac{25}{185^2}$, $f(x) = \frac{1}{1369}x^2$

c) Dirəklərdən birindən 60 m məsafədə olan nöqtə parabolunun tərə nöqtəsindən $185 - 60 = 125$ (m) məsafədədir.

$f(125) = \frac{1}{1369} \cdot 125^2 = \frac{15625}{1369} \approx 11,4$ m olduğundan göstərilən nöqtə yerdən təqribən 36,4 m hündürlükdədir.

Öyrənmə tapşırıqları

- 9 > Körpünü saxlayan tros məftilin iki dirək arasındakı parabola formalı hissəsi üzərində olan bərkitmə nöqtələrinin sol dirəkdən məsafəsinin dəyişməsi ilə su səthindən hündürlüyünün (m-lə) dəyişməsi arasındakı asılılıq $y = \frac{1}{40}x^2 - x + 30$ funksiyası ilə müəyyən edilir. Tros məftilin orta nöqtəsi körpünün üzərindədir. Köprü su səthindən neçə metr hündürlükdədir?



- 10 > 1) Yuxarı atılan topun qalxdığı hündürlüyün (metrlə) t zamanından (saniyə ilə) asılılığı $h = -5t^2 + 20t + 1$ düsturu ilə verilmişdir.
- Atıldıqdan neçə saniyə sonra top 16 m hündürlükdə olacaq?
 - Topun qalxdığı ən yüksək hündürlüyü tapın.
 - Top neçə saniyə havada qalacaq?
- 2) Səh. 51-də verilmiş araşdırma tapşırığının həllini yerinə yetirin.

Araşdırma

Çadırın girişinin forması absis oxunu yer səthində, çadırın oturacağında götürməklə $y = -2,5|x - 0,6| + 1,5$ funksiyası ilə modelləşdirilə bilər. Burada x və y metrə ölçülür.

- Funksiyanın qrafikini qurun.
- Funksiyanın (y) və arqumentin (x) aldığı qiymətləri real situasiyaya uyğun təqdim edin.

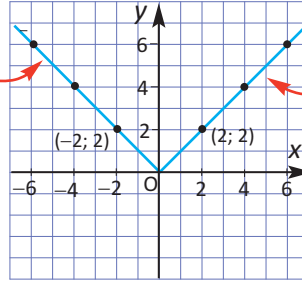


3-3 y = |x| funksiyası və onun qrafiki

Mütləq qiymətin tərifinə görə $|x| = \begin{cases} x, & \text{əgər } x \geq 0 \\ -x, & \text{əgər } x < 0 \end{cases}$ olduğundan aydındır ki, $y = |x|$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunub, mənfi olmayan qiymətlər alır. $y = |x|$ funksiyasının qrafikini quraq.

x	y = x
-6	-6 = 6
-4	-4 = 4
-2	-2 = 2
0	0
2	2 = 2
4	4 = 4
6	6 = 6

$x \leq 0$ olduqda $y = |x|$ -in qrafiki $y = -x$ funksiyasının qrafiki ilə üst-üstə düşür.



$x \geq 0$ olduqda $y = |x|$ -in qrafiki $y = x$ funksiyasının qrafiki ilə üst-üstə düşür.

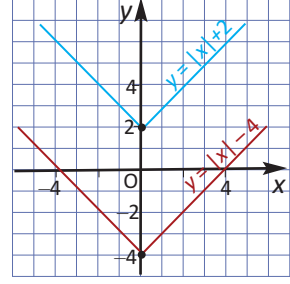
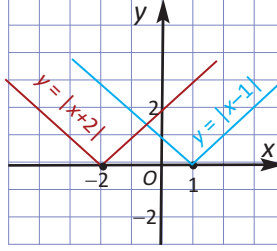
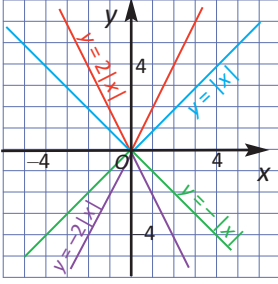
$y = |x|$ funksiyasının qrafiki I və II rüblərin tən bölənləridir. (0; 0) nöqtəsi qrafikin təpə nöqtəsidir. $y = |x|$ funksiyasının qrafiki Oy oxuna nəzərən simmetrikdir, çünki qrafikin hər bir (x ; y) nöqtəsi ilə Oy oxuna nəzərən simmetrik olan ($-x$; y) nöqtəsi də qrafikə aiddir. Məsələn, (2; 2) (-2; 2) nöqtələri qrafik üzərində yerləşir və bu nöqtələr ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir.

1. Nümunə.

- $y = |x|$, $y = 2|x|$ və $y = -|x|$, $y = -2|x|$ funksiyalarının eyni koordinat sistemində qurulmuş qrafiklərini araşdırın.
- $y = |x + 2|$, $y = |x - 1|$, $y = |x| + 2$ və $y = |x| - 4$ funksiyalarının qrafiklərini araşdırın.

Həlli. a) $y = |x|$ funksiyasının qrafiki üzərindəki hər bir nöqtənin absisini dəyişmədən ordinatını 2 dəfə artırırsa, $y = 2|x|$ funksiyasının qrafiki üzərindəki nöqtələr alınır. Qrafiki əmələ gətirən şüaların yaratdığı bucaq kiçilir. $y = -|x|$ və $y = -2|x|$ funksiyalarının qrafikləri uyğun olaraq, $y = |x|$ və $y = 2|x|$ funksiyalarının qrafiklərinin absis oxuna nəzərən simmetriya çevrilməsi ilə alınır.

b) $y = |x|$ funksiyasının qrafikini 2 vahid sola sürüşdürsək $y = |x + 2|$ funksiyasının qrafikini, 1 vahid sağa sürüşdürsək, $y = |x - 1|$ funksiyasının qrafikini alırıq. $y = |x|$ funksiyasının qrafikini 2 vahid yuxarı sürüşdürdükdə $y = |x| + 2$ funksiyasının qrafikini, 4 vahid aşağı sürüşdürdükdə isə $y = |x| - 4$ funksiyasının qrafiki alınır.

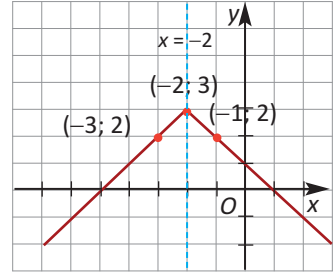


Bu qrafiklərə görə aşağıdakı ümumiləşdirmələri aparmaq olar.

- $y = a|x - m| + n$ funksiyasının qrafiki $y = a|x|$ funksiyasının qrafikinin $|m|$ vahid üfüqi ($m > 0$ olduqda sağa, $m < 0$ olduqda sola), $|n|$ vahid şaquli ($n > 0$ olduqda yuxarı, $n < 0$ olduqda aşağı) olaraq sürüşdürülməsidir.
- $(m; n)$ qrafikin təpə nöqtəsidir və qrafik $x = m$ xəttinə nəzərən simmetrikdir.
- $a > 0$ olduqda qrafiki təşkil edən şüalar yuxarıya doğru, $a < 0$ olduqda aşağıya doğru yönəlir.

1. Nümunə. $y = -|x + 2| + 3$ funksiyasının qrafikini qurun.

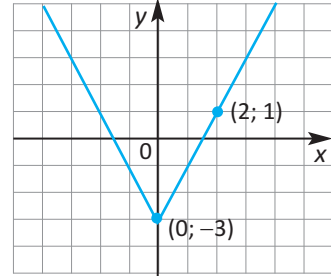
- Həlli.** 1. Qrafikin $(-2; 3)$ təpə nöqtəsini koordinat müstəvisi üzərində qeyd edin.
2. Funksiyaya uyğun hər hansı başqa bir nöqtəni, məsələn, $(-3; 2)$ nöqtəsini qeyd edin.
3. $x = -2$ simmetriya xəttinə görə $(-3; 2)$ nöqtəsinə simmetrik olan $(-1; 2)$ nöqtəsini qeyd edin.
4. $a = -1 < 0$ olduğu üçün şüaların aşağıya doğru yönəldiyini nəzərə almaqla, qeyd edilmiş üç nöqtəyə görə qrafiki çəkin.



2. Nümunə. Qrafikə və verilən nöqtələrə görə uyğun funksiyanı yazın.

Həlli.

1. Qrafikin təpəsi $(0; -3)$ nöqtəsindədir.
2. $y = a|x - m| + n$ düsturunda m və n -nin yerinə uyğun olaraq 0 və -3 qiymətlərini yazaq:
 $y = a|x - 0| + (-3); y = a|x| - 3$
- Qrafik üzərindəki $(2; 1)$ nöqtəsinin koordinatlarını $y = a|x| - 3$ düsturunda yerinə yazaq:
 $1 = a|2| - 3; 1 = 2a - 3; 4 = 2a; a = 2$
- Qrafikə uyğun funksiya $y = 2|x| - 3$ olacaq.



Yoxlama: Bunun üçün $y = 2|x| - 3$ funksiyasının qrafikini qurun. Qrafikin qollarının yuxarı yönələcəyinə, həmçinin $y = |x|$ -in qrafikinə nəzərən ordinat oxuna daha çox sıxılmış olacağına diqqət edin.

Öyrənmə tapşırıqları

1 > $y = |x|$ funksiyasının qrafikini sürüşdürməklə $y = |x + 2|$; $y = |x - 2|$ və $y = |x| + 2$; $y = |x| - 2$ funksiyalarının qrafiklərini qurun və ümumiləşdirilmiş fikirlərinizi yazın.

2 > 1) Verilən funksiya üçün qrafikin qollarının aşağıya və ya yuxarıya yönəldiyini, qrafiki əmələ gətirən şüaların yaratdığı bucağın $y = |x|$ funksiyasının qrafikinə nəzərən kiçildiyini və ya böyüdüyünü, yoxsa dəyişmədiyini müəyyən edin.
2) Funksiyanın qrafikini qurun.

a) $y = \frac{1}{2}|x|$

c) $y = |x + 5|$

e) $y = |x| - 6$

b) $y = |x| + 4$

d) $y = 2|x + 3| - 5$

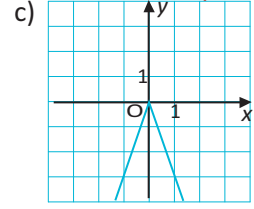
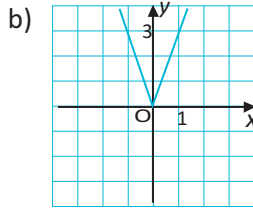
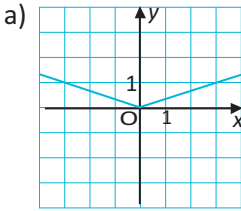
f) $y = -|x - 3| + 5$

3 > Hansı qrafik hansı funksiya uyğundur?

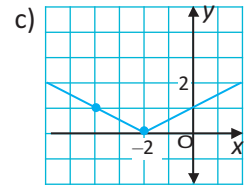
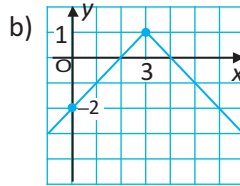
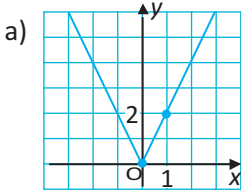
1) $f(x) = 3|x|$

2) $f(x) = -3|x|$

3) $f(x) = \frac{1}{3}|x|$



4 > Qrafiklərə uyğun funksiyaları yazın.



5 > İdman malları mağazasının üzgüçülük kostyumları və avadanlıqları satışından əldə etdiyi mədaxil (min manatla) $M(t) = -0,9|t - 6| + 5$ funksiyası ilə dəyişir. Burada t (aylarla) vaxtı göstərir.

a) Bu funksiyanın qrafikini $0 \leq t \leq 12$ qiymətlərində qurun.

b) Neçənci ayda satış maksimum olmuşdur? Həmin aydakı mədaxili tapın.

6 > Bir çox qrafikalkulyatorlarda modul işarəsi **abs** kimi işarələnir. Qrafikalkulyatorun köməyiylə funksiyaların qrafiklərini qurun.

$y = -|x - 2| + 5;$

$y = -3,2|x| + 7$

$y = |0,5x - 3| + 2$

$y = 1,75|x + 1,5| - 3,5;$

$y = 1,5|x - 3| + 6$

$y = 1,2|2x - 3|$

7 > Verilən funksiyalara görə tapşırıqları yerinə yetirin.

- 1) Qrafikin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini (varsa) tapın;
- 2) Qrafikləri eyni koordinat müstəvisində qurun.
- 3) Təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu müəyyən edin.

a) $y = |3x|$ və $y = 3|x|$

b) $y = |-4x|$ və $y = 4|x|$

c) $y = |x - 6|$ və $y = |x| - 6$

d) $y = |x + 2|$ və $y = |x| + 2$

8 > a) $f(x) = |3x - 2|$ və $g(x) = |-3x + 2|$ funksiyalarının qrafiklərini qurun. Bu iki qrafik haqqında fikirlərinizi yazın.

b) Qrafiki $f(x) = |2x + 1|$ funksiyasının qrafiki ilə üst-üstə düşən $g(x) = |ax + b|$ şəklində olan başqa bir funksiya yazın.

9 > Səhifə 70-də verilmiş araşdırma tapşırığının həllini aşağıdakı addımlarla yerinə yetirin.

- 1) Qrafikin tərə nöqtəsini koordinat müstəvisində qeyd edin;
- 2) $-2,5|x - 0,6| + 1,5 = 0$ tənliyini həll etməklə qrafikin absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrini tapın və koordinat müstəvisində qeyd edin;
- 3) $a = -2,5 < 0$ olduğu üçün şüaların aşağıya doğru yönəldiyini nəzərə almaqla qeyd edilmiş nöqtələrə görə qrafiki qurun.
- 4) Girişin ölçülərini müəyyən edin.

Praktik məşğələ. 1) $3^3 = 27$, $4^3 = 64$ bərabərliklərindən istifadə etməklə 12^3 -nü hesablayın. Oxşar üsulla 18^3 -nü tapın.

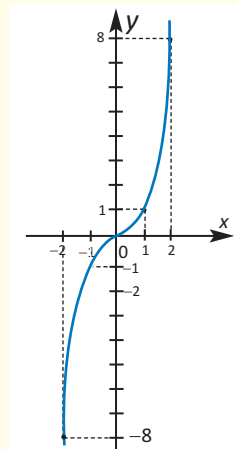
2) Ədədi 10 dəfə artırısaq və ya azaltsaq, onun kubu necə dəyişər? Gəldiyiniz nəticəyə əsaslanaraq, $0,5^3$ -nü, 50^3 -nü tapın.

3) Cədvəli dəftərinizdə tamamlayın.

x	-2		-0,5	0	0,5		
$y = x^3$		-1	-0,125	0		1	8

4) Koordinat müstəvisində absisləri x -in cədvəldəki qiymətlərinə, ordinatları isə y -in uyğun qiymətlərinə bərabər olan nöqtələri qurun və bu nöqtələri şəkildə göstərildiyi kimi səlissə əyri ilə birləşdirin.

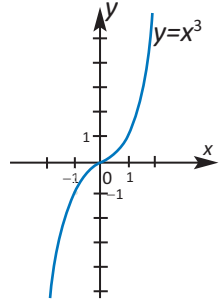
5) x -ə daha bir neçə, məsələn 1,5; -1,5 və s. qiymətləri verməklə, y -in uyğun qiymətlərini tapın və koordinatları uyğun ədədlər olan nöqtələrin də bu əyrinin üzərində yerləşdiyini dəqiqləşdirin.



3-4

y = x³ funksiyası və onun qrafiki

$y = x^3$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunub və x -in mənfi qiymətlərində mənfi (mənfi ədədin kubu mənfi ədəddir), müsbət qiymətlərində müsbət qiymətlər alır (müsbət ədədin kubu müsbət ədəddir), $x = 0$ olduqda isə $y = 0$ olur. Yəni, $y = x^3$ funksiyasının həm təyin oblastı, həm də qiymətlər çoxluğu bütün həqiqi ədədlərdir.



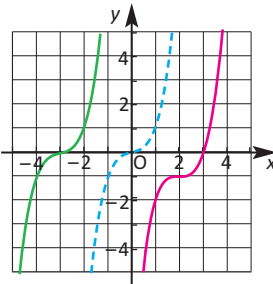
y = x³ funksiyasının qrafiki kub parabola adlanır.

Kub parabola koordinat başlanğıcından keçməklə, I və III rüblərdə yerləşir. Arqumentin x qiymətini onun $-x$ əks qiyməti ilə əvəz etsək, onda funksiya da əks qiymətlər alacaq: $y = x^3$ olduğuna görə $(-x)^3 = -x^3 = -y$ alınacaqdır. Deməli, qrafikin hər bir $(x; y)$ nöqtəsinə həmin qrafikdə koordinat başlanğıcına görə simmetrik olan $(-x; -y)$ nöqtəsi uyğundur. Beləliklə, $y = x^3$ funksiyasının qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir.

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > a) $A(-2; 8)$, $B(2; 8)$, $C(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{8})$, $D(-3; -27)$ nöqtələrindən hansılar $y = x^3$ funksiyasının qrafiki olan kub parabola üzərində yerləşir?
 - b) Kub parabola üzərində ordinatı 8; -1 olan neçə nöqtə var?
 - c) m -in hansı qiymətində kub parabola $N(m; -8)$ nöqtəsindən keçir?
- 2 > a) Arqumentin hansı qiymətində $y = x^3$ funksiyasının qiyməti 6-ya bərabərdir?
 - b) $y = x^3$ funksiyasının qrafikini qurun. Qrafikin üzərində ordinatı 6-ya bərabər olan nöqtənin absisinin təqribi qiymətini tapın.
 - c) Əvvəlki bəndlərdə aldığınız nəticələri müqayisə edin.
- 3 > $y = x^3$ və $y = 2 - x$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun, kəsişmə nöqtəsini göstərin

- 4 > Şəkilə $y = x^3$, $y = (x + 3)^3$, $y = (x - 2)^3 - 1$ funksiyalarının qrafikləri təsvir edilmişdir. Hər bir qrafikin hansı funksiya aid olduğunu müəyyən edin.



- 5 > $y = x^3 + n$ funksiyasının qrafiki $N(-1; 1)$ nöqtəsindən keçir. $A(1; 3)$, $B(0; 0)$, $C(-2; -8)$, $D(-2; -6)$ nöqtələrindən hansılar bu funksiyanın qrafiki üzərindədir?
- 6 > Tili 4 sm olan kubun həcmi hesablayın.
 - a) Bu kubun tillərinin uzunluqlarını 2 dəfə artırırsa, həcmi neçə olar?
 - b) Verilmiş kubun tillərini 1 sm artırırsa, həcmi nə qədər dəyişər?

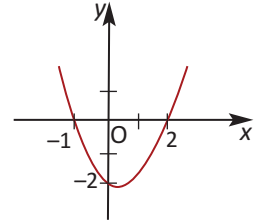


Ümumiləşdirici tapşırıqlar

- 1 > $y = x^2$ parabolasını 3 vahid sola, 2 vahid aşağı sürüşdürükdə hansı funksiyanın qrafiki alınır ?
- 2 > a) b və c -nin hansı qiymətlərində $y = x^2 + bx + c$ parabolası A $(-1; 6)$ və B $(0; 2)$ nöqtələrindən keçir ?
b) $y = x^2 - 2x - 15$ funksiyanın qrafiki koordinat oxlarını hansı nöqtələrdə kəsir?
- 3 > a) k -nin hansı qiymətində $y = x^2 + 6x + k$ funksiyanın ən kiçik qiyməti 1-ə bərabərdir?
b) $y = x^2 - 2x + 3$ funksiyanın qiymətlər çoxluğunu göstərin .

- 4 > $y = x^2 + bx + 3$ parabolasının təpə nöqtəsinin ordinatı -1 -ə bərabər olarsa, b -ni tapın və qrafiki qurun. Neçə hal mümkündür?

- 5 > Şəkildə verilmiş parabolaya uyğun kvadratik funksiyanı yazın.



- 6 > Uyğunluğu müəyyən edin.

1. $y = (x - 2)^2 + 3$

2. $y = (x + 2)^2 + 1$

3. $y = -(x - 3)^2 + 3$

A) ən kiçik qiyməti 3-ə bərabərdir.

B) ən böyük qiyməti 3-ə bərabərdir.

C) ən kiçik qiyməti $x = -2$ olduqda alır.

D) $[3; +\infty)$ aralığında azalır.

- 7 > Yerdən $v_0 = 20$ m/san sürətlə yuxarı atılmış topun qalxdığı hündürlüyün (metrlə) t (san) uçuş zamanından asılılığı $h(t) = -5t^2 + 20t$ düsturu ilə verilir.

a) Zamanın hansı anlarında top yerdən 15 m hündürlükdə olar?

b) Topun qalxdığı ən yüksək hündürlüyü tapın.

c) Atıldıqdan neçə saniyə sonra top ən yüksəkdə olacaq?

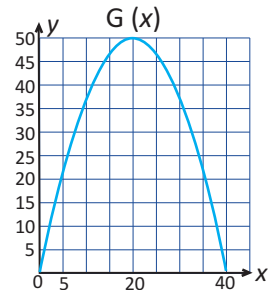
- 8 > **Biznes. Maksimum gəlir.** Araşdırmalar nəşriyyatın gəlirinin $G(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 5x$ funksiyası ilə dəyişdiyini aşkar etdi.

Burada x satılan kitabların sayını (minlərlə), $G(x)$ isə uyğun gəliri (min manatla) göstərir.

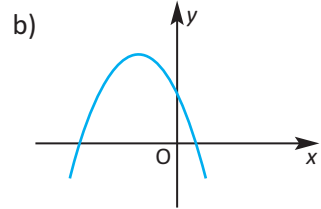
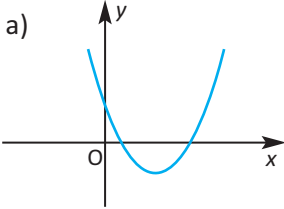
a) Nəşriyyat neçə kitabın satışından 32 min manat gəlir əldə etmişdir?

b) Nəşriyyat ən yüksək gəlirini neçə kitab satmaqla əldə etmişdir?

c) a bəndində aldığınız iki cavabı necə izah edərdiniz?

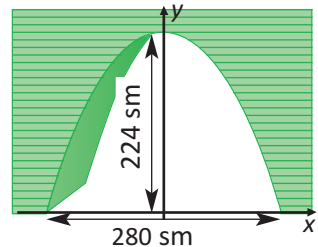


- 9 > Fermer 100 m uzunluqda hasar materialını bir tərəfi çayın sahil xətti olan düzbucaqlı şəkildə sahənin qalan üç tərəfinə işlətməklə mümkün qədər böyük ərazini əhatə etmək istəyir. O, bu düzbucaqlının ölçülərini necə müəyyən edə bilər?
- 10 > a) $y = x^2 + bx + c$ parabolasının təpə nöqtəsi $T(6; -12)$ olarsa, b və c -ni tapın.
b) $y = -x^2 + bx + c$ funksiyası 4-ə bərabər olan ən böyük qiymətini $x = 1$ olduqda alır. b və c -i tapın.
- 11 > Şəkildə verilən $y = ax^2 + bx + c$ funksiyasının qrafikinə görə a , b , c əmsallarının işarələrini müəyyən edin.



- 12 > Çadırın öndən görüntüsünü $y = -\frac{3}{4}|x - 2| + 1,5$ funksiyası ilə ifadə etmək olar. Burada x və y metrle ölçülür. Ox oxunu yer səthində, çadırın oturacağında qəbul edin. Çadırın öndən görünüşü hansı ölçülərdədir?
- 13 > $f(x) = |ax + b|$ funksiyasının qrafiki absis oxunu $(\frac{3}{2}; 0)$ ordinat oxunu $(0; 6)$ nöqtəsində kəirsə, a və b -nin qiymətlərini tapın.
- 14 > Musiqi qrupunun yeni çıxan musiqi albomunun satışı əvvəlcə sabit sürətlə artdı, sonra isə eyni sürətlə azaldı. Satılan albomların sayını n (yüzlərlə) ilə işarə etsək, onun dəyişməsini $n = -2|t - 20| + 40$ kimi yazmaq olar. Burada t (həftələrlə) vaxtı göstərir.
a) Bu funksiyanın qrafikini $0 \leq t \leq 40$ qiymətlərində qurun;
b) Neçənci həftədə ən çox albom satılmışdır? Həmin həftədə neçə albom satılıb?
- 15 > $y = x^3$ və $y = |x + 1| - 1$ funksiyalarının qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurun, kəsişmə nöqtələrinin sayını müəyyən edin.

- 16 > 1) Koordinat sistemini şəkildə göstərildiyi kimi qəbul etməklə tağın şəkildə verilən ölçülərinə uyğun kvadratik funksiyayı yazın.
2) Tağın bir tərəfindən: a) 70 sm; b) 1m 20 sm məsafədə olan nöqtələrdə tağın hündürlüyünü tapın.

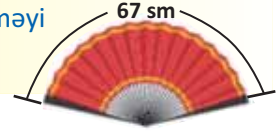


4

Çevrənin tənliyi

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz

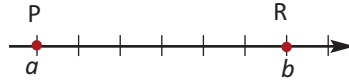
- ✓ Koordinatları ilə verilmiş iki nöqtə arasındakı məsafəni hesablamağı
- ✓ Verilmiş mərkəzinə və radiusuna görə çevrənin tənliyini yazmağı
- ✓ Tənliyi verilmiş çevrənin mərkəzini və radiusunu müəyyən etməyi
- ✓ Sektorun və seqmentin sahəsinə aid məsələlər həll etməyi



4-1

İki nöqtə arasındakı məsafə düsturu

• Ədəd oxu üzərində



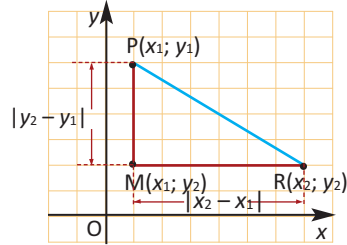
$$PR = |a - b| \text{ və ya } PR = |b - a|$$

• Koordinat müstəvisi üzərində

$P(x_1; y_1)$ və $R(x_2; y_2)$ nöqtələri arasındakı məsafə

$$PR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

düsturu ilə hesablanır.



Düsturun doğruluğunu $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ halı üçün

göstərək. P və R nöqtələrindən koordinat oxlarına

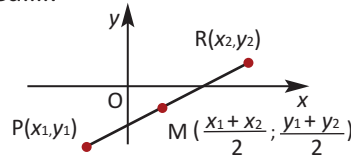
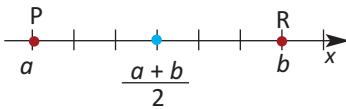
paralellər keçirib, alınan MPR düzbucaqlı üçbucağında Pifaqor teoremini tətbiq

edək: $PR^2 = MR^2 + MP^2$. Burada MR və MP katetlərinin uzunluqlarının uyğun

olaraq $|x_2 - x_1|$ və $|y_2 - y_1|$ olduğunu nəzərə alsaq, $PR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ olar.

Bu düstur P və R nöqtələri koordinat oxlarından hər hansı birinə paralel düz xətt üzərində olduqda da doğrudur (bunu özünüz göstərin).

İki nöqtə arasındakı məsafəyə aid məsələlər həllində parçanın orta nöqtəsinin koordinatları düsturundan da tez-tez istifadə edilir.



Nümunə. $A(-2;3)$ və $B(1;-1)$ nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

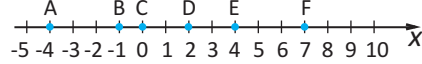
Həlli. İki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə alırıq:

$$AB = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Öyrənmə tapşırıqları

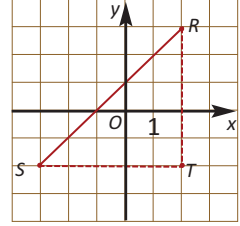
1 > Ədəd oxu üzərində verilən nöqtələr arasındakı məsafəni hesablayın.

a) A və D b) B və E c) C və F



2 > R və S nöqtələri arasındakı məsafəni iki üsulla hesablayın:
1) Koordinat müstəvisi üzərində vahid damaları sayaraq Pifaqor teoremini tətbiq etməklə.

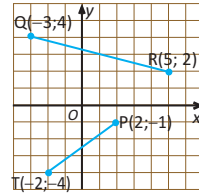
2) R və S nöqtələrinin koordinatlarını şəklə görə müəyyən edərək, iki nöqtə arasındakı məsafə düsturunu tətbiq etməklə.



3 > Verilən nöqtələr arasındakı məsafəni hesablayın.

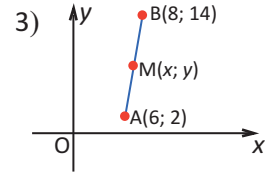
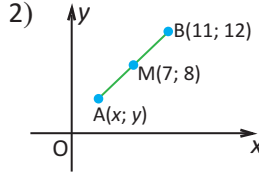
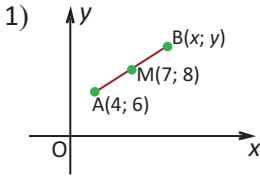
a) 1) A(-1; 3) və B(5; 11);
2) C(-3; 2) və D(1; 5);
3) E(6,5; -2,4) və F(-5,5; 2,6).

b)



4 > M nöqtəsi AB parçasının orta nöqtəsidir. Verilənlərə görə tapın:

a) dəyişənlərin qiymətlərini; b) AB parçasının uzunluğunu.



5 > RT parçasının R uc nöqtəsinin və S orta nöqtəsinin koordinatları verilmişdir.

a) T nöqtəsinin koordinatlarını müəyyən edin.

b) RT parçasının uzunluğunu müxtəlif üsullarla tapın.

1) R(-1; -3), S(-1; 2)

2) R(2; 6), S(-1; 2)

3) R(-3; 0), S(2; 12)

6 > Tərələri verilən nöqtələrdə yerləşən fiqurların perimetrini tapın.

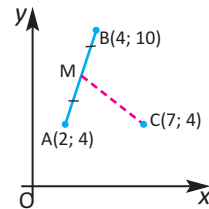
1) $\triangle ABC$

A(-2; -1), B(2; 2), C(6; -1)

2) ABCD dördbucaqlısı

A(-4; -3), B(0; -2), C(-1; 2), D(-5; 1)

7 > M nöqtəsi AB tərəfinin orta nöqtəsidir. C və M nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.

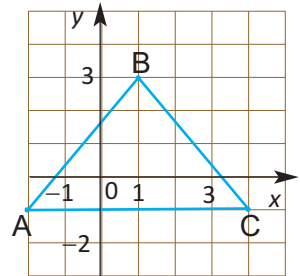


8 > Tərələri A(-3; 3), B(1; 7), C(2; 1) nöqtələrində olan üçbucağın CM medianının uzunluğunu tapın.

- 9 > Uc nöqtələri $L(-5; -6)$ və $M(7; 10)$ olan LM parçası verilmişdir. X nöqtəsi LM parçasının üzərində yerləşir. $LX = \frac{1}{4} LM$ olarsa, X nöqtəsinin koordinatlarını müəyyən edin.
- 10 > k -nin hansı qiymətində $A(6; -4)$ və $B(2; k)$ nöqtələri arasındakı məsafə 5 vahiddir? Koordinat müstəvisində uyğun nöqtələri qeyd edin. Məsələnin neçə həlli var?
- 11 > Ox oxu üzərində elə nöqtə tapın ki, $(0; 2)$ və $(8; 6)$ nöqtələrindən eyni məsafədə olsun.

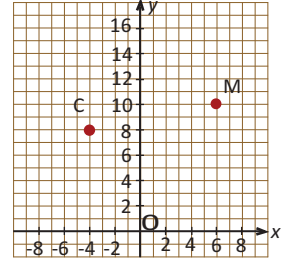
Tətbiq tapşırıqları

- 12 > Koordinat müstəvisində təpə nöqtələrinin koordinatları verilmiş üçbucağı qurun. Üçbucağın tərəflərinin uzunluğunu hesablayın və düzbucaqlı üçbucaq olub-olmadığını müəyyən edin.
a) $(1; 2), (2; 3), (5; 0)$ b) $(2; 1), (4; 2), (2; 6)$ c) $(3; 2), (5; 1), (2; 5)$
- 13 > Koordinat müstəvisi üzərində təpələri $A(1; 1), B(5; 9), C(2; 8)$ və $D(0; 4)$ nöqtələrində olan dördbucaqlını çəkin.
a) Bu dördbucaqlının trapesiya olduğunu əsaslandırın.
b) Bu dördbucaqlının bərabəryanlı trapesiya olduğunu əsaslandırın.
- 14 > **Miqyas.** Koordinat müstəvisi üzərində təpələri $A(1; 4), B(5; 4)$ və $C(5; 1)$ nöqtələrində olan üçbucaq çəkin.
a) $\triangle ABC$ -nin perimetrini tapın.
b) Təpə nöqtələrinin koordinatlarının qiymətini 2 dəfə, 3 dəfə artırın və üçbucağın perimetrini yenidən hesablayın.
c) Üçbucağın təpə nöqtələrinin koordinatlarının artması ilə perimetrinin artması arasındakı asılılığı izah edin.
- 15 > a) Şəkli dəftərinizə köçürün.
b) Üçbucağın tərəflərinin uzunluqlarını tapın.
c) Hər bir tərəfin orta nöqtəsinin koordinatlarını müəyyən edin.
d) Orta nöqtələri ardıcıl birləşdirməklə alınan üçbucağın perimetri ilə verilmiş üçbucağın perimetrini müqayisə edin.



- 16 > Eyni nöqtədən eyni zamanda hərəkətə başlayan iki atlıdan biri əvvəlcə 2 km qərbə, sonra 3 km cənuba, digəri isə əvvəlcə 4 km şərqə, sonra isə 5 km şimala doğru irəllədi. Atlılar arasındakı məsafəni tapın.

- 17 > Mehribangilin evi koordinat müstəvisində $M(6; 10)$ nöqtəsi kimi qeyd edilmişdir. Cəlilgilin evi Mehribangilin evindən 2 vahid cənubda, 10 vahid qərbdə yerləşir. Məktəb hər ikisinin evindən eyni məsafədədir.



a) Cəlilgilin evinin yerini koordinat müstəvisində qeyd edin.

b) Məktəbin mümkün olan bir yerini koordinat müstəvisində qeyd edin. Məktəbin yerini doğru seçdiyinizi onun hər iki evdən həqiqətən eyni məsafədə olduğunu hesablamalarla göstərin. Müxtəlif variantları fikirləşin.

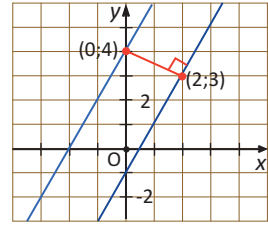
Göstəriş: parçanın orta perpendikulyarının xassəsindən istifadə edin.

- 18 > Koordinat müstəvisi üzərində təsvirə görə tapşırıqları yerinə yetirin.

a) Düz xətlərin tənliklərini yazın.

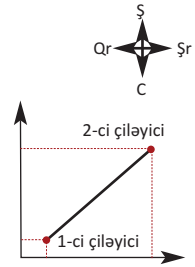
b) Bu düz xətlərin paralel olduğunu onların tənliyinə görə izah edin.

c) Düz xətlər arasındakı məsafəni tapın.



- 19 > Usta düzbucaqlı formalı sahənin müxtəlif yerlərində çiləmə yolu ilə işləyən suvarma sistemi quraşdırmalıdır. Bunun üçün o, birinci çiləyici ilə ikinci çiləyicini birləşdirən boru almalıdır. O bu məsafəni ölçməyi unutmuş və mağazaya yollanmışdı. Lakin ustanın yaddaşında olan bir neçə ölçülər var idi.

Birinci çiləyici yaşıllıq sahənin başlanğıcından 3 m şərqdə, 1 m şimalda, ikinci çiləyici isə 15 m şərqdə, 10 m şimalda yerləşir. Usta orta məktəbdə öyrəndiyi hansı riyazi bilikləri tətbiq etməklə iki çiləyici arasındakı məsafəni hesablaya bilər və ona geri qayıtmağa ehtiyac qalmaz? Plan üzərində verilən ədədi məlumatları yazın və məsələni həll edin.



- 20 > Excel proqramının köməyi ilə verilən iki nöqtə arasındakı məsafəni hesablayın.

	A	B	C	D	E
1	X1	Y1	X2	Y2	Distance
2	54	120	113	215	
3					
4					

1-ci sətirdə hər bir sütunun adını yazın

2-ci sətirdə hər koordinata uyğun ədədi məlumatları yazın

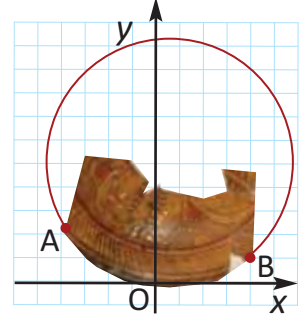
İstənilən iki nöqtə arasındakı məsafəni hesablama düsturunu yazın.

- a) (5; 120), (113; 215) b) (68; 153), (175; 336) c) (421; 454), (502; 798)

21 > Arxeologiya. Kiçik layihə işi. Aşağıda arxeoloqların qazıntıları zamanı tapdığı boşqab qalığına görə onun həqiqi ölçüsünün tapılması probleminin həll addımları verilmişdir. Bu addımlarla məsələni həll edin. Tətbiq edilən riyazi anlayışların mümkün qədər geniş siyahısını tutun. Bu anlayışların izahlı lüğətini tərtib edin. İzahları şəkil və nümunələrlə yazın.

1. Boşqab parçası koordinat sistemində yerləşdirilmişdir. Dairəvi hissənin üzərində üç nöqtə (A, O, B nöqtələri) qeyd etməklə sxematik təsviri dəftərinizdə çəkin.

2. Çevrənin mərkəzini müəyyən etmək üçün:
a) AO və OB parçalarının orta perpendikulyarlarını çəkin.
b) Orta perpendikulyarların tənliklərini yazın.

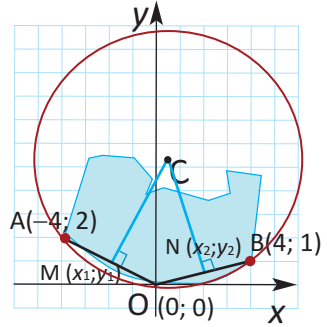


✓ AO parçasının orta perpendikulyarının tənliyini yazmaq üçün:

- M orta nöqtəsinin koordinatlarını tapın;
- AO parçasını saxlayan düz xəttin bucaq əmsalını müəyyən edin.

- Orta perpendikulyarın bu düz xətlə qarşılıqlı perpendikulyar olduğuna əsasən onun bucaq əmsalını (k_1) tapın.

- M nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı k_1 olan düz xəttin tənliyini yazın.



✓ OB parçasının orta perpendikulyarının tənliyini yazmaq üçün:

- N orta nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

- OB-dən keçən düz xəttin bucaq əmsalını müəyyən edin.

- Orta perpendikulyarın OB -dən keçən düz xətlə qarşılıqlı perpendikulyar olduğuna əsasən onun bucaq əmsalını (k_2) tapın.

- N nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı k_2 olan düz xəttin tənliyini yazın.

✓ Çevrənin mərkəzi orta perpendikulyarların kəsişmə nöqtəsidir. Deməli, orta perpendikulyarların tənliklərindən ibarət sistemin həlli çevrənin C mərkəzinin koordinatlarıdır.

✓ C nöqtəsindən qeyd edilmiş nöqtələrin hər birinə qədər olan məsafəni hesablamaqla bu çevrənin radiusunu tapın. Boşqabın diametrinin təxmini qiymətini yazın.

4-2

Çevrənin tənliyi

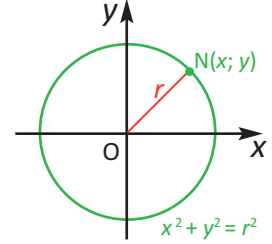
Mərkəzi $O(0; 0)$ koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu r olan çevrənin tənliyini yazaq. Çevrə üzərindəki istənilən $N(x; y)$ nöqtəsinin $O(0; 0)$ mərkəzindən məsafəsi $NO = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ düsturu ilə tapılır. Digər tərəfdən $NO = r$ olduğuna görə $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ bərabərliyini yazıb, hər iki tərəfini kvadrata yüksəltməklə alarıq: $x^2 + y^2 = r^2$

Çevrə üzərindəki istənilən nöqtənin koordinatları bu tənliyi ödəyir və tərsinə, koordinatları bu tənliyi ödəyən nöqtə çevrənin üzərindədir.

Beləliklə alırıq ki, mərkəzi koordinat başlanğıcında, radiusu r olan **çevrənin tənliyi** $x^2 + y^2 = r^2$ şəklindədir.

Məsələn, mərkəzi $(0; 0)$ koordinat başlanğıcında, radiusu 2 olan çevrənin tənliyi $x^2 + y^2 = 4$ kimidir.

İndi isə ümumi hala baxaq.



Mərkəzi $M(a; b)$ nöqtəsində olan r radiuslu çevrənin üzərindəki istənilən $N(x; y)$ nöqtəsi üçün iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə

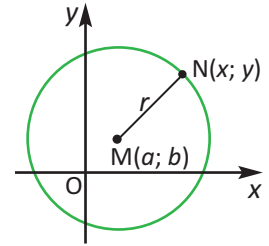
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \text{ olur.}$$

Buradan hər iki tərəfi kvadrata yüksəltməklə mərkəzi $(a; b)$ nöqtəsində olan r radiuslu çevrənin tənliyini alırıq:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Məsələn, mərkəzi $(3; 2)$ nöqtəsində və radiusu 4-ə bərabər olan çevrənin tənliyi

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16 \text{ şəklindədir.}$$



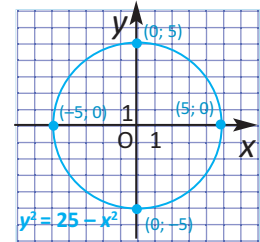
1. **Nümunə.** $y^2 = 25 - x^2$ tənliyi ilə verilmiş çevrəni koordinat müstəvisi üzərində qurun.

Həlli. Tənliyi $x^2 + y^2 = 5^2$ şəklində yazaq.

Göründüyü kimi, $r = 5$ -dir. Koordinat başlanğıcından 5 vahid məsafədə olan dörd nöqtə qeyd edək.

Məsələn, $(5; 0)$, $(-5; 0)$, $(0; 5)$, $(0; -5)$.

Bu nöqtələrdən keçən çevrə çəkək.



2. **Nümunə.** $A(2; 3)$ nöqtəsi mərkəzi koordinat başlanğıcında olan çevrənin üzərindədir. Bu çevrənin tənliyini yazın.

Həlli. Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən çevrənin $x^2 + y^2 = r^2$

tənliyində A nöqtəsinin koordinatlarını yerinə yazsaq,

$2^2 + 3^2 = r^2$, $r^2 = 13$ alarıq. Deməli, çevrənin tənliyi $x^2 + y^2 = 13$ şəklindədir.

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Verilən radiusuna görə mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən çevrənin tənliyini yazın.
 a) 3 b) $2\sqrt{3}$ c) $\sqrt{15}$ d) $5\sqrt{2}$ e) $\sqrt{22}$
- 2 > Verilən mərkəzə, radiusa və ya diametrə görə çevrənin tənliyini yazın.
 a) $(2; -11)$, $r = 3$ b) $(-4; 2)$, $d = 2$ c) $(0; 0)$, $r = \sqrt{5}$
 d) $(6; 0)$, $r = \frac{2}{3}$ e) $(-1; -1)$, $d = \frac{1}{4}$ f) $(-5; 9)$, $d = 2\sqrt{20}$
- 3 > Tənliyi $x^2 + y^2 = 169$ olan çevrə üzərində:
 a) absisi 5 olan nöqtənin ordinatını tapın;
 b) ordinatı 0 olan nöqtənin absisini tapın.
- 4 > Verilən tənliklərə görə çevrənin mərkəzinin koordinatlarını və radiusunu müəyyən edin. Koordinat müstəvisində çevrəni qurun.
 a) $x^2 + y^2 = 36$ c) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$
 b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ d) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$
- 5 > Çevrənin verilmiş tənliyinə görə onun mərkəzinin koordinatlarını və radiusunu müəyyən edin.

Nümunə. $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$ tənliyi ilə verilmiş çevrənin mərkəzini və radiusunu tapın.

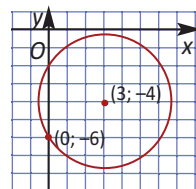
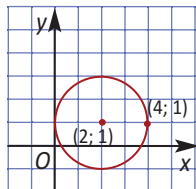
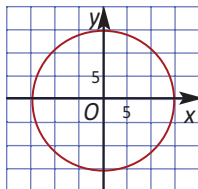
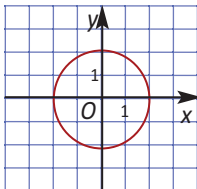
Həlli. $(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 4 = 0$,

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9, \quad (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

Çevrənin mərkəzi $M(1; -2)$ nöqtəsidir, radiusu isə $r = 3$ -dür.

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$ | d) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ |
| b) $x^2 + y^2 + 8x + 16y - 20 = 0$ | e) $x^2 + y^2 - 6y - 5 = 0$ |
| c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ | f) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ |

- 6 > Çevrənin koordinat müstəvisi üzərindəki təsvirinə uyğun tənliyini yazın.



- 7 > $A(2; 3)$, $B(3; 4)$, $C(4; 4)$, $D(4; -3)$, $E(-3; 4)$ nöqtələrindən hansılar tənliyi $x^2 + y^2 = 25$ olan çevrəyə aiddir?

- 8 > Verilənlərə görə çevrənin tənliyini yazın.

Mərkəz nöqtəsi	(0; 0)	(1; 2)	(-3; 5)	(-13; π)	(9; 10)
Çevrə üzərində nöqtə	(0; 6)	(4; 2)	(1; 8)	(2; π)	(-7; 3)

- 9 > Hansı çevrə tənliyidir? Cavabınızı əsaslandırın.

1) $x^2 + y^2 = -16$

2) $x^2 + y^2 + 4x = 0$

3) $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25$

4) $x^2 + 10x + y^2 - 8y + 8 = 0$

- 10 > a) Diametrinin uc nöqtələri (2; -1), (4; 7) olan çevrənin tənliyini yazın. Bu çevrənin üzərində yerləşən və absisi -1 olan nöqtələri tapın.
 b) Diametri 12 olan və mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən çevrənin tənliyini yazın. Bu çevrə 6 vahid sağa, 5 vahid aşağı sürüşdürülsə, onun tənliyi necə dəyişər?
 c) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$ çevrəsi 6 vahid sola, 3 vahid aşağı sürüşdürülmüşdür. Çevrənin son vəziyyətinə uyğun tənliyini yazın.

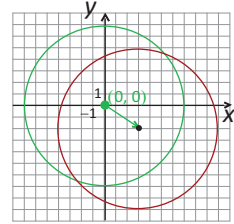
- 11 > a) Radiusu 7-yə bərabər olan və mərkəzi (3; -2) nöqtəsində olan çevrənin tənliyini yazın.

- b) Bu çevrənin üfüqi diametrinin uc nöqtələrinin koordinatlarını müəyyən edin.

Göstəriş: iki üsulla həll edin.

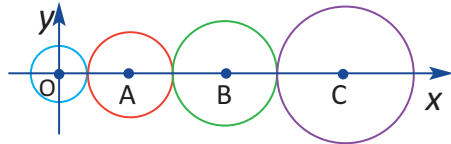
- 1) mərkəzi (0; 0) nöqtəsində olan çevrəyə görə sürüşmədə koordinatları müqayisə etməklə.

- 2) çevrənin tənliyində $y = -2$ qiymətini yerinə yazıb həll etməklə.



- 12 > $x^2 + y^2 - 6x + 9y + 8 = 0$ çevrəsinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.

- 13 > Dörd toxunan çevrənin mərkəzləri absis oxu üzərindədir. A mərkəzli çevrənin radiusu O mərkəzli çevrənin radiusundan 2 dəfə, B mərkəzli çevrənin radiusu O mərkəzli çevrənin radiusundan 3 dəfə, C mərkəzli çevrənin radiusu O mərkəzli çevrənin radiusundan 4 dəfə böyükdür. $BC = 28$ olduğu məlumdur. A mərkəzli çevrənin tənliyini yazın.



Tətbiq tapşırıqları

- 14 > A(10; 7) nöqtəsindən $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ tənliyi ilə verilən çevrənin mərkəzinə qədər məsafəni tapın.

- 15 > C(5; -2) nöqtəsindən $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$ çevrəsinə qədər məsafəni tapın.
- 16 > a) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$; $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 1$
tənlikləri ilə verilmiş çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafəni tapın.
b) Bu çevrələri koordinat müstəvisində qurun. Çevrələr üzərində olmaqla bir-birinə ən yaxın olan iki nöqtə göstərin və bu nöqtələr arasındakı məsafəni tapın.
- 17 > Nümunə üçün həll edilmiş məsələni araşdırın və məsələləri həll edin.

Nümunə. Ötürücü stansiyadan radiosiqnallar 90 km məsafəyə ötürülə bilər. Ləməngilin evi ötürücü stansiyadan 45 km şərqdə, 56 km şimalda yerləşir. Ötürücüdən siqnalların yayıldığı sahəni bərabərsizlik yazmaqla müəyyən edin. Ləməngil bu ötürücüdən istifadə edə bilərmi?

Həlli. Çevrə aid olduğu müstəvinin nöqtələrini iki çoxluğa ayırır. Xüsusi halda, $x^2 + y^2 = r^2$ çevrəsinə uyğun dairənin nöqtələri üçün $x^2 + y^2 \leq r^2$ münasibəti doğrudur, dairənin xaricində yerləşən nöqtələr üçün isə $x^2 + y^2 > r^2$ olur. Siqnalların yayıldığı sahədə $x^2 + y^2 < 90^2$ olmalıdır. Yoxlayaq: $45^2 + 56^2 < 90^2$; $5161 < 8100$. Deməli, onlar bu ötürücüdən istifadə edə bilərlər.

1) Zəlzələ episentrdən 110 km məsafədə hiss edildi. Yaşadığınız yer episentərə nəzərən 50 km şərqdə, 30 km şimalda yerləşərsə, siz də bu zəlzələni hiss edərsinizmi?

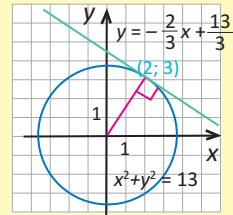
2) Dəniz mayakının işıqları 20 km uzağa yayılır. Mayakdan 10 km şərqdə, 16 km şimalda olan gəmidən bu mayakın işıqları görünə bilərmi?

- 18 > Nümunəni araşdırın. Verilən çevrəyə verilən nöqtədə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

Nümunə. $x^2 + y^2 = 13$ tənliyi ilə verilmiş çevrəyə (2; 3) nöqtəsində çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

Həlli. Toxunma nöqtəsinə çəkilmiş radiusu saxlayan düz xəttin bucaq əmsalını tapmaq:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{2 - 0} = \frac{3}{2}$$



(2; 3) nöqtəsindən keçən radius və toxunan qarşılıqlı perpendikulyar olduğundan toxunanın bucaq əmsalı $-\frac{2}{3}$ olacaq.
Toxunanın tənliyi: $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$; $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

- a) $x^2 + y^2 = 13$; (2; 3) b) $x^2 + y^2 = 41$; (-4; -5)
c) $x^2 + y^2 = 65$; (-8; 1) d) $x^2 + y^2 = 40$; (-2; 6)

- 19 > Verilən tənliklərə görə düz xəttin çevrənin toxunanı, yoxsa kəsəni olduğunu və ya heç biri olmadığını müəyyən edin.

a) $x^2 + y^2 = 36$

$y = 6$

d) $x^2 + y^2 = 10$

$y = 3x$

b) $x^2 + y^2 = 100$

$y = 14 - x$

e) $x^2 + y^2 = 9$

$y = x - 3$

c) $x^2 + y^2 = 4$

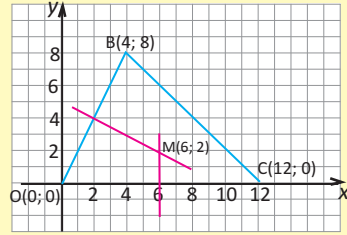
$x + y = 7$

f) $x^2 + y^2 = 9$

$y = x$

- 20 > Üç nöqtədən keçən çevrənin tənliyinə aid nümunəni araşdırın və verilən tapşırığı yerinə yetirin.

Nümunə. Mobil operator şirkəti ötürücü stansiyaları elə yerləşdirməyə çalışır ki, daha çox istifadəçiyə xidmət etsin. Fərz edin ki, üç böyük şəhər $O(0; 0)$, $B(4; 8)$, $C(12; 0)$ nöqtələrində yerləşir. Koordinat müstəvisi üzərində 1 vahid 100 km məsafəyə uyğundur. Ötürücü stansiya bu şəhərlərdən eyni məsafədə olan nöqtədə yerləşdirilməlidir. Bu nöqtənin koordinatlarını və uyğun çevrənin tənliyini yazın.



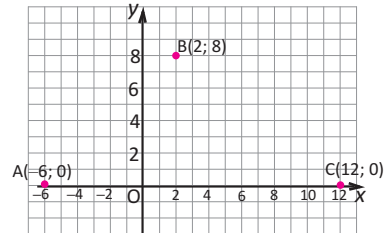
Həlli. Əvvəlcə verilmiş nöqtələri parçalarla birləşdirərək və alınan üçbucağın tərəflərinin orta perpendikulyarlarının kəsişmə nöqtəsini tapaq.

OC parçası absis oxu üzərində yerləşdiyindən və orta nöqtəsi $(6; 0)$ olduğundan orta perpendikulyarının tənliyi $x = 6$ olur. OB parçasını saxlayan düz xəttin bucaq əmsalı $k = \frac{8-0}{4-0} = 2$ olduğundan, orta perpendikulyarın bucaq əmsalı $-\frac{1}{2}$ olur. OB parçasının orta nöqtəsi $(2; 4)$ olduğundan orta perpendikulyarının tənliyi $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 2)$, yəni $y = -\frac{1}{2}x + 5$ şəklindədir. $x = 6$ və $y = -\frac{1}{2}x + 5$ düz xətləri $(6; 2)$ nöqtəsində kəsişir (özünüz yoxlayın). Bu nöqtə çevrənin mərkəzi olmaqla stansiyanın yerini göstərir. Mərkəzlə verilən nöqtələrdən istənilən biri arasındakı məsafə çevrənin radiusuna bərabərdir:

$$r = \sqrt{(6-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

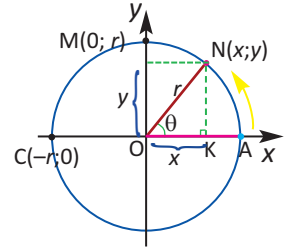
Çevrənin tənliyi: $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{40})^2$, $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 40$

Şekli dəftərinizə köçürün. Qeyd edilmiş üç nöqtədən keçən çevrənin tənliyini yazın və çevrəni qurun.



- 21 > a) $(x - 2)(x - 6) + (y - 5)(y - 11) = 0$ tənliyinin çevrənin tənliyi olduğunu göstərin.
b) Diametrinin uc nöqtələrinin koordinatları $(a; b)$ və $(c; d)$ olan çevrənin tənliyinin $(x - a)(x - c) + (y - b)(y - d) = 0$ şəklində olduğunu göstərin.

- Praktik məşğələ.** 1) Absis oxu üzərində koordinat başlanğıcından sağda A nöqtəsini qeyd edin və mərkəzi O nöqtəsində yerləşməklə $r = OA$ radiuslu çevrə çəkin.
- 2) O nöqtəsi ətrafında saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə θ iti bucağı qədər dönmədə A nöqtəsinin çevrildiği nöqtəni $N(x; y)$ ilə göstərin.
- 3) Şəklə görə ONK düzbucaqlı üçbucağında θ iti bucağının sinusu və kosinusunu yazın: $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$.



- 4) Bu düsturları $\theta = 90^\circ$ olduqda $M(0; r)$ nöqtəsi, $\theta = 180^\circ$ olduqda $C(-r; 0)$ nöqtəsi üçün tətbiq edin:

$$\sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1, \quad \cos 90^\circ = \frac{0}{r} = 0, \quad \sin 180^\circ = \frac{0}{r} = 0, \quad \cos 180^\circ = \frac{-r}{r} = -1$$

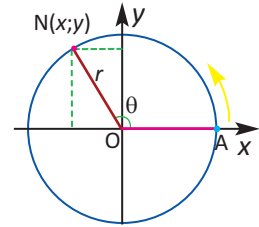


Çevrə üzərindəki nöqtələrin koordinatları və triqonometrik nisbətlər

Koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə θ bucağı qədər dönmədə $A(r; 0)$ nöqtəsi $N(x; y)$ nöqtəsinə çevrilirsə,

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r} \text{ münasibətləri doğrudur.}$$

Buradan mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu r olan çevrə üzərindəki $N(x; y)$ nöqtəsinin koordinatları üçün $x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \sin\theta$ alırıq.



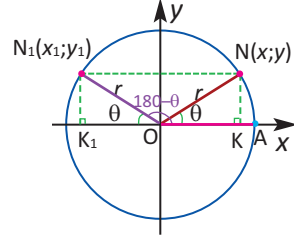
Bu düsturlarda θ bucağı ON şüasının absis oxunun müsbət istiqaməti ilə saat əqrəbi hərəkətinin əksinə olmaqla əmələ gətirdiyi bucaqdır.

$N(x; y)$ nöqtəsi ordinat oxu üzərində deyilsə, alırıq: $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{r \cdot \sin\theta}{r \cdot \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Öyrənmə tapşırıqları

- 22 > a) Damalı vərəqdə 1 damanı vahid qəbul edərək, mərkəzi koordinat başlanğıcında olmaqla $r = 10$ radiuslu çevrə çəkin. Koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə $\theta = 30^\circ$ bucağı qədər dönmədə $A(10; 0)$ nöqtəsinin çevrildiği $N(x; y)$ nöqtəsinin koordinatlarına görə $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ -nin təqribi qiymətlərini tapın.
- b) Tapşırığı 45° , 60° , 120° , 150° dönmə bucaqları üçün də yerinə yetirin. Aldığınız nəticələri kalkulyatorla hesablanmış qiymətlərlə müqayisə edin.
- 23 > Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu 5 olan çevrə üzərində $A(5; 0)$ nöqtəsini qeyd edin. Koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbi hərəkətinin əksi istiqamətdə verilmiş θ bucağına uyğun dönmədə A nöqtəsinin çevrildiği $N(x; y)$ nöqtəsinin koordinatlarını tapın:
- a) $\theta = 180^\circ$ b) $\theta = 100^\circ$ c) $\theta = 120^\circ$

Praktik məşğələ. 1) Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu r olan çevrə üzərində θ iti bucağı qədər dönmədə A nöqtəsinin çevrildiği $N(x; y)$ nöqtəsini və $180^\circ - \theta$ dönmə bucağına uyğun $N_1(x_1; y_1)$ nöqtəsini qeyd edin. N və N_1 nöqtələri hansı oxa nəzərən simmetrikdir?



2) $\triangle ONK$ və $\triangle ON_1K_1$ -in konqruentliyini əsaslandırın və bunun əsasında N və N_1 nöqtələrinin koordinatları arasında $y_1 = y$, $x_1 = -x$ münasibətlərinin olduğunu izah edin.

$$3) \sin(180^\circ - \theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y}{r} = \sin\theta, \quad \cos(180^\circ - \theta) = \frac{x_1}{r} = \frac{-x}{r} = -\cos\theta$$

bərabərliklərini araşdırın.

4) Qonşu bucaqların sinusları və kosinusları haqqında fikir yürüdün.

Qonşu bucaqların sinusları bərabərdir, kosinusları isə qarşılıqlı əksdir.

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta, \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

Buradan $\cos\theta \neq 0$ olduqda tərəf-tərəfə bölməklə alırıq:

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$$

Bu düsturlara əsaslanaraq, 90° -dən böyük bucaqların sinus, kosinus və tangensini iti bucağın sinus, kosinus və tangensi ilə uyğun olaraq ifadə etmək olur.

Nümunə. 150° -li bucağın sinus, kosinus və tangensini tapın.

Həlli. 150° -li bucağa qonşu bucaq 30° -li olduğundan alırıq:

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Öyrənmə tapşırıqları

24 > 120° , 135° , 150° -li bucağın sinus, kosinus və tangensini tapın.

25 > Bərabərliklərin doğru olub-olmadığını yoxlayın.

a) $\sin 40^\circ = \sin 140^\circ$ b) $\cos 140^\circ = -\cos 40^\circ$ c) $\cos 46^\circ = \cos 134^\circ$

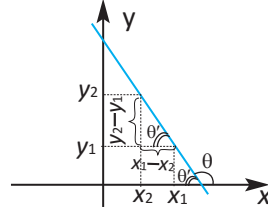
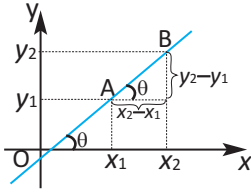
d) $\sin 130^\circ = \sin 50^\circ$ e) $\sin 120^\circ = -\sin 60^\circ$ f) $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$

26 > a) Çevrənin $x^2 + y^2 = r^2$ tənliyinin hər iki tərəfini r^2 -na bölüb, $\frac{x}{r} = \cos\theta$, $\frac{y}{r} = \sin\theta$ bərabərliklərini nəzərə almaqla $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ eyniliyinin istənilən θ bucağı üçün doğru olduğunu göstərin.

b) $\sin\theta = 0,6$ və θ iti bucaq olduqda $\cos\theta$ və $\tan\theta$ -ni tapın.

c) $\sin\theta = 0,8$ və θ kor bucaq olduqda $\cos\theta$ və $\tan\theta$ -ni tapın.

- 27 > 1) $A(x_1; y_1)$ və $B(x_2; y_2)$ nöqtələrindən keçib ordinat oxuna paralel olmayan düz xəttin bucaq əmsalı $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ düsturu ilə tapılır. Düz xəttin absis oxunun müsbət istiqaməti ilə yuxarı yarımmüstəvidə ($y \geq 0$) əmələ gətirdiyi bucağı θ ilə işarə etməklə $\tan \theta = k$ olduğunu müxtəlif hallar üçün göstərin.



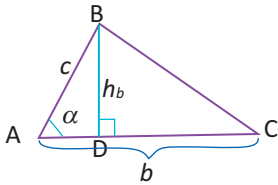
2) Tənliyi verilmiş düz xəttin yuxarı yarımmüstəvidə ($y \geq 0$) absis oxunun müsbət istiqaməti əmələ gətirdiyi bucağın dərəcə ölçüsünü tapın.

a) $y = \sqrt{3}x + 1$

b) $y = -x + 2$

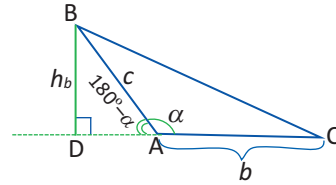
c) $y = 2x - 3$

- 28 > **Araşdırma.** 1) Üçbucağın sahə düsturunu müxtəlif hallar üçün araşdırın.



$$\sin \alpha = \frac{h_b}{c}; \quad h_b = c \cdot \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} b c \cdot \sin \alpha$$



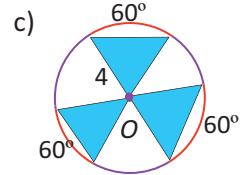
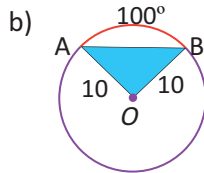
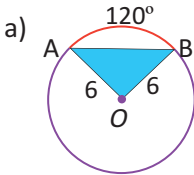
$$\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{h_b}{c}; \quad h_b = c \cdot \sin \alpha$$

$$S = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} b c \cdot \sin \alpha$$

2) Buraxılmış sözləri yazmaqla təklifi dəftərinizə köçürün.

Üçbucağın sahəsi onun ... tərəfi və bu tərəflər ... bucağın ... hasilinin yarısına bərabərdir.

- 29 > Şəkildə verilənlərə görə rəngli hissənin sahəsini tapın.
O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.

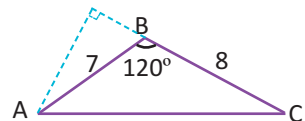


- 30 > Paraleloqramın diaqonalları 6 sm və 8 sm olub, aralarındakı bucaq 45° -dir. Paraleloqramın sahəsini tapın.

- 31 > Bərabəryanlı trapesiyanın diaqonalları 18 sm olub, aralarındakı bucaq 30° -dir. Trapesiyanın sahəsini tapın.

- 32 > Şəkildə verilənlərə görə AC tərəfinin uzunluğunu və C bucağının sinusunu tapın.

Göstəriş: A təpəsindən şəkildə göstərildiyi kimi hündürlük çəkin.



4-3

Dairə sektoru və seqmentinin sahəsi

Mərkəzi bucağın dairədən ayırdığı hissəyə **dairə sektoru** deyilir.

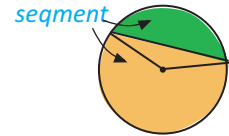
Mərkəzi bucaq tam bucağın hansı hissədirsə, uyğun sektorun sahəsi də dairənin sahəsinin həmin hissəsidir.

Məsələn, 60° -li mərkəzi bucağa uyğun dairə hissəsi - sektor bütün dairənin $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$ hissəsini təşkil edir.

Dairənin sahəsi πr^2 olduğundan bu sektorun sahəsi $\frac{1}{6} \pi r^2$ olar.

Dairənin vətər və vətərin gərdiyi qövsə hüdudlanmış hissəsinə **dairə seqmenti** deyilir.

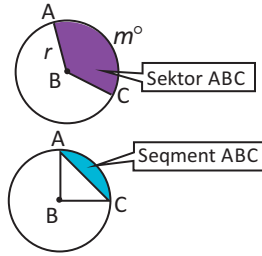
Seqmentin sahəsi = sektorun sahəsi \pm üçbucağın sahəsi



Sektorun sahəsi: $S_{ABC} = \frac{m}{360} \pi r^2$

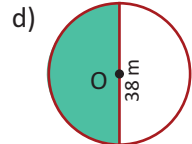
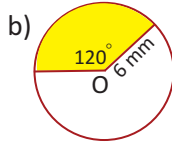
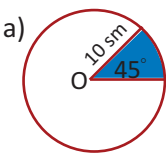
Seqmentin sahəsi: $S_{seqmentABC} = S_{sektorABC} - S_{\Delta ABC}$

Qeyd: Böyük qövsə uyğun seqmentin sahəsini tapdıqda uyğun sektorun sahəsinə ΔABC -nin sahəsi əlavə edilir.

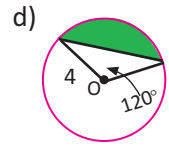
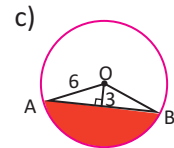
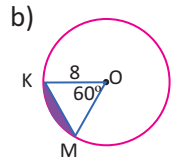
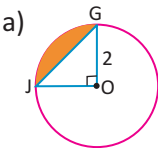


Öyrənmə tapşırıqları

1 > Şəkilə təsvir edilmiş sektorun sahəsini tapın. O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.

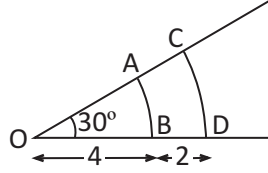


2 > Şəkilə təsvir edilmiş seqmentin sahəsini tapın. O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.



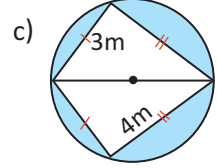
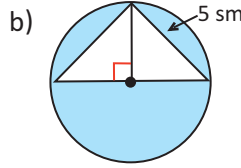
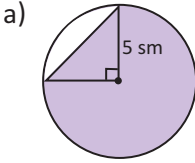
3 > a) Radiusu 12 sm olan çevrənin 80° -lik qövsünə uyğun sektorun sahəsini tapın.
 b) Mərkəzi bucağı 72° olan sektorun sahəsi $3,2\pi$ m²-dir. Dairənin radiusunu tapın.
 c) Radiusu 8 sm olan dairədə, sahəsi 24π sm² olan sektora uyğun mərkəzi bucağı tapın.

- 4 > Şəkində verilənlərə görə tapın:
 a) $\sphericalcap AB$ və $\sphericalcap CD$ -nin uzunluqlarını;
 b) AOB və COD sektorlarının sahələrini.

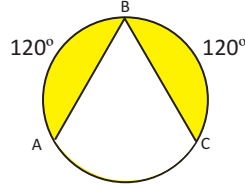


- 5 > a) $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 2 = 0$ tənliyi ilə verilmiş çevrənin mərkəzini və radiusunu tapın.
 b) Uyğun dairədə mərkəzi bucağı 45° olan sektorun sahəsini tapın.
 c) Ordinat oxunun dairədən ayırdığı seqmentlərin sahələrini tapın.
- 6 > Mərkəzi (0; 2) nöqtəsində yerləşən çevrə (2; 4) nöqtəsindən keçir.
 1) Çevrənin tənliyini yazın.
 2) Çevrənin absis oxu ilə kəsişmə nöqtələri arasındakı məsafəni tapın.
 3) Absis oxunun uyğun dairədən ayırdığı seqmentlərin sahələrini tapın.

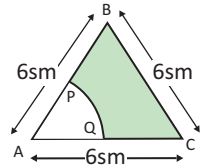
- 7 > Şəkində verilənlərə görə rəngli hissənin sahəsini tapın.



- 8 > Şəkindəki çevrənin uzunluğu 12π mm-dir. Rəngli hissənin sahəsi neçə kvadrat millimetrdir? Cavabı yüzdəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.



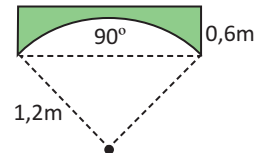
- 9 > $\triangle ABC$ bərabərtərəflidir. P nöqtəsi AB tərəfinin orta nöqtəsidir. APQ mərkəzi A nöqtəsində olan dairə sektorudur. Rəngli hissənin sahəsini tapın.



- 10 > Fərz edin ki, sizə yeməxanada 2 növ piroq təklif edilir. Piroqlar eyni qalınlıqda olub, diametri 24 sm və 32 sm olan dairəşəkillidir və hər biri 8 bərabər dilimə kəsilmişdir. Siz radiusu 16 sm olan piroqdan bir dilim yəsəniz, çox piroq yemiş olarsınız, yoxsa radiusu 12 sm olan piroqdan iki dilim?



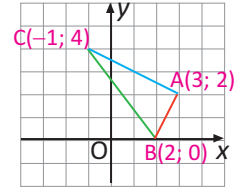
- 11 > Şəkində təsvir edilmiş pəncərə çərçivəsinin hissəsi rənglənməlidir. Bunun üçün əvvəlcə onun sahəsi hesablanmalıdır. Verilmiş şəkllə görə bu hesablamaları yerinə yetirin.





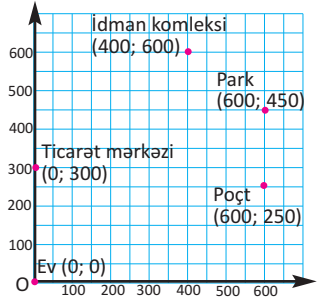
Ümumiləşdirici tapşırıqlar

- 1 > Tərəp nöqtələri $A(3; 2)$, $B(2; 0)$, və $C(-1; 4)$ olan $\triangle ABC$ -nin düzbucaqlı üçbucaq olub-olmadığını yoxlayın.



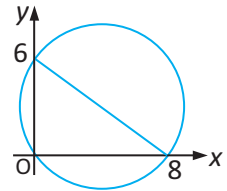
- 2 > Şəkində turistlərə kirayə üçün təklif edilən evin yerləşmə planı verilmişdir. Planda hər kvadrat damanın tərəfi 50 m məsafəni göstərir.

1) Fərz edin ki, siz burada istirahət edirsiniz. Əgər ən qısa yolla poçta, oradan parka gedib və evə qayıtsanız, nə qədər məsafə qət etmiş olarsınız?
2) Evdən çıxıb planda göstərilən bütün obyektləri gəzməyin iki mümkün qısa yolu var. Bu iki yolu obyektlərin ardıcılığı ilə müəyyən edin və uzunluğunu tapın.



- 3 > Ucları verilmiş nöqtələrdə olan parçanın orta perpendikulyarının tənliyini yazın.
a) $(-2; 0)$, $(6; 8)$ b) $(0; -1)$, $(-4; 3)$ c) $(-1; 1)$, $(1; 5)$
- 4 > Mərkəzi $M(3; 0)$ nöqtəsində yerləşən çevrə $A(7; 3)$ nöqtəsindən keçir.
a) Bu çevrənin tənliyini yazın.
b) Çevrənin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.
c) Tərəp nöqtələri çevrənin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri olan dördbucaqlının sahəsini tapın.

- 5 > Çevrə $(0; 0)$, $(0; 6)$, $(8; 0)$ nöqtələrindən keçir.
a) Çevrənin mərkəzinin koordinatlarını tapın.
b) Koordinat oxları ilə I rübdə ayrılmış çevrə qövsünün uzunluğunu π ilə ifadə edin.
c) Uyğun dairənin koordinat müstəvisi üzərində I rübdə qalan hissəsinin sahəsini tapın
d) Koordinat başlanğıcından keçən düz xətt çevrəyə toxunandır. Bu düz xəttin bucaq əmsalını tapın və tənliyini yazın.



- 6 > Tənlikləri verilmiş çevrələr üçün uyğunluğu müəyyən edin.

1) $x^2 + y^2 = 9$

A) Mərkəzi $(0; 0)$ nöqtəsində yerləşir

2) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$

B) Mərkəzi $(3; -2)$ nöqtəsində yerləşir

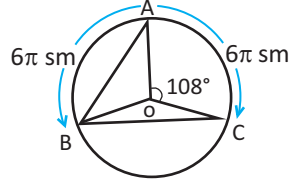
3) $x^2 - 2x + y^2 = 8$

C) Mərkəzi $(1; 0)$ nöqtəsində yerləşir

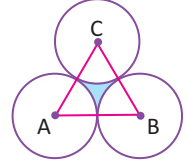
D) Radiusu 2-yə bərabərdir.

7 > Mərkəzi (0; 4) nöqtəsində yerləşən çevrə A (8; 10) nöqtəsindən keçir. Uyğun dairədə 45° -li mərkəzi bucağa uyğun sektorun sahəsini tapın.

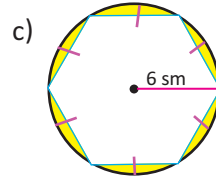
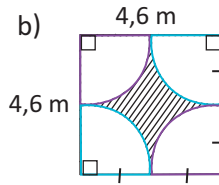
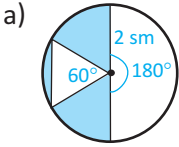
8 > O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir. $\frown AB$ və $\frown AC$ qövlərinin uzunluqları 6π sm-dir. Tələb olunanları tapın.
a) $\angle AOB$ b) $\frown BC$ c) $S_{\text{sektor } AOC}$



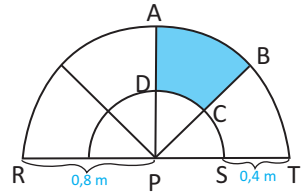
9 > Şəkində bir-birinə toxunan üç çevrə təsvir edilmişdir. Çevrələrin radiusları 4 vahiddir. Rəngli hissənin sahəsini tapın.



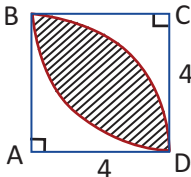
10 > Rənglənmiş hissənin sahəsini tapın.



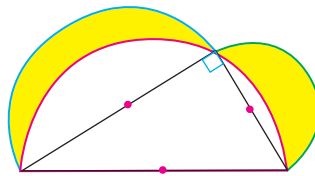
11 > Şəkində pəncərənin sxemi verilmişdir. Pəncərə radiusu 80 sm olan yarımdairə şəklindədir. ST məsafəsi 40 sm, AB qövsü isə 45° -dir. Pəncərənin ABCD hissəsindəki şüşənin sahəsini tapın.



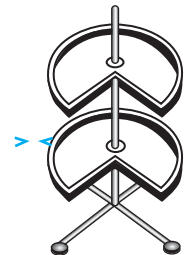
12 > ABCD kvadratdır. Radiusu kvadratin tərəfinə bərabər olmaqla A və C mərkəzli çevrə qövləri çəkilmişdir. Ştrixlənmiş sahəni tapın.



13 > Şəkində katetləri 6 və 8 olan düzbucaqlı üçbucağın tərəfləri diametr olmaqla üç yarımqevrə çəkilmişdir. Rənglənmiş hissənin sahəsini tapın.



14 > Şəkində təsvir edilmiş rəf radiusu 40 sm olan dairələrdən mərkəzi bucağı 90° olan sektorlar kəsilib çıxarılmıqla hazırlanmışdır. Rəf hər gözünü kağızla örtmək istəsəniz, sizə təxminən neçə kvadrat santimetr kağız lazım olar? Cavabı onluqlara qədər yuvarlaqlaşdırın.



5

Tənliklər. Tənliklər sistemi

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz

- ✓ Yüksək dərəcəli tənlikləri həll etməyi
- ✓ Rasional tənlikləri və rasional tənliklərə gətirilən məsələləri həll etməyi
- ✓ Modul işarəsi daxilində dəyişəni olan tənlikləri həll etməyi
- ✓ İrrasional tənlikləri həll etməyi
- ✓ Tənliklər sistemini həll etməyi
- ✓ Tənliklər sisteminin tətbiqi ilə məsələ həll etməyi

5-1

Yüksək dərəcəli tənliklər

Sol tərəfi məchula nəzərən n dərəcəli çoxhədli, sağ tərəfi sıfır olan

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

tənliyinə ($a_n \neq 0$) birdəyişənli n dərəcəli cəbri tənlik deyilir.

Məsələn, $x^3 - x^2 + 3x - 2 = 0$ tənliyi üçdərəcəli, $3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 4 = 0$ tənliyi isə dörd dərəcəli tənlikdir.

Üçdərəcəli və dörd dərəcəli tənliklər üçün köklərin tapılması düsturları məlumdur, amma bu düsturlar çox mürəkkəbdir.

✓ Vuruqlara ayırma üsulu

Yüksək dərəcəli tənlikləri müəyyən üsulların tətbiqi ilə həll etmək daha əlverişli olur. Bu üsullardan biri vuruqlara ayırma üsuludur.

Nümunə. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli. Hədləri aşağıdakı kimi qruplaşdıraraq sol tərəfi vuruqlara ayıraraq:

$$(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0; \quad x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0; \quad (x^2 - 4)(x - 1) = 0;$$

$$(x - 2)(x + 2)(x - 1) = 0.$$

Həsilin sıfıra bərabər olması üçün vuruqlardan heç olmazsa biri sıfır olmalıdır. Buna görə də $x - 2 = 0$ və ya $x + 2 = 0$ və ya $x - 1 = 0$.

Buradan $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$ tapılır.

Öyrənmə tapşırıqları

1 > Müxtəsər vurma düsturlarının tətbiqi ilə tənliyi həll edin.

a) $x^3 - 27 = 0$;

b) $16x^3 = -2$

c) $x^3 - 64 = 0$;

d) $5x^3 + 40 = 0$

e) $x^4 - 1 = 0$;

f) $16x^4 = 81$;

2 > Hədləri sol tərəfə keçirib, orta q vuruğu mötərizə xaricinə çıxarmaqla tənliyi həll edin.

a) $16x^5 = x$

b) $2x^4 = 16x$

c) $2x^3 - 7x = x$

d) $5x^3 = 320$

e) $x^3 = 16x$

f) $x^2(x^2 + 1) = x^2 - 125x$

g) $5x^3 - 19x^2 = x^2$

h) $x^3(5x - 2) = 20x^2 - 2x^3$

i) $x^3 + x^2 = 2x^2$

3 > Vuruqlarına ayırma üsulu ilə tənliyi həll edin.

1) $x^3 + x^2 = 20x$

9) $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

2) $x + 1 = 9x^3 + 9x^2$

10) $2x^3 - 3x^2 = 18x - 27$

3) $4y^3 - 2 = y - 8y^2$

11) $3x^3 + 7x^2 - 12x = 28$

4) $2x - 3 = 8x^3 - 12x^2$

12) $4x^3 + 16x^2 + x + 4 = 0$

5) $x^3 + 2x^2 - 9x = 18$

13) $2x^3 - 3x^2 - 10x + 15 = 0$

6) $9y^3 + 8 = 4y + 18y^2$

14) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

7) $3x^3 + 2x^2 = 12x + 8$

15) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$

8) $4x^3 - 12x^2 = 9x - 27$

16) $4x^4 - 12x^2 + 9 = 0$

4 > $x^3 - x^2 - kx + k = 0$ tənliyi verilmişdir.

a) $k = 0$ olduqda tənliyi ödəyən həqiqi ədədlərin sayını tapın.

b) $k = -1$ olduqda tənliyin neçə həqiqi kökü var?

c) $k = 4$ olduqda tənliyin neçə həqiqi kökü var?

5 > Tənliyi vuruqlara ayırma üsulundan istifadə etməklə həll edin.

a) $3x^5 - 48x = 0$

d) $x^3 + x^2 - 2x = 0$

g) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

b) $x^4 + 4x^2 = 32$

e) $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$

h) $x^3 + 5x^2 = 4x + 20$

c) $x^4 - 3x^2 = 4$

f) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 = -16x$

i) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

6 > $x^3 + ax^2 - 5x + 6 = 0$ tənliyinin bir kökü 3-ə bərabər olarsa, a -nı tapın və tənliyi həll edin.

7 > Funksiyanın sıfırlarını tapın.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 16x - 80$

b) $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

c) $f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$

d) $f(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 - 11x + 30$

Göstəriş: $f(x) = 0$ tənliyini yazın və həll edin.

8 > **Biznes.** Kiçik bizneslə məşğul olan sahibkarın gəlirinin riyazi modelini $R = 5t^3 + 250t^2 + 2000t$ kimi yazmaq olar. Burada t 2000-ci ildən başlayaraq illərin sayını göstərir. Neçə ildən sonra sahibkarın gəliri 50000 manat olar?

5-2

Rasional tənliklər. Rasional tənliklərin tətbiqi ilə məsələ həlli

Tənliyin sağ və sol tərəfinə daxil olan ifadələr rasional ifadələr olarsa, belə tənliyə rasional tənlik deyilir. Rasional tənliklərin həll addımlarını nümunə həlli üzərində göstərik.

Həll addımları

- 1) Tənlikdə dəyişənin mümkün qiymətləri (DMQ) müəyyən edilir.
- 2) Tənliyə daxil olan kəsrler ortaq məxrəcə gətirilir.
- 3) Tənliyin hər iki tərəfi ortaq məxrəcə vurulur və alınan tənlik həll edilir.
- 4) Yoxlama aparılır və cavab yazılır

Nümunə. $\frac{x^3 - 20x}{x - 4} = \frac{x^2}{4 - x}$

- Verilmiş tənlikdə $x \neq 4$ olmalıdır.
 - $\frac{x^3 - 20x}{x - 4} = \frac{-x^2}{x - 4}$
 - $x^3 - 20x = -x^2$; $x^3 + x^2 - 20x = 0$;
 $x(x^2 + x - 20) = 0$; $x(x + 5)(x - 4) = 0$
 $x_1 = 0$, $x_2 = -5$, $x_3 = 4$
 - $x = 4$ DMQ şərtini ödəmədiyi üçün verilmiş tənliyin kökü ola bilməz.
- Cavab:** $\{0; -5\}$

Öyrənmə tapşırıqları

1 > Tənliyi tənəsübün xassəsindən istifadə etməklə həll edin.

a) $\frac{3}{x} = \frac{5}{x + 2}$

b) $\frac{x}{x + 2} = \frac{3}{x - 2}$

c) $\frac{x^2 - 8}{x} = \frac{x}{2}$

d) $\frac{x^2 - 3}{x - 3} = \frac{x + 2}{2}$

e) $\frac{x^2 - x + 1}{9} = \frac{1}{x + 1}$

f) $\frac{x^2 - 3x + 9}{13} = \frac{7}{x + 3}$

2 > Rasional tənliyi həll edin. DMQ-ni yazın.

a) $\frac{x - 4}{x} = \frac{6}{x^2 - 3x}$

e) $\frac{5}{x^2 + 2x + 1} - \frac{2}{1 - x^2} = \frac{1}{x - 1}$

b) $\frac{3x + 6}{x^2 - 4} = \frac{x + 1}{x - 2}$

f) $\frac{2}{x - 3} + \frac{5}{x - 4} = \frac{5}{x^2 - 7x + 12}$

c) $\frac{12}{x + 5} - \frac{12}{x} = \frac{2}{x + 5}$

g) $\frac{x^3 - 6x}{x - 2} = \frac{x^2}{2 - x}$

d) $\frac{3}{x - 2} + \frac{6x}{4 - x^2} = \frac{5}{x + 2}$

h) $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{x}{18 + 5x - 2x^2}$

3 > Yeni dəyişən daxil etməklə tənliyi həll edin.

$$a) \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 - \frac{x+2}{x-1} - 2 = 0$$

$$b) \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{x}{x-1} - 6 = 0$$

$$c) \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2 \frac{1}{2}$$

$$d) \frac{x^2+2}{3x-2} - \frac{3x-2}{x^2+2} = 2 \frac{2}{3}$$

$$e) \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 12\left(x + \frac{6}{x}\right) + 35 = 0$$

$$f) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

Tətbiq tapşırıqları

4 > Tələb olunan dəyişəni digərləri ilə ifadə edin.

$$a) h = \frac{2A}{b} \text{ bərabərliyindən } b\text{-ni}$$

$$b) \frac{1}{a} - \frac{2}{b} = 3 \text{ bərabərliyindən } a\text{-ni}$$

$$c) P = \frac{A}{1+rt} \text{ bərabərliyindən } r\text{-i}$$

$$d) \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{t} \text{ bərabərliyindən } q\text{-nü}$$

$$e) 1 + \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ bərabərliyindən } b\text{-ni}$$

$$f) x = \frac{a+b}{a-b} \text{ bərabərliyindən } a\text{-ni}$$

5 > Eynilikdən k əmsalını tapın.

$$a) \frac{x^2 + kx - 3}{x^2 + 5x + 6} = \frac{x-1}{x+2}$$

$$b) \frac{2x^2 + kx - 10}{2x^2 + 7x + 6} = \frac{2x-5}{2x+3}$$

6 > Komanda keçirdiyi 20 oyundan 12-ni udmuşdur. Komanda növbəti oyunlardan neçəsini ardıcıl udsa, qalib gəldiyi oyunlar bütün oyunların 80%-ni təşkil edər?

7 > İki ardıcıl natural ədədin birincisinə 6 əlavə edib, ikincisindən 2 çıxsaq, yeni alınan ədədlərin nisbəti $\frac{6}{5}$ kimi olar. Ardıcıl ədədləri tapın.

8 > Qutuda ağ və qara kürələr var. Ağ kürələrin sayı qara kürələrin sayından iki ədəd azdır.

a) Təsadüfən çıxarılan bir kürənin ağ olması ehtimalı 0,4 olarsa, qutuda cəmi neçə kürə var?

b) Bu qutuya daha neçə ağ kürə əlavə edilsə, təsadüfən çıxarılan kürənin ağ olması ehtimalı $\frac{2}{3}$ olar?

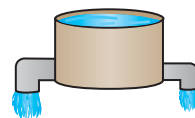
9 > Rəhim və Cəmil birlikdə işləsələr, bütün sahənin otunu 2 saata biçərlər. Cəmil tək işləsə, bu işi Rəhimdən 3 saat tez qurtarar. Onların hər biri tək işləsələr, bütün sahənin otunu neçə saata biçərlər?

10 > Əgər $\frac{1}{x}$ ədədi $\frac{1}{a}$ və $\frac{1}{b}$ ədədlərinin ədədi ortasıdırsa, onda x ədədinə a və b ədədlərinin harmonik ortası deyilir.

a) Bu fikri rasional bərabərlik şəklində ifadə edin və x -i tapın.

b) İki müsbət ədədin harmonik ortası 6-ya, fərqi isə 8-ə bərabərdir. Bu ədədləri tapın.

11 > Hovuzun suyu eyni zamanda müxtəlif diametrli iki boru vasitəsilə 3 saata boşaldıla bilər. Diametri kiçik olan boru hovuzu diametri böyük olan borudan 8 saat gec boşaldar. Hər bir boru ayrılıqda hovuzu neçə saata boşaldar?



12 > Təsəvvür edin ki, siz hər həftə maksimum balı 60 olan qiymətləndirmə tapşırıqları yazırsınız. 6 həftənin nəticəsinə görə sizin orta balınız 48-dir.

a) Növbəti 2 həftədə orta balınız neçə olmalıdır ki, 8 həftəlik orta balınız 50 olsun?

b) Birinci 6 həftədə orta bal 50 olmuşdur. 10 həftəlik orta bal maksimum balın 85%-ni təşkil edirsə, bu hansı şərtlərlə mümkün ola bilər?

13 > Təsəvvür edin ki, siz 480 səhifəlik kitabı 10 gün ərzində oxuyub qurtarmaq istəyirsiniz. Kitabın yarısını oxuduqdan sonra sizə məlum oldu ki, planlaşdırılan vaxtda kitabı oxuyub qurtarmanız üçün gündə 20 səhifə daha çox oxumalısınız. Kitabın birinci yarısından gündə neçə səhifə oxumusunuz?

14 > Türkan təklif edilən iki işdən birini seçmək haqqında fikirləşir. İş yerlərindən biri onun evinə çox yaxındır və saat hesabı iş təklif edir. Digər iş yerində isə hər iş saati üçün birincidən 2,25 manat çox məvəci təklif edilir. Türkan bu iş yerini seçsə, birinci iş yerində 900 manat qazanmaq üçün işlədiyi vaxtdan 10 saat az işləməklə 980 manat qazanacaq. Türkana hər iş yerində bir saat üçün neçə manat təklif edildi?

15 > **Kimya.** Su və duz məhlulunun yeni konsentrasiyasını $C = \frac{A}{s + v}$ düsturu ilə hesablamaq olar. **A** məhluldakı duzun miqdarını, **s** məhlulun ilkin miqdarını, **v** əlavə edilmiş suyun miqdarını göstərir.

a) 30%-li 2 kq duz məhluluna neçə kiloqram su əlavə edilsə, məhlul 10%-li olar?

Göstəriş: Burada $C = 0,1$; $A = 0,6$; $s = 2kq$, v -ni tapın.

b) 0,5 kq 10%-li məhlula nə qədər su əlavə edilsə, 2%-li məhlul alınar?

16 > Sıfırdan fərqli iki ədədin tərsinin cəmi onların cəminin hasilinə olan nisbətinə bərabərdir. Bu fikrin doğruluğunu uyğun eyniliyi yazıb sadələşdirməklə əsaslandırın.

5-3

Modullu tənliklər

Ədədin mütləq qiymətinin tərifinə görə $|x| = \begin{cases} x, & \text{əgər } x \geq 0 \\ -x, & \text{əgər } x < 0 \end{cases}$ olduğundan

modul işarəsi daxilində dəyişəni olan tənlikləri həll edərkən iki hal nəzərdən keçirilir.

1-ci hal. Modul işarəsi daxilindəki ifadə müsbətdir və ya sıfıra bərabərdir.

2-ci hal. Modul işarəsi daxilindəki ifadə mənfidir.

1. Nümunə. $|3x - 2| + 11 = 5$ tənliyini həll edin.

Həlli. Bərabərliyin sol tərəfində yalnız modullu ifadəni saxlayaq:

$|3x - 2| = 5 - 11$; $|3x - 2| = -6$. Bu isə ədədin mütləq qiymətinin tərifinə uyğun deyil. Çünki, ədədin mütləq qiyməti ya sıfıra, ya da müsbət ədədə bərabər olmalıdır. Tənliyin kökü yoxdur. **Cavab:** \emptyset

2. Nümunə. $|x - 3| = 6$ tənliyini iki üsulla, cəbri və qrafik üsulla həll edin
Cəbri üsulla həlli

$x - 3$ ya 6-ya, ya da -6 -ya bərabər olmalıdır.

$x - 3 = 6$ olarsa, $x = 9$

$x - 3 = -6$ olarsa, $x = -3$ olar.

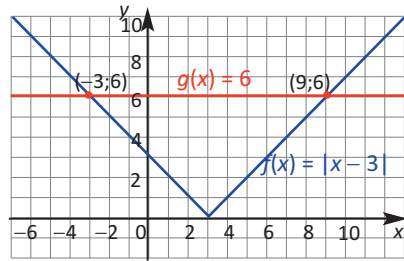
İndi isə $x = 9$ və $x = -3$ qiymətlərinin verilən tənliyi ödədiyini yoxlayaq.

$x = 9$, $|9 - 3| = 6$; $6 = 6$ $x = -3$, $|-3 - 3| = 6$; $|-6| = 6$; $6 = 6$

Cavab: Verilən tənliyin iki kökü vardır: 9 və -3

Qrafik üsulla həlli.

Eyni koordinat müstəvisində $f(x) = |x - 3|$ və $g(x) = 6$ funksiyalarının qrafiklərini quraq. Bu qrafiklərin kəsişmə nöqtələrinin $(-3; 6)$ və $(9; 6)$ olduğu müəyyən edilir. Buradan isə $x = -3$ və $x = 9$ qiymətlərinin hər ikisinin tənliyin kökləri olduğu alınır.



3. Nümunə. $|x^2 - 2x| = 3$ tənliyini həll edin.

Həlli. $x^2 - 2x$ ya 3-ə, ya da -3 -ə bərabər olmalıdır.

I hal. $x^2 - 2x = 3$ $x^2 - 2x - 3 = 0$; $(x - 3)(x + 1) = 0$ $x_1 = 3$ və ya $x_2 = -1$

Yoxlama: $x = 3$: $|x^2 - 2x| = 3$; $|3^2 - 2 \cdot 3| = 3$; $|3| = 3$; $3 = 3$ tənlik ödənilir.

$x = -1$: $|x^2 - 2x| = 3$; $|(-1)^2 - 2 \cdot (-1)| = 3$; $|3| = 3$; $3 = 3$ tənlik ödənilir.

II hal. $x^2 - 2x = -3$; $x^2 - 2x + 3 = 0$

Diskriminant mənfi olduğundan həqiqi kökü yoxdur.

Cavab: $\{-1; 3\}$

4. **Nümunə.** $|2x - 4| = 1 - 3x$

Həlli. Mütləq qiymətin tərifinə görə: $|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4, & \text{əgər } 2x - 4 \geq 0 \\ -(2x - 4), & \text{əgər } 2x - 4 < 0 \end{cases}$

I hal. Əgər $2x - 4 \geq 0$, yəni $x \geq 2$ olarsa, $|2x - 4| = 2x - 4$ olduğundan verilən tənlik $2x - 4 = 1 - 3x$ şəklinə düşər. Bu belə yazılır:

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 2x - 4 = 1 - 3x \end{cases}$$

$2x - 4 = 1 - 3x$ tənliyindən $5x = 5$, $x = 1$ tapılır ki, bu qiymət $x \geq 2$ şərtini ödəmir. Yəni bu halda tənliyin kökü yoxdur.

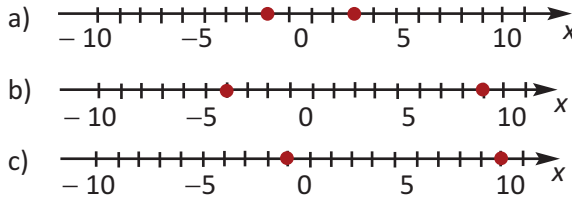
II hal. Əgər $2x - 4 < 0$, yəni $x < 2$ olarsa, $|2x - 4| = -(2x - 4)$ olur və verilmiş tənlik $-(2x - 4) = 1 - 3x$ şəklinə düşür. Bu halda

$$\begin{cases} x < 2, \\ -(2x - 4) = 1 - 3x \end{cases} \text{ sistemini alırıq.}$$

$-(2x - 4) = 1 - 3x$ tənliyindən $x = -3$ tapılır ki, bu qiymət $x < 2$ şərtini ödəyir. Beləliklə verilmiş tənliyin bir kökü var. **Cavab:** $\{-3\}$

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Tənliyin həllini (əgər varsa) ədəd oxu üzərində təsvir etməklə təqdim edin.
 - a) $|x| = 4$
 - b) $|x| - 3 = 10$
 - c) $|x| + 5 = 5$
 - d) $|x| = -4$
- 2 > Tənliyi cəbri və qrafik üsulla həll edin.
 - a) $|x - 4| = 10$
 - b) $|x + 3| = 2$
 - c) $|x - 1| = 0$
 - d) $|x + 9| = -3$
- 3 > Tənliyi həll edin.
 - a) $|2 - x| = 3$
 - b) $|3 - 2x| = 1$
 - c) $|4 + 0,5x| = 2$
 - d) $|5 + 2x| = 7$
- 4 > Ədəd oxu üzərində verilən həllinə görə $|ax + b| = c$ şəklində tənlik yazın.



- 5 > Tənliyi həll edin.
 - a) $|1 - 2x| + 6 = 9$
 - b) $|-2x| = 8$
 - c) $|-x| = 1$
 - d) $4 - |2x| = 3$
 - e) $5 - \left|\frac{1}{2}x\right| = 4$
 - f) $|x - 2| = -\frac{1}{2}$
 - g) $|x^2 - 9| = 0$
 - h) $|x^2 - 2x| = 3$
 - i) $|x^2 + x| = 12$
 - j) $|x - 1| = 2x - 1$
 - k) $|2x - 3| = x - 1$
 - l) $|x + 1| = 3x - 1$

- 6 > Dəyişəni mütləq qiymət işarəsi daxilində olan elə tənlik yazın ki, ədəd oxu üzərində onun həllinə uyğun nöqtələr sıfır nöqtəsindən:
- a) 6 vahid; b) $\frac{11}{2}$ vahid məsafədə olsun.

- 7 > Nümunəni araşdırın və tənlikləri həll edin.

Nümunə. $|2x - 4| = |5x + 2|$

Həlli. $2x - 4 = 5x + 2$ və ya $2x - 4 = -(5x + 2)$ olmalıdır. Buradan alırıq:

$$-3x = 6 \text{ və ya } 7x = 2;$$

$$x = -2 \text{ və ya } x = \frac{2}{7}$$

Yoxlama. $x = -2$: $|2 \cdot (-2) - 4| = |5 \cdot (-2) + 2|$; $|-8| = |-8|$; $8=8$

$$x = \frac{2}{7}: |2 \cdot \frac{2}{7} - 4| = |5 \cdot \frac{2}{7} + 2|$$
; $|\frac{24}{7}| = |\frac{24}{7}|$; $\frac{24}{7} = \frac{24}{7}$

Cavab: $\{-2; \frac{2}{7}\}$

a) $|9x + 7| = |-7|$

b) $|3 - 4x| = |6 - x|$

c) $|6,5n - 1,4| = |3,5n - 8,6|$

d) $\left| \frac{5p + 3}{6} \right| = \left| \frac{1}{3}p - 3 \right|$

e) $|5n - 4| = |7 - 5n|$

f) $|2y + 1| = |2y - 7|$

g) $|12a + 1| = |12a - 25|$

h) $\left| \frac{4p - 1}{6} \right| = \left| \frac{2}{3}p + \frac{5}{6} \right|$

- 8 > Tənliyi həll edin.

a) $11 + |x| = 3$

b) $|x| - 22 = -3$

c) $7 - 3|x + 4| = -8$

d) $|4x - 3| = |5x + 3|$

e) $|x - 8| = |8 - x|$

f) $|x - 6| = 3 - 4x$

- 9 > Mahir $|x - 2| = x^2$ tənliyini grafik üsulla, Leyla isə cəbri üsulla həll etmişdir. Kimin həlli doğrudur?

Leyla:

$$|x - 2| = x^2$$

1. $x - 2 = x^2$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

kökü yoxdur

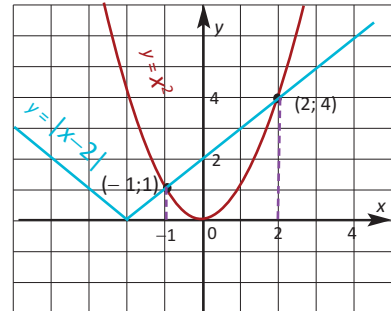
2. $-x + 2 = x^2$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2; x = 1$$

Mahir:



- 10 > Tənliyi həll edin.

a) $|x^2 - 5| = -4$

b) $|x^2 - 5| = 4$

c) $|x^2 - 2| = 2$

d) $|x^2 - 1| = 3$

Tətbiq tapşırıqları

- 11 > Hər bir fikrə uyğun modullu tənlik yazın və ədəd oxu üzərində təsvir edin.
- k ədədi 2-dən 4 vahid məsafədədir.
 - m ədədi -3 -dən 5 vahid məsafədədir.
 - $2x$ ədədi 5-dən 3 vahid məsafədədir.
 - $3t$ ədədi -2 -dən 4 vahid məsafədədir.
- 12 > Həsənin kütləsi 48 kq-dır. Həkim ona deyir ki, bu sənin üçün ideal hesab edilən kütlədən cəmi 5% fərqlidir. Həkimin nəzərdə tutduğu ideal kütləni dəyişəni modul işarəsi daxilində olan tənliklə yazın.
- 13 > Səbuhi və Kamran internetdə verilmiş suallarla IQ səviyyələrini yoxladılar. Səbuhi deyir ki, mənim IQ səviyyəmə Kamranın səviyyəsindən 15 xal fərqlənir. Kamranın IQ səviyyəsi 110 balla qiymətləndirilmişdir. Səbuhinin səviyyəsini göstərən xalları dəyişəni modul işarəsi daxilində olan tənliklə təqdim edin.

5-4

İrrasional tənliklər

Dəyişəni radikal işarəsi altında (və ya kəsr üstlü qüvvətə yüksəldilmiş) olan tənliklərə irrasional tənliklər deyilir.

Nümunələr: $\sqrt{x-1} = 5$, $\sqrt[3]{x+2} - x = 3$, $x^{\frac{2}{3}} = 4$

İrrasional tənlikləri həll edərkən, adətən qüvvətə yüksəltmə əməli tətbiq edilir. Cüt dərəcədə qüvvətə yüksəltmə aparıldıqda yeni tənlikdə dəyişənin mümkün qiymətləri çoxluğu genişlənə bilər. Ona görə də bu halda alınmış tənliyin köklərinin verilmiş tənliyi ödəyib ödəmədiyini yoxlamaq lazımdır.

1. **Nümunə.** $\sqrt{x-2} + 3 = 1$ tənliyini həll edin.

Həlli. $\sqrt{x-2} = 1 - 3$ *radikal işarəsi olan ifadə "təklənir"*

$\sqrt{x-2} = -2$ *sadələşdirilir*

Alınmış tənliyin kökü yoxdur, çünki hesabi kvadrat kök mənfi olmayan ədəddir.

Cavab: \emptyset

2. **Nümunə.** $\sqrt{x+4} + 2 = 5$ tənliyini həll edin.

Həlli. $\sqrt{x+4} = 3$ *radikal işarəsi olan ifadə "təklənir"*

$x + 4 = 9$ *kvadrata yüksəldilərək radikaladan azad edilir*

$x = 5$ *alınmış tənlik həll edilir.*

Yoxlama: Verilmiş tənlikdə $x = 5$ yazsaq, $\sqrt{5+4} + 2 = 5$, $5 = 5$ alırıq, yəni tənlik ödəyir. **Cavab:** $\{5\}$

3. Nümunə. $\sqrt{x-3} + x = 5$ tənliyini həll edin.

Həlli. $\sqrt{x-3} = 5 - x$ radikal "təklənir"

$x - 3 = (5 - x)^2$ kvadrata yüksəldilərək radikaladan azad edilir

$x^2 - 11x + 28 = 0$ sadələşdirilir və həll edilir

$x_1 = 4, x_2 = 7$

Yoxlama: $x = 4$ olduqda $\sqrt{4-3} + 4 = 5, 5 = 5$. Tənlik ödənilir

$x = 7$ olduqda $\sqrt{7-3} + 7 = 9, 9 \neq 5$. Tənlik ödənilir

Cavab: $\{4\}$

4. Nümunə. $\sqrt[3]{x+2} - 1 = 2$ tənliyini həll edin.

Həlli. $\sqrt[3]{x+2} = 3$ radikal "təklənir"

$x + 2 = 27$ kuba yüksəldilərək radikaladan azad edilir

$x = 25$ sadələşdirilir və həll edilir

Cavab: $\{25\}$

Öyrənmə tapşırıqları

1 > Tənliyi həll edin.

a) $\sqrt{x+3} = 4$

b) $\sqrt{1-2x} - 3 = 0$

c) $\sqrt{5x-4} + 1 = 3$

d) $\sqrt{12-x} = x$

e) $\sqrt{x^2-x-4} = x+2$

f) $\sqrt[4]{x^2+16} = \sqrt{5}$

g) $\sqrt[3]{x^2+4} = 2$

h) $3 + \sqrt{3x+1} = x$

i) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$

2 > Tənliklərdən hansının həqiqi kökü yoxdur?

a) $\sqrt{x-1} + 3 = 4$

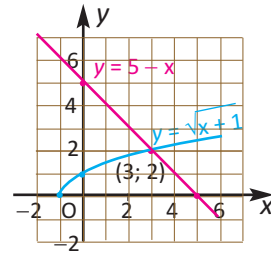
b) $\sqrt{x+1} + 3 = 4$

c) $\sqrt{x-2} + 7 = 10$

d) $\sqrt{x+2} - 7 = -10$

3 > a) Şəkildə $\sqrt{x+1} = 5-x$ tənliyinin qrafik həlli göstərilmişdir. Qrafikə görə tənliyin həllini yazın. Cavabınızı izah edin.

b) $\sqrt{x+2} = 4-x$ tənliyini qrafik üsulla həll edin.



4 > Dəyişənin mümkün qiymətlərini göstərin. Tənliyi həll edin.

a) $x^{\frac{1}{2}} = 3$

b) $x^{\frac{1}{3}} = 2$

c) $x^{-\frac{1}{3}} = 4$

d) $x^{\frac{3}{5}} \cdot x^{-1,4} = 9$

e) $(x-3)^{\frac{2}{3}} = 4$

f) $(2x+3)^{\frac{3}{4}} = 8$

Nümunə. $(x-1)^{\frac{2}{3}} = 9$.

Həlli. Dəyişənin mümkün qiymətlərini tapmaq: $x-1 \geq 0, x \geq 1$. Tənliyin hər iki tərəfini $\frac{3}{2}$ qüvvətinə yüksəldək: $((x-1)^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}}, x-1 = 27, x = 28$. Cavab $\{28\}$

5 > Tənliyi yeni dəyişən daxil etməklə həll edin.

a) $x + \sqrt{x} = 12$

c) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 2$

e) $x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$

b) $x - \sqrt{x} = 6$

d) $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x} = 3$

f) $x + 3x^{\frac{1}{2}} - 4 = 0$

Nümunə. $\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 2 = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli. $\sqrt[4]{x} = t$ əvəzləməsi etsək, $\sqrt{x} = t^2$ olar. Onda verilmiş tənlik t dəyişəninə görə $t^2 - t - 2 = 0$ şəklinə düşər. Bu tənlikdən $t_1 = 2, t_2 = -1$ tapılır.

Əvəzləməni nəzər alaq: 1) $\sqrt[4]{x} = 2$ 2) $\sqrt[4]{x} = -1$

$$x = 2^4 = 16$$

həqiqi kökü yoxdur

Cavab: {16}

6 > Firuz $x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$ tənliyini aşağıdakı kimi həll etmişdir. Firuzun həllini araşdırın. Tənlikləri bu üsulla həll edin.

Firuzun həlli

$$x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$$

$$(x^{\frac{1}{3}} - 4)(x^{\frac{1}{3}} + 2) = 0$$

$$x^{\frac{1}{3}} - 4 = 0 \quad | \quad x^{\frac{1}{3}} + 2 = 0$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 4 \quad | \quad x^{\frac{1}{3}} = -2$$

$$(x^{\frac{1}{3}})^3 = 4^3 \quad | \quad \emptyset$$

$$x = 4^3 = 64$$

a) $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$

b) $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{4}} - 4 = 0$

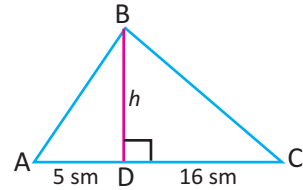
c) $x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$

d) $x + 2x^{\frac{1}{2}} - 3 = 0$

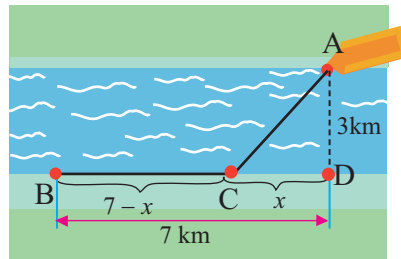
7 > $\triangle ABC$ -də B təpəsindən çəkilən hündürlük AC tərəfini $AD = 5$ sm və $DC = 16$ sm olmaqla iki parçaya ayırır.

1) $BD = h$ işarə etməklə AB və BC tərəflərinin uzunluqlarını h ilə ifadə edin.

2) $\triangle ABC$ -nin perimetrinin 54 sm olduğunu bilərək h -ı tapın.



8 > Balıqçı eni 3 km olan su anbarının kənarındakı A nöqtəsindən C nöqtəsinə qayıqla keçməyi, oradan isə piyada olaraq B nöqtəsinə getməyi planlaşdırır. Anbarın qarşı tərəfindəki üzbuüz D nöqtəsindən B nöqtəsinə qədər olan məsafə 7 km-dir. Balıqçı C nöqtəsinə qayıqla 10 km/saat sürətlə, sonra isə piyada B nöqtəsinə 6 km/saat sürətlə hərəkət etdi. Bütün yola cəmi 1 saat vaxt sərf olundu. Balıqçı nə qədər yol qət etdi?



5-5

Tənliklər sistemi



İkidəyişənli tənliklər. Tənliklər sistemi

İkidəyişənli tənliklərə aid nümunələr:

$$2x - 3y = 1 \quad 3x^2 - 2xy + y = 0 \quad (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

$(x_0; y_0)$ cütü verilmiş tənliyi doğru ədədi bərabərliyə çevirərsə, ona ikidəyişənli tənliyin həlli deyilir. Məsələn, 1-cisi x dəyişəninin, 2-cisi isə y dəyişəninin qiymətini göstərən $(-2; 5)$ ədədlər cütü $y - x^2 = 1$ tənliyinin həllidir ($5 - (-2)^2 = 1$ bərabərliyi doğrudur).

İkidəyişənli tənliyin sağ tərəfi sıfır, sol tərəfi standart şəkildə çoxhədli olarsa, bu çoxhədlinin dərəcəsi tənliyin dərəcəsi hesab edilir.

İkidəyişənli tənliyin qrafiki koordinatları tənliyin həlləri olan nöqtələr çoxluğu. Məsələn, $y - 2x = 3$ tənliyinin qrafiki düz xətt, $y = x^2 - 2x$ tənliyinin qrafiki parabola, $x^2 + y^2 = 3$ tənliyinin qrafiki çevrədir.

Bir neçə tənliyin hər birini ödəyən həlli tapmaq tələb olunduqda tənliklər $\{$ fiqurlu mötərizəsinin köməyiylə birgə yazılır və onlara tənliklər sistemi deyilir. Sistemin tənliklərinin hər birinin həlli olan $(x_0; y_0)$ cütünə sistemin həlli, belə cütlər çoxluğuna isə sistemin həllər çoxluğu deyilir.

Öyrənmə tapşırıqları

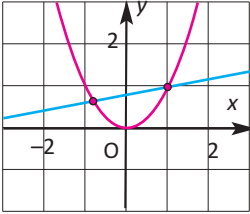
- 1 > Hansı cütün $x^2 - y + 2 = 0$ tənliyinin həlli olduğunu yoxlayın.
a) $x = 1, y = 3$ b) $x = -2, y = 2$ c) $x = -2, y = 6$
- 2 > Tənliyin hər hansı üç həllini yazın.
a) $x - 2y = 3$ b) $x^2 + 2y = 1$ c) $(x - 1)(y + 2) = 0$ d) $(x^2 + 4)(y - 3) = 0$
- 3 > Tənliyin həlli varmı?
a) $x^2 + (y - 2)^2 = -1$ b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0$
- 4 > Tənliyi ödəyən $(x; y)$ cütü üçün $x \cdot y$ hasilini tapın.
a) $\sqrt{x - 4} + (y + 3)^2 = 0$ b) $(x + 2)^2 + |y - 3| = 0$
- 5 > Tənliyin qrafikini qurun.
a) $xy = 6$ b) $x^2 + y^2 = 16$ c) $y = x^2 - 2x$
- 6 > a) $(-8; 6)$; b) $(-5; 3)$ cütü $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x + y = -2 \end{cases}$ tənliklər sisteminin həllidirmi?
- 7 > a və b -nin hansı qiymətlərində $(1; 2)$ cütü $\begin{cases} ax + by = 5 \\ xy + b = a \end{cases}$ tənliklər sisteminin həllidir?



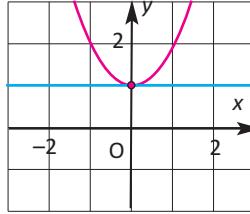
Bir tənliyi birdərəcəli, digəri ikidərəcəli olan tənliklər sistemi

Sistemə daxil olan tənliklərin qrafiklərini eyni koordinat müstəvisində qurub, kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını tapmaqla sistemin həllərini (müəyyən dəqiqliklə) tapmaq olar. Qrafik üsulla həll sistemin həllərinin sayı haqqında fikir söyləmək üçün daha əlverişlidir. İkidəyişənli birdərəcəli tənliyin qrafiki olan düz xətlə ikidərəcəli tənliyin qrafikinə (parabola, hiperbola, çevrə və s.) qarşılıqlı vəziyyətindən asılı olaraq tənliklər sisteminin həllər sayı müxtəlif ola bilər.

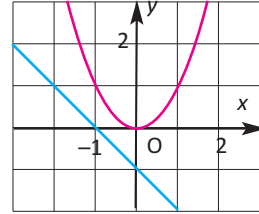
Nümunələr.



Düz xətt parabolunu iki nöqtədə kəşir. Sistemin iki həlli var.



Düz xətt parabolunun toxunanıdır. Sistemin bir həlli var.



Düz xəttin parabola ilə ortaq nöqtəsi yoxdur. Sistemin həlli yoxdur.

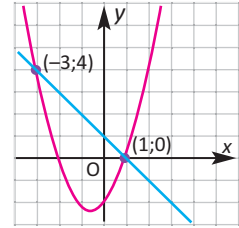
1.

Nümunə. $\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$ tənliklər sistemini qrafik

üsulla həll edin.

Həlli. Hər iki tənliyə uyğun qrafikləri eyni koordinat müstəvisində quraq. $y = x^2 + x - 2$ tənliyinin qrafiki parabola, $y = -x + 1$ tənliyinin qrafiki isə düz xətdir.

Bu qrafiklərin kəsişmə nöqtələrinin koordinatları $(1; 0)$ və $(-3; 4)$ kimidir. Bu qiymətləri sistemin tənliklərində yerinə yazmaqla yoxlamaq olar.



1-ci tənlik

Sol Sağ

$$(1; 0) \quad 0 = 1^2 + 1 - 2, 0 = 0;$$

$$(-3; 4) \quad 4 = (-3)^2 - 3 - 2, 4 = 4;$$

Cavab: $(1; 0), (-3; 4)$

2-ci tənlik

Sol Sağ

$$0 = -1 + 1, 0 = 0.$$

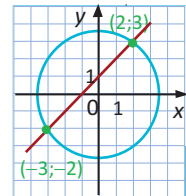
$$4 = -(-3) + 1 = 4, 4 = 4;$$

2.

Nümunə. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y = x + 1 \end{cases}$ tənliklər sisteminin həlləri sayını müəyyən edin.

Həlli. Sistemə daxil olan 1-ci tənlik çevrənin, 2-cisi isə düz xəttin tənliyidir. $x^2 + y^2 = 13$ çevrəsi ilə $y = x + 1$ düz xəttini eyni koordinat müstəvisində quraraq onların iki nöqtədə kəsişdiyini müəyyən edirik.

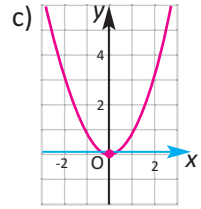
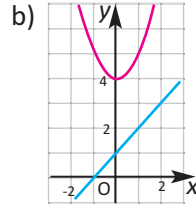
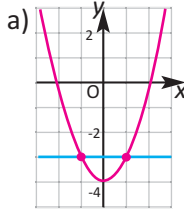
Bu nöqtələrin koordinatları olan $(x; y)$ cütləri verilmiş sistemin həlləridir. **Cavab:** verilmiş sistemin iki həlli var.



Öyrənmə tapşırıqları

8 > Aşağıda tənliklər sistemi və onların qrafik həlləri verilmişdir. Uyğunluğu müəyyən edin, verilmiş sistemin həllərinin sayı haqqında fikirlərinizi yazın.

1) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -3 \end{cases}$



2) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$

9 > Çevrə və düz xətti eyni koordinat sistemində quraraq tənliklər sisteminin neçə həlli olduğunu müəyyən edin.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -x - 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

10 > Tənliklər sistemini qrafik üsulla həll edin.

a) $\begin{cases} y = 3 - x \\ y = (x + 3)^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$

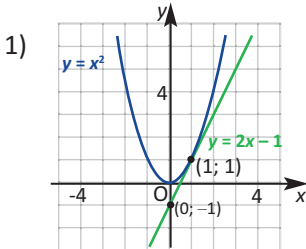
c) $\begin{cases} y = (x - 3)^2 - 3 \\ y + x = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y + 3 = x^2 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$

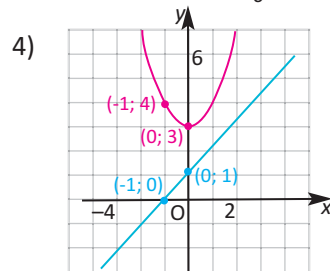
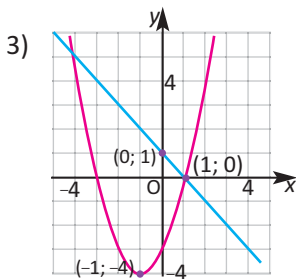
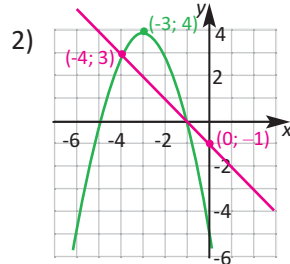
f) $\begin{cases} y = x^2 + 8x + 11 \\ y = 4 \end{cases}$

11 > Hər bir qrafikə uyğun tənliklər sistemini yazın.



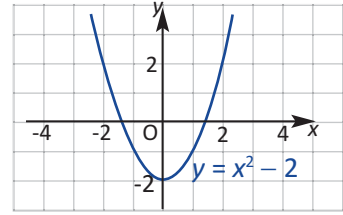
Nümunə:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$



12 > Sistemin tənliklərindən biri $y = x^2 - 6x - 10$, digəri isə bu parabolun absisləri $x = 3$ və $x = 2$ olan nöqtələrdə kəsən düz xəttin tənliyidir. Bu tənliklər sistemini yazın.

- 13 > Şəkində verilən kvadratik funksiyanın qrafikinə uyğun tənliklə sistem təşkil edən elə xətti tənlik yazın ki, sistemin:
- iki həlli olsun;
 - bir həlli olsun;
 - həlli olmasın.



- 14 > **Açıq tipli tapşırıq.** Hər bir hala uyğun tənliklər sistemi yazın və qrafik təsvirlə təqdim edin:
- qrafikləri parabola və üfüqi düz xətt olan tənliklərdən ibarət sistem;
 - qrafikləri parabola və bucaq əmsalı $k > 0$ olan düz xətdən ibarət sistem.

✓ Tənliklər sisteminin cəbri üsulla həlli

Tənliklər sistemini müxtəlif cəbri üsullarla həll etmək olar.

- Əvəzetmə üsulu.** 1) Birdərəcəli tənlikdən dəyişənin biri digəri ilə ifadə edilir.
2) Bu ifadə sistemin digər tənliyində yazılmaqla birdəyişənli tənlik alınır.
3) Alınan tənliyi həll etməklə dəyişənlərdən birinin qiyməti tapılır.
4) Bu qiymətlərə uyğun o biri dəyişənin qiymətləri hesablanır.

1. **Nümunə.** $\begin{cases} y + 9 = x^2 + 6x \\ -3x + y = -5 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin.

Həlli.

- $-3x + y = -5$ tənliyini y -ə görə həll edək: $y = -5 + 3x$
- $y + 9 = x^2 + 6x$ tənliyində $y = -5 + 3x$ olduğunu nəzərə alaq:
 $-5 + 3x + 9 = x^2 + 6x$; $x^2 + 3x - 4 = 0$; $(x - 1)(x + 4) = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -4$
- $y = -5 + 3x$ əvəzləməsinə görə y -in uyğun qiymətlərini tapaq.
 $y_1 = -5 + 3 \cdot 1 = -2$, $y_2 = -5 + 3 \cdot (-4) = -17$.
- Cavab:** $(1; -2)$, $(-4; -17)$.

2. Tərəf-tərəfə toplama (və ya çıxma) üsulu

2. **Nümunə.** $\begin{cases} y = x^2 - 8x - 5 \\ y = -4x + 7 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin.

Həlli:

- $$- \begin{cases} y = x^2 - 8x - 5 \\ y = -4x + 7 \end{cases}$$
- Tənlikləri tərəf-tərəfə çıxsaq, $0 = x^2 - 4x - 12$ tənliyini alırıq.
 - $x^2 - 4x - 12 = 0$ tənliyini həll edək: $(x - 6)(x + 2) = 0$; $x_1 = 6$, $x_2 = -2$
 - Tənliklərdən birində (məsələn 2-cidə) x -in qiymətlərini yerinə yazmaqla y -in uyğun qiymətlərini tapaq: $y_1 = -4 \cdot 6 + 7 = -17$, $y_2 = -4 \cdot (-2) + 7 = 15$
 - Cavab:** $(6; -17)$, $(-2; 15)$

Öyrənmə tapşırıqları

15) Tənliklər sistemini əvəzetmə üsulu ilə həll edin.

$$a) \begin{cases} x = y + 3 \\ yx = -2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 4 \\ y + xy = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} y = 6 - x \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} y - x = 4 \\ xy = -3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x - y = 3 \\ y^2 - x = 3 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} y + x = 3 \\ x^2 + xy = 12 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 3x^2 = 4y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 32 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$$

16) Tənliklər sistemini cəbri üsulla həll edin. Çevrə ilə düz xəttin ortaq nöqtələrinin sayını müəyyən edin. Qrafiklərlə yoxlayın.

$$a) \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$$

17) Tənliklər sistemini toplama (çıxma) üsulu ilə həll edin.

$$a) \begin{cases} y - 2x = 3 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} y + x = 3 \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x - y = 11 \\ x^2 - 4x - y = 5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - y^2 = 0 \\ 2y - x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 2x + y - 11 = 0 \\ 2x + 5y - y^2 - 6 = 0 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x^2 + 4y = 10 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

18) Tənliklər sistemini ödəyən $(x; y)$ cütü üçün xy hasilini tapın. Tənliklər sistemini həll edin.

$$a) \begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x - y = 3 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1,5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases}$$

19) Kəsişmə nöqtələrini tapın:

a) $y = \frac{8}{x}$ hiperbolası ilə $y = x - 2$ düz xəttinin;

b) $x^2 + y^2 = 5$ çevrəsi ilə $3x + y = 5$ düz xəttinin.

20) b -nin hansı qiymətində $y = b - x$ düz xətti ilə $y = (x - 2)^2$ parabolasının kəsişmə nöqtələrindən biri ordinat oxu üzərində yerləşir?

b -ni tapın və düz xətlə parabolanın daha hansı nöqtədə kəsişdiyini müəyyən edin. Uyğun qrafikləri eyni koordinat sistemində qurun.

21 > Diskriminantdan istifadə etməklə sistemin həlləri sayını müəyyən edin.

Nümunə.
$$\begin{cases} y = x^2 + 3x \\ y = -5 \end{cases}$$

Həlli. I tənlikdən $y = x^2 + 3x$ olduğunu II tənlikdə nəzərə almaqla, onu $x^2 + 3x = -5$ tənliyinə gətirək. $x^2 + 3x + 5 = 0$ kvadrat tənliyində diskriminantın sıfır və ya işarəsinin mənfi, yoxsa müsbət olduğunu müəyyən edək.

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 20 = -11 < 0. \quad D < 0 \text{ olduğu üçün sistemin həlli yoxdur.}$$

a)
$$\begin{cases} y = x^2 + 3x \\ y = -5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y = x^2 + 5 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y + 5 = x^2 \\ y - 4x = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y = x^2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Tətbiq tapşırıqları

Nümunə. Bucaq əmsalı $k = 2$ olan düz xətlə $y = 2x^2 + 6x + 5$ parabolasının bir ortaq nöqtəsi var. Bu düz xəttin ordinat oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapın.

Həlli. $k = 2$ olduğundan düz xəttin tənliyi $y = 2x + d$ kimi olar. Düz xətlə parabolanın ortaq nöqtəsinin koordinatları aşağıdakı tənliklər sisteminin həllidir:

$$\begin{cases} y = 2x + d \\ y = 2x^2 + 6x + 5 \end{cases} \Rightarrow 2x + d = 2x^2 + 6x + 5$$

$$2x^2 + 4x + (5 - d) = 0$$

Sistemin bir həlli var. Deməli, tənliyin diskriminatı sıfıra bərabərdir.

$$D = 0; 16 - 4 \cdot 2 \cdot (5 - d) = 0; 16 - 40 + 8d = 0; 8d = 24; d = 3$$

Düz xəttin tənliyi $y = 2x + 3$ kimidir. Bu tənlikdə $x = 0$ olduqda $y = 3$ alırıq. Deməli, düz xətt ordinat oxunu (0; 3) nöqtəsində kəşir.

22 > a) $y = 4x + b$ düz xətti ilə $y = -3x^2 - 2x + 4$ parabolasının ortaq nöqtəsi yoxdur. b hansı qiymətlər ala bilər?

b) $y = 3x + b$ düz xətti ilə $y = 2x^2 - 5x + 3$ parabolasının bir ortaq nöqtəsi var. b -nin qiymətini tapın.

23 > Düz xəttin tənliyi $y = kx - 5$ şəklindədir. k -nin hansı qiymətində bu düz xətt $y = 3x^2 + 4x - 2$ parabolasının toxunanı olar?

24 > 1) b -nin hansı qiymətlərində $y = x^2 + 1$ və $y - 2x = b$ tənliklərindən ibarət sistemin həlli yoxdur?

2) b -nin hansı ən böyük tam qiymətində $\begin{cases} y = b - x \\ y = (x - 2)^2 \end{cases}$ tənliklər sisteminin həlli yoxdur? Həllinizi qrafik təsvirlə əsaslandırın.

- 25 > İdmançının təyyarədən tullanarkən paraşütün açıldığı ana qədər olan hərəkətini $h(t) = -5t^2 + 1500$ düsturu ilə, paraşüt açıldıqdan sonra isə $h(t) = -5t + 450$ düsturu ilə ifadə etmək olar. Burada t (san) zamanı, h paraşütçünün yerdən məsafəsini (metrlə) göstərir.
- a) Paraşüt neçə saniyədən sonra açılmışdır?
b) Paraşüt yerdən hansı hündürlükdə açılmışdır?



- 26 > Samir futbol topunu zərbə ilə yuxarı vurdu. Eyni zamanda 16 m hündürlükdəki yuvadan quş havaya qalxdı. Quş şaquli istiqamətdə 4 m/san sürətlə yüksəlir. Topun yer səthindən h (metrlə) məsafəsinin t (san) uçuş müddətindən asılılığı $h(t) = 24t - 5t^2 + 1$ düsturu ilə verilir. Neçə saniyədən sonra top və quş eyni hündürlükdə olacaq?

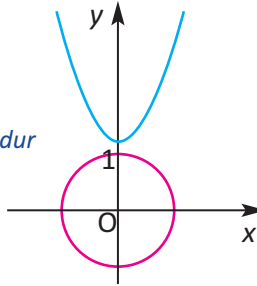


Hər iki tənliyi ikidərəcəli olan tənliklər sistemi

Hər iki tənliyi ikidərəcəli olan tənliklər sisteminin qrafik həllinə görə sistemin həlləri sayını müəyyən etmək olar. Aşağıda verilmiş nümunələri araşdırın.

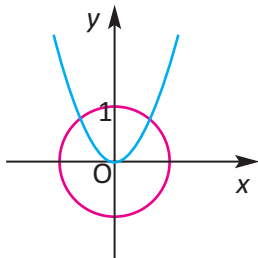
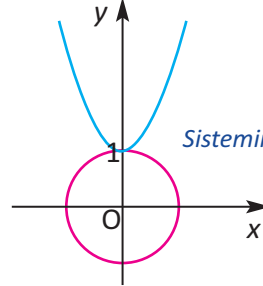
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 + 2 \end{cases}$$

Sistemin həlli yoxdur



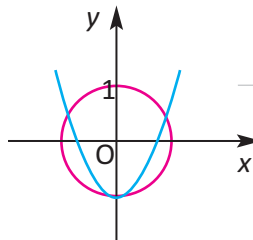
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

Sistemin bir həlli var



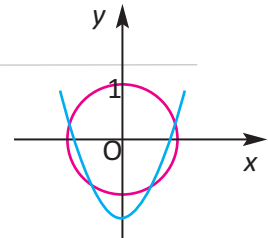
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Sistemin iki həlli var



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 2x^2 - 1 \end{cases}$$

Sistemin üç həlli var



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 4x^2 - 2 \end{cases}$$

Sistemin dörd həlli var

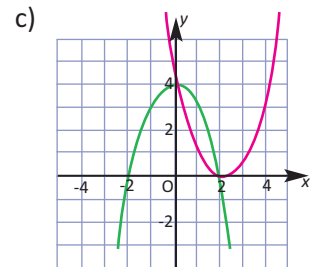
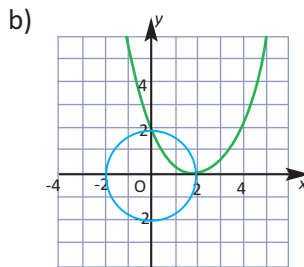
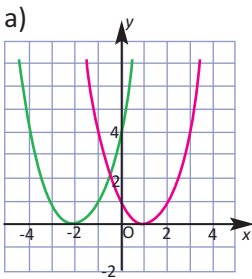
27 > Sistemə daxil olan tənliklərin qrafiklərini sxematik təsvir etməklə onun iki həlli, bir həlli, sonsuz sayda həlli olduğunu və ya heç bir həlli olmadığını müəyyən edin.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x^2 + 3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = (x + 4)^2 - 1 \\ y = x^2 + 8x + 15 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases}$

28 > Tənliklər sistemini qrafik üsulla həll edin.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y + x^2 = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = (x + 2)^2 - 4 \\ y = (x - 4)^2 - 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 - 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} xy = 3 \\ y - x^2 = 2 \end{cases}$

29 > Qrafiklərə uyğun tənliklər sistemini yazın.



30 > Tənliklər sistemini cəbri üsulla həll edin.

a) $\begin{cases} x^2 = xy + 3 \\ xy = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(y + 1) = 0 \\ x + 5xy + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - y = 3 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - xy = 2 \\ y^2 - xy = -1 \end{cases}$

Nümunə. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases}$

Həlli. Sistemin 2-ci tənliyini -2 -yə vurub 1-ci tənlik ilə tərəf-tərəfə toplasaq, $x^2 + y^2 - 2xy = 8 - 8$ və ya $(x - y)^2 = 0$ alarıq. Buradan $x = y$. Bunu 2-ci tənlikdə nəzərə alsaq, $y^2 = 4$ olar. Onda $y_1 = 2$, $y_2 = -2$ və $x = y$ olduğundan sistemin həlləri $(2; 2)$ və $(-2; -2)$ olur. Cavab: $\{(2; 2), (-2; -2)\}$

31 > **Açıq tipli tapşırıq.** Tənliklər sisteminin həllinin $(-1; 2)$ və $(2; 5)$ olduğunu bilərək, tapşırıqları yerinə yetirin.

a) Bir tənliyi xətti, digəri ikidərəcəli olan elə tənliklər sistemi yazın ki, yalnız verilən iki nöqtə sistemin həlli olsun.

b) Hər iki tənliyi ikidərəcəli olan elə tənliklər sistemi yazın ki, yalnız verilən iki nöqtə sistemin həlli olsun.

c) Hər iki tənliyi ikidərəcəli olan elə tənliklər sistemi yazın ki, verilən nöqtələr də daxil olmaqla sistemin sonsuz sayda həlli olsun.

5-6

Tənliklər sistemə gətirilən məsələlər həlli

- 1 > Rəqəmləri cəmindən 4 dəfə böyük, rəqəmləri hasilindən isə 3 dəfə böyük olan ikirəqəmli ədədi tapın.
- 2 > a) Fərqi 4-ə bərabər olan iki ədədin cəmi onların hasilindən 5 vahid böyükdür. Ədədləri tapın.
b) İki ədədin hasili onların cəmindən 29 vahid böyükdür. Ədədlərdən birinə digərinin 2 mislini əlavə etsək, cəm 19-a bərabər olar. Ədədləri tapın.
- 3 > Güləndamın iki bank hesabı var: 4,5% sadə faiz artımı ilə və 6% sadə faiz artımı ilə. 6%-lik hesabdakı məbləğ 4,5%-lik hesabdakı məbləğdən 3 dəfə çoxdur. Güləndamın iki hesabdakı pulu bir ildən sonra cəmi 4225 manat olarsa, o hər hesabına əvvəlcə neçə manat pul qoymuşdu?

	4,5%	6%
İlkin məbləğ	x	y
İllik artım	$0,045x$	$0,06y$
Cəmi	4225	

Cədvəli araşdırın, dəftərinizdə yenidən çəkin. Məsələni tənliklər sistemi qurmaqla həll edin.

- 4 > A təmizləyici mayesində 25% turşu, B təmizləyici mayesində isə 50% turşu var. Tərkibində 35% turşu olan 10 litr təmizləyici maddə hazırlamaq üçün hər təmizləyici növündən neçə litr qarışdırmaq lazımdır?

Göstəriş: 25%-li təmizləyici mayenin miqdarını x , 50%-li təmizləyici mayenin miqdarını y qəbul etməklə verilən məlumatı cədvəldə yazın.

	25%-li	50%-li	35%-li
Mayenin miqdarı	x	y	$x + y$
Turşunun miqdarı	$0,25x$	$0,5y$	$0,25x + 0,5y$

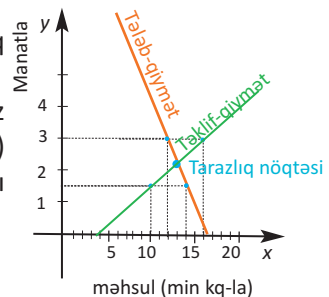
$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{0,25x + 0,5y}{x + y} = 0,35 \end{cases}$$

Tənliklər sistemini həll etməklə məsələdə tələb olunanları tapmaq olar.

- 5 > Fabrikdə ipək paltarlar istehsalında xalis ipək sapdan və 85%-i ipək olan sapdan istifadə edilir. Tərkibində 96% ipək olan 120 kq sap almaq üçün hər növ sapdan neçə kiloqram lazımdır?
- 6 > Düzbucaqlının diaqonalı 15 sm-dir. Onun tərəflərindən birini 6 sm, digərini 8 sm kiçiltəksə, perimetr 3 dəfə kiçilər. Verilmiş düzbucaqlının sahəsini tapın.

- 7 > Düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzu 17 sm-dir. Katetlərin hər birini 3 sm kiçiltə, alınan üçbucağın hipotenuzu 13 sm olar. Əvvəlki düzbucaqlı üçbucağın sahəsini tapın.
- 8 > Düzbucaqlı üçbucağın sahəsi 27 sm^2 -ə bərabərdir. Onun katetlərinin hər birini 1 sm böyütsək, onda üçbucağın sahəsi 35 sm^2 -ə bərabər olar. Üçbucağın katetlərini tapın.
- 9 > İki boru birlikdə işləsə, çən 12 dəqiqəyə dolar. Əvvəlcə çənin yarısını bir boru ilə, sonra qalan yarısını o biri boru ilə doldursalar, bu çən 25 dəqiqəyə dolar. Hər boru təklikdə işləsə, çən neçə dəqiqəyə dolar?
- 10 > İki fəhlə təmir işini 10 günə yerinə yetirə bilər. Onlar 7 gün birlikdə işlədikdən sonra ikinci fəhlə təklikdə daha 9 gün işlədi və işi qurtardı. Hər fəhlə bu işi təklikdə neçə günə yerinə yetirə bilər?
- 11 > Aralarındakı məsafə 80 km olan A və B şəhərlərindən eyni zamanda iki avtomobil qarşı-qarşıya yola düşdü. Rastlaşdıqdan 20 dəqiqə sonra avtomobillərdən biri B-yə, 45 dəqiqə sonra isə digəri A-ya çatdı. Avtomobillərin sürətlərini tapın.
- 12 > Sərnişin metroya hərəkət edən eskalator üzərində yeriyərək 24 saniyəyə, tərpnəmz eskalator üzərində həmin sürətlə yeriyərək 42 saniyəyə enir. Sərnişin metroya hərəkət edən eskalator üzərində dayanmaqla neçə saniyəyə enər?
- 13 > Gilasın bir kiloqramının qiyməti 3 manat olanda bazarda 12 000 kq tələbə qarşı 16 000 kq məhsul var idi. Gilasın bir kiloqramının qiyməti 1,50 manata endikdə bazarda 10 000 kq məhsul olduğu halda, 14 000 kq məhsula tələb var idi. Gilasın tələb və təklif qiyməti ilə onların miqdarı arasında (tələb-qiymət, təklif-qiymət) xətti asılılığın olduğunu şərtləşərək, təklifin tələbi ödədiyi halda satışa çıxarılan gilasın miqdarını və 1 kq-nın qiymətini müəyyən edin.

Göstəriş: Gilasın miqdarını x (min kiloqramla), 1 kq gilasın qiymətini y (manatla) qəbul edin. $(16; 3)$ və $(10; 1,5)$ nöqtələrinin $y - y_1 = k(x - x_1)$ düz xəttin tənliyində nəzərə almaqla (təklif-qiymət) asılılığı yazın. Analoji olaraq tələb-qiymət asılılığını $(12; 3)$ və $(14; 1,5)$ nöqtələrinə görə yoxlayın.





Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1 > Tənliyi həll edin.

a) $x^5 - x^3 = 0$

b) $x^4 = 16x^2$

c) $x^3 - x^2 = 4(x - 1)^2$

d) $2x^3 + 2x^2 = (x + 1)^2$

e) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 25x^2 - 16$

f) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) = 3$

g) $x^3 + 5x^2 + 15x + 27 = 0$

h) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$

i) $\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} = 12$

j) $\frac{x+4}{x-6} - \frac{3}{x+2} = \frac{x+25}{x^2-4x-12}$

2 > 20%-li və 10%-li iki duz məhlulu var. 100 q 20%-li məhlula neçə qram 10%-li məhlul əlavə edilsə, 12,5%-li məhlul alınar?

3 > Tənliklər sistemini həll edin.

1) $\begin{cases} x^2 - y = 5 \\ -3x + y = -7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x - y = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -2x \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 2y^2 = -6 \\ x + 8y = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ xy = 9 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 27 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x-4)(y-5) = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x+y)(x-y) = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2 - x + 1 = y \\ y^2 - y + 1 = x \end{cases}$

4 > Aralarındakı məsafə 18 km olan iki məntəqədən eyni zamanda qarşı-qarşıya iki turist dəstəsi yola düşdü və 2 saat sonra görüşdülər. Bu məntəqələr arasındakı yola birinci dəstənin sərf etdiyi vaxt ikincidən 54 dəqiqə çox olarsa, hər dəstənin sürətini tapın.

5 > Tənliklər sistemi üçün uyğunluğu müəyyən edin.

1) $\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ y^2 - xy = -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy = 18 \\ y^2 + xy = 18 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x - y = 2 \end{cases}$

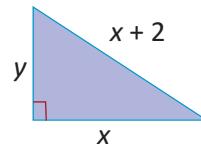
A) $|x + y| = 6$

B) $|x - y| = 2$

C) $xy = 15$

D) $|x + y| = 4$

6 > Üçbucağın perimetri 24 sm-dir. Şəkildə verilənlərə görə üçbucağın tərəflərinin uzunluqlarını tapın.



7 > Tərəf-tərəfə bölmə üsulu ilə tənliklər sistemini həll edin.

$$a) \begin{cases} xy - x = 2 \\ xy^3 - xy^2 = 8 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 3 \\ x^3 + x^2y = 12 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} xy^2 - x = 9 \\ xy^3 - xy = 18 \end{cases}$$

8 > Tənliyi həll edin.

$$a) |4 - x| = 3$$

$$b) 4 - |x| = 3$$

$$c) |4 - |x|| = 3$$

$$d) \sqrt{x^2 + 2x + 1} = x + 3$$

9 > Qutuda ağ və qırmızı kürələr var. Ağ kürələrin sayı qırmızı kürələrin sayından dörd ədəd çoxdur.

a) Təsadüfən çıxarılan kürənin ağ olması ehtimalı 0,7 olarsa, qutuda cəmi neçə kürə var?

b) Bu qutuya hər birindən eyni sayda olmaqla bir neçə ağ və qırmızı kürə əlavə edildikdən sonra təsadüfən çıxarılan kürənin ağ olması hadisəsinin ehtimalı 0,6 oldu. Qutuya neçə kürə əlavə olundu?

10 > Tənliklər üçün uyğunluğu müəyyən edin.

$$1) \frac{x}{2x-3} = \frac{4}{x}$$

A) köklərinin cəmi 1-ə bərabərdir

B) köklərinin cəmi 4-ə bərabərdir

$$2) \sqrt{x^2 - x} - 2 = 2$$

C) köklərinin cəmi 8-ə bərabərdir

$$3) |x-2| = 3$$

D) köklərinin hasilini -6-ya bərabərdir.

11 > Düz bucaq təpəsindən iki cisim onun tərəfləri boyunca eyni vaxtda hərəkətə başlayır və 3 saniyədən sonra onlar arasındakı məsafə 15 m olur. Birinci cismin 3 saniyədə getdiyi məsafənin ikincinin 4 saniyədə getdiyi məsafəyə bərabər olduğunu bilərək, onların sürətlərini tapın.

12 > İsbat edin ki, $y = x^2 + 4$ parabolası ilə $y - x + 3 = 0$ düz xətti kəsişmir.

13 > Düzbucaqlının uzunluğu 60 m, eni isə 8 m-dir. Bu düzbucaqlının eni və uzunluğunu neçə metr azaltmaq lazımdır ki, onun sahəsi 2 dəfə, perimetri isə 44 m kiçilsin?

14 > a -nın hansı qiymətlərində tənliklər sisteminin yeganə həlli var?

$$a) \begin{cases} y + 2x = a \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = a \\ yx = 9 \end{cases}$$

15 > $\begin{cases} y = x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ tənliklər sistemi verilmişdir.

Qrafikləri sxematik təsvir etməklə müəyyən edin:

a) a -nın hansı müsbət qiymətlərində sistemin iki həlli var?

b) a -nın hansı qiymətində sistemin üç həlli var?

c) a -nın elə qiyməti varmı ki, sistemin 4 həlli olsun?

6

Çoxbucaqlılar

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz

- ✓ Çoxbucaqlıların növlərini
- ✓ Çoxbucaqlının daxili və xarici bucaqlarına aid məsələlər həll etməyi
- ✓ Üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrə aid məsələlər həll etməyi
- ✓ Çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş dördbucaqlıların xassələrini
- ✓ Düzgün çoxbucaqlıların sahəsini hesablamayı

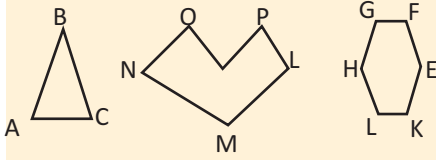


6-1

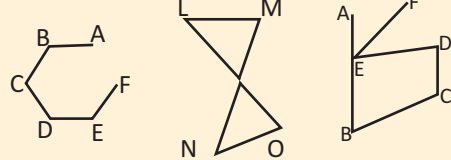
Çoxbucaqlılar

Sonlu sayda parçaların (birinin sonu digərinin başlanğıcı olmaqla) ardıcıl olaraq birləşməsindən alınan fiqura sınıq xətt deyilir. Bu halda ardıcıl birləşdirilən iki qonşu parça bir düz xətt üzərində yerləşməli deyil. Sınıq xəttin ucları (sonuncu parçanın sonu və birinci parçanın başlanğıcı) üst-üstə düşürsə, ona qapalı sınıq xətt deyilir. Sınıq xəttin qonşu olmayan tərəflərinin orta nöqtəsi yoxdursa, sadə sınıq xətt adlanır. Sadə qapalı sınıq xəttə çoxbucaqlı deyilir.

Çoxbucaqlıdır



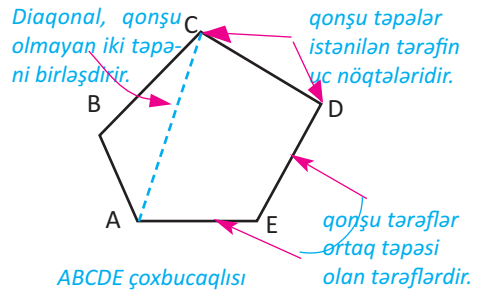
Çoxbucaqlı deyil



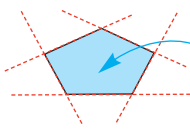
✓ Çoxbucaqlının tərəfləri müəyyən sayda düz xətt parçalarından ibarətdir. Tərəflərinin ucları çoxbucaqlının təpə nöqtələridir. Çoxbucaqlı onun təpələrini göstərən hərflərlə adlandırılır.

✓ Çoxbucaqlı aid olduğu müstəvinin nöqtələrini iki çoxluğa ayırır: çoxbucaqlının daxilində qalan sonlu hissə və onun xaricində qalan sonsuz hissə.

Çoxbucaqlılar qabarıq və ya çökük ola bilər.

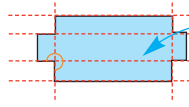


Qabarıq çoxbucaqlı



Qabarıq çoxbucaqlı istənilən tərəfini saxlayan düz xəttin ayırdığı yarımmüstəvilərdən birində yerləşir.

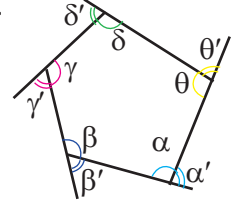
Çökük çoxbucaqlı



Çökük çoxbucaqlı heç olmasa bir tərəfindən keçən düz xəttin ayırdığı müxtəlif yarımmüstəvilərdə yerləşir.

Qabarıq çoxbucaqlının daxilində götürülmüş istənilən iki nöqtəni birləşdirən parça bütünlüklə çoxbucaqlının daxilində yerləşir.

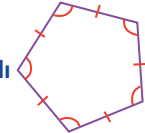
Qabarıq çoxbucaqlının verilmiş təpədən çıxan iki tərəfinin əmələ gətirdiyi və çoxbucaqlının daxil olduğu bucağa, həmin təpədəki **daxili bucaq** deyilir. Qabarıq çoxbucaqlının daxili bucağına qonşu olan bucağa çoxbucaqlının **xarici bucağı** deyilir. Şəkiləki qabarıq beşbucaqlıda $\alpha, \beta, \delta, \theta, \gamma$



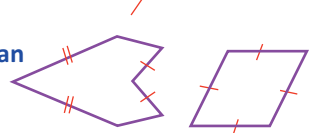
daxili bucaqlar, $\alpha', \beta', \delta', \theta', \gamma'$ xarici bucaqlardır. Qabarıq çoxbucaqlının istənilən təpəsindəki daxili və xarici bucaqlarının (hər təpədəki xarici bucaqlardan biri götürülməklə) cəmi 180° -yə bərabərdir.

Bütün tərəfləri və bütün bucaqları konqruent olan çoxbucaqlı **düzgün çoxbucaqlı** adlanır.

Düzgün çoxbucaqlı



Düzgün olmayan çoxbucaqlı



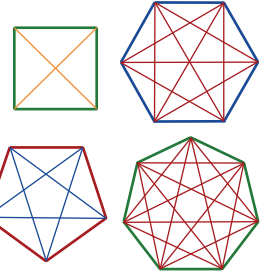
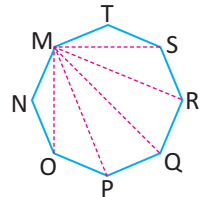
n tərəfli olan çoxbucaqlıya n -bucaqlı da deyilir. Qabarıq n -bucaqlının bir təpəsindən $(n - 3)$ sayda diaqonal çəkmək olar.

Öyrənmə tapşırıqları

1 > Şəkiləki fiqura görə yazın: a) tərəflərinin; b) hər hansı təpəsi ilə qonşu olmayan beş təpəsinin; c) iki qonşu tərəfinin; d) üç diaqonalının adını.

2 > a) Dəftərinizdə iki qabarıq, iki çökük çoxbucaqlı çəkin.
b) Dəftərinizdə qabarıq beşbucaqlı və onun bütün diaqonallarını çəkin.

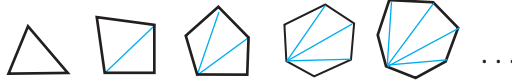
3 > Dəftərinizdə şəkilə göstərilədiyi kimi çoxbucaqlılar və onların bütün diaqonallarını çəkin. Çoxbucaqlıların tərəfləri, bir təpədən çəkilə bilən diaqonalları və diaqonallarının ümumi sayını göstərən cədvəl qurun. "Qabarıq n -bucaqlının $\frac{n(n-3)}{2}$ sayda diaqonalı vardır" təklifinin doğru olduğunu əsaslandırın.



4 > a) Qabarıq səkkizbucaqlının; onikibucaqlının cəmi neçə diaqonalı var?
b) 35; 90 diaqonalı olan çoxbucaqlının neçə tərəfi var?

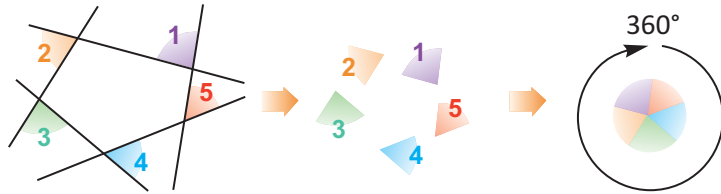
- 5 > a) Diaqonallarının sayı tərəflərinin sayından 2 dəfə çox olan qabarıq çoxbucaqlının tərəflərinin sayını tapın.
 b) Diaqonallarının sayı tərəflərinin sayından 6 dəfə çox olan qabarıq çoxbucaqlının bir tərəsindən neçə diaqonal çəkmək olar?

Araşdırma 1. Aşağıdakı cədvəli doldurun. n tərəfli olan qabarıq çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmini hesablamaq üçün düstur yazın.



Çoxbucaqlının tərəflərinin sayı	3	4	5	6	7	...	n
Bir tərəsdən çəkilən diaqonallarının sayı	0	1				...	
Üçbucaqların sayı	1	2					
Daxili bucaqlarının cəmi	$1 \cdot 180^\circ$ 180°	$2 \cdot 180^\circ$ 360°					

Araşdırma 2. Kağız üzərində şəkildə göstərildiyi kimi hər tərəfdəki xarici bucaqları rəngləməklə qabarıq çoxbucaqlı çəkin. Xarici bucaqları kəsin və tərələri eyni nöqtədə olmaqla bir-birini örtməmək şərtilə başqa bir kağızın üzərinə yapışdırın. Bütün xarici bucaqların cəmi haqqında fikirlərinizi söyləyin.



✓ Qabarıq çoxbucaqlının daxili və xarici bucaqlarının cəmi

Teorem 1. Qabarıq n -bucaqlının **daxili bucaqlarının** cəmi $180^\circ \cdot (n - 2)$ -yə bərabərdir ($n \geq 3$).

İsbatı: $n=3$ olduqda teorem doğrudur. $n>3$ halına baxaq. n -bucaqlıda bir tərəsdən $n - 3$ sayda diaqonal çəkmək olar. Bu diaqonallar onu $n - 2$ sayda üçbucağa ayırır. Çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi bu üçbucaqların bucaqları cəminə bərabərdir. Hər bir üçbucağın bucaqları cəmi 180° olduğundan n -bucaqlının daxili bucaqlarının cəmi $180^\circ \cdot (n - 2)$ olar.

Nəticə 1. Düzgün n -bucaqlının hər bir daxili bucağı $\frac{180^\circ(n - 2)}{n}$ -ə bərabərdir.

Teorem 2. Qabarıq çoxbucaqlının **xarici bucaqlarının** cəmi 360° -yə bərabərdir.

Xarici bucaqların cəmi = açıq bucaqların cəmi – daxili bucaqların cəmi

Xarici bucaqların cəmi: $180^\circ \cdot n - 180^\circ(n - 2) = 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ = 360^\circ$

Nəticə 2. Düzgün n -bucaqlının hər bir xarici bucağı $\frac{360^\circ}{n}$ -ə bərabərdir.

Nümunə. Düzgün çoxbucaqlının bir tərəsindəki xarici bucağı 60° -dir.

a) çoxbucaqlının daxili bucağının dərəcə ölçüsünü;

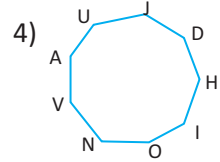
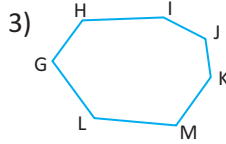
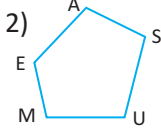
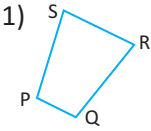
b) çoxbucaqlının tərəfləri sayını tapın.

Həlli. a) Daxili bucaq + Xarici bucaq = 180° ; Daxili bucaq = $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$b) \frac{360^\circ}{n} = 60^\circ \quad n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$$

Öyrənmə tapşırıqları

6 > Şəkildəki hər bir çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.



7 > 1) Qabarıq çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi 1800° -dir. Bu çoxbucaqlının:

a) neçə tərəfi; b) neçə diaqonalı var?

2) Düzgün: a) altıbucaqlının; b) onbucaqlının daxili və xarici bucaqlarının dərəcə ölçülərini tapın.

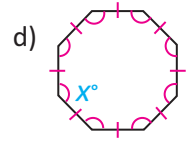
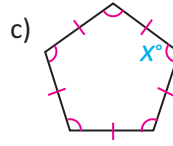
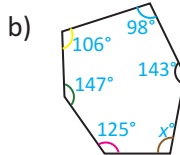
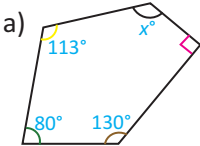
3) Düzgün çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi 1080° -dir. Bu çoxbucaqlının hər bir daxili və xarici bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

8 > Tərəflərinin sayı $n = 8$; $n = 9$; $n = 12$; $n = 15$ olan düzgün çoxbucaqlının daxili və xarici bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

9 > Diaqonallarının sayı 27 olan qabarıq çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.

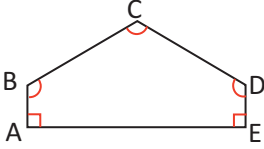
10 > Düzgün çoxbucaqlının xarici bucağı daxili bucağının 25%-i qədərdir. Çoxbucaqlının tərəflərinin sayını tapın.

11 > Çoxbucaqlının dəyişənlə işarə edilmiş bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

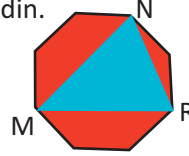


12 > Qabarıq beşbucaqlının daxili bucaqları 60° , 80° , 120° , 140° olarsa, beşinci bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

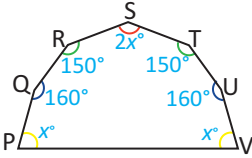
- 13 > Qabarıq altıbucaqlının daxili bucaqları 90° , 110° , 120° , 124° və 116° -dir. Altıbucaqlının naməlum daxili bucağını və həmin tərəpdəki xarici bucağı tapın.
- 14 > Düzgün çoxbucaqlının verilən xarici bucağına görə tərəflərinin sayını tapın.
1) 72° 2) 40° 3) 36° 4) 30°
- 15 > Düzgün çoxbucaqlının verilən daxili bucağına görə tərəflərinin sayını tapın.
1) 120° 2) 150° 3) 140° 4) 160°
- 16 > a) Şəkildə evin damının öndən görüntüsü təsvir edilmişdir. Qeyd olunmuş işarələmələrə görə hər bir bucağın dərəcə ölçüsünü yazın.



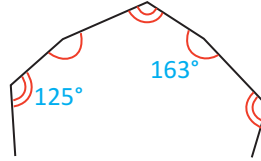
- b) Şəkildə düzgün səkkizbucaqlı şəkildə olan STOP işarəsi üzərində MNR üçbucağı təsvir edilmişdir. Bu üçbucağın tərəflərinə görə növünü müəyyən edin.



- 17 > a) Şəkildə çadırın öndən görünüşü verilmişdir. Dəyişənə işarələnmiş bucaqların dərəcə ölçülərini tapın.



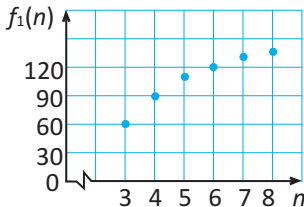
- b) Çoxbucaqlının daxili bucaqları şəkildə göstərilən ölçüdə konqruent bucaqlar ardıcılığından ibarətdir. Xarici bucaqlarından istifadə etməklə çoxbucaqlının tərəflərinin sayını tapın.



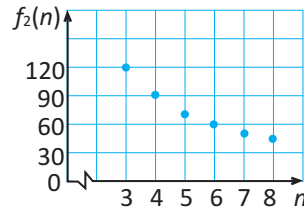
- 18 > Düzgün çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmi xarici bucaqlarının cəmindən 11 dəfə böyükdür. Bu çoxbucaqlının neçə tərəfi var?
- 19 > $n = 10$; $n = 30$; $n = 50$ olduqda düzgün çoxbucaqlının daxili və xarici bucaqlarını tapın.

Şəkildə $f_1(n) = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}$ və $f_2(n) = \frac{360^\circ}{n}$ funksiyalarının qrafikləri verilmişdir. n -in qiyməti artdıqca, düzgün çoxbucaqlının daxili və xarici bucağının dərəcə ölçüsünün dəyişməsinə təqdim edin.

$$f_1(n) = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}$$



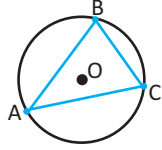
$$f_2(n) = \frac{360^\circ}{n}$$



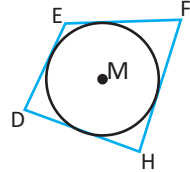
6-2

Çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş çoxbucaqlılar

Tərif 1. Çoxbucaqlının bütün təpələri çevrənin üzərində yerləşirsə, bu çoxbucaqlıya çevrə daxilinə çəkilmiş çoxbucaqlı, çevrəyə isə çoxbucaqlının xaricinə çəkilmiş çevrə deyilir. Şəkildə $\triangle ABC$ çevrənin daxilinə çəkilmiş üçbucaqdır.

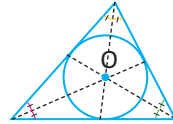


Tərif 2. Çoxbucaqlının bütün tərəfləri çevrəyə toxunursa, bu çoxbucaqlıya çevrə xaricinə çəkilmiş çoxbucaqlı, çevrəyə isə çoxbucaqlının daxilinə çəkilmiş çevrə deyilir. Şəkildə DEFH çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlıdır.

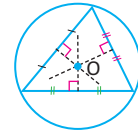


Üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələr

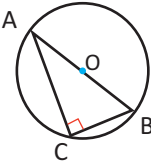
Teorem 1. İstənilən üçbucağın daxilinə çevrə çəkmək olar. Bu çevrənin mərkəzi üçbucağın tən bözlənlərinin kəsişmə nöqtəsidir.



Teorem 2. İstənilən üçbucağın xaricinə çevrə çəkmək olar. Bu çevrənin mərkəzi üçbucağın tərəflərinin orta perpendikulyarlarının kəsişmə nöqtəsidir.

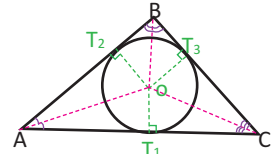


Teorem 3. Çevrə daxilinə çəkilmiş üçbucaq düzbucaqlı üçbucaqdırsa, hipotenuz bu çevrənin diametridir.



Tərs teorem. Çevrə daxilinə çəkilmiş üçbucağın tərəfi çevrənin diametridirsə, bu üçbucaq düzbucaqlı üçbucaqdır.

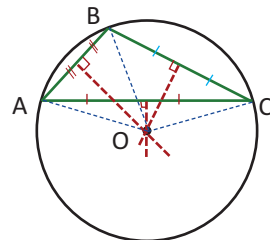
Teorem 1-in isbatı: (mətnlə). $\triangle ABC$ -də $\angle A$ və $\angle B$ -nin tən bözlənlərinin O kəsişmə nöqtəsindən üçbucağın tərəflərinə OT_1 , OT_2 , OT_3 perpendikulyarlarını çəkək. Tən bözlən üzərindəki ixtiyari nöqtə bucağın tərəflərindən eyni məsafədə olduğundan $OT_1 = OT_2$ və $OT_2 = OT_3$ alarıq.



O nöqtəsi həm də $\angle C$ -nin tən bözləni üzərindədir (niyə?). Mərkəzi O nöqtəsində olmaqla radiusu $r = OT_1$ olan çevrə çəkək. Üçbucağın tərəfləri OT_1 , OT_2 , OT_3 radiuslarına perpendikulyar olduğuna görə T_1 , T_2 , T_3 nöqtələrində çevrəyə toxunur. Deməli, bu çevrə verilmiş üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrədir.

Teorem 2-nin isbatı: $\triangle ABC$ -nin AB və BC tərəflərinin orta perpendikulyarlarını çəkək və onların kəsişmə nöqtəsini O ilə işarə edək. Parçanın orta perpendikulyarının xassəsinə görə $OA = OB = OC$ olur.

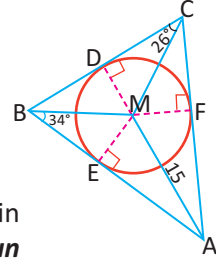
$\triangle AOC$ bərabəryanlı olduğundan O nöqtəsi həm də AC tərəfinin orta perpendikulyarı üzərindədir. Mərkəzi O nöqtəsində, radiusu $R = AO$ olan çevrə üçbucağın hər üç təpə nöqtəsindən keçməklə xaricə çəkilmiş çevrə olur.



Qeyd: Verilmiş üçbucağın xaricinə (və daxilinə) yalnız bir çevrə çəkmək olar. Verilmiş çevrənin daxilinə (və xaricinə) çəkilən üçbucaqlar isə sonsuz saydadır.

Öyrənmə tapşırıqları

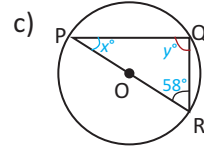
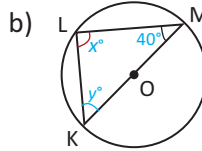
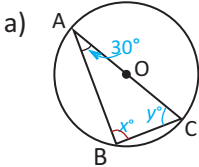
- 1 > M nöqtəsi daxilə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. $\angle MBA = 34^\circ$, $\angle MCB = 26^\circ$, $MA = 15$ olarsa, tapın: a) $\angle MAC$; b) MF.



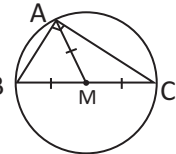
- 2 > Çevrə daxilinə tələb olunan üçbucağı çəkin. Çevrənin mərkəzini hər bir halda **üçbucağın daxilindədir, üçbucağın xaricindədir, üçbucağın tərəfi üzərindədir** ifadələrindən birini seçməklə müəyyən edin.

a) itibucaqlı üçbucaq b) düzbucaqlı üçbucaq c) korbucaqlı üçbucaq

- 3 > Çevrə daxilinə çəkilmiş üçbucağın dəyişənlə işarələnmiş bucaqlarının dərəcə ölçülərini tapın. O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.



- 4 > AM çevrə daxilinə çəkilmiş üçbucağın medianıdır və uzunluğu 10 sm-dir. $AB = 12$ sm olduğuna görə $\triangle ABC$ -nin B sahəsini tapın. M nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.

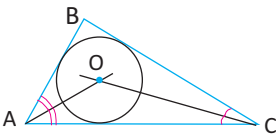


- 5 > Üçbucağın daxilinə çevrə çəkmə addımlarını araşdırın. Dəftərinizdə çəkin.



Üçbucağın daxilinə çevrənin çəkilməsi

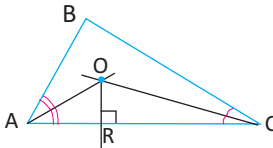
Addım 1



ABC üçbucağını və üçbucağın iki tən bölgənini çəkin, kəsişmə nöqtəsini O hərflə ilə işarə edin.

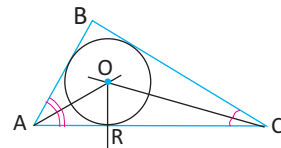
Üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi tən bölgənlərin kəsişmə nöqtəsidir.

Addım 2



O nöqtəsindən üçbucağın tərəfinə perpendikulyar parça çəkin və tərəfi kəsdiyi nöqtəni R hərflə ilə işarə edin.

Addım 3

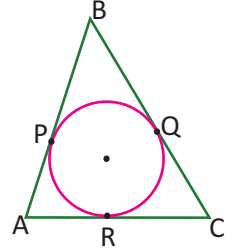


Pərgarın iti ucunu O nöqtəsində yerləşdirin və qolunu OR parçası qədər açaraq çevrə çəkin.

- 6 > Bərabəryanlı üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrə toxunma nöqtəsi ilə yan tərəfi 3 sm və 4 sm olan parçalara bölür. Üçbucağın perimetrini tapın. Məsələnin neçə həlli var?

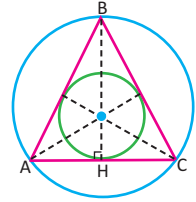
- 7 > Daxilə çəkilmiş çevrə $\triangle ABC$ -nin tərəflərinə P, Q və R nöqtələrində toxunur.

- a) Şəklə görə konkrayent parçaların adlarını yazın.
 b) $AB=10$ sm, $BC=12$ sm, $AC=8$ sm olarsa, AP, PB, BQ, QC, AR, RC parçalarının uzunluqlarını tapın.
 c) $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ qəbul edin. AP, BP, CR parçalarının uzunluqlarını a , b , c dəyişənləri ilə ifadə edin.



- 8 > a) Bərabərtərəfli üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzlərinin medianların kəsişmə nöqtəsində yerləşdiyini əsaslandırın.

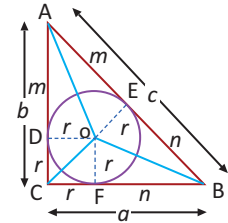
$$R = \frac{2}{3}h, \quad r = \frac{1}{3}h \quad \text{düsturlarının doğruluğunu göstərin.}$$



Burada R xaricə çəkilmiş çevrənin, r daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu, h üçbucağın hündürlüyüdür.

- b) Perimetri 9 sm olan bərabərtərəfli üçbucağın xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.

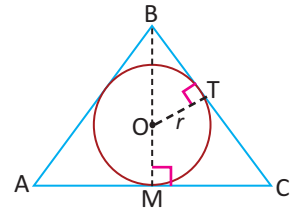
- 9 > a) Şəkildən istifadə etməklə düzbucaqlı üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu üçün $r = \frac{a+b-c}{2}$ düsturunun doğruluğunu göstərin.



- b) Katetləri 6 və 8 vahid olan düzbucaqlı üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.

- 10 > 1) Tərəfləri $AB=BC=10$, $AC=12$ olan bərabəryanlı $\triangle ABC$ üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu aşağıdakı addımlarla tapın.

- Çevrənin mərkəzinin oturacağı çəkilmiş BM hündürlüyünün üzərində yerləşdiyini əsaslandırın.
- BM hündürlüyünü tapın.
- Çevrənin mərkəzini O ilə, BC tərəfinə toxunma nöqtəsini T ilə, çevrənin radiusunu r ilə işarə edin.
- $\triangle BMC \sim \triangle BTO$ olduğunu əsaslandırın.
- Uyğun tərəflərin nisbətlərinin bərabərliyini yazıb, verilənləri nəzərə alın.



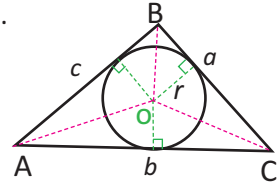
- 2) Tərəfləri $AB=BC=13$, $AC=10$ olan bərabəryanlı $\triangle ABC$ -nin daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

- 11 > a) Üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu üçün $r = \frac{2S}{a+b+c}$ düsturunun doğru olduğunu göstərin.

Burada S üçbucağın sahəsi, a, b, c isə tərəfləridir.

Göstəriş: $S_{\Delta ABC}$ -ni $S_{\Delta AOC}$, $S_{\Delta AOB}$, $S_{\Delta BOC}$ ilə ifadə edin.

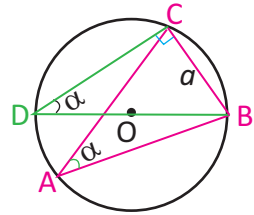
- b) Tərəfləri 6; 25; 29 vahid olan üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.



- 12 > Çevrə daxilinə çəkilmiş üçbucağın tərəfinin qarşısındakı bucağın sinusuna nisbəti bu çevrənin diametrinə bərabərdir: $d = \frac{a}{\sin \alpha}$

Çevrənin mərkəzinin üçbucağın daxilində yerləşdiyi hal üçün verilmiş isbatı araşdırın, müzakirə edin və dəftərinizdə yazın.

İsbatı: BD diametrini və DC vətərini çəkin.



Təklif	Əsası
1. $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$, $BD = d$	1. Verilir
2. $\angle BDC \cong \angle BAC$	2. Eyni qövsə söykənən daxilə çəkilmiş bucaqlar konqruentdir
3. $\angle BCD = 90^\circ$	3. Diametrə söykənən daxilə çəkilmiş bucaq düz bucaqdır
4. $\sin \angle BDC = \frac{BC}{BD}$	4. ΔBDC -də iti bucağın sinusunun tərif
5. $\sin \alpha = \frac{a}{d}$, $d = \frac{a}{\sin \alpha}$	5. Sadələşdirmə

- 13 > Bərabəryanlı üçbucağın yan tərəfi 10 sm, yan tərəflərinin əmələ gətirdiyi bucaq 120° -dir. Bu üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

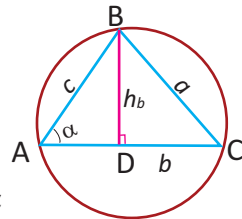
- 14 > a) Üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu üçün $R = \frac{abc}{4S}$ düsturunun doğru olduğunu göstərin.

Burada S üçbucağın sahəsi, a, b, c isə onun tərəfləridir.

Həlli: Üçbucağın sahə düsturuna görə $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$

$$R = \frac{d}{2} = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha} = \frac{abc}{4S}$$

$d = \frac{a}{\sin \alpha}$ olduğuna görə $Kəsrin surət və məxrəci (b \cdot c)$ -yə vurulur $\text{Üçbucağın sahə düsturu nəzərə alınır}$



- b) Tərəfləri 10; 10; 12 vahid olan üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.

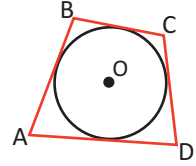
- 15 > a) Tərəfləri 13 sm, 14 sm, 15 sm olan üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.
 b) Oturacağıın yan tərəfə nisbəti 4:3 kimi, oturacağına çəkilmiş hündürlüyü isə 20 sm olan bərabəryanlı üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.

✓ Çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının xassələri

Üçbucaqlardan fərqli olaraq istənilən dördbucaqlının daxilinə və xaricinə çevrə çəkmək mümkün deyil.

Teorem 4. Çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı tərəflərinin cəmi bərabərdir: $AB + CD = BC + AD$

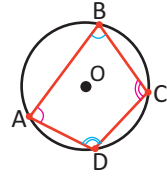
Tərs teorem. Dördbucaqlının qarşı tərəflərinin cəmi bərabədirsə, onun daxilinə çevrə çəkmək olar.



Teorem 5. Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı bucaqlarının cəmi 180° -yə bərabərdir:

$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \angle B + \angle D = 180^\circ$$

Tərs teorem. Dördbucaqlının qarşı bucaqlarının cəmi 180° -yə bərabədirsə, onun xaricinə çevrə çəkmək mümkündür.



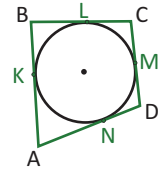
Teorem 4-ün isbatı: K, L, M, N dördbucaqlının tərəflərinin çevrəyə toxunma nöqtələri olsun. Bir nöqtədən çevrəyə çəkilən toxunanların xassəsinə görə $AK = AN$, $BK = BL$, $CM = CL$, $DM = DN$ olur.

Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq, alarıq:

$$AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN$$

və ya

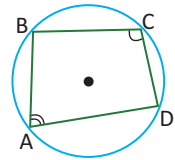
$$AB + CD = BC + AD.$$



Öyrənmə tapşırıqları

- 16 > Teorem 5-in isbatını tamamlayın.

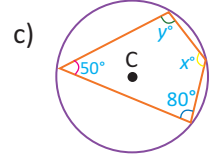
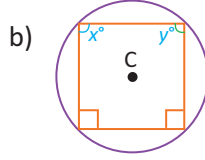
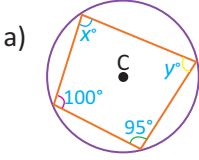
Təklif	Əsası
1. $\angle A = \frac{\sphericalangle BCD}{2}, \angle C = \frac{\sphericalangle DAB}{2}$	1.
2. $\angle A + \angle C = \frac{\sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB}{2}$	2. Tərəf-tərəfə toplama
3. $\angle A + \angle C = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$	3.



- 17 > Çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının iki qarşı tərəfinin uzunluqları cəmi 12 sm-dir. Bu dördbucaqlının perimetrini tapın.

18 > Çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının üç tərəfinin uzunluqları 4 sm, 6 sm, 7 sm olarsa, perimetri neçə santimetr ola bilər? Mümkün halları araşdırın.

19 > Çevrə daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının dəyişənlə işarələnmiş bucaqlarının dərəcə ölçülərini tapın.

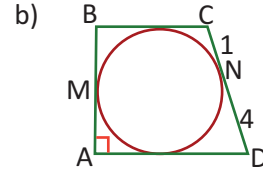
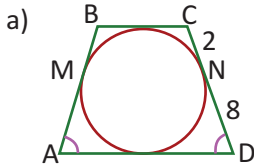


20 > a) Çevrə daxilinə çəkilmiş trapesiyanın bərabəryanlı olduğunu göstərin.

b) Göstərin ki, çevrə xaricinə çəkilmiş bərabəryanlı trapesiyanın orta xətti yan tərəfinə bərabərdir.

c) Çevrə daxilinə və xaricinə paraleloqramlar çəkin. Bu hansı halda mümkündür? Paraleloqramın növünü müəyyən edin.

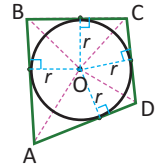
21 > Şəkildə verilənlərə görə çevrə xaricinə çəkilmiş trapesiyanın perimetrini və sahəsini tapın.



22 > a) Dördbucaqlının daxilinə çevrə çəkmək mümkündürsə, bu çevrənin radiusu üçün $r = \frac{2S}{P}$ düsturunun doğru olduğunu göstərin. Burada S dördbucaqlının sahəsi, P isə perimetridir.

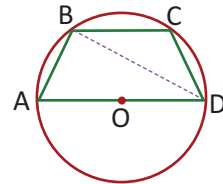
Göstəriş. $S_{ABCD} = S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COD} + S_{\triangle AOD}$ olduğunu nəzərə alın.

b) Radiusu 5 sm olan çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı tərəflərinin cəmi 26 sm olarsa, bu dördbucaqlının sahəsini tapın.



23 > Oturacaqları 6 sm və 1 sm, yan tərəflərindən biri isə 4 sm olan trapesiyanın daxilinə çəkilmiş çevrənin uzunluğunu tapın.

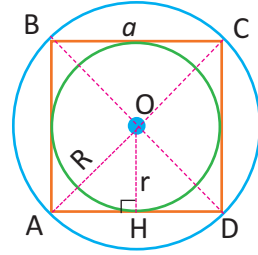
24 > Diametri AD olan çevrə daxilinə çəkilmiş ABCD trapesiyasında $BC = 6$ sm, $\angle CBD = 30^\circ$ olarsa, çevrənin radiusunu və trapesiyanın sahəsini tapın.



25 > Diaqonalları 6 sm və 8 sm olan rombun daxilinə çəkilmiş çevrənin diametrini tapın.

Praktik məşğələ.

1. Dəftərinizdə ABCD kvadratı çəkin və diaqonallarının kəsişmə nöqtəsini O ilə qeyd edin.
2. Pərgarın iti ucu O nöqtəsində olmaqla kvadratın tərərlərindən keçən çevrə çəkin. Bu çevrənin radiusunu (R) kvadratın tərəfi (a) ilə ifadə edin: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
3. Pərgarın iti ucu O nöqtəsində olmaqla kvadratın tərəflərinə toxunan çevrə çəkin. Bu çevrənin radiusunu kvadratın tərəfi ilə ifadə edin: $r = \frac{a}{2}$

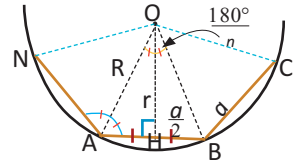


Araşdırma. Diaqonalların kəsişmə nöqtəsi kvadratın həm daxilinə, həm də xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. İstənilən düzgün çoxbucaqlının daxilinə və xaricinə çevrə çəkmək mümkündürmü?



Düzgün çoxbucaqlının daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələr

İstənilən düzgün çoxbucaqlının həm daxilinə, həm də xaricinə çevrə çəkmək olar və bu çevrələrin mərkəzləri üst-üstə düşür. Düzgün çoxbucaqlının iki qonşu A və B tərəsindəki bucaqların tən bözlənlərinin kəsişmə nöqtəsi O olsun. $\triangle AOB$ bərabəryanlıdır. O nöqtəsini digər tərərlərlə birləşdirdikdə alınan üçbucaqlar ($\triangle BOC$, $\triangle AON$ və s.) $\triangle AOB$ -yə konqruyentdir (TBT əlamətinə görə). Buradan alınır ki, CO, NO və s. çoxbucaqlının tən bözlənidir. Mərkəzi tən bözlənlərin O kəsişmə nöqtəsində yerləşən OA radiuslu çevrə çəksək, bu çevrə bütün tərələrdən keçməklə xaricə çəkilmiş çevrə olur. OH radiuslu çevrə isə çoxbucaqlının bütün tərəflərinə toxunmaqla daxilə çəkilmiş çevrə olur. R- düzgün n -bucaqlının xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusu, r-daxilə çəkilmiş çevrənin radiusu, a -düzgün çoxbucaqlının tərəfi,

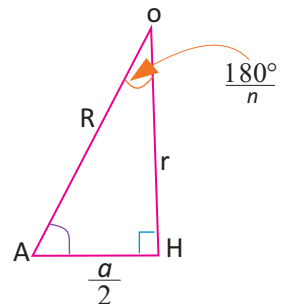


$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ mərkəzi bucaqdır.

$OA = R$, $OH = r$, $AH = \frac{a}{2}$, $\angle AOH = \frac{180^\circ}{n}$ olduğundan $\triangle AOH$ -da iti bucağın sinusunun və tangensinin tərifinə görə alırıq:

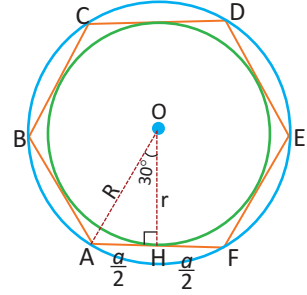
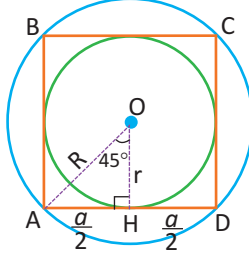
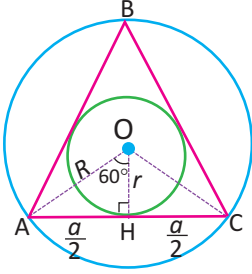
$$\frac{AH}{OA} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$\frac{AH}{OH} = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \tan \frac{180^\circ}{n}, \quad r = \frac{a}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}}$$



Öyrənmə tapşırıqları

- 26 > Tərəfi a olan düzgün: a) üçbucağın; b) dördbucaqlının; c) altıbucaqlının xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.



Göstəriş. O nöqtəsi verilmiş çoxbucaqlının tən bölənlərinin kəsişmə nöqtəsi

olmaqla $\sin \angle AOH = \frac{AH}{OA}$, $\tan \angle AOH = \frac{AH}{OH}$ bərabərliklərində $AH = \frac{a}{2}$,

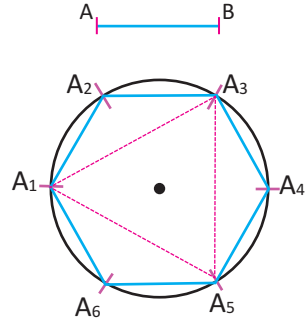
$AO = R$, $OH = r$ yazın, $\angle AOH$ -in dərəcə ölçüsünü nəzərə alın və alınan münasibətlərdən R və r -i a ilə ifadə edin.

- 27 > a) Tərəfi 6 sm olan düzgün üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.
b) Düzgün üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu 9 sm-dir. Bu üçbucağın tərəfini və xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.
- 28 > a) Tərəfi 8 sm olan kvadratın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.
b) Kvadratın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu 5 sm-dir. Bu kvadratın tərəfini və xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.
- 29 > a) Tərəfi 6 sm olan düzgün altıbucaqlının daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.
b) Düzgün altıbucaqlının daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu 3 sm-dir. Bu altıbucaqlının tərəfini və xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.
- 30 > a) Düzgün altıbucaqlının böyük diaqonalının xaricə çəkilmiş çevrənin diametri olduğunu şəkil üzərində göstərin. Nəticəni düzgün $2n$ -bucaqlı üçün ümumiləşdirin.
b) Radiusu R olan çevrə daxilinə çəkilmiş düzgün altıbucaqlının perimetrini tapın. Bu altıbucaqlının böyük və kiçik diaqonallarının uzunluqlarını R ilə ifadə edin.

- 31 > Böyük diaqonalının uzunluğu 6 sm olan düzgün altbucaqlının:
 a) tərəfini;
 b) kiçik diaqonalını;
 c) xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın.
- 32 > Tərəfi 6 sm olan kvadratın daxilinə çevrə çəkilmişdir. Bu çevrənin daxilinə çəkilmiş düzgün üçbucağın tərəfini tapın.
- 33 > Xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin radiusları fərqi $2\sqrt{3}$ olan düzgün üçbucağın perimetrini tapın.

- 34 > Düzgün altbucaqlını qurma addımlarını araşdırın və dəftərinizdə yerinə yetirin.

1. Düzgün altbucaqlının bir tərəfi uzunluqda AB parçasını çəkin.
2. Pərgarla radiusu bu parçanın uzunluğuna bərabər olan çevrə çəkin.
3. Pərgarın vəziyyətini dəyişmədən çevrə boyu eyniözlü hissələri işarələyin.
4. Qeyd olunmuş nöqtələri ardıcıl birləşdirin. Düzgün altbucaqlı qurulmuş oldu.



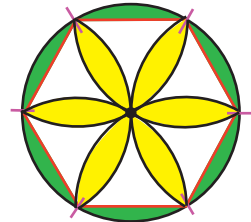
Düzgün $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ altbucaqlısının, məsələn, A_1, A_3, A_5 təpələrini cüt-cüt birləşdirsək, düzgün üçbucaq qurulmuş olar.

Düzgün dördbucaqlını qurmaq üçün çevrənin qarşılıqlı perpendikulyar iki diametrlərini çəkmək və onların uclarını ardıcıl birləşdirmək lazımdır.

Çevrə daxilinə düzgün n -bucaqlı çəkilərsə, onun tərəflərinin orta perpendikulyarlarının çevrə ilə kəsişmə nöqtələrini qeyd etsək, alınan nöqtələr düzgün $2n$ -bucaqlının digər təpələri olur.

- 35 > a) Dəftərinizdə bir damanı vahid qəbul edərək tərəfinin uzunluğu 4 vahid olan düzgün altbucaqlı qurun.
 b) Altbucaqlının tərəflərinin orta perpendikulyarlarının çevrə ilə kəsişmə nöqtələrini qeyd etməklə düzgün onikibucaqlı qurun.

- 36 > Dizayner rəngli kartondan şəkildə göstəriləyi kimi naxışlar kəsməlidir. Bu işi yerinə yetirmə addımlarını yazın. Siz də dəftərinizdə bu cür naxışlar çəkin.



Düzgün çoxbucaqlının mərkəzi. Düzgün çoxbucaqlının xaricinə (və ya daxilinə) çəkilmiş çevrənin mərkəzi düzgün çoxbucaqlının **mərkəzi** adlanır. Düzgün çoxbucaqlının mərkəzi tən bölənlərin kəsişmə nöqtəsi olub çoxbucaqlının bütün tərərlərindən (və bütün tərəflərindən) bərabər məsafədədir.

Düzgün çoxbucaqlının apofemi. Düzgün çoxbucaqlının mərkəzindən tərəfinə çəkilmiş perpendikulyara onun **apofemi** deyilir.

Düzgün çoxbucaqlının apofemi daxilə çəkilmiş çevrənin radiusuna bərabərdir.

Aşağıdakı məşğələni verilən addımlarla yerinə yetirin və düzgün çoxbucaqlının apofemindən asılı sahə düsturunu müəyyən edin.

Praktik məşğələ**Apofem və çoxbucaqlının sahəsi**

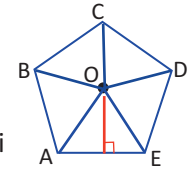
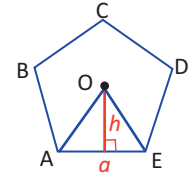
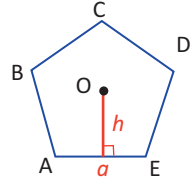
1. Düzgün ABCDE beşbucaqlısını çəkin.
2. O mərkəzindən AE tərəfini ($AE = a$) yarıya bölən perpendikulyarı (h) çəkin.
3. A və E nöqtələrini O mərkəz nöqtəsi ilə birləşdirin.
4. AOE üçbucağının sahəsini a və h dəyişənləri ilə ifadə edin. Üçbucağın hündürlüyünün çoxbucaqlının hansı ölçüsünə uyğun gəldiyinə diqqət edin.
5. B, C, D tərəflərini də O nöqtəsi ilə birləşdirin. Alınan üçbucaqların sahələrini müqayisə edin.
6. Beşbucaqlının sahəsinin bu üçbucaqların sahələri cəminə bərabər olduğuna diqqət edin.

Beşbucaqlının sahəsi:

$$S = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah =$$

$$= \frac{1}{2}(ah + ah + ah + ah + ah) = \frac{1}{2} \cdot 5ah$$

7. $5a$ ifadəsi hansı ölçüyə uyğun gəlir? Beşbucaqlının sahəsini onun perimetri ilə ifadə edin.

**6-3****Düzgün çoxbucaqlının sahəsi**

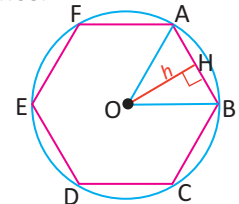
Düzgün n -bucaqlının mərkəzini tərəf nöqtələri ilə birləşdirdikdə n sayda konqruent bərabəryanlı üçbucaqlar alınır.

çoxbucaqlının sahəsi = üçbucaqların sayı \times bir üçbucağın sahəsi

$$S = n \cdot \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(a \cdot n)h$$

$$S = \frac{1}{2}Ph \quad \text{və ya} \quad S = \frac{1}{2}anh$$

Burada S çoxbucaqlının sahəsini, a tərəfinin uzunluğunu, n tərəflərinin sayını, h apofemini, P isə perimetrini göstərir.



Nümunə Radiusu 1 vahid olan çevrənin daxilinə düzgün beşbucaqlı çəkilmişdir. Beşbucaqlının apofemini, tərəfini və sahəsini tapın. Cavabı ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

Həlli. Beşbucaqlının sahəsi: $S = \frac{1}{2} Ph$

Beşbucaqlının h - apofemini və P - perimetrini tapmalıyıq.

$\angle AOB$ mərkəzi bucağı $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ -dir. $\triangle AOB$ bərabəryanlıdır və onun OD hündürlüyü həm median, həm də tən böləndir. Deməli, $\angle AOD = 36^\circ$. $\triangle AOD$ -nin tərəflərini tapmaq üçün triqonometrik nisbətlərdən istifadə edək:

$$\cos 36^\circ = \frac{OD}{AO}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{AD}{AO}$$

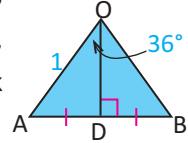
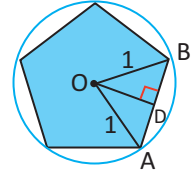
$$OD = AO \cdot \cos 36^\circ \approx 1 \cdot 0,8 = 0,8$$

$$AD = AO \cdot \sin 36^\circ \approx 1 \cdot 0,6 = 0,6$$

OD beşbucaqlının apofemidir, $h = OD \approx 0,8$;

Beşbucaqlının tərəfi: $AB = 2 \cdot AD \approx 2 \cdot 0,6 = 1,2$

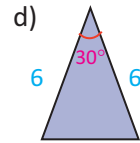
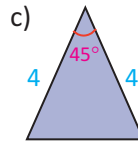
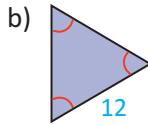
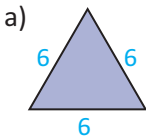
Beşbucaqlının sahəsi: $S = \frac{1}{2} h \cdot P \approx \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot 5 \cdot 1,2 = 2,4$ (kvadrat vahid)



Öyrənmə tapşırıqları

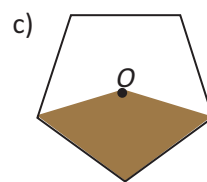
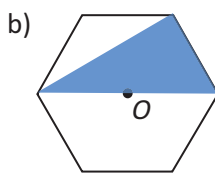
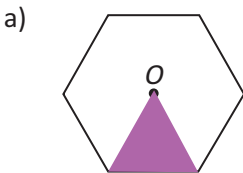
- 1 > Göstərin ki, tərəfinin uzunluğu a olan bərabərtərəfli üçbucağın sahəsi üçün $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ düsturu doğrudur.

- 2 > Şəkilə verilənlərə görə üçbucağın sahəsini tapın.

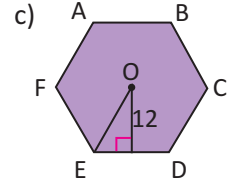
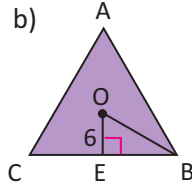
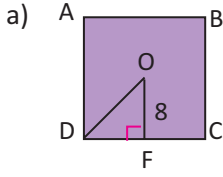


- 3 > “Düzgün altıbucaqlı və düzgün üçbucağın tərəfləri bərabərdirsə, altıbucaqlının sahəsi üçbucağın sahəsindən 6 dəfə böyükdür.” Bu fikri əsaslandırın.

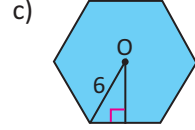
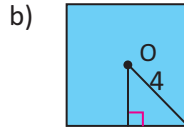
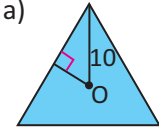
- 4 > Rənglənmiş sahənin 8 sm^2 olduğunu bilərək, düzgün çoxbucaqlının sahəsini tapın. O nöqtəsi çoxbucaqlının mərkəzidir.



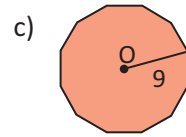
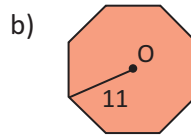
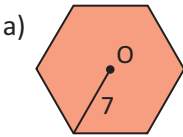
- 5 > Verilən ölçülərə görə düzgün çoxbucaqlının sahəsini tapın. O nöqtəsi çoxbucaqlının mərkəzidir.



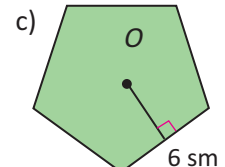
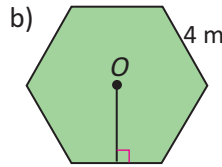
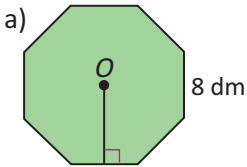
- 6 > Şəkilə verilənlərə görə düzgün çoxbucaqlının perimetrini və sahəsini tapın. O nöqtəsi çoxbucaqlının mərkəzidir.



- 7 > Şəkiləki düzgün çoxbucaqlının perimetrini və sahəsini tapın. O nöqtəsi çoxbucaqlının mərkəzidir.

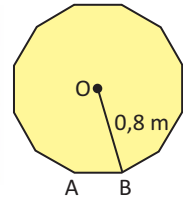


- 8 > Tərəfinin uzunluğu verilmiş düzgün çoxbucaqlının sahəsini hesablayın. Şəkilə O nöqtəsi düzgün çoxbucaqlının mərkəzidir.



- 9 > Tərəfinin uzunluğu 12 sm olan düzgün doqquzbucaqlının sahəsini tapın.
- 10 > Diametri 12 sm olan çevrənin daxilinə düzgün altıbucaqlı çəkilmişdir. Bu altıbucaqlının apofemini tapın.
- 11 > a) Tərəfinin uzunluğu a olan düzgün altıbucaqlının apofemini $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ -yə bərabər olduğunu isbat edin.
b) Sahəsi $54\sqrt{3}$ sm² olan düzgün altıbucaqlının apofemini tapın.

- 12 > Muzeydə eksponatın kənarlarına düzgün onikibucaqlı şəklində hasar çəkilmişdir. Sahənin mərkəzindən hər bir dirəyə qədər məsafə 0,8 m-dir. Ekspnat üçün neçə kvadrat metr sahə ayrılmışdır?

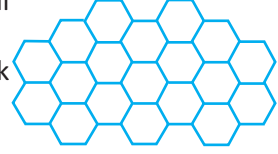


13 > Mətbəxə tərəfi 12 sm olan düzgün altıbucaqlı formalı metlaxlar döşənməlidir.

a) Döşəmə üçün ən azı neçə rəng metlax seçmək lazımdır ki, iki qonşu metlax eynirəngli olmasın.

b) Bir metlaxın sahəsini tapın.

c) Metlaxlar hər birində 30 ədəd olmaqla qutularda satılır. Ölçüləri $2,5 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ olan döşəmə üçün ən azı neçə qutu metlax alınmalıdır?

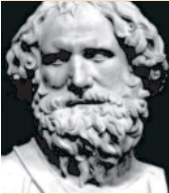
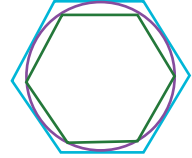


14 > Məşhur Azərbaycan memarı Əcəmi Naxçıvaninin şah əsəri Möminə xatun türbəsi Naxçıvan şəhərinin tarixi mərkəzi olan Atabəylər Memarlıq Kompleksindən dövrümüzə çatmış yeganə abidədir.

Türbənin özülü düzgün onbucaqlı formasındadır. Türbənin tutduğu sahəni hesablamaq üçün siz hansı ölçmələri aparardınız? Uyğun planı çəkib göstərin. Müxtəlif mənbələrdən türbənin real ölçüləri haqqında məlumat toplayın.



15 > Şəkildə çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş düzgün altıbucaqlılar təsvir edilmişdir. Daxilə çəkilmiş altıbucaqlının sahəsi 3 kvadrat vahiddirsə, xaricə çəkilmiş altıbucaqlının sahəsi neçə kvadrat vahiddir?



Tarixi məlumat. B.e.ə. 3-cü əsrdə Arximed π -nin ədədi qiymətini müəyyən etmək üçün çevrənin daxilinə və xaricinə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlıların perimetrindən istifadə etmişdir. Bu üsulla π -nin qiymətini siz də araşdırın.

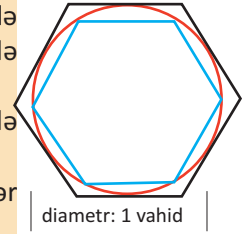
1. Çevrənin diametrini vahid qəbul etməklə

daxilə çəkilmiş altıbucaqlının perimetrini tapın: $P_d = 3$

2. Diametri vahid olan çevrənin uzunluğunun π -yə bərabər olduğunu göstərin.

3. Çevrənin radiusunu çəkin. Bir tərəfinin uzunluğunu tapmaqla xaricə çəkilmiş altıbucaqlının perimetrini tapın: $P_x = 2\sqrt{3}$

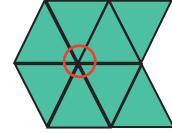
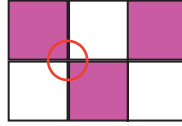
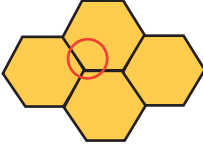
4. **Daxilə çəkilmiş altıbucaqlının perimetri** $< \pi <$ **xaricə çəkilmiş altıbucaqlının perimetri** bərabərsizliyini yazın: $3 < \pi < 2\sqrt{3}$



Arximed çoxbucaqlının tərəflərinin sayını 2 dəfə artırmaqla 12 bucaqlı üzərində və nəhayət 96 bucaqlı üzərində hesablamalarını davam etdirmiş və π -nin qiymətinin $3\frac{1}{7}$ -dən böyük, $3\frac{11}{70}$ -dən kiçik olduğunu müəyyən etmişdir.

Parketləmə

Sahənin boşluq qalmayacaq şəkildə fiqurlarla örtülməsi parketləmə adlanır.



Düzgün çoxbucaqlının daxili bucağının dərəcə ölçüsü 360-ın bölənidersə, bu çoxbucaqlılarla parketləmə-boşluq qalmadan sahəni örtmək mümkündür. Düzgün üçbucaq, kvadrat və düzgün altıbucaqlıdan istifadə etməklə parketləmə mümkündür. Lakin düzgün beşbucaqlılarla bunu etmək mümkün deyil. Çünki onun bir bucağının dərəcə ölçüsü 108° -dir və 108 ədədi 360 -ın böləni deyil. Bir tərədə üç beşbucaqlı ortaq təpəli olarsa, onların bucaqları cəmi $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$, dörd beşbucaqlı ortaq təpəli olarsa, $4 \cdot 108^\circ = 432^\circ$ olur.

Yalnız düzgün yeddi bucaqlı ilə parketləmə aparmaq mümkündürmü?

- 16 > a) Qədim abidələr üzərində düzgün fiqurların müxtəlif düzülüşü ilə yeni naxışların yarandığını müşahidə etmək olar. Siz də bu naxışları araşdırın.

Yusif ibn Küseyir Türbəsi. Naxçıvan
Memarı. Əcəmi Əbubəkr oğlu Naxçıvani

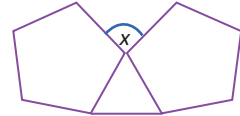
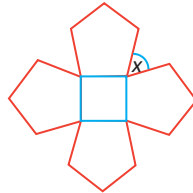
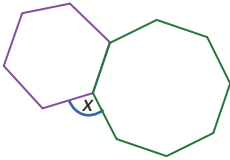


b) Dəyişənlə işarə edilmiş bucağın dərəcə ölçüsünü tapın. Kompüter proqramlarının köməyi ilə verilən şəkilləri təkrarlamaqla yeni naxışlar yaradın.

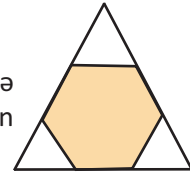
1) Təsvir düzgün altıbucaqlı və düzgün səkkizbucaqlıdan ibarətdir

2) Təsvir düzgün beşbucaqlılardan və kvadratdan ibarətdir.

3) Təsvir düzgün beşbucaqlılardan və düzgün üçbucaqdan ibarətdir.



- 17 > Bərabərtərəfli üçbucağın daxilinə sahəsi 12 kvadrat vahidə bərabər olan düzgün altıbucaqlı çəkilibdir. Bu üçbucağın sahəsini tapın.



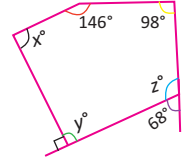
- 18 > Köşkün döşəməsi düzgün səkkizbucaqlı formasındadır. Səkkizbucaqlının mərkəzindən təpəsinə qədər məsafə 1 m-dir. Birinin sahəsi $0,2 \text{ m}^2$ olan taxtalar hər birində 5 ədəd olmaqla bağlamalarda satılır. Köşkün döşəməsi üçün ən azı neçə belə bağlama alınmalıdır?



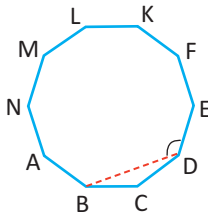


Ümumiləşdirici tapşırıqlar

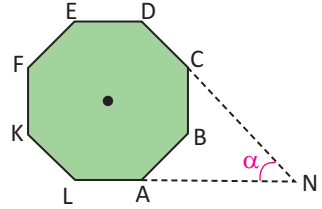
- 1 > Şəkilə verilən ölçülərə görə çoxbucaqlının dəyişənəli işarələnmiş daxili bucaqlarının dərəcə ölçülərini tapın.
- 2 > Bir bucağı verilən ölçüdə olan düzgün çoxbucaqlı varmı?
1) 155° b) 160° c) 175° d) 168°



- 3 > a) Şəkilə düzgün onbucaqlı təsvir edilmişdir. $\angle BDE$ -nin dərəcə ölçüsünü tapın.

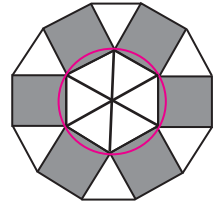


- b) Şəkilə düzgün səkkisbucaqlı təsvir edilmişdir. DC və LA tərəflərinin uzantısı N nöqtəsində kəşisir. $\angle ANC$ -nin dərəcə ölçüsünü tapın.



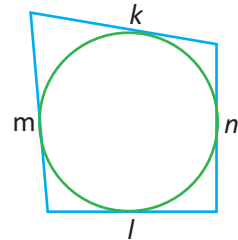
- 4 > a) Qabarıq onbucaqlının cəmi neçə diaqonalı var?
b) 14 diaqonalı olan çoxbucaqlının neçə tərəfi var?
c) Diaqonallarının sayı 20 olan qabarıq çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.

- 5 > Düzgün onikibucaqlı kvadrat və düzgün üçbucaqlarla quraşdırılmışdır. Şəkiləki çevrənin diametri 6 sm olarsa, onikibucaqlının perimetrini tapın.



- 6 > Çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlı üçün uyğunluğu müəyyən edin. P - dördbucaqlının perimetridir.

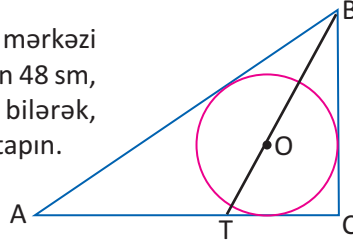
- 1) $k = 3, l = 7$ A) $P = 22$
2) $k = 4, l = 8$ B) $P = 24$
3) $k = 5, l = 6$ C) $P = 20$
D) $m + n = 12$



- 7 > a) Çevrənin daxilinə və xaricinə bərabərtərəfli üçbucaqlar çəkilmişdir. Bu üçbucaqların sahələri nisbətini yazın. Məsələni müxtəlif üsullarla həll edin.
b) Kiçik üçbucağın daxilinə çevrə çəkin. Bu üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusları nisbətini və uyğun dairelərin sahələri nisbətini yazın.



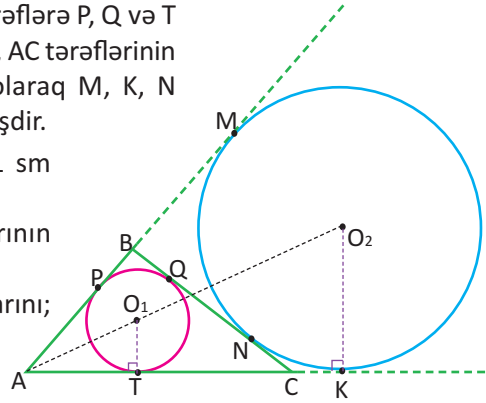
- 8 > $\triangle ABC$ -nin daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi O nöqtəsidir. Üçbucağın perimetrinin 48 sm, $AT = 10$ sm, $TC = 6$ sm olduğunu bilərək, daxilə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.



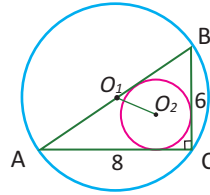
- 9 > $\triangle ABC$ -nin daxilinə çəkilmiş çevrə tərəflərə P, Q və T nöqtələrində toxunur. Üçbucağın AB, AC tərəflərinin uzantısına və BC tərəfinə uyğun olaraq M, K, N nöqtələrində toxunan çevrə çəkilmişdir.

$AB = 10$ sm, $BC = 17$ sm, $AC = 21$ sm olduğunu bilərək tapın:

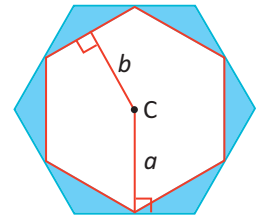
- a) AP, AT, BP, BQ, CT, CQ parçalarının uzunluqlarını;
b) BM, CN, CK parçalarının uzunluqlarını;
c) Çevrələrin radiuslarını.



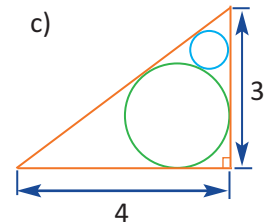
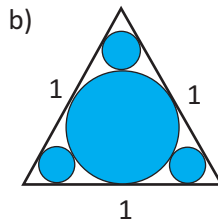
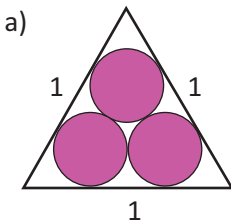
- 10 > Katetləri $AC = 8$, $BC = 6$ olan düzbucaqlı ABC üçbucağının daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzləri arasındakı məsafəni tapın.



- 11 > Şəkilə göstərilən iki düzgün altıbucaqlıdan kiçik olanın tərəfləri böyük altıbucaqlının tərəflərinin ortalarında yerləşir. a bə b altıbucaqlıların apofemləridir. $b = 6\sqrt{3}$ sm olarsa, rəngli hissənin sahəsini tapın.



- 12 > Şəkilə verilənlərə görə hər bir çevrənin radiusunu tapın.



7

Bərabərsizliklər

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz

- ✓ Bərabərsizliklər sistemini və bərabərsizliklər heyətini həll etməyi
- ✓ Dəyişəni modul işarəsi daxilində olan bərabərsizlikləri həll etməyi
- ✓ Kvadrat bərabərsizlikləri həll etməyi
- ✓ Rasional bərabərsizlikləri intervallar üsulu ilə həll etməyi
- ✓ Sadə irrasional bərabərsizlikləri həll etməyi

7-1

Xətti bərabərsizliklər sistemi. Bərabərsizliklər heyəti

Bir çox hallarda dəyişənin verilmiş şərti ödəyən qiymətlər çoxluğunu tapmaq üçün iki və ya daha çox sayda bərabərsizliyin hər birini ödəyən ortaq həlli, yaxud da verilmiş bərabərsizliklərin heç olmasa birini ödəyən həlli tapmaq tələb olunur.



Xətti bərabərsizliklər sistemi

Bir neçə bərabərsizliyin ortaq həllini tapmaq tələb olunduqda bərabərsizliklər { fiqurlu mütərizəsinin köməyi ilə yazılır və onlara bərabərsizliklər sistemi deyilir. Birdəyişənli bərabərsizliklər sisteminin həlli, dəyişənin sistemin hər bir bərabərsizliyini doğru bərabərsizliyə çevirən qiymətinə deyilir. Sistemi həll etmək onun bütün həllərini tapmaq, ya da həlli olmadığını isbat etmək deməkdir. Bərabərsizliklər sistemini həll etmək üçün sistemə daxil olan hər bir bərabərsizliyin həllər çoxluğunu tapmaq və bu çoxluqların kəsişməsini, yəni ortaq hissəsini götürmək lazımdır.

Nümunə. Alpinistlər sürətlərini 1 km/saat artırırsalar, zirvəyə qədər 4 km yolu 2 saatdan tez qət edirlər. Əgər onlar sürətlərini 1 km/saat azaltsalar, 2 saata zirvəyə çata bilməzlər. Alpinistlərin hansı sürətlə hərəkət etdiklərini bərabərsizliklə ifadə edin.

Həlli. Alpinistlərin sürətini x qəbul edək.

Sürəti 1 km/saat artırırsalar, 2 saatda getdikləri yol 4 km -dən çox olar.

Uyğun bərabərsizlik: $2(x + 1) > 4$

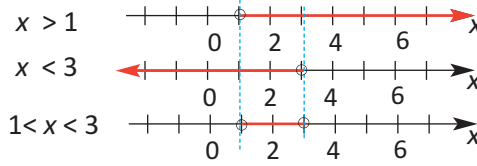
Sürəti 1 km/saat azaltsalar, 2 saatda getdikləri yol 4 km -dən az olar.

Uyğun bərabərsizlik: $2(x - 1) < 4$

Məsələnin şərtinə görə x -in $2(x + 1) > 4$ və $2(x - 1) < 4$ bərabərsizliklərini ödəyən, yəni hər iki bərabərsizliyi doğru edən qiymətlərini tapmalıyıq.

Başqa sözlə, $\begin{cases} 2(x+1) > 4 \\ 2(x-1) < 4 \end{cases}$ bərabərsizliklər sistemini həll etməliyik.

Sistemin hər bir bərabərsizliyini eynigüclü bərabərsizliklə əvəz etsək, $\begin{cases} x > 1 \\ x < 3 \end{cases}$ alarıq. Sistemə daxil olan bərabərsizliklərin həllər çoxluqlarını ədəd oxu üzərində təsvir edək və onların kəsişməsini (ortağ hissəsini) tapaq.



Sistemin həllər çoxluğu $(1; 3)$ aralığıdır.

Öyrənmə tapşırıqları

1 > $-3; 0; 5$ ədədlərindən hansılar verilmiş bərabərsizliklər sisteminin həllidir?

a) $\begin{cases} 3 - x \leq 7 \\ 1 - 3x > -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 > 2 \\ 9 - 2x > -21 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 7 > 4 \\ 3 - 2x \leq 5 \end{cases}$

2 > Bərabərsizliklər sistemini həll edin. Həlli ədəd oxu üzərində təsvir edin.

a) $\begin{cases} 4 - x \leq 8 \\ 1 - 3x > -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2 > 3 \\ 3 - 2x > -17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - 15 > 0 \\ 4x < 12 \end{cases}$

3 > Bərabərsizliklər sistemini həll edin. Həlli ədəd oxu üzərində təsvir edin.

a) $\begin{cases} 7x - 11 \geq 3 \\ 2x < 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5(x-3) - x < 1 \\ 3(x-2) - 2 < 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x + 2 \geq 5x + 3 \\ 3 - 3x < 8 - 2x \end{cases}$

4 > Arqumentin hansı qiymətlərində $y = x - 4$ və $y = 8 - x$ funksiyalarının hər ikisi müsbət qiymətlər alır?

5 > Arqumentin hansı qiymətlərində $y = 0,5x + 2$ və $y = 3 - 3x$ funksiyalarının hər ikisi: a) müsbət; b) mənfi; c) -3 -dən böyük; d) 3 -dən kiçik qiymətlər alır?

6 > Bərabərsizliklər sistemini həll edin.

a) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x-2}{3} < 2 \\ \frac{x+1}{3} > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3} \\ \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x-5}{6} \leq \frac{3x-1}{4} \\ 5(x+2) > 3(x+3) \end{cases}$

- 7 > Dəyişənin hansı qiymətlərində ifadənin mənası var?
 a) $\sqrt{x-5} + \sqrt{7-x}$ b) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{3-x}$ c) $\sqrt{x+8} + \sqrt{2x+4}$
- 8 > Tam ədədin 2 mislinə ədədin yarısını əlavə etdikdə cəm 92-dən kiçik olur. Bu ədədin 2 misindən ədədin yarısını çıxdıqda isə fərq 53-dən böyük olur. Bu tam ədədi tapın.
- 9 > 10,8 kq 60 %-li duz məhluluna 20%-li duz məhlulu qarışdırılır. İkinci məhluldan nə qədər qarışdırılmalıdır ki, qarışıqın duzluluğu 40% -dən çox, 30% -dən isə az olmasın?
- 10 > Üçbucağın bir tərəfi 5 m, ikinci tərəfi 8 m-dir. Üçbucağın perimetri 22 m-dən kiçikdirsə, üçüncü tərəfin uzunluğu hansı ölçüdə (metrlə) ola bilər?



Bərabərsizliklər heyəti

Verilmiş bərabərsizliklərin heç olmasa birini ödəyən həlli tapmaq tələb olunursa, bərabərsizliklər [mötərizəsinin köməyi ilə yazılır və onlara bərabərsizliklər heyəti deyilir. Bərabərsizliklər heyətini həll etmək üçün hər bir bərabərsizliyin həllər çoxluğunu tapıb, bu çoxluqların birləşməsini götürmək lazımdır.



Nümunə. Nərgiz və Elşən ədədlər üzərində qurulmuş oyun oynayırlar. Hər biri bir ədəd kartı çıxarır və üzərinə 5 əlavə edir. Cavab 10-dan kiçik və ya 15-dən böyük olarsa, kartı çıxaran xal qazanır. Elşənin bir kart çıxarıb xal qazdığı situasiyanı bərabərsizliklə ifadə edin.

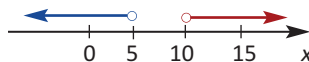
Həlli. Çıxarılan kartdakı ədəd x olsun. Tələb olunan situasiyanı $x + 5 < 10$ və ya $x + 5 > 15$ bərabərsizlikləri ilə, başqa sözlə $\begin{cases} x + 5 < 10 \\ x + 5 > 15 \end{cases}$ heyəti ilə ifadə etmək olar.

$$\begin{cases} x + 5 < 10 \\ x + 5 > 15 \end{cases} \text{ heyətini həll edək.}$$

$$\begin{array}{ll} 1) \ x + 5 < 10 & 2) \ x + 5 > 15 \\ \quad \quad \quad x < 10 - 5 & \quad \quad \quad x > 15 - 5 \\ \quad \quad \quad x < 5 & \quad \quad \quad x > 10 \end{array}$$

heyətin 1-ci bərabərsizliyinin həllər çoxluğu $(-\infty; 5)$ aralığıdır.

heyətin 2-ci bərabərsizliyinin həllər çoxluğu $(10; +\infty)$ aralığıdır.



Verilmiş bərabərsizliklər heyətinin həllər çoxluğu $(-\infty; 5) \cup (10; +\infty)$ olur.

Öyrənmə tapşırıqları

11 > Bərabərsizliklər heyətini həll edin.

a) $\begin{cases} x-1 > 4 \\ x+1 < -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-12 > 3 \\ 2x+1 < -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3(x-1)-x \geq 5 \\ 2(3-x)-3 < x \end{cases}$

12 > Vuruqların işarələrinin müxtəlif variantlarını araşdırmaqla bərabərsizliyi həll edin.

a) $(x+1)(x-2) > 0$

b) $(x-1)(x-3) > 0$

c) $(x-2)(x-5) < 0$

d) $(x+3)(x-6) \leq 0$

Nümunə. a) $(x+1)(x-2) > 0$ bərabərsizliyini həll edin.

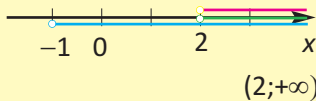
Həlli. İki vuruğun hasilinin müsbət olması üçün vuruqlar eyni işarəli olmalıdır. Deməli, $(x+1)$ və $(x-2)$ vuruqlarının ya hər ikisi müsbət, ya da hər ikisi mənfi olmalıdır.

Verilmiş bərabərsizlik $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$ heyətinin həllinə gətirilir.

Heyətin birinci sisteminin həlli:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \end{cases}$$

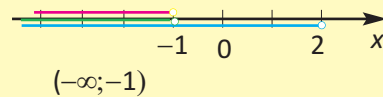
Həllin ədəd oxu üzərində təsviri:



Heyətin ikinci sisteminin həlli:

$$\begin{cases} x+1 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1 \\ x < 2 \end{cases}$$

Həllin ədəd oxu üzərində təsviri:



Verilmiş bərabərsizliyin həllər çoxluğu $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ olur.

13 > Kəsrin surət və məxrəcinin işarələrinin müxtəlif variantlarını araşdırmaqla bərabərsizliyi həll edin.

a) $\frac{x-1}{x-3} < 0$

b) $\frac{x-2}{x+1} > 0$

14 > Hansı ədədin kvadratı bu ədədin 5 misindən böyük deyildir? Bu şərti ödəyən tam ədədlərin cəmini tapın.

15 > a -nın hansı qiymətlərində bərabərsizliklər sisteminin heç olmasa, bir həlli var?

a) $\begin{cases} x < 9 \\ x > a \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \leq 10 \\ x > a \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq a \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq a \end{cases}$

7-2

Modullu bərabərsizliklər

Modul işarəsi daxilində dəyişəni olan bərabərsizliklər uyğun bərabərsizliklər sistemi və ya bərabərsizliklər heyəti yazılmaqla həll edilir.

Cədvəldə modullu bərabərsizliklərin uyğun ekvivalent yazılışları verilmişdir.

Modullu bərabərsizlik	Ekvivalent ikiqat bərabərsizlik	Ekvivalent bərabərsizliklər sistemi və heyəti
$ ax + b < c$	$-c < ax + b < c$	$\begin{cases} ax + b < c \\ ax + b > -c \end{cases}$
$ ax + b \leq c$	$-c \leq ax + b \leq c$	$\begin{cases} ax + b \leq c \\ ax + b \geq -c \end{cases}$
$ ax + b > c$	$ax + b > c$ və ya $ax + b < -c$	$\begin{cases} ax + b > c \\ ax + b < -c \end{cases}$
$ ax + b \geq c$	$ax + b \geq c$ və ya $ax + b \leq -c$	$\begin{cases} ax + b \geq c \\ ax + b \leq -c \end{cases}$

1. **Nümunə.** $|2x + 3| \leq 3 - x$ bərabərsizliyi həll edin.

Həlli. Ekvivalent bərabərsizliklər sistemi: $\begin{cases} 2x + 3 \leq 3 - x \\ 2x + 3 \geq -(3 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -6 \end{cases}$

Həllin ədəd oxu üzərində təsviri:

Cavab: $[-6; 0]$

2. **Nümunə.** $|2x - 5| \geq x + 2$ bərabərsizliyi həll edin.

Həlli. Ekvivalent bərabərsizliklər heyəti: $\begin{cases} 2x - 5 \geq x + 2 \\ 2x - 5 \leq -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq 1 \end{cases}$

Həllin ədəd oxu üzərində təsviri:

Cavab: $(-\infty; 1] \cup [7; +\infty)$

Öyrənmə tapşırıqları

1 > Modullu bərabərsizliyi həll edin. Həlli ədəd oxu üzərində təsvir edin.

a) $|5x + 3| - 4 \geq 9$

d) $|4 - x| < 5$

g) $|2x + 3| > 4 + x$

b) $|10 - 4x| \leq 2$

e) $|3x - 9| + 2 > 7$

h) $6 - 2x > |x + 12|$

c) $|3 + x| + 7 < 10$

f) $|3x + 2| - 1 \geq 10$

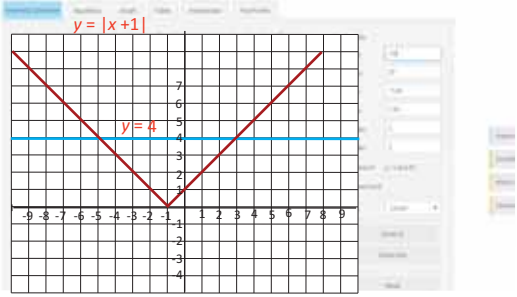
i) $|2x + 5| - 1 < 6x - 2$

2 > a -nın elə qiymətini göstərin ki, $|x - 3| \leq a - 2$ bərabərsizliyinin həlli olsun və bu həlli tapın. a -nın həmin qiyməti üçün $|x - 3| > a - 2$ bərabərsizliyini həll edin.

- 3 > Şəkində $y = |x+1|$ və $y = 4$ funksiyalarının qrafiklərinə qrafiklərdə qurulmuş qrafikləri verilmişdir. Qrafiki dəftərinizdə çəkin və bu iki qrafikdən istifadə etməklə:

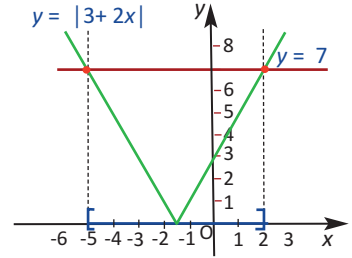
- a) $|x+1| = 4$ tənliyinin;
 b) $|x+1| < 4$ bərabərsizliyinin;
 c) $|x+1| > 4$ bərabərsizliyinin həllərini göstərin.

<http://www.meta-calculator.com/online/>

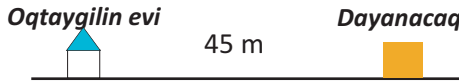


- 4 > Modullu bərabərsizliyi həll edin. Həlli qrafik olaraq təqdim edin. a) bəndinə uyğun qrafik həll şəkində verilmişdir.

- a) $|3 + 2x| \leq 7$ d) $|x - 1| < 1 - 2x$
 b) $|4 - 2x| > 4$ e) $|x + 2| > 2x + 1$
 c) $|3x - 6| \leq 6$ f) $|x - 3| < x + 1$



- 5 > Avtobus dayanacağı Oqtaygilin evindən 45 m aralıdadır. Dayanacağı indiki yerləşdiyi yerdən ən çoxu 30 m uzağa köçürmək planlaşdırılır. Dayanacağın yeni yerinin Oqtaygilin evindən məsafəsini bərabərsizliklə göstərin.



- 6 > Atəşfəşanlıqda yaranan müxtəlif rənglər istifadə olunan kimyəvi maddənin yanması ilə əldə edilir.

- a) Tərkibində mis olan maddə yanarkən uzunluğu $|w - 455| < 23$ bərabərsizliyini ödəyən işıq dalğaları yaradır. Bu zaman havada hansı rəng görünür?
- b) Tərkibində barium-xlorid olan maddə yanarkən uzunluğu $|w - 519,5| < 12,5$ bərabərsizliyini ödəyən işıq dalğaları yaradır. Bu zaman havada hansı rəng görünür?
- c) Tərkibində natrium olan maddə yanarkən uzunluğu $|w - 600| < 5$ bərabərsizliyini ödəyən işıq dalğaları yaradır. Bu zaman havada hansı rəng görünür?

Rəng	Dalğa uzunluğu
Ultrabənövşəyi	$w < 400$
Bənövşəyi	$400 \leq w \leq 424$
Mavi	$424 \leq w \leq 491$
Yaşıl	$491 \leq w \leq 575$
Sarı	$575 \leq w \leq 585$
Narıncı	$585 \leq w \leq 647$
Qırmızı	$647 \leq w \leq 700$
İnfraqırmızı	$w \geq 700$

Araşdırma:

1) $y = x^2 - 2x - 3$ parabolasının absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrini tapın: $x^2 - 2x - 3 = 0$ $x = -1$, $x = 3$

2) Təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1, \quad n = m^2 - 2m - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

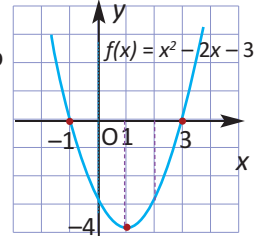
3) Parabolunu qurun.

4) Parabola üzərində yerləşən və absisi $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ olan nöqtələrin ordinatlarının işarələrini müəyyən edin.

5) x -in hansı qiymətlərində parabola absis oxundan aşağıda yerləşir?

6) x -in hansı qiymətlərində parabola absis oxundan yuxarıda yerləşir?

7) 5-ci və 6-cı bənddəki suallara cavab vermək üçün vacib olan hansıdır: təpə nöqtəsinin, yoxsa absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin dəqiq tapılması?

**7-3****Kvadrat bərabərsizliklər**

- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \leq 0$ şəklində olan bərabərsizliklər kvadrat bərabərsizliklərdir.
- $ax^2 + bx + c > 0$ Burada x dəyişən, a , b , c verilmiş ədədlərdir və $a \neq 0$.
- $ax^2 + bx + c \geq 0$

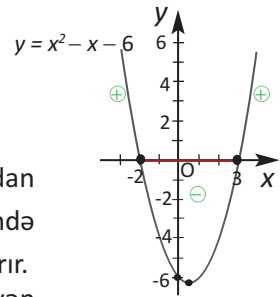
Birdəyişənli ikidərəcəli bərabərsizliklərin həllini uyğun kvadrat tənliyi həll etməklə funksiyanın müsbət və ya mənfi qiymətlər aldığı aralıqların tapılmasına gətirmək olar. Bu həll üsulunda vacib olan parabolunun qollarının yuxarıya və ya aşağıya yönəldiyini müəyyən etmək və onun Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələrinin absislərini bilməkdir.

Nümunə: $y = x^2 - x - 6$ funksiyanın qrafikinə görə aşağıdakı bərabərsizliklərin həllər çoxluğunu yazın.

- a) $x^2 - x - 6 \leq 0$ c) $x^2 - x - 6 > 0$
b) $x^2 - x - 6 \geq 0$ d) $x^2 - x - 6 < 0$

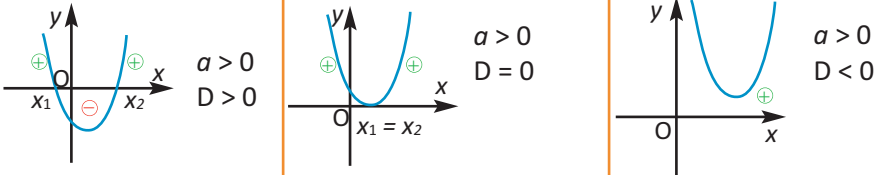
Həlli. $x^2 - x - 6 = 0$ tənliyinin kökləri $x = -2$, $x = 3$ olduğundan $y = x^2 - x - 6$ parabolası Ox oxunu $x = -2$ və $x = 3$ nöqtələrində kəsməklə müsbət və mənfi qiymətlər aldığı üç aralığa ayırır. $x^2 - x - 6$ ifadəsinin qiymətlərini hər bir aralıqda müəyyən etməklə bərabərsizliklərin həllini yazaq.

- a) $y = x^2 - x - 6$ funksiyanın qrafiki x -in -2 və 3 qiymətlərində absis oxunu kəsir, bu qiymətlər arasında isə Ox oxundan aşağıda yerləşir. $x^2 - x - 6 \leq 0$ bərabərsizliyinin həlləri: $-2 \leq x \leq 3$
b) x -in -2 və -2 -dən kiçik və ya 3 və 3 -dən böyük qiymətlərində funksiyanın qiyməti ($x^2 - x - 6$ ifadəsinin qiyməti) sıfıra bərabər və ya sıfırdan böyükdür. $x^2 - x - 6 \geq 0$ bərabərsizliyinin həlləri: $x \leq -2$ və ya $x \geq 3$
c) $x^2 - x - 6 > 0$ bərabərsizliyinin həlləri: $x < -2$ və ya $x > 3$
d) $x^2 - x - 6 < 0$ bərabərsizliyinin həlləri: $-2 < x < 3$



Kvadrat bərabərsizlikləri uyğun parabolun köməyiylə həll etmək üçün:

1. a əmsalına görə parabolun qollarının istiqaməti müəyyən edilir.
2. Uyğun kvadrat tənliyin həqiqi kökləri (varsa) tapılır, ya da həqiqi kökünün olmadığı müəyyən edilir.
3. Absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrinə görə parabola sxematik təsvir edilir.
4. Parabolun sxematik təsvirinə görə verilmiş bərabərsizliyə uyğun işarələrin olduğu intervallar müəyyən edilir.



$ax^2 + bx + c > 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu

$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
--------------------------------------	--------------------------------------	----------------------

$ax^2 + bx + c \geq 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu

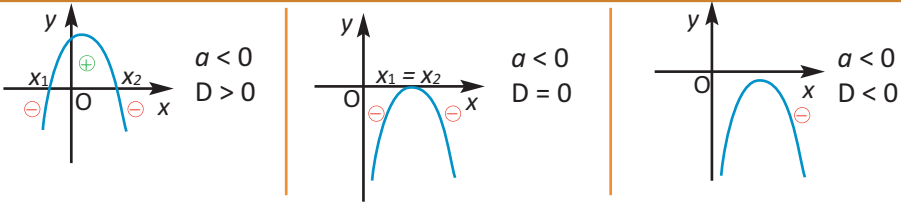
$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
--------------------------------------	----------------------	----------------------

$ax^2 + bx + c < 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu

$(x_1; x_2)$	\emptyset	\emptyset
--------------	-------------	-------------

$ax^2 + bx + c \leq 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu

$[x_1; x_2]$	$\{x_1\}$	\emptyset
--------------	-----------	-------------



$ax^2 + bx + c > 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu

$(x_1; x_2)$	\emptyset	\emptyset
--------------	-------------	-------------

$ax^2 + bx + c \geq 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu

$[x_1; x_2]$	$\{x_1\}$	\emptyset
--------------	-----------	-------------

$ax^2 + bx + c < 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu

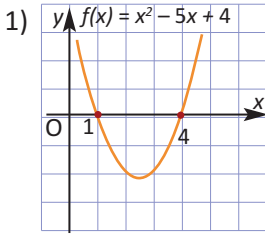
$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
--------------------------------------	--------------------------------------	----------------------

$ax^2 + bx + c \leq 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu

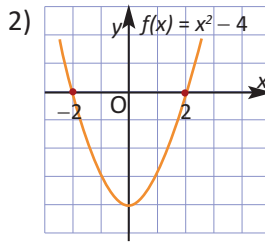
$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
--------------------------------------	----------------------	----------------------

Öyrənmə tapşırıqları

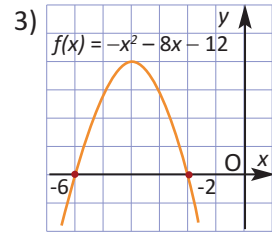
1 > Qrafiklərə görə bərabərsizliklərin həllini yazın.



- a) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$
 b) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$
 c) $x^2 - 5x + 4 > 0$
 d) $x^2 - 5x + 4 < 0$



- a) $x^2 - 4 \leq 0$
 b) $x^2 - 4 \geq 0$
 c) $x^2 - 4 > 0$
 d) $x^2 - 4 < 0$



- a) $-x^2 - 8x - 12 \leq 0$
 b) $-x^2 - 8x - 12 \geq 0$
 c) $-x^2 - 8x - 12 > 0$
 d) $-x^2 - 8x - 12 < 0$

2 > Bərabərsizliyi uyğun funksiyanın qrafikindən istifadə etməklə həll edin.

a) $x^2 - 7x + 10 > 0$

b) $x^2 - 4x + 3 < 0$

c) $x^2 - 9 \geq 0$

3 > Bərabərsizliyi həll edin.

a) $x(x + 6) \geq 40$

c) $6x^2 > 11x + 35$

e) $-2x^2 - x + 3 > 0$

b) $-x^2 - 11x - 24 < 0$

d) $7x + 5 \leq -2x^2$

f) $-3x^2 + 5x > 2$

4 > İsbat edin ki, bərabərsizlik dəyişənin istənilən qiymətində doğrudur.

a) $-x^2 + x - 1 < 0$

b) $6x - x^2 < 10$

c) $5x^2 - 2x + 1 > 0$

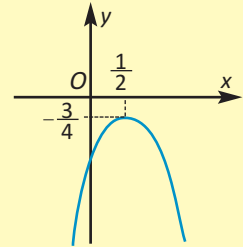
Nümunə. $-x^2 + x - 1 < 0$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli. $y = -x^2 + x - 1$ parabolasının qolları aşağı yönəlib.

$-x^2 + x - 1 = 0$ tənliyinin həqiqi kökü olmadığından parabol absis oxunu kəsmir, bütünlüklə bu oxdan aşağıda yerləşir.

Bu, o deməkdir ki, $-x^2 + x - 1 < 0$ bərabərsizliyi dəyişənin istənilən qiymətində ödənilir.

Cavab: $(-\infty; +\infty)$



5 > Bərabərsizliyi həll edin.

a) $x^2 + x + 3 > 0$

b) $2x^2 + x + 1 \geq 0$

c) $x^2 - 2x + 4 < 0$

- 6 > Verilən kvadrat bərabərsizliklərdən hansının həlli bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur ($x \in \mathbb{R}$); hansının həlli yoxdur (\emptyset)?

a) $x^2 + 1 > 0$

b) $x^2 + 1 < 0$

- 7 > Bərabərsizliyin həllər çoxluğunu tapın.

a) $4x^2 + 4x + 1 > 0$

b) $x^2 + 49 \leq 14x$

c) $40x + 25x^2 + 16 < 0$

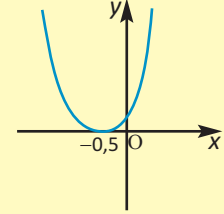
d) $49x^2 + 70x + 25 \geq 0$

Nümunə. $4x^2 + 4x + 1 > 0$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli. $y = 4x^2 + 4x + 1$ parabolasını təsvir edək.

$4x^2 + 4x + 1 = 0$ tənliyini ödəyən həqiqi ədəd yeganədir: $x = -0,5$. Parabola Ox oxuna $(-0,5; 0)$ nöqtəsində toxunur. Qrafikdən görüldüyü kimi, dəyişənin $x = -0,5$ qiymətindən başqa qalan bütün qiymətlərində verilən bərabərsizlik ödənilir.

Cavab: $x \neq -0,5$



- 8 > Bərabərsizliyi uyğun funksiyanın qrafikini qurmaqla həll edin.

a) $x^2 - 9x + 8 < 0$

d) $x^2 - 2x - 24 \leq 0$

g) $x^2 + 8x + 16 \geq 0$

b) $x^2 + 6x + 5 > 0$

e) $0 > -x^2 + 7x - 12$

h) $-x^2 + 2x + 15 < 0$

c) $4x^2 + 12x + 10 \leq 0$

f) $3x^2 - 3x + 9 > 0$

i) $0 > -x^2 + 4x - 4$

- 9 > Həlli verilən şərtə uyğun kvadrat bərabərsizlik yazın.

a) $-2 \leq x \leq 4$

b) $x < 1$ və ya $x > 10$

c) $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$

d) $x < -\frac{3}{4}$ və ya $x > \frac{2}{3}$

e) $x \leq -3 - \sqrt{5}$ və ya $x \geq -3 + \sqrt{5}$

f) $x \in \mathbb{R}$

g) həlli yoxdur

- 10 > x -in hansı qiymətlərində:

a) $3x^2 - 2x - 1$ üçhədlisi müsbət qiymət alır?

b) $-x^2 + 3x - 2$ üçhədlisi mənfə qiymət alır?

- 11 > Dəyişənin hansı qiymətlərində:

a) $2x^2 + x - 6$ üçhədlisinin qiyməti 4-dən kiçikdir?

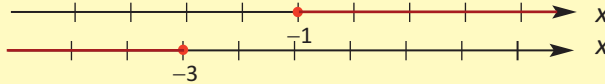
b) $-x^2 + 8x + 2$ üçhədlisinin qiyməti 9-dan böyükdür?

- 12 > Arqumentin hansı qiymətlərində $f(x) = x^2 - 4x$ funksiyanın qiyməti $g(x) = x + 6$ funksiyanın uyğun qiymətindən kiçikdir?

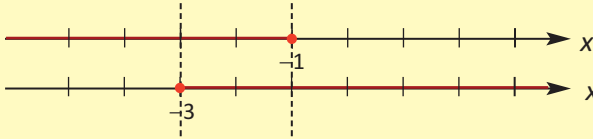
- 13 > Kvadrat bərabərsizlikləri cəbri üsulla, sol tərəfi vuruqlarına ayırıb, bərabərsizliyin işarəsinə görə mümkün halları araşdırmaqla həll etmək olar. Nümunəni araşdırın, verilən bərabərsizlikləri həll edin.

Nümunə. $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ bərabərsizliyini $(x + 1)(x + 3) \leq 0$ şəklində yazaq. İki vuruğun hasili o zaman mənfi olur ki, vuruqlar əks işarəli olsun.

1-ci hal. $(x + 1) \geq 0$ və $(x + 3) \leq 0$. Buradan $x \geq -1$ və $x \leq -3$. x -in hər iki bərabərsizliyi ödəyən qiymətləri $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ bərabərsizliyinin həllidir. Bu halda x -in belə qiyməti yoxdur.



2-ci hal. $(x + 1) \leq 0$ və $(x + 3) \geq 0$. Bu iki bərabərsizliyi həll etsək, $x \leq -1$ və $x \geq -3$ olar.



x -in -1 və -3 qiymətləri də daxil olmaqla onlar arasındakı bütün qiymətləri $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ bərabərsizliyinin həllidir: $-3 \leq x \leq -1$

- a) $x^2 + 3x - 18 \geq 0$ b) $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ c) $4x^2 < 25$
d) $-x^2 - 12x < 32$ e) $x^2 - 4x - 5 > 0$ f) $12x^2 + 3x \leq 0$

- 14 > Bərabərsizlikləri müxtəlif üsullarla həll edin.

- a) $x^2 + 8x + 7 > 0$ b) $x^2 + 6x + 5 \leq 0$ c) $2x^2 - 11x + 15 \geq 0$
d) $x^2 - 5x > 3x^2 - 18x + 20$ e) $2x^2 + 12x - 11 > x^2 + 2x + 13$

- 15 > Bərabərsizlikləri iki qrupa- xətti bərabərsizliklərə, kvadrat bərabərsizliklərə ayırın və həll edin:

$y^2 - 3 < 0$	$4(x - 2) < 6x - 3$	$8p^2 - 18 > 0$
$7(3 - y) > 4 + 2y$	$(5x + 2)^2 \leq 4$	$x + 3 \leq 2(x + 1)$
$(3 - 7x)^2 < -1$	$x^2 - 3 < 5x + 3$	$x^2 \geq 4x$

- 16 > $x^2 + x \geq 6$ bərabərsizliyini həll edin. Aşağıdakı fikirlərdən hansı doğrudur? Cavablarınızı əsaslandırın. Verilən bərabərsizliyin həllər çoxluğu:

- a) $x(x + 1) \geq 6$ bərabərsizliyinin də həllər çoxluğudur.
b) $x^2 + x - 5 \geq 1$ bərabərsizliyinin də həllər çoxluğudur.
c) $3x^2 + 3x \geq 18$ bərabərsizliyinin də həllər çoxluğudur.
d) $-x^2 - x \leq -6$ bərabərsizliyinin də həllər çoxluğudur.

- 17 > Hansı qrafik hansı bərabərsizliyə uyğundur? Hansı bərabərsizliklərə uyğun funksiyaların qrafikləri verilməmişdir? Bu qrafikləri də qurun və onlardan istifadə etməklə bərabərsizlikləri həll edin.

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$

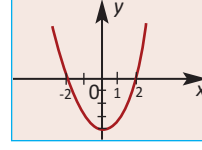
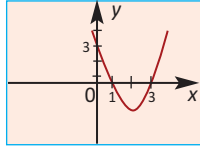
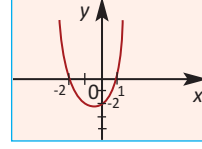
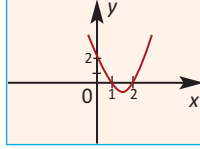
b) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$

c) $x^2 - 2x - 3 < 0$

d) $x^2 + x - 2 \geq 0$

e) $x^2 - x - 2 < 0$

f) $x^2 - 4 > 0$



- 18 > Bərabərsizliyi uyğun funksiyanın qrafikini qurmaqla həll edin.

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$

b) $x^2 + 2x - 3 < 0$

c) $x^2 + 5x + 4 \geq 0$

d) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$

e) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$

f) $x^2 - 4x < 0$

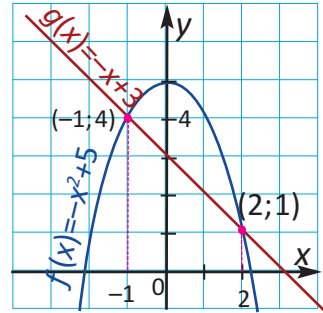
g) $-x^2 + 3x \geq 0$

h) $-x^2 + 9 \leq 0$

i) $-4x^2 - 16 > 0$

- 19 > Şəkilə $-x^2 + 5 \geq -x + 3$ bərabərsizliyinin həlli göstərilmişdir.

a) x -in $[-1; 2]$ aralığına daxil olan qiymətlərində verilən bərabərsizliyin ödənildiyini yazılı olaraq əsaslandırın.



b) $-x^2 + 5 \geq -x + 3$ bərabərsizliyini sadələşdirərək, $-x^2 + x + 2 \geq 0$ kvadrat bərabərsizlik şəklində yazın və bu bərabərsizliyi qrafik üsulla həll edin.

c) Eyni nəticəni aldınız mı? Verilmiş qrafik həll ilə sizin həlliniz arasında oxşar və fərqli cəhətlər hansılardır?

- 20 > Bərabərsizlikləri iki üsulla həll edin.

1) Kvadratik funksiyanın və xətti funksiyanın qrafiklərini qurmaqla.

2) Sadələşdirdikdə alınan kvadratik funksiyanın qrafikini qurmaqla.

a) $x^2 \leq 15 - 2x$

b) $x^2 + 4x > 3 + 2x$

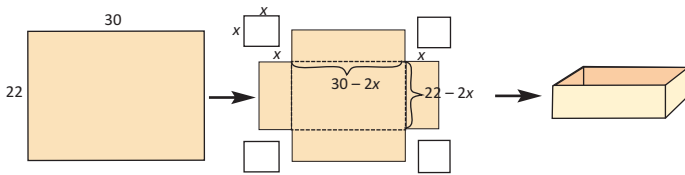
c) $13x - 7 \leq -2x^2$

d) $x^2 + 4x + 3 < 2x + 1$

- 21 > **Ümumiləşdirmə.** Kvadratik funksiyanın qrafikindən və diskriminantdan istifadə etməklə $ax^2 + bx + c \geq 0$ bərabərsizliyinin həllini araşdırın.
- Hansı hallarda bütün həqiqi ədədlər bərabərsizliyin həllidir?
 - Hansı hallarda bərabərsizliyin həlli bir həqiqi ədəddir?
 - Hansı hallarda müəyyən həqiqi ədədlər çoxluğu bərabərsizliyin həllidir?

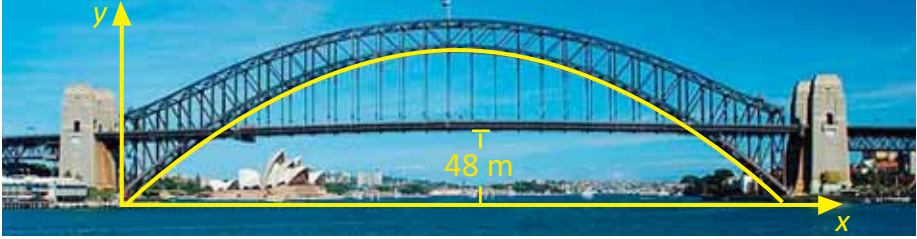
Tətbiq tapşırıqları

- 22 > Düzbucaqlı üçbucağın bir kateti digərindən 2 sm böyükdür. Kiçik katetinin uzunluğu neçə santimetr olsa, üçbucağın sahəsi ən azı 24 sm^2 olar?
- 23 > Düzbucaqlının bir tərəfi o birindən 7 sm böyükdür. Düzbucaqlının sahəsi 60 sm^2 -dan kiçik olduqda, həmin tərəfin uzunluğu (sm-lə) neçə ola bilər?
- 24 > Araşdırmalar göstərir ki, sürücülərin qarşıdakı maneəyə reaksiya müddətini (salisələrlə) $T(x) = 0,005x^2 - 0,23x + 22$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Burada x sürücünün yaşını göstərir: $16 \leq x \leq 70$.
- 16 yaşda; b) 35 yaşda sürücünün reaksiya müddəti neçə salisədir?
 - Hansı yaşda sürücünün reaksiya müddəti 25 salisədən çoxdur?
- Salisə zaman ölçü vahididir və saniyənin $\frac{1}{60}$ -nə bərabərdir
- 25 > Qutu (ağızı açıq) düzəltmək üçün düzbucaqlı formada olan karton təbəqənin künclərindən kvadrat formalı hissələr kəsilib çıxarılır və şəkildə göstərilən qırıq-qırıq xətlər boyunca qatlanıb yapışdırılır. Ölçüləri $22 \text{ sm} \times 30 \text{ sm}$ olan kartondan qutu hazırlanmalıdır.



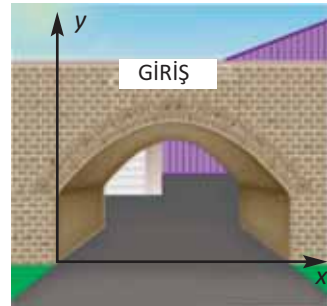
- Kəsilib çıxarılan kvadrat hissələrin tərəfinin uzunluğunun (sm-lə) hansı tam qiymətində qutunun həcmi 1200 sm^3 olar?
 - Kəsilib çıxarılan kvadrat hissələrin tərəfinin uzunluğunun (sm-lə) hansı tam qiymətlərində qutunun həcmi ən azı 1200 sm^3 olar?
- 26 > Vurulmuş zərbədən sonra topun hərəkətini $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Burada h topun t saniyədən sonra qaldığı hündürlüyü (metrlə) göstərir.
- Top hansı zaman kəsiyində 16 m-dən daha yüksəkdə olacaq?
 - Top hansı zaman kəsiyində ən azı 1 metr yüksəklikdə olur?

- 27 > Şəkildəki körpü tağının formasını seçilmiş koordinat sistemində $y = -0,002x^2 + 1,06x$ kimi kvadratik funksiya ilə göstərmək olar. Burada x soldaki dayaqdan olan məsafəni, y isə tağın su səviyyəsindən hündürlüyünü (m-lə) göstərir. Sol dayaqdan hansı məsafələrdə tağ yolun üstündə yerləşir?



- 28 > Tahir bağlarında göyərti əkmək üçün düzbucaqlı formasında sahə hasarlamaq istəyir. Onun hasar üçün 70 m uzunluğunda materialı var. Tahir göyərti sahəsinin ən azı 300 m^2 olmasını istəyirsə, bu sahə hansı ölçülərdə olmalıdır?
- 29 > Tibbdə kütlə indeksi adlanan göstəricidən normal kütləni müəyyənləşdirmək üçün istifadə edilir. Kütlə indeksi 17-24 arasında olan şəxslərin kütləsi normal hesab edilir. Kütlə indeksi $I = \frac{m}{h^2}$ düsturu ilə müəyyən edilir. Burada m kütləni (kiloqramla), h isə boyu (metrlə) göstərir.
- a) Boyu 1 m 50 sm olan şəxsin kütləsi nə qədər olmalıdır ki, kütlə indeksi 24-dən kiçik olsun.
- b) Kütləsi 54 kq olan şəxsin boyu ən azı nə qədər olmalıdır ki, kütlə indeksi 24-dən böyük olmasın.

- 30 > Hündürlüyü 3,5 m, eni 2,2 m olan maşın arkanın (tağın) altından keçməlidir. Koordinat sistemini şəkildə göstərilədiyi kimi seçməklə tağ $y = -0,3x^2 + 1,8x + 1,1$ funksiyası ilə modeləşdirmək olar (x və y metrlə ölçülür).



- a) Avtomobil arkadan keçə bilərmə? İzah edin.
- b) Hündürlüyü 3,5 m olan maşının arkadan keçə bilməsi üçün onun eni neçə metrdən kiçik olmalıdır?
- c) eni 2,2 m olan maşının hündürlüyü neçə metrdən kiçik olmadır ki, arkadan keçə bilsin?

7-4

İntervallar üsulu

Kvadrat bərabərsizliyin həll üsullarından biri də intervallar üsuludur. Bərabərsizliyin intervallar üsulu ilə həlli aşağıdakı addımlarla yerinə yetirilir.

1. Verilmiş bərabərsizliyə uyğun tənlik yazılır və kökləri tapılır.
2. Ədəd oxu üzərində dəyişənin bu qiymətlərinə uyğun nöqtələr (bu nöqtələrə bərabərsizliyin sərhəd nöqtələri deyəcəyik) qeyd edilir.
3. Sərhəd nöqtələrinin yaratdığı intervallardan ardıcıl olaraq sınaq nöqtələri seçilir və bu intervallardan hansılarının bərabərsizliyin həllər çoxluğuna aid olduğu müəyyən edilir.

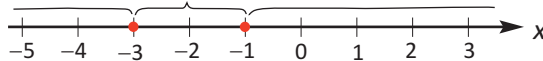
Nümunə. $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli.

1. $x^2 + 4x + 3 = 0$ tənliyinin köklərini tapaq:

$$(x + 1)(x + 3) = 0; x_1 = -1; x_2 = -3.$$

2. Ədəd oxu üzərində $x_1 = -1$; $x_2 = -3$ nöqtələrini qeyd edək. Sərhəd nöqtələri ədəd oxunu 3 intervala ayırır: $(-\infty; -3)$, $(-3; -1)$, $(-1; +\infty)$

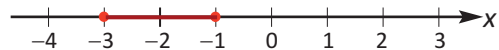


3. Hər intervaldan bir qiymət, sınaq qiymətləri seçək $(-5; -2; 0)$ və bərabərsizliyi yoxlayaq.

İnterval	$(-\infty; -3)$	$(-3; -1)$	$(-1; +\infty)$
Sınaq nöqtəsi	-5	-2	0
Sol tərəfə daxil olan ifadənin qiyməti	$(-5)^2 + 4 \cdot (-5) + 3 = 8$	$(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 3 = -1$	$(0)^2 + 4 \cdot (0) + 3 = 3$
$x^2 - 4x + 3 \leq 0$ ödəyirmi	Yox	Hə	Yox

$x^2 - 4x + 3 \leq 0$ bərabərsizliyi $(-3; -1)$ intervalında və sərhəd nöqtələrində ödənilir.

Həllin ədəd oxu üzərində təsviri:



Cavab: $-3 \leq x \leq -1$

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Bərabərsizlikləri intervallar üsulu ilə həll edin.

a) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$

b) $3x^2 - x - 2 < 0$

c) $x^2 - 3x + 1 \leq 29$

d) $x^2 - 4x > 5$

e) $2x^2 + 5x \geq 7$

f) $2x^2 + 3x > 5$

g) $x^3 - 4x < 0$

h) $x^3 - 9x \geq 0$

i) $x(x + 1)(x - 2) > 0$

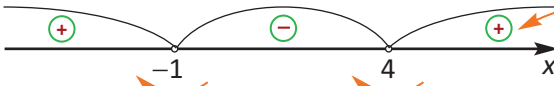
- 2 > İntervallar üsulu sağ tərəfi sıfır, sol tərəfi $(x - c)$ şəklində vuruqların hasilini olan bərabərsizliklərin həlli üçün xüsusilə əlverişlidir. Nümunələri araşdırın, nəticələri müzakirə edin, verilmiş bərabərsizlikləri həll edin.

1. **Nümunə.** $(x + 1)(x - 4) < 0$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli.

1) Sərhəd nöqtələrini tapaq: $(x + 1)(x - 4) = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

2) Sərhəd nöqtələrini ədəd oxu üzərində qeyd edib, hər bir intervalda (sağdan 1-cidən başlayaraq) $(x + 1)(x - 4)$ ifadəsinin işarəsini müəyyən edək.



Sağdan birinci intervalda hər bir vuruq müsbət olduğuna görə $(x + 1)(x - 4)$ ifadəsinin işarəsi müsbətdir.

Sərhəd nöqtələrindən keçdikdə vuruqlardan yalnız birinin işarəsi dəyişdiyindən $(x + 1)(x - 4)$ hasilinin də işarəsi növbə ilə dəyişir.

3) İfadənin sıfırdan kiçik olduğu, yəni mənfi işarəli olduğu aralıqlar verilmiş bərabərsizliyin həllidir. **Cavab:** $(-1; 4)$

Hər bir vuruq tək dərəcədə daxildirsə, intervallarda hasilin işarələri növbəlişir.

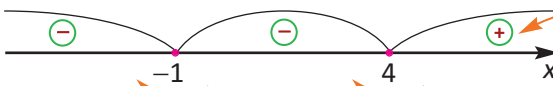
2. **Nümunə.** $(x + 1)^2(x - 4) \geq 0$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli.

1) Sərhəd nöqtələrini tapaq: $(x + 1)^2(x - 4) = 0$; $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = 4$.

Qeyd edək ki, $x = -1$ tənliyin təkrarlanan köküdür.

2) Sərhəd nöqtələrini $(-1$ və $4)$ ədəd oxu üzərində qeyd edib, sağdan 1-cidən başlayaraq hər bir intervalda $(x + 1)^2(x - 4)$ ifadəsinin işarəsini müəyyən edək.



Sağdan birinci intervalda hər bir vuruq müsbət olduğuna görə $(x + 1)^2(x - 4)$ ifadəsinin işarəsi müsbətdir

$x = -1$ nöqtəsindən keçdikdə $(x + 1)^2$ vuruğu işarəni dəyişmir

$x = 4$ nöqtəsindən keçdikdə $(x - 4)$ vuruğu işarəni dəyişir

3) Bərabərsizlik $(x + 1)^2(x - 4)$ ifadəsinin müsbət işarəli olduğu aralıqda və sərhəd nöqtələrində ödənilir. **Cavab:** $\{-1\} \cup [4; +\infty)$

$(x - c)^{2n}$ şəklində cüt dərəcədən vuruq varsa, c sərhəd nöqtəsinin sağında və solunda hasilin işarəsi təkrarlanır.

- a) $(x + 3)(x - 8)(x - 20) < 0$
 c) $(x^2 - 9)(x + 4)(x - 5) \leq 0$
 e) $x^3 + 2x^2 - 15x \geq 0$
 g) $(x - 4)^2(x^2 - 8x) < 0$
 i) $5x(x - 2)(x - 6)^2 \geq 0$

- b) $(x - 3)(x + 2)(x - 1) \geq 0$
 d) $(x^2 - 2x)(x - 6)^3 < 0$
 f) $(4x - x^3)(25 - x^2) < 0$
 h) $(x + 5)^2(2x - x^2) \geq 0$
 j) $(1 - \sqrt{3})(x + 4)^2(x - 5) \leq 0$



Rasional bərabərsizliklərin intervallar üsulu ilə həlli

1. Bərabərsizliyi bir tərəfində rasional ifadə, digər tərəfində sıfır olan ekvivalent bərabərsizlik şəklində yazın.
2. Dəyişənin rasional ifadənin məxrəcini və surətini sıfıra çevirən qiymətlərini tapın. Bu qiymətlər verilən bərabərsizliyin sərhəd nöqtələridir.
3. Sərhəd nöqtələrinin yaratdığı intervallardan ardıcıl olaraq sınaq nöqtələri seçin və bu intervalların bərabərsizliyin həllər çoxluğuna aid olub-olmadığını yoxlayın.



Nümunə

$$\frac{x+2}{x-4} \leq 3 \quad \text{verilən bərabərsizlik}$$

Həlli.

$$1) \frac{x+2}{x-4} - 3 \leq 0 \quad \text{bərabərsizliyin hər iki tərəfinə } -3 \text{ əlavə edilir}$$

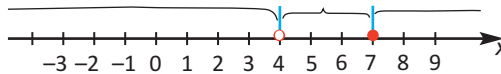
$$\frac{-2x+14}{x-4} \leq 0 \quad \text{sadələşdirilir}$$

$$\frac{-2(x-7)}{x-4} \leq 0 \quad \text{ortaq vuruq mətərizə xaricinə çıxarılır}$$

$$\frac{x-7}{x-4} \geq 0 \quad \text{hər iki tərəf } (-2)\text{-yə bölünür və bərabərsizliyin işarəsi əksinə dəyişir}$$

2) Surət və məxrəcinin sıfırlarını tapmaq: $x-7=0$, $x=7$; $x-4=0$, $x=4$

3) $x=4$ və $x=7$ nöqtələrini ədəd oxu üzərində qeyd etməklə, onu üç intervala ayırırıq: $(-\infty; 4)$, $(4; 7)$ və $(7; +\infty)$



Hər intervaldan sınaq nöqtəsi seçib, bərabərsizliyi yoxlayaq.

$(-\infty; 4)$ intervalı

$$x=0 \quad \frac{x-7}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{0-7}{0-4} \geq 0; \quad \frac{7}{4} \geq 0$$

doğrudur

$(4; 7)$ intervalı

$$x=5 \quad \frac{x-7}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{5-7}{5-4} \geq 0; \quad -2 \geq 0$$

doğru deyil

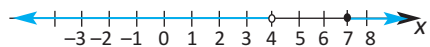
$(7; +\infty)$ intervalı

$$x=8 \quad \frac{x-7}{x-4} \geq 0$$

$$\frac{8-7}{8-4} \geq 0; \quad \frac{1}{4} \geq 0$$

doğrudur

$x=4$ nöqtəsində uyğun ifadənin mənası olmadığından bu nöqtə həllər çoxluğuna daxil ola bilməz. $x=7$ isə bu çoxluğa daxildir. Beləliklə, verilmiş bərabərsizliyin həllər çoxluğu $(-\infty; 4)$ və $[7; +\infty)$ aralıqlarının birləşməsidir. Həllin ədəd oxu üzərində təsviri:



Cavab: $(-\infty; 4) \cup [7; +\infty)$

Qeyd: $\frac{x-7}{x-4} \geq 0$ bərabərsizliyinə intervallarda işarələrin dəyişməsi qaydasının tətbiqi ilə də verilmiş bərabərsizliyi həll etmək olar.

- 3 > Əvvəlcə tənlikləri həll edin, sonra isə uyğun bərabərsizlikləri intervallar üsulu ilə həll edin.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{10}{x-5} = 5 \\ \frac{10}{x-5} < 5 \\ \frac{10}{x-5} > 5 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{b) } \frac{8}{a+1} = 4 \\ \frac{8}{a+1} > 4 \\ \frac{8}{a+1} < 4 \end{array} \right| \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{c) } \frac{z+2}{z-6} = -3 \\ \frac{z+2}{z-6} \leq -3 \\ \frac{z+2}{z-6} \geq -3 \end{array} \right| \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{d) } \frac{w-8}{w+6} = 2 \\ \frac{w-8}{w+6} \leq 2 \\ \frac{w-8}{w+6} \geq 2 \end{array} \right.$$

- 4 > Bərabərsizliyi həll edin.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{x-3}{x+7} < 0 \\ \text{d) } \frac{(x-1)(x^2-36)}{x+1} < 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{b) } \frac{2x-10}{x+8} > 0 \\ \text{e) } \frac{x}{x-5} \geq \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{c) } \frac{x}{2x-5} \leq 0 \\ \text{f) } \frac{3x-1}{2x+5} \geq 3 \end{array}$$

- 5 > Hədləri sol tərəfə keçirin və vuruqlarına ayırmaqla bərabərsizliyi həll edin.

$$\text{a) } x^3 \leq 16x \quad \text{b) } (2x-6)^2 \leq x^2 \quad \text{c) } (x^2+x-3)^2 < (x^2-x-5)^2$$

- 6 > k -nin hansı qiymətlərində verilmiş tənliyin: a) həqiqi kökü yoxdur; b) iki müxtəlif həqiqi kökü var?

$$1) 3x^2 + kx + 3 = 0 \quad 2) kx^2 - 4x + k - 3 = 0$$

- 7 > Həll edin.

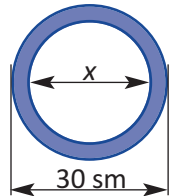
$$\text{a) } |2x-3| > |6-x| \quad \text{b) } |3x-5| < |x-3| \quad \text{c) } |2x-1| < |x+1|$$

Göstəriş: $|p(x)| < |g(x)|$ şəklində bərabərsizlikləri ona ekvivalent olan $p^2(x) < g^2(x)$ bərabərsizliyi ilə əvəz edin və hədləri sol tərəfə keçirib, vuruqlara ayırmaqla alınan bərabərsizliyi həll edin.

- 8 > Binaya su borusu çəkilməsi planlaşdırılır. Borunun xarici diametri 30 sm olmaqla en kəsiyinin (halqanın) sahəsi 60 sm^2 -dan kiçik, 90 sm^2 -dan böyük olmamalıdır.

a) Məsələnin şərtinə uyğun bərabərsizlik yazın və həll edin.

b) Su borusunun daxili diametrinin mümkün ölçülərini müəyyən edin. Nəticəni ondəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın. $\pi \approx 3$ qəbul edin.



- 9 > Heydər yay tətildə mebel mağazasında atasına kömək edir. Onlar hər stolun daşınması üçün 10 manat və stollar üçün istehsalçı şirkətə hər həftə sabit olaraq 1800 manat ödəyirlər. Biri x manata təklif edildikdə həftədə $(120-x)$ sayda stol satılır. a) Onlar stolun birini neçə manata təklif etsələr, gəlirlə işləyərlər? b) Stollar hansı qiymətə satılsa, həftəlik gəlir maksimum olar? Bu halda həftədə neçə stol satılır?

7-5

İrrasional bərabərsizliklər

Radikal işarəsi altında dəyişəni olan bərabərsizliklərə irrasional bərabərsizliklər deyilir. İrrasional bərabərsizliklərin həlli kökün, bərabərsizliklərin xassələrindən istifadə etməklə rasional bərabərsizliklərin və ya onların sisteminin həllinə gətirilir. Dəyişəni kvadrat kök işarəsi altında olan sadə irrasional bərabərsizliklərin həllinə aid nümunələrə baxaq.

1. **Nümunə.** $\sqrt{2x-4}-1 < 3$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli.

✓ Kvadrat kökaltı ifadə mənfi ola bilməz: $2x-4 \geq 0$. Buradan $x \geq 2$ alırıq.


✓ $\sqrt{2x-4}-1 < 3$ *verilən bərabərsizlik*
 $\sqrt{2x-4} < 4$ *hər iki tərəfə 1 əlavə etməklə radikal təklənin*
 $2x-4 < 16$ *hər iki tərəf kvadrata yüksəldilir*
 $2x < 20$ *hər iki tərəfə 4 əlavə edilir*
 $x < 10$ *hər iki tərəf 2-yə bölünür*

✓ Verilmiş bərabərsizlik $x \geq 2$ və $x < 10$ olduqda ödənilir. Yəni, $2 \leq x < 10$.

✓ Verilmiş bərabərsizlik dəyişənin $[2; 10)$ aralığından götürülmüş qiymətlərində doğru ədədi bərabərsizliyə çevrilir. Dəyişənin $[2; 10)$ aralığına daxil olmayan qiymətlərində isə doğru olmayan ədədi bərabərsizlik və ya mənasız ifadə alınır. Bunu $(-\infty; 2)$, $[2; 10)$; $[10; +\infty)$ aralıqlarının hər birindən sınaq nöqtəsi götürməklə yoxlaya bilərik.

$(-\infty; 2)$	$[2; 10)$	$[10; +\infty)$
$x = 1$	$x = 2$	$x = 11$
$\sqrt{2 \cdot 1 - 4} - 1 \stackrel{?}{<} 3$	$\sqrt{2 \cdot 2 - 4} - 1 \stackrel{?}{<} 3$	$\sqrt{2 \cdot 11 - 4} - 1 \stackrel{?}{<} 3$
$\sqrt{-2} - 1 < 3$ ✗	$-1 < 3$ ✓	$\sqrt{18} - 1 < 3$ ✗
doğru deyil	doğrudur	doğru deyil

Cavab: bərabərsizliyin həllər çoxluğu $[2; 10)$ aralığıdır.

Həllin ədəd oxu üzərində təsviri: 

Göründüyü kimi, verilmiş bərabərsizliyin həlli $\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 2x-4 < 16 \end{cases}$ sisteminin həllinə gətirilir.

Ümumiyyətlə, radikalı təkləməklə $\sqrt{ax+b} < c$ (burada c müsbət ədəddir)

şəklinə gətirilən irrasional bərabərsizliklərin

həlli verilən bərabərsizliklə eynigüclü olan

$\begin{cases} ax+b \geq 0 \\ ax+b < c^2 \end{cases}$ sisteminin həllinə gətirilir.

$\sqrt{x-4}-1 < 2$ bərabərsizliyini eynigüclü sistemə gətirməklə siz həll edin.


2. **Nümunə.** $\sqrt{x-3} \geq 2$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli. ✓ Dəyişənin mümkün qiymətlərini tapmaq: $x-3 \geq 0$, $x \geq 3$

✓ Verilmiş bərabərsizliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək: $x-3 \geq 4$, $x \geq 7$.

✓ $x \geq 7$ olduqda aydındır ki, $x \geq 3$ bərabərsizliyi də ödənər. Deməli, verilmiş bərabərsizlik $x \geq 7$ olduqda doğrudur.


Cavab: bərabərsizliyin həllər çoxluğu $[7; +\infty)$ aralığıdır.

Həllin ədəd oxu üzərində təsviri: 

3. **Nümunə.** $\sqrt{x-4} > -2$ bərabərsizliyini həll edin.

Həlli. Dəyişənin mümkün qiymətləri şərtinə görə $x-4 \geq 0$, yəni $x \geq 4$ olmalıdır. Aydındır ki, x -in 4-dən kiçik olmayan istənilən qiymətində verilmiş bərabərsizlik ödənir. Deməli, verilmiş bərabərsizliyin həlli $x \geq 4$ olur.

Cavab: bərabərsizliyin həllər çoxluğu $[4; +\infty)$ aralığıdır.

Həllin ədəd oxu üzərində təsviri: 

Öyrənmə tapşırıqları

1 > $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$ ədədlərindən hansılar verilmiş bərabərsizliyi ödəyir?

a) $\sqrt{x+1} > -3$

b) $\sqrt{x-1} < 2$

c) $\sqrt{3-x} > 1$

2 > Bərabərsizliyi həll edin.

a) $\sqrt{x-4} < 3$

b) $\sqrt{2x-4} > 1$

c) $\sqrt{2x-3} < 1$

d) $\sqrt{x-3} - 2 < 2$

e) $\sqrt{x-5} - 1 > 3$

f) $5 - \sqrt{x-3} < 2$

3 > Dəyişənin mümkün qiymətlərini göstərin. Bərabərsizliyin həllinin olub-olmadığı haqqında fikir yürüdün. Həlli varsa, bu həlli yazın.

a) $\sqrt{x-3} < 0$

b) $\sqrt{3-x} < -1$

c) $\sqrt{2x-6} \leq 0$

d) $\sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} > 2$

e) $\sqrt{x-4} > -1$

f) $\sqrt{2x-5} > -2$

4 > Bərabərsizliyi həll edin.

a) $\sqrt{x^2-9} < 4$

b) $\sqrt{4-x^2} > \sqrt{3}$

c) $\sqrt{x^2-3x} > 2$

d) $\sqrt[4]{x-1} \leq \sqrt{2}$

e) $\sqrt[4]{x-2} > 1$

f) $\sqrt[4]{2x-6} \leq \sqrt{8}$

5 > Bərabərsizliyi həll edin.

a) $\sqrt[3]{x-1} > 2$

b) $\sqrt[3]{2-x} \leq 1$

c) $\sqrt[3]{2x+1} + 2 < 1$

Göstəriş: Radikalı təkləyib hər iki tərəfi 3-cü dərəcəli qüvvətə yüksəltməklə eynigüclü bərabərsizliyin həllinə gətirin.



Ümumiləşdirici tapşırıqlar

- 1 > Bank hesabına 5000 manat pul illik 8% sadə faiz artımı ilə qoyulmuşdur. Daha neçə manat pul 10% sadə faiz artımı ilə qoyularsa, illik gəlir 800 manatla 950 manat arasında olar?
- 2 > Köpək balıqlarının normal yaşaması üçün suyun temperaturu 5°C -dən 18°C -yə qədər olmalıdır. Köpək balıqlarının yaşaması üçün əlverişli olmayan su temperaturunu bərabərsizliklərlə yazın.
- 3 > Mağazanın hər kvadrat metr sahəsi üçün ödənilən aylıq kirayə haqqı (r) ilə əldə edilən gəlir (min manatla) $P(r)$ arasındakı asılılıq təxmini olaraq $P(r) = -6r^2 + 45r - 39$ kimidir. Aşağıdakı tənliyi və bərabərsizlikləri həll edin, hər birini real situasiyaya uyğun təqdim edin.

$$-6r^2 + 45r - 39 = 0$$

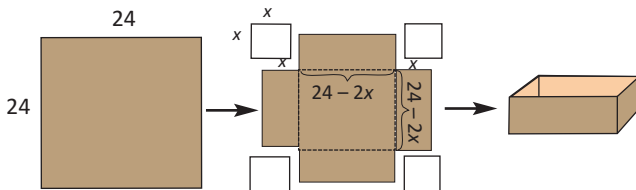
$$-6r^2 + 45r - 39 > 0$$

$$-6r^2 + 45r - 39 \geq 15$$

$$-6r^2 + 45r - 39 < 15$$

- 4 > **Açıq tipli sual.** $(x + 1)(x - 4) < 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğunu müəyyən etmək üçün hansı üç nöqtəni seçərdiniz?
- 5 > Cavid $2x^2 + 12x > 2x + 12$ bərabərsizliyinin həllini $2x(x + 6) > 2(x + 6)$, $x > 1$ kimi yazmışdır. Cavidin səhvinə izah edin.
- 6 > Bərabərsizlikləri müxtəlif üsullarla həll edin.
- a) $-x^2 - 2x + 48 < 0$ b) $3x^2 + 2x - 5 < 0$ c) $4x^2 - 4x + 1 > 0$
d) $x^2 + 2x - 15 \leq 0$ e) $24 + 11x + x^2 > 0$ f) $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$
g) $x^2 - 2x + 3 < 0$ h) $x^2 - 2x + 3 > 0$ i) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$
- 7 > İki tam ədədin cəmi 20-yə bərabərdir, onların kvadratları cəmi isə 208-dən kiçikdir. Bu ədədlər cütünü müəyyən edin.
- 8 > Ölçüləri $24 \text{ sm} \times 24 \text{ sm}$ olan kvadrat formalı karton təbəqənin künclərindən tərəfi $x \text{ sm}$ olan kvadrat hissələr kəsilib çıxarılır və şəkkildə göstəriləndi kimi qırıq-qırıq xətlər boyunca qatlanıb yapışdırılaraq ağzıaçıq qutu düzəldilir.

- a) x -in hansı tam qiymətlərində bu qutunun həcmi 800 sm^3 -dən böyük olar?
b) Bu qiymətlərdən hansında həcm ən böyük olur?



9 > Bərabərsizliyi həll edin.

a) $\frac{3x+1}{2x-4} > 0$

b) $\frac{2x-1}{5x+3} \geq 0$

c) $\frac{x-3}{x+3} \leq 5$

d) $\frac{x^2+x-2}{x^2-2x-3} < 0$

e) $x-17 \geq \frac{60}{x}$

f) $\frac{x^2-x-6}{x-3} \geq 1$

g) $\frac{x-2}{x-1} < 1$

h) $\frac{x^2+x-1}{x+3} < 1$

i) $\frac{x^2+2}{x+4} \leq 3$

10 > Düzbucaqlı şəklində olan ipək parça uzunluğu enindən 5 dəfə böyük olmaqla kəsilir. Parçanın sahəsinin ən azı 500 sm², ən çoxu 720 sm² olması şərtilə, eninin mümkün ölçülərini müəyyən edin.

11 > Aslan topu 15 m/san sürətlə hündürlüyü 30 m olan binanın damından yuxarı atdı. Topun yer səthindən h (metrlə) məsafəsi $h(t) = -5t^2 + 15t + 30$ düsturunu ilə hesablanı bilər. Burada t (saniyə ilə) zamanı göstərir.

a) Topun qalxdığı ən yüksək hündürlüyü tapın.

b) Hansı zaman kəsiyində top ən azı 40 m hündürlükdə olur?

12 > Bərabərsizliyi həll edin.

a) $|2x-3| + 5 < 6$

b) $|5x+3| - 4 \geq x$

c) $|x+5| < |4x-10|$

d) $\sqrt{x+2} < 2$

e) $\sqrt[3]{x-1} \leq -2$

f) $\sqrt{x^2-9} > 4$

13 > a -nın hansı qiymətlərində $ax^2 - ax + 1 > 0$ bərabərsizliyi x -in bütün qiymətləri üçün doğrudur?

14 > Uyğunluğu müəyyən edin.

1) $x^2 - x - 12 < 0$

A) tam həllərinin cəmi 4-ə bərabərdir.

2) $\sqrt{x-1} < 2$

B) tam həllərinin cəmi 3-ə bərabərdir.

3) $\frac{x^2-4x}{|x-2|} < 0$

C) tam həllərinin cəmi 10-a bərabərdir.

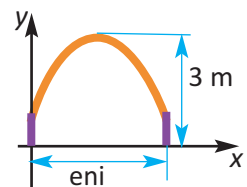
D) tam həllərinin sayı 4-dür.

15 > a -nın hansı qiymətlərində $y = ax^2 + 2x + 1$ parabolasının absis oxu ilə kəsişmə nöqtələri $x = 1$ nöqtəsindən müxtəlif tərəflərdə yerləşir?

16 > Bağ evinin girişi tağ şəkillidir. Koordinat sistemini şəkildə göstərilədiyi kimi seçməklə tağı $g(x) = -0,6x^2 + bx + 0,6$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar.

a) Girişin hündürlüyü 3 m isə, eni neçə metr olar?

b) Hündürlüyü 2,4 m olan maşının giriş qapısından keçə bilməsi üçün eni neçə metrdən kiçik olmalıdır?

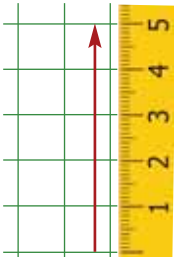


8

Vektorlar

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz

- ✓ Koordinat müstəvisində vektorları
- ✓ Komponentləri ilə verilmiş vektorun uzunluğunu və meyil bucağını müəyyən etməyi
- ✓ Vektorların toplanması və çıxılmasını
- ✓ Vektorun ədədə vurulmasını
- ✓ Komponentləri ilə verilmiş vektorlar üzərində əməlləri
- ✓ Vektorların tətbiqi ilə məsələ həll etməyi

**Praktik məşğələ.**

Verilən miqyasa və istiqamətə görə yerdəyişmələrə uyğun düz xətt parçalarını çəkin. İstiqaməti oxla göstərin.

25 km şimala

1 sm : 5 km

250 m yuxarıya

1 sm : 25 m

20 m şərqə

1 sm : 5 m

100 m aşağıya

1 sm : 20 m

4 km qərbə

1 sm : 1 km

15 km sağa

1 sm : 3 km

8-1

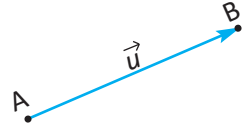
Vektorlar

Bir çox kəmiyyətlər, məsələn, kütlə, uzunluq, zaman, temperatur və s. yalnız ədədi qiyməti ilə xarakterizə edilir. Bu cür kəmiyyətlər skalyar kəmiyyətlər adlanır. Bəzi kəmiyyətlər isə, məsələn, yerdəyişmə, sürət, təcil, qüvvə və s. təkə ədədi qiyməti ilə deyil, həm də istiqaməti ilə müəyyən edilir. Bu cür kəmiyyətlərə vektorial kəmiyyətlər deyilir. Yerdəyişmə vektorial kəmiyyətlərə ən sadə nümunədir. Cismın A nöqtəsindən B nöqtəsinə yerdəyişməsi A-dan B-yə doğru yönəlmiş parça ilə - vektorla göstərilir.

Vektor istiqamətlənmiş düz xətt parçası ilə təsvir olunur. Vektoru göstərən parçanın uzunluğuna **vektorun uzunluğu və ya modulu** deyilir.

Vektor başlanğıc və son nöqtəsi adlandırılmaqla işarə edilir. Məsələn, \overrightarrow{AB} vektoru, burada A vektorun başlanğıc, B isə son nöqtəsidir.

Vektor kiçik hərflərlə də işarə edilir, məsələn \vec{u} vektoru. \vec{u} vektorunun uzunluğu $|\vec{u}|$ kimi işarə olunur.



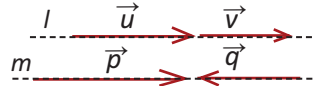
Başlanğıc və son nöqtələri üst-üstə düşən vektor **sıfır vektor** adlanır və $\vec{0}$ kimi işarə edilir. Sıfır vektorunun uzunluğu sıfıra bərabərdir, istiqaməti isə qeyri-müəyyəndir.

Bir düz xətt üzərində və ya paralel düz xətlər üzərində yerləşən vektorlara **kollinear vektorlar** deyilir. Kollinear vektorlar eyni istiqamətli və ya əks istiqamətli vektorlardır.

Vektorların eyni istiqamətli olması $\vec{u} \uparrow \vec{v}$ kimi, əks istiqamətli olması isə $\vec{p} \uparrow \vec{q}$ kimi yazılır.

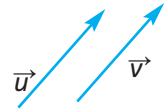
Şəkildə \vec{u} , \vec{v} , \vec{p} və \vec{q} vektorları kollinear vektorlardır.

Burada $l \parallel m$.



• iki vektorun istiqamətləri eyni, uzunluqları bərabər olarsa, bu vektorlar bərabər vektorlar adlanır.

Şəkildəki \vec{u} və \vec{v} vektorları bərabər vektorlardır: $\vec{u} = \vec{v}$

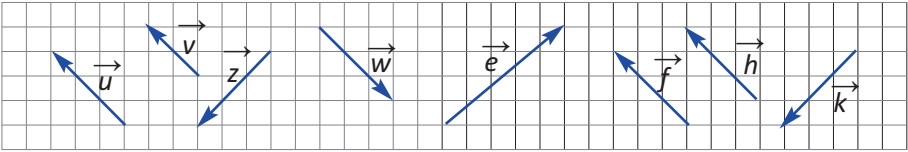


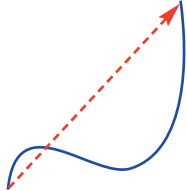
• iki vektorun istiqamətləri əks, uzunluqları bərabər olarsa, bu vektorlar əks vektorlar adlanır. Şəkildəki \vec{p} və \vec{q} vektorları əks vektorlardır: $|\vec{p}| = |\vec{q}|$, $\vec{p} = -\vec{q}$

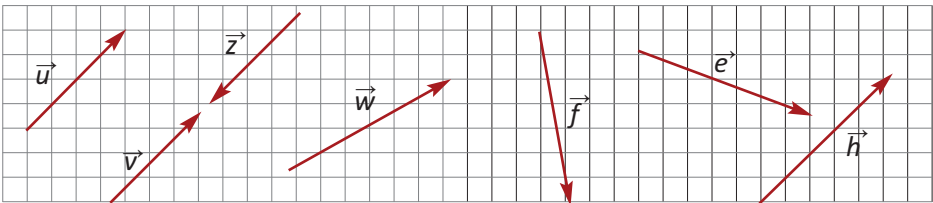


Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Hansı halda vektorial, hansı halda skalyar kəmiyyətdən danışmaq olar?
 - 1) Avtomobil şərqə doğru 60 km/saat sürətlə hərəkət edir.
 - 2) Sevinc əlindəki topu üfüqlə 30° bucaq əmələ gətirən istiqamətdə 100 N qüvvə tətbiq etməklə irəli atdı.
 - 3) Həsənin boyu 1 m 75 sm, kütləsi 72 kq-dır.
 - 4) Paraşütçü 20 km/saat sürətlə təyyarədən aşağıya doğru tullandı.
- 2 > Hansı vektorial kəmiyyətdir?
 - 1) 5,6 kq
 - 2) 3,2 m/san, şimal-şərq istiqamətində
 - 3) 9,81 m/san², aşağı
 - 4) $8,8 \times 10^{-3} m^3$
- 3 > Şəklə görə tapşırıqları yerinə yetirin.



- a) Uzunluğu \vec{u} vektoru ilə eyni olan vektorları yazın.
 - b) İstiqaməti \vec{u} vektoru ilə eyni olan vektorları yazın.
 - c) \vec{u} vektoruna bərabər olan vektorları yazın.
 - d) \vec{u} vektoruna əks vektoru yazın.
- 4 > a) Şəkində velosipedçinin getdiyi yol mavi xətlə göstərilmişdir. Qırmızı xətlə hansı kəmiyyət göstərilmişdir?
 
 - b) Kütlə və çəki kəmiyyətlərindən hansı vektorial, hansı skalyar kəmiyyətdir? Fikirlərinizi izah edin.
- 5 > \vec{u} vektoru ilə kollinear olan vektorları seçib yazın.

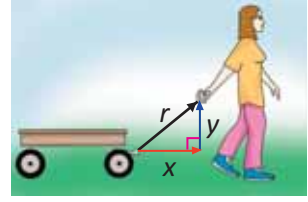


- 6 > Dəftərinizdə çəkin: a) iki kollinear vektor; b) iki əks vektor; c) iki bərabər vektor.
- 7 > Rasimin çəkdiyi şəkildə yerdəyişmə vektoruna uyğun parçanın uzunluğu 6 sm-dir. Şəkil 1 sm : 250 m miqyası ilə təsvir edilmişdirsə, yerdəyişmə nə qədərdir?

8-2

Dekart koordinat müstəvisində vektorlar

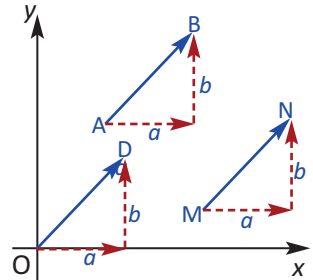
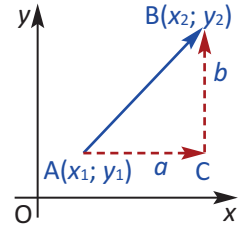
Araşdırma. Nailənin arabaya tətbiq etdiyi qüvvə arabani irəliyə aparan və arabani yuxarı dartaan komponentlərə ayrılır. Arabaya tətbiq olunmuş qüvvənin üfüqi komponentini necə hesablamaq olar?



Vektorun Dekart koordinat müstəvisində komponentləri ilə ifadə edilməsi

Dekart koordinat müstəvisi üzərində \vec{AB} vektorunu nəzərdən keçirək. Vektorun B son nöqtəsi A başlanğıc nöqtəsinə görə Ox oxu boyunca $|a|$ vahid ($a > 0$ olduqda sağa, $a < 0$ olduqda sola), Oy oxu boyunca $|b|$ vahid ($b > 0$ olduqda yuxarı, $b < 0$ olduqda aşağı) yerini dəyişmişdir. a və b ədədləri ilə müəyyən olunan (həm uzunluğu, həm də istiqaməti ilə) \vec{AC} və \vec{CB} vektorları \vec{AB} vektorunun komponentləridir.

Koordinat müstəvisi üzərində vektor $\vec{AB} = \langle a; b \rangle$ kimi yazılır. $\langle a; b \rangle$ yazılışı vektorun komponentlərlə yazılışdır. Bərabər vektorların uyğun komponentləri bərabərdir. Tərsinə, vektorların uyğun komponentləri bərabərdirsə, onda vektorlar bərabərdir. Şəkildə $\vec{AB} = \vec{OD} = \vec{MN}$



Hər hansı \vec{AB} vektoru verildikdə başlanğıcı müstəvinin istənilən nöqtəsində olmaqla bu vektora bərabər bir vektor qurmaq olar. Deməli, fərqli başlanğıc nöqtələri seçməklə verilən vektora bərabər sonsuz sayda vektor qurula bilər.

Başlanğıc nöqtəsi $A(x_1; y_1)$, son nöqtəsi isə $B(x_2; y_2)$ olan $\vec{AB} = \langle a; b \rangle$ vektorunu bu nöqtələrin koordinatlarına görə komponentləri ilə ifadə etmək olar.

$x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$ olduğundan alırıq:

$$\vec{AB} = \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1 \rangle = \langle a; b \rangle$$

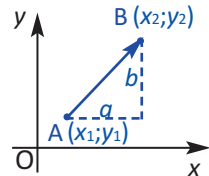
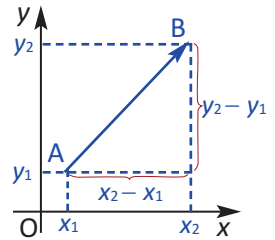
$\langle a; b \rangle$ vektorunu koordinat başlanğıcından ayırdıqda sonu

$(a; b)$ nöqtəsində yerləşir. a və b ədədlərinə $\langle a; b \rangle$ vektorunun koordinatları da deyilir.

Vektorun uzunluğu. Vektorun uzunluğunu başlanğıc və son nöqtələrinin koordinatlarına görə iki nöqtə arasındakı məsafə düsturundan istifadə etməklə tapmaq olar:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$\vec{AB} = \langle a; b \rangle$ vektorunun uzunluğu $|\vec{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ düsturu ilə hesablanır.



1. Nümunə. Başlanğıc nöqtəsi $(-2; 3)$, son nöqtəsi $(3; 7)$ olan \vec{z} vektorunu $\vec{z} = \langle a; b \rangle$ şəklində yazın.

Həlli. \vec{z} vektorunun komponentləri ilə $\vec{z} = \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1 \rangle$ yazılışında uyğun koordinatları nəzərə alaq:

$$\vec{z} = \langle 3 - (-2); 7 - 3 \rangle = \langle 5; 4 \rangle \quad \text{Cavab: } \vec{z} = \langle 5; 4 \rangle$$

2. Nümunə. $\vec{u} \langle 3; 6 \rangle$ vektorunun başlanğıc nöqtəsi $(2; 3)$ -dür. Bu vektorun son nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

Həlli. \vec{u} vektorunun son nöqtəsinin koordinatlarının $(x; y)$ olduğunu qəbul edək.

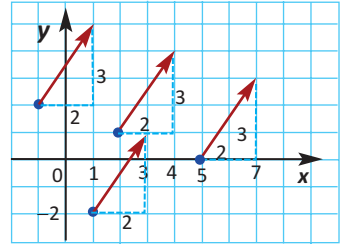
$\langle x - 2; y - 3 \rangle = \langle 3; 6 \rangle$. Buradan uyğun koordinatların bərabərliyinə görə tapırıq:

$$x - 2 = 3, \quad x = 5; \quad y - 3 = 6, \quad y = 9$$

Verilmiş vektorun son nöqtəsi $(5; 9)$ -dur.

3. Nümunə. Başlanğıcı $(-1; 2)$, $(2; 1)$, $(1; -2)$, $(5; 0)$ nöqtələrində olmaqla koordinat müstəvisi üzərində $\langle 2; 3 \rangle$ vektoruna bərabər vektorlar çəkin.

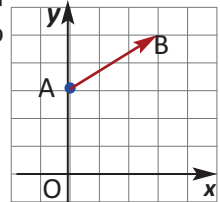
Həlli. $\langle 2; 3 \rangle$ vektorunun son nöqtəsi başlanğıca nəzərən 2 vahid sağa, 3 vahid yuxarı yer dəyişmişdir. Verilən nöqtələr koordinat müstəvisində qeyd edilir. Bu nöqtələrdən başlayaraq komponentləri $\langle 2; 3 \rangle$ vektorunun uyğun komponentlərinə bərabər olan vektorlar qurulur.



4. Nümunə. $A(0; 3)$ və $B(3; 5)$ uyğun olaraq \vec{AB} vektorunun başlanğıc və son nöqtəsidir. Bu vektoru $\vec{AB} = \langle a; b \rangle$ şəklində yazın və uzunluğunu tapın.

Həlli. $\vec{AB} = \langle 3 - 0; 5 - 3 \rangle = \langle 3; 2 \rangle$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$



Öyrənmə tapşırıqları

1 > 1) P və Q uyğun olaraq \vec{PQ} vektorunun başlanğıc və son nöqtəsidir. Bu vektoru komponentləri ilə yazın və uzunluğunu tapın.

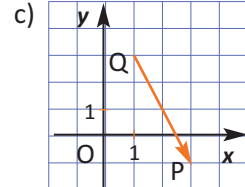
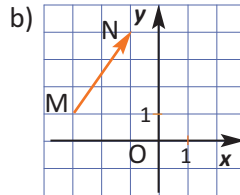
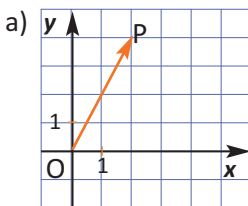
a) $P(0; 0)$, $Q(3; 4)$

b) $P(-5; 1)$, $Q(7; 6)$

c) $P(5; 4)$, $Q(-1; -4)$

2) $A(-1; 2)$, $B(3; -4)$, $C(5; 6)$ nöqtələri verilir. \vec{AB} , \vec{AC} , \vec{BC} , \vec{CA} , \vec{CB} , \vec{BA} vektorlarını komponentləri ilə yazın.

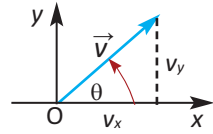
2 > Koordinat müstəvisi üzərində təsvir edilmiş vektorları komponentləri ilə ifadə edin.



✓ Vektorun istiqaməti. Meyil bucağı

Koordinat başlanğıcından ayrılmış vektoru onun uzunluğu və absis oxu ilə əmələ gətirdiyi bucaqla vermək olar. Vektorun istiqamətini absis oxunun müsbət istiqamətindən saat əqrəbinin hərəkətinə əks olmaqla ölçülən bucaqla müəyyən edib, ona vektorun meyl bucağı deyəcəyik.

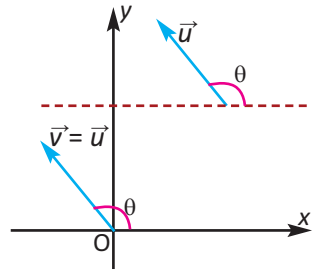
Şəkilə $\vec{v} = \langle v_x; v_y \rangle$ vektorunun uzunluğu $|\vec{v}| = v$ ilə, meyl bucağı isə θ ilə işarə edilmişdir.



vektorun uzunluğu: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

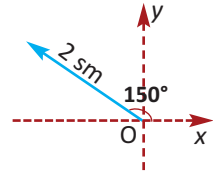
vektorun meyl bucağı: $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$ və ya $\cos\theta = \frac{v_x}{v}$

Hər hansı vektorun meyl bucağı koordinat başlanğıcından verilmiş vektora bərabər vektor ayırmaqla tapılır. Qeyd edək ki, meyl bucağı vektorun başlanğıc nöqtəsindən absis oxuna paralel üfüqi ox keçirməklə də tapıla bilər.



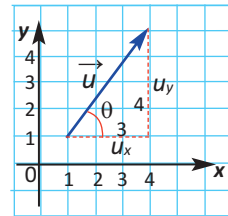
1. Nümunə. Uzunluğu 200 m olan yerdəyişmə vektorunun meyl bucağı 150° -dir. Bu vektoru 1 sm : 100 m miqyası ilə çəkin.

Həlli. Ox oxunun müsbət istiqaməti ilə 150° -li bucaq əmələ gətirən şüa üzərində onun başlanğıcından 1 sm : 100 m miqyasına görə xətkəslə 2 sm uzunluğunda parça qeyd edilir.



2. Nümunə. $\vec{u} \langle 3; 4 \rangle$ vektorunun uzunluğunu və meyl bucağını müəyyən edin.

Həlli: Koordinat müstəvisi üzərində ixtiyari nöqtəni vektorun başlanğıc nöqtəsi seçək. Bu nöqtədən üfüqi ox boyunca 3 vahid olmaqla u_x komponentini, şaquli ox boyunca 4 vahid olmaqla u_y komponentini ayıraq və şəkilə göstərildiyi kimi \vec{u} vektorunu quraq. Transportirle θ bucağını ölçsək, onun təqribən 53° olduğunu görürük. Bunu hesablamalarla da yoxlayaq.

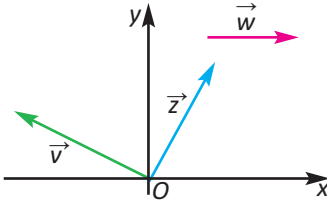


Vektorun uzunluğu: $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, meyl bucağı: $\tan\theta = \frac{4}{3}$, buradan kalkulyatorun köməyi ilə $\theta \approx 53^\circ$ olduğu tapılır.

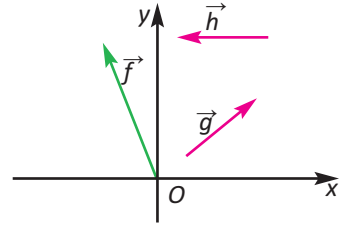
Öyrənmə tapşırıqları

- 11 > Xətkeş və transportirin köməyilə ölçmələr aparmaqla miqyasa görə verilmiş vektorun modulunu və meyil bucağını müəyyən edin.

a) 1 sm : 50 km/saat



b) 1 sm : 10 N



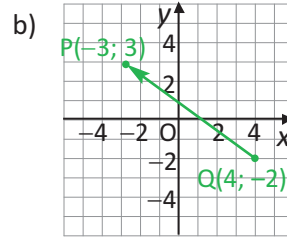
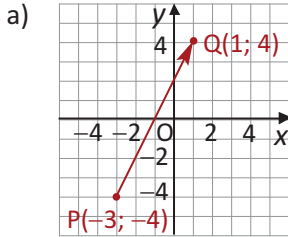
- 12 > Uzunluq, meyil bucağı və miqyasa görə vektorları xətkəş və transportirin köməyilə çəkin (miqyas verilmədikdə özünüz seçin).

a) 5 km; 20° ; 1 sm : 1 km

b) 200 km; 170° ; 1 sm : 50 km

c) 1200 m; 150° ; \subset sm : \subset km

- 13 > Vektorların modulunu və meyil bucağını müəyyən edin. Vektorları dəftərinizdə çəkin.



- 14 > Koordinat müstəvisində verilən vektora bərabər vektor çəkin, uzunluğunu və meyil bucağını müəyyən edin.

a) $\langle 5; 5 \rangle$

b) $\langle 5; 1 \rangle$

c) $\langle -1; 1 \rangle$

d) $\langle -6; 8 \rangle$

- 15 > P vektorun başlanğıc nöqtəsi, Q son nöqtəsidir. Vektorun uzunluğunu və meyil bucağını müəyyən edin.

a) P(0; 0), Q(-3; 2)

b) P(1; -1), Q(-2; 3)

c) P(4; 2), Q(1; 3)

d) P(0; 4), Q(2; 6)

- 16 > Aşağıdakı təkliflərdən hansı doğru, hansı səhvdir?

a) Əgər $\vec{u} = \vec{v}$ olarsa, onda $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

b) Əgər $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ olarsa, onda $\vec{u} = \vec{v}$

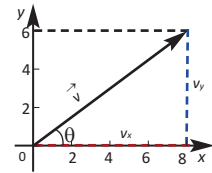
- 17) \vec{w} vektorunun başlanğıc nöqtəsi (1; 2), son nöqtəsi isə (5; -1)-dir.
 \vec{f} vektorunun başlanğıc nöqtəsi (5; -1), son nöqtəsi isə (1; 2)-dir.
 Bu vektorların oxşar və fərqli cəhətlərini yazın.
- 18) Uzunluğu $\sqrt{10}$ vektorunun uzunluğuna bərabər, lakin istiqaməti əks olan vektoru komponentləri ilə yazın. Bunu necə müəyyən etdiyinizi izah edin.
- 19) Uyğun vektorları müəyyən miqyasla çəkin.
- Gəminin hərəkət sürəti 60 km/saat, meyil bucağı 60° -dir.
 - Avtomobilin hərəkət sürəti 80 km/saat, meyil bucağı 0° -dir.
 - Atlının yerdəyişməsi 16 km, meyil bucağı 70° -dir.
 - Obyektə 145° bucaq altında tətbiq olunan qüvvə 100 N-dur.



Trigonometrik nisbətlər və vektorun komponentləri

Koordinat müstəvisində verilmiş \vec{v} vektorunun komponentlərlə $\vec{v} = \langle v_x; v_y \rangle$ yazılışını trigonometrik nisbətlərin köməyi ilə ifadə edə bilərik. $|\vec{v}| = v$ işarə etsək və

$$\cos \theta = \frac{v_x}{v}, \quad \sin \theta = \frac{v_y}{v},$$



$v_x = v \cos \theta$, $v_y = v \sin \theta$ olduğunu nəzərə alsaq, $\vec{v} = \langle v_x; v_y \rangle$ vektorunu $\vec{v} = \langle v \cos \theta; v \sin \theta \rangle$ şəklində komponentləri ilə ifadə etmək olar.



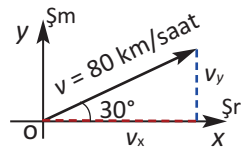
Nümunə. Avtomobil meyil bucağı 30° olmaqla saatda 80 km sürətlə şimal-şərqə doğru hərəkət edir. Sürət vektorunu komponentləri ilə yazın.

Həlli. Koordinat müstəvisində şərqə doğru istiqaməti absis oxunun müsbət istiqaməti ilə, şimala istiqaməti isə ordinat oxunun müsbət istiqaməti ilə göstərməyi şərtləşək.

Verilənlərə görə: $|\vec{v}| = 80$ (km /saat), $\theta = 30^\circ$

$$\vec{v} = \langle v_x; v_y \rangle = \langle v \cos \theta; v \sin \theta \rangle = \langle 80 \cos 30^\circ; 80 \sin 30^\circ \rangle$$

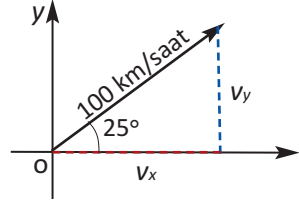
30° -li bucağın sinus və kosinusunun qiymətlərini nəzərə alsaq, taparıq:



şərq istiqamətində sürət: $v_x = v \cos \theta = 80 \cdot \cos 30^\circ \approx 80 \cdot 0,87 \approx 69,6$ (km/saat)
 şimal istiqamətində sürət: $v_y = v \sin \theta = 80 \cdot \sin 30^\circ = 80 \cdot 0,5 = 40$ (km/saat)

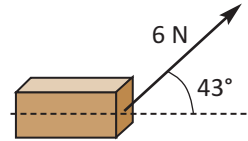
Öyrənmə tapşırıqları

- 20 > Şəkilə verilmiş \vec{v} sürət vektorunu triqonometrik nisbətlərin köməyi ilə komponentləri ilə ifadə edin. Üfüqi və şaquli istiqamətlərdə sürətin (km/saat) təqribi qiymətini yüzdəbirdələrə qədər dəqiqliklə yazın.

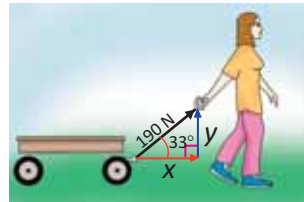


- 21 > Hər bir hala uyğun \vec{v} vektorunu Ox və Oy oxları üzrə komponentləri ilə $\langle v_x; v_y \rangle$ şəklində yazın:
- meyl bucağı 45° olmaqla, saatda 20 km sürətlə şimal-şərqə hərəkət edən gəminin sürətini göstərən \vec{v} vektorunu;
 - 300 km/saat sürətlə qərbə doğru uçan təyyarənin sürətini göstərən \vec{v} vektorunu;
 - 10 km/saat sürətlə şimala doğru hərəkət edən velosipedçinin sürətini göstərən \vec{v} vektorunu.

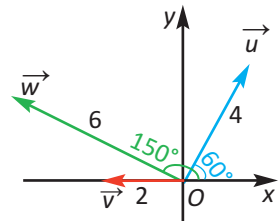
- 22 > a) Topdan meyl bucağı 15° olmaqla atılan mərmə 925 m/san sürətlə hərəkət etdi. Mərminin üfüqi istiqamətdə sürətini tapın.
- b) Gəmi meyl bucağı 60° olmaqla 75 km/saat sürətlə hərəkət edir. Gəminin Ox və Oy oxları istiqamətində, başqa sözlə şərq və şimal istiqamətlərdə sürətini müəyyən edin.
- c) Şəkilə cismə təsir edən qüvvənin modulu 6 N, meyl bucağı 43° -dir. Cismə təsir edən qüvvənin üfüqi və şaquli istiqamətlərdə komponentlərinin ədədi qiymətini tapın.



- 23 > Gülnar arabanı meyl bucağı 33° olmaqla 190 N qüvvə tətbiq edərək hərəkət etdirir. Arabaya tətbiq edilən qüvvənin üfüqi və şaquli komponentlərinin ədədi qiymətini tapın.



- 24 > Verilənlərə görə \vec{u} , \vec{v} və \vec{w} vektorlarını komponentləri ilə yazın.



8-3

Vektorların toplanması və çıxılması

Araşdırma. Çayın axını qayığın axını istiqamətində və axına qarşı hərəkətində onun sürətinə necə təsir edir?

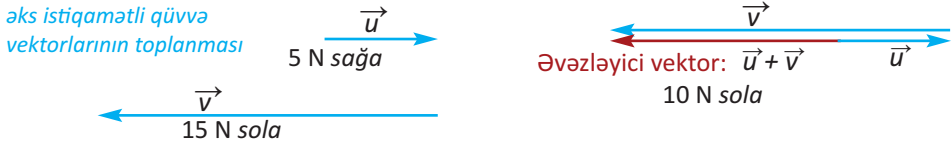
✓ **Kollinear vektorların toplanması**

Kollinear \vec{u} və \vec{v} vektorlarını toplamaq üçün \vec{v} vektorunu elə yerləşdirin ki, onun başlanğıcı \vec{u} vektorunun sonu ilə üst-üstə düşsün. \vec{u} vektorunun başlanğıcından \vec{v} vektorunun sonuna yönəlmiş vektor \vec{u} və \vec{v} vektorlarının cəmini göstərən onların əvəzləyicisi olur.

Eyni istiqamətli kollinear vektorların cəmini göstərən əvəzləyici vektorun modulu verilən vektorların modulları cəminə bərabər olmaqla, istiqaməti verilən vektorlarla eyni olur.

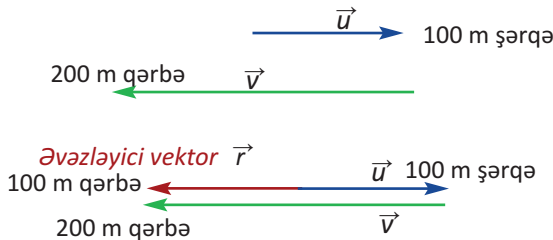


Əks istiqamətli iki kollinear vektorun əvəzləyici vektorunun modulu bu vektorların modulları fərqi bərabərdir (böyük moduldan kiçiyi çıxılır), istiqaməti isə modulu böyük olan vektorla eynidir.



1. Nümunə. Təsəvvür edin ki, siz 100 m şərqlə doğru, daha sonra 200 m qərbə doğru hərəkət etmişiniz. Bu hərəkəti qrafik olaraq təsvir edin.

Həlli. 1 sm : 50 m miqyası ilə verilən vektorları çəkək. Göründüyü kimi, əvəzləyici vektorun modulu vektorların modullarının fərqi bərabərdir, istiqamət isə qərbə doğru olacaq.



Bu halda $|\vec{v}| > |\vec{u}|$ olduğundan \vec{r} əvəzləyici vektorunun uzunluğu $|\vec{r}| = |\vec{v}| - |\vec{u}|$ kimi tapılır. 200 m – 100 m = 100 m (qərbə)

Kollinear vektorların toplanmasına aid ümumiləşdirmələr aparaq.

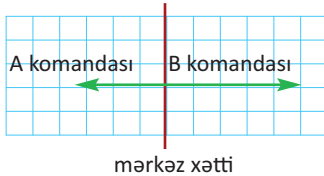
\vec{u} və \vec{v} vektorları əksistiqamətli vektorlardırsa, əvəzləyici \vec{r} vektoru:

- $|\vec{u}| > |\vec{v}|$ olarsa, $|\vec{r}| = |\vec{u}| - |\vec{v}|$, \vec{r} vektoru \vec{u} vektoru ilə eyni istiqamətdə olur.
- $|\vec{u}| < |\vec{v}|$ olarsa, $|\vec{r}| = |\vec{v}| - |\vec{u}|$, \vec{r} vektoru \vec{v} vektoru ilə eyni istiqamətdə olur.
- $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ olarsa, $|\vec{r}| = 0$, yəni əks vektorların cəmi $\vec{0}$ vektoruna bərabərdir.

$\vec{u} - \vec{v}$ fərqi tapmaq üçün \vec{u} -nun üzərinə \vec{v} -yə əks olan vektoru əlavə etmək lazımdır. Yəni $\vec{u} - \vec{v}$ ifadəsi ilə $\vec{u} + (-\vec{v})$ ifadəsi ekvivalent ifadələrdir.

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Şəkildə təsvir edilmiş oyunda tətbiq edilən qüvvələr vektorlarla ifadə edilir. Vektorların istiqaməti ipi dartma istiqamətlərini göstərir. Şəkildə iki raundda ipə tətbiq edilmiş qüvvələr göstərilmişdir.

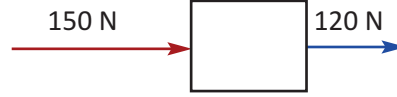
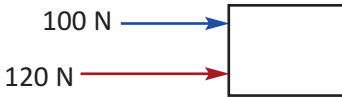


Vektorlara görə 1-ci və 2-ci raundda komandaların nəticələri haqqında fikirlərinizi söyləyin. Bu fikirləri vektorlar üzərində əməllərlə əsaslandırın.

- 2 > Əvəzləyici qüvvənin istiqamətini və modulunu müəyyən edin.

a) Şkafın yerini dəyişmək üçün iki nəfərdən biri 100 N, digəri isə 120 N qüvvə tətbiq etməklə eyni istiqamətdə itələyir.

b) Şkafın yerini dəyişmək üçün iki nəfərdən biri 150 N qüvvə ilə irəli itələyir, digəri isə 120 N qüvvə ilə eyni istiqamətə dartır.

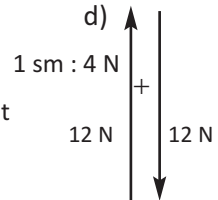


- 3 > Vektorların cəmini və fərqi göstərən əvəzləyici vektorları çəkin.

a) $\xrightarrow{2 \text{ km}} + \xrightarrow{2 \text{ km}} \quad 1 \text{ sm} : 1 \text{ km}$

b) $\xrightarrow{40 \text{ km/saat}} + \xleftarrow{60 \text{ km/saat}} \quad 1 \text{ sm} : 20 \text{ km/saat}$

c) $\xrightarrow{20 \text{ N}} - \xleftarrow{15 \text{ N}} \quad 1 \text{ sm} : 5 \text{ N}$





Rene Dekart

XVII əsrdə yaşamış riyaziyyatçı alimlər Rene Dekart və Pyer Ferma cəbr və həndəsəni bir-birilə əlaqələndirərək riyaziyyatda yeni bir elmi sahə - analitik həndəsəni yaratmışlar. Analitik həndəsə həndəsə məsələlərinin həllində cəbri qaydaların tətbiqini əhatə edir. Vektorlar üzərində əməllərin cəbri qaydada yerinə yetirilməsi imkanları vektorlara aid məsələlərin həllini asanlaşdırdı.



Pier Ferma

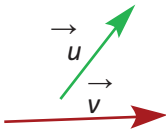
✓ Kollinear olmayan vektorların toplanması və çıxılması

Kollinear olmayan vektorları toplamaq üçün müxtəlif qaydalar mövcuddur. İki qrafik qaydanı nəzərdən keçirək: 1. Üçbucaq qaydası. 2. Paraleloqram qaydası. Qrafik qaydada vektorları toplayarkən verilən vektorlar və onların cəmini göstərən əvəzləyici vektor müəyyən miqyas seçilməklə xətkəş (modulu) və transportirin (meyil bucağı) köməyiylə qurulur.

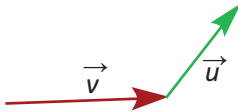
Üçbucaq qaydası.

1. Verilir:

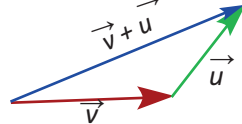
\vec{u} və \vec{v} vektorları



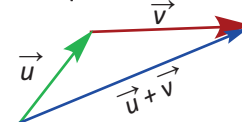
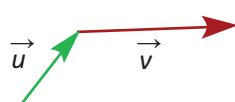
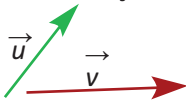
2. \vec{u} vektorunu elə yerləşdirək ki, \vec{v} vektorunun son nöqtəsi ilə \vec{u} vektorunun başlanğıc nöqtəsi üst-üstə düşsün.



3. \vec{v} vektorunun başlanğıc nöqtəsi ilə \vec{u} vektorunun son nöqtəsini birləşdirən istiqamətlənmiş parça $\vec{v} + \vec{u}$ vektorunu ifadə edən əvəzləyici vektordur.



\vec{v} vektorunu sürüşdürməklə də $\vec{u} + \vec{v}$ vektorunu qurmaq olar.



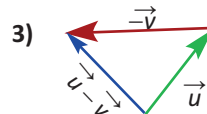
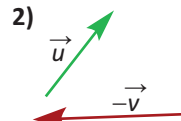
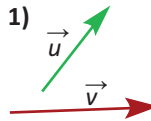
Vektorları istənilən ardıcılıqla toplamaq olar. Ədədlər üçün toplama əməlinin yerdəyişmə xassəsi vektorları toplamaq üçün də doğrudur. Bu qayda ilə üç və daha çox vektoru da toplamaq olar (bu hal çoxbucaqlı qaydası adlanır).

Vektorların çıxılması. Qrafik qayda ilə $\vec{u} - \vec{v}$ vektorunu müəyyən edək.

1. v vektoruna əks vektoru ($-\vec{v}$) çəkək;

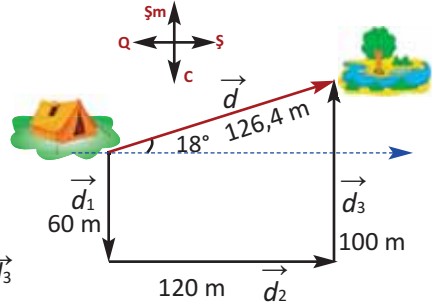
2. $-\vec{v}$ -ni elə sürüşdürək ki, $-\vec{v}$ vektorunun başlanğıc nöqtəsi ilə \vec{u} vektorunun son nöqtəsi üst-üstə düşsün.

3. \vec{u} vektorunun başlanğıc nöqtəsi ilə $-\vec{v}$ vektorunun son nöqtəsini birləşdirən istiqamətlənmiş parça $\vec{u} - \vec{v}$ vektorudur.



Nümunə. Camal düşərgədə qurduqları çadırdan 60 m cənuba, 120 m şərqə, daha sonra 100 m şimala getdi və gölə çatdı. Çadırdan gölə qədər ən yaxın məsafə neçə metrdir?

Həlli: Miqyas qəbul edək: 1 sm : 40 m
Camalın hərəkətini uyğun vektorlarla miqyasa görə ardıcıl olaraq göstərək. Camalın hərəkətini göstərən 1-ci vektorun başlanğıc nöqtəsi ilə 3-cü vektorun son nöqtəsini birləşdirək.



Alınan \vec{d} əvəzləyici vektoru \vec{d}_1 , \vec{d}_2 və \vec{d}_3 vektorlarının cəmini ifadə edir.

Xətkeşlə ölçməklə və miqyası nəzərə almaqla bu vektorun uzunluğunun 126,4 m, meyil bucağının isə transportirlə ölçmələr aparmaqla 18° olduğunu müəyyən etmək olar. **Cavab:** Göl çadırdan təxminən 126,4 m məsafədədir.

Məsələləri transportir və xətkəşdən istifadə etməklə ölçmə və qurma yolu ilə həll edin.

- 4 > Şəkilə verilmiş vektorları dəftərinizə köçürün. $\vec{u} + \vec{v}$ və $\vec{u} - \vec{v}$ vektorlarını qurun.



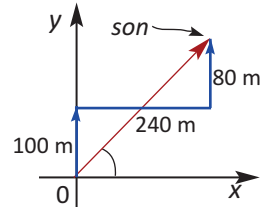
- 5 > Uzunluqları və meyil bucaqları verilmiş yerdəyişmə vektorlarını müəyyən miqyasla çəkin və üçbucaq qaydası ilə toplayın:

- a) 5 km, meyil bucağı 60° və 3 km, meyil bucağı 45° ;
b) 8 km, meyil bucağı 180° və 3 km, meyil bucağı 30° ;

- 6 > Atlı 400 m qərbə, sonra isə 300 m şimala doğru hərəkət etdi.

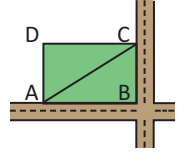
- a) Atlının yerdəyişməsini göstərən vektoru 1sm : 100 m miqyası ilə təsvir edin, modulunu və meyil bucağını hesablayın.
b) Miqyasa görə atlının yerdəyişməsini tapın.

- 7 > Təsəvvür edin ki, siz 100 m şimal, 240 m şərqə və yenidən 80 m şimala hərəkət etmişiniz. Siz hərəkətə başladığınız nöqtədən neçə metr uzaqlaşmışınız? Yerdəyişmə vektorunun meyil bucağını tapın. Cavabı ondabirlərə qədər dəqiqliklə yazın.



- 8 > Gəmi sahilədən cənuba doğru 15 km hərəkət etdikdən sonra istiqamətini şərqə doğru dəyişdi və daha 40 km getdi. Daha sonra isə şimal istiqamətində 25 km qət etdi və dəniz fənərinə çatdı. Gəminin yerdəyişmə vektorunu qəbul etdiyiniz miqyasla təsvir edin, modulunu və meyil bucağını tapın.

Araşdırma. Təssəvür edin ki, siz parkda A nöqtəsindən C nöqtəsinə getməlisiniz. Tutaq ki, siz bura gəlmək üçün üç müxtəlif yol seçmişiniz: 1) A nöqtəsindən başlamaqla B nöqtəsinə və oradan C nöqtəsinə gəlməklə; 2) A nöqtəsindən D nöqtəsinə, oradan da C nöqtəsinə gəlməklə; 3) A nöqtəsindən birbaşa C nöqtəsinə gəlməklə. Hər bir yerdəyişməyə uyğun vektorları yazın.

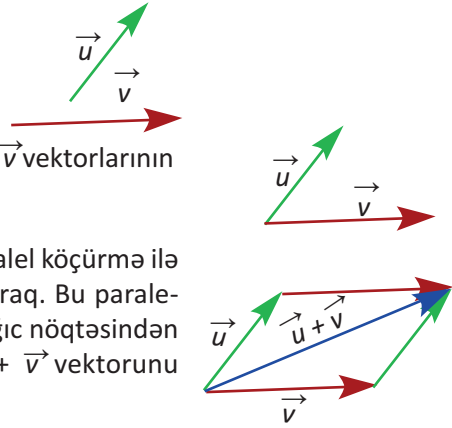


✓ Paraleloqram qaydası

1. Verilir: \vec{u} və \vec{v} vektorları

2. \vec{v} vektorunu elə sürüşdürək ki, \vec{u} və \vec{v} vektorlarının başlanğıc nöqtələri üst-üstə düşsün.

3. \vec{u} və \vec{v} vektorlarını uyğun olaraq paralel köçürmə ilə tərəfləri \vec{u} və \vec{v} olan paraleloqram quraq. Bu paraleloqramın \vec{u} və \vec{v} vektorlarının başlanğıc nöqtəsindən çıxan diaqonalı onların cəmini, $\vec{u} + \vec{v}$ vektorunu göstərir.



Əvəzləyici vektoru paraleloqram qaydası ilə transportir və xətkəşdən istifadə etməklə ölçmə və qurmalar aparmaqla tapın.

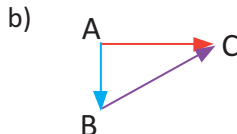
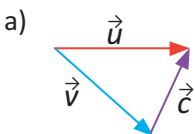
9 > Uzunluqları və meyil bucaqları verilmiş yerdəyişmə vektorlarını müəyyən miqyasla çəkin və paraleloqram qaydası ilə toplayın:

- a) 1,5 km, meyil bucağı 180° və 3 km, meyil bucağı 45° ;
- b) 2,5 km, meyil bucağı 80° və 5 km, meyil bucağı 15° ;
- c) 4 km, meyil bucağı 120° və 2 km, meyil bucağı 30° .

10 > a) Təyyarə 850 km/saat sürətlə şimala doğru uçur. 50 km/saat sürətlə əsən qərb küləyinin təsiri altında təyyarənin sürəti və istiqaməti necə dəyişəcək? Çəkin, göstərin.

b) Sürəti 10 km/saat olan motorlu qayıq çayın axın istiqamətinə perpendikulyar olmaqla hərəkətə başlayır. Çayın axın sürəti 2 km/saat olarsa, qayığın yekun sürətinin modulunu və meyil bucağını tapın.

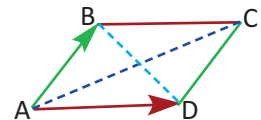
11 > 1) Şəkində verilmiş hər bir vektoru digər iki vektorun cəmi və ya fərqi kimi ifadə edin.



2) ABCD paraleloqramdır. Hər bir ifadəyə uyğun vektoru yazın.

a) $\vec{AB} + \vec{AD}$

b) $\vec{AB} - \vec{AD}$



✓ **Yerdəyişmə və qruplaşdırma xassəsi**

İstənilən \vec{u} , \vec{v} və \vec{z} vektorları üçün toplanmanın aşağıdakı xassələri doğrudur:

Yerdəyişmə xassəsi: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Qruplaşdırma xassəsi: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{z} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{z})$

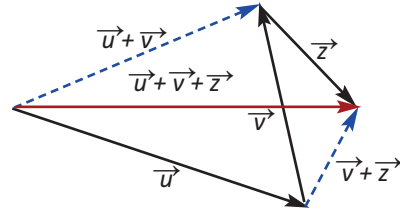
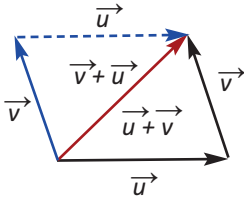
İdentiklik xassəsi: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

Əks vektorların cəmi: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

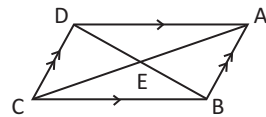
1. **Nümunə.** $(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = (\vec{v} + \vec{u}) - \vec{u} =$ *yerdəyişmə xassəsi*
 $= (\vec{v} + \vec{u}) + (-\vec{u}) =$ *əksi ilə toplanır*
 $= \vec{v} + (\vec{u} + (-\vec{u})) =$ *qruplaşdırma xassəsi*
 $= \vec{v} + \vec{0} =$ *əks vektorların cəmi ilə toplanır*
 $= \vec{v}$ *identiklik xassəsi*

12 > Aşağıdakı şəkilləri ölçmələrlə dəftərinizə köçürün.

- a) Vektorları toplamada yerdəyişmə və qruplaşdırma xassələrini tətbiq edin.
 b) Hər bir xassə üçün daha bir nümunə də siz çəkin.



13 > ABCD paraleloqram, E isə onun diaqonallarının kəsişmə nöqtəsidir. Hər bir ifadəyə uyğun vektorun adını yazın.



a) $\vec{AE} + \vec{EB}$

b) $\vec{DE} + \vec{EB}$

c) $\vec{BC} + \vec{BA}$

d) $\vec{AB} - \vec{DB}$

e) $\vec{AE} - \vec{EB} - \vec{BC}$

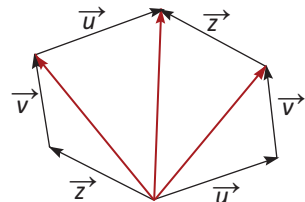
f) $\vec{BA} + \vec{AE} + \vec{ED} + \vec{DC}$

g) $\vec{CE} + \vec{DC}$

h) $\vec{AD} + \vec{DB}$

i) $\vec{AB} - \vec{CB} - \vec{DC}$

14 > Qırmızı rənglə çəkilmiş vektorları \vec{u} , \vec{v} , \vec{z} vektorlarının cəmi ilə müxtəlif şəkildə ifadə etməklə vektorlar üzərində toplama əməlinin xassələrini göstərin.



Praktik məşğələ. 1. $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ nöqtələrinin koordinatlarına görə \vec{AB} , \vec{BC} və \vec{AC} vektorlarını komponentləri ilə yazın.

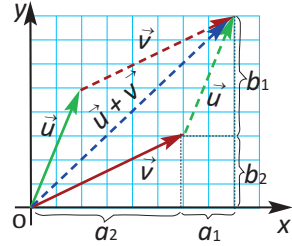
2. Vektorların toplanmasının üçbucaq qaydasına görə $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ bərabərliyini yazıb, \vec{AC} vektorunun komponentlərini \vec{AB} və \vec{BC} vektorlarının uyğun komponentlərinin cəmi ilə müqayisə edin.



Vektorların komponentlərindən istifadə etməklə toplanması

Dekart koordinat müstəvisi üzərində komponentləri ilə verilmiş vektorların toplanması qaydası.

$\vec{u} = \langle a_1; b_1 \rangle$ və $\vec{v} = \langle a_2; b_2 \rangle$ vektorlarının cəmi $\vec{u} + \vec{v} = \langle a_1 + a_2; b_1 + b_2 \rangle$ vektorudur.

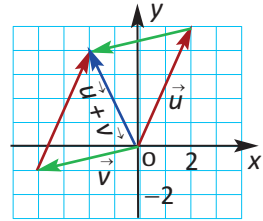


1.

Nümunə. $\vec{u} = \langle 2; 5 \rangle$ və $\vec{v} = \langle -4; -1 \rangle$ olarsa, $\vec{u} + \vec{v}$ vektorunu komponentləri ilə ifadə edin.

Həlli. $\vec{u} + \vec{v}$ vektorunun komponentlərini tapmaq üçün \vec{u} və \vec{v} vektorlarının uyğun komponentlərini - üfüqi (absis oxu üzrə) və şaquli (ordinat oxu üzrə) komponentlərini toplamaq lazımdır:

$$\vec{u} + \vec{v} = \langle 2 + (-4); 5 + (-1) \rangle = \langle -2; 4 \rangle$$



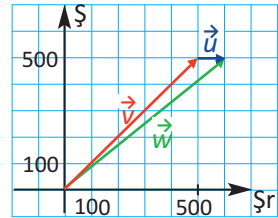
2.

Nümunə. Təyyarə meyil bucağı 45° olmaqla şimal-şərq istiqamətində saatda təxminən 707 mil sürətlə uçur. Saatda 40 mil sürətlə qərb küləyi əsir. Küləyin təsiri ilə təyyarənin sürəti necə dəyişəcək? Bu sürəti ifadə edən vektoru komponentləri ilə göstərin.

Həlli: $707 \cdot \cos 45^\circ = 707 \cdot \sin 45^\circ \approx 500$ olduğundan təyyarənin sürətini $\vec{v} = \langle 500; 500 \rangle$ vektoru ilə ifadə etmək olar. Küləyin sürətini $\vec{u} = \langle 40; 0 \rangle$ vektoru ifadə edir.

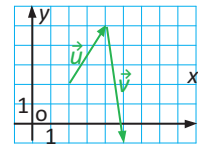
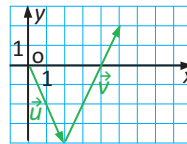
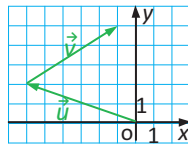
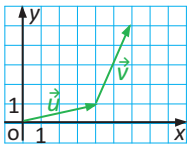
Təyyarənin \vec{w} yekun sürəti üçün alırıq: $\vec{w} = \vec{v} + \vec{u} = \langle 500 + 40; 500 + 0 \rangle = \langle 540; 500 \rangle$

Təyyarənin yekun sürətinin modulu: $|\vec{w}| = \sqrt{540^2 + 500^2} \approx 736$ mil/saat



Öyrənmə tapşırıqları

15 > \vec{u} və \vec{v} vektorlarının təsvirini dəftərinizə köçürün. Bu vektorların hər birini komponentləri ilə yazın. $\vec{u} + \vec{v}$ cəmini ifadə edən vektoru komponentləri ilə yazın.



16> Verilmiş vektorların cəmini komponentləri ilə yazın, modulunu və meyil bucağını tapın.

a) $\vec{u} = \langle 5; 3 \rangle$ və $\vec{v} = \langle -1; 4 \rangle$

b) $\vec{u} = \langle 3; -4 \rangle$ və $\vec{v} = \langle 5; -2 \rangle$

c) $\vec{u} = \langle 0; 12 \rangle$ və $\vec{v} = \langle -5; 0 \rangle$

d) $\vec{u} = \langle -6; 9 \rangle$ və $\vec{v} = \langle -2; 6 \rangle$

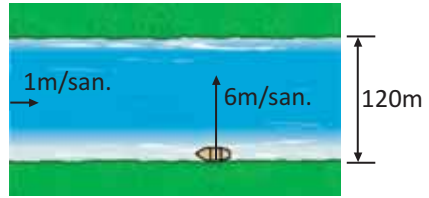
17> Təyyarə uçuşu saatda 650 km/saat sürətlə şimal istiqamətində yerinə yetirir. Bir qədər sonra saatda 80 km sürətlə, qərb küləyi əsməyə başladı. Küləyin təsiri ilə təyyarənin sürəti necə dəyişəcək? Təyyarənin yekun sürətini komponentlərlə yazın, modulunu və meyil bucağını tapın.

18> Qayıq eni 120 m olan çayda axına perpendikulyar istiqamətdə hərəkət edir. Qayığın durğun sudakı sürəti 6 m/san, çayın axma sürəti 1 m/san-dir.

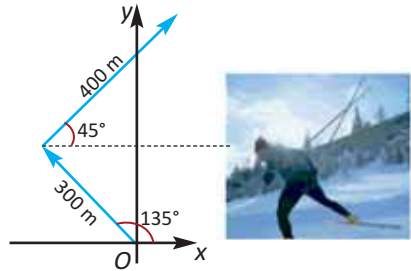
a) Qayıq çayın bir sahilindən digərinə keçmək üçün nə qədər vaxt sərf edər?

b) Çayın axını qayığı hərəkətə başladığı nöqtədən neçə metr aşağıya doğru hərəkət etdirəcək?

c) Qayıq sahilə nəzərən hansı bucaq altında hərəkət edəcək?



19> Xizəkçi əvvəlcə meyil bucağı 135° olmaqla 300 m, sonra isə meyil bucağı 45° olmaqla 400 m hərəkət etdi. Xizəkçinin yerdəyişmə vektorunun modulunu və meyil bucağını müəyyən edin.

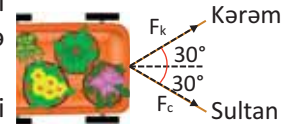


20> Kərəm və Sultan bağ arabasını şəkildə göstərilədiyi kimi arabanın hərəkət istiqaməti ilə 30° bucaq əmələ gətirən eyni qüvvə ilə dartırlar.

a) Onların tətbiq etdikləri qüvvələrin əvəzləyicisi 170 N olarsa, hər biri neçə nyuton qüvvə tətbiq etmişdir?

b) Hər birinin tətbiq etdiyi qüvvə 70 N olarsa, qüvvələrin əvəzləyicisi neçə nyuton olar?

c) Kərəm və Sultan bir-birinə daha çox yaxınlaşsalar, tətbiq edilən əvəzləyici qüvvə necə dəyişər?



8-4

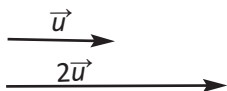
Vektorun ədədə vurulması

\vec{u} vektorunun k ədədinə ($k \in \mathbb{R}$) hasilini $k \cdot \vec{u}$ kimi işarə edilir və bu vektorun uzunluğu $|k| \cdot |\vec{u}|$ -ya bərabərdir.

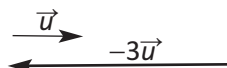
$k > 0$, olarsa $k\vec{u}$ vektoru \vec{u} vektoru ilə eyni istiqamətli olur.

$k < 0$, olarsa $k\vec{u}$ vektoru \vec{u} vektoru ilə əks istiqamətli olur.

1) Şəkildə \vec{u} vektorunun uzunluğunun 2 dəfə artırılması ilə alınan $2\vec{u}$ vektoru təsvir edilmişdir. Bu vektorlar eyni istiqamətlidir.



2) Şəkildə \vec{u} vektoru və $-3\vec{u}$ vektoru təsvir edilmişdir. Bu vektorlar əks istiqamətlidir.



Verilən vektorla onun (sıfırdan fərqli) ədədə hasilini ifadə edən vektor kollinearlıdır. $\vec{u} \neq \vec{0}$ və \vec{v} vektorları kollinearlırsa, onda elə yeganə k ədədi var ki, $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$ olur.

Vektorun ədədə vurulmasının xassələri.

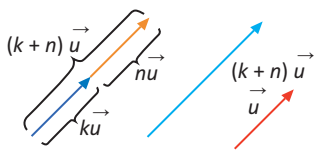
1. Qruplaşdırma qanunu.

k və n istənilən ədəd ($k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$) olduqda $(kn) \cdot \vec{u} = k(n \cdot \vec{u})$

2. Paylama qanunu.

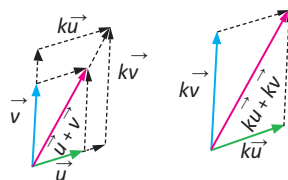
k və n istənilən ədəd ($k, n \in \mathbb{R}$) olduqda

$$(k + n) \vec{u} = k\vec{u} + n\vec{u}$$



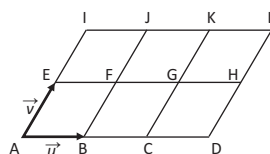
k istənilən ədəd ($k \in \mathbb{R}$) olduqda

$$(\vec{u} + \vec{v}) k = k\vec{u} + k\vec{v}$$



Öyrənmə tapşırıqları

1 > Şəkildəki fiqur konqruent paraleloqramlardan təşkil edilmişdir. \vec{u} və \vec{v} vektorları paraleloqramın tərəfləri üzərindədir. Tələb edilən vektorları bu vektorların köməyilə ifadə edin.



- a) \vec{AC} b) \vec{KC} c) $\vec{AD} + \vec{DL}$ d) $\vec{LI} + \vec{IE}$

2 > Sürət vektoru qiyməti $v = 400$ km/saat olmaqla, meyil bucağı 30° -dir. Bu şərtə görə aşağıdakı vektorları müəyyən miqyasla dəftərinizdə çəkin.

- a) $2\vec{v}$ b) $-2\vec{v}$ c) $0,5\vec{v}$ d) $-3\vec{v}$

- 3 > \vec{u} vektorunu xətkəş və transportirin köməyiylə dəftərinizdə çəkin, $(k + m)\vec{u} = k\vec{u} + m\vec{u}$ bərabərliyinin doğru olduğunu k -nin və m -in verilən qiymətlərinə görə dəftərinizdə çəkməklə həndəsi olaraq göstərin. \vec{u}

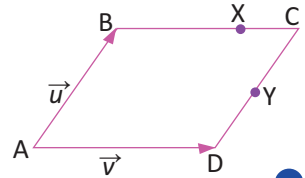
a) $k = 2$ və $m = 2$ b) $k = -3$ və $m = 2$ c) $k = -2$ və $m = -1$

- 4 > Aşağıda verilən məlumatlara görə \vec{u} və \vec{v} vektorları haqqında hansı fikirləri söyləmək olar?

a) $2\vec{u} = 4\vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v} = 0$ c) $4(\vec{u} + \vec{v}) - 3(\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

- 5 > ABCD paraleloqramında X nöqtəsi BC tərəfi üzərində elə yerləşmişdir ki, $BX = 3 \cdot XC$, Y nöqtəsi isə CD tərəfini yarıya bölür. $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AD} = \vec{v}$ olduqda tələb olunan vektorları \vec{u} və \vec{v} ilə ifadə edin.

- 1) \vec{BD} 2) \vec{AX} 3) \vec{BY} 4) \vec{DY}
5) \vec{AC} 6) \vec{AY} 7) \vec{DX} 8) \vec{XY}



Tətbiq tapşırıqları

- 6 > Nyuton qanununa görə qravitasiya qüvvəsi \vec{F}_g (nyutonla) cismin kütləsi (kiloqramla) ilə qravitasiya təcilinin (m/san^2 ilə) hasilinə bərabərdir: $\vec{F}_g = m \cdot \vec{g}$. Bu qüvvəyə cismin çəkisi deyildir və $\vec{P} = m\vec{g}$ kimi də yazılır. Yerdə qravitasiya təcili $9,8 \text{ m}/\text{san}^2$, Ayda isə $1,6 \text{ m}/\text{san}^2$ -dir. Kütləsi 60 kq olan şəxsin Yerdə və Ayda çəkisini tapın.



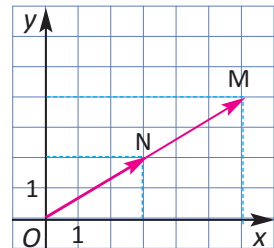
- 7 > **Açıq tipli tapşırıq.** Koordinat müstəvisi üzərində koordinat başlanğıcından \vec{u} vektoru ayırın və son nöqtəsinin koordinatlarını qeyd edin. Hər hansı k ədədi seçin və onun \vec{u} vektoru ilə hasilindən alınan $k\vec{u}$ vektorunu çəkin. Bu vektorun son nöqtəsinin koordinatlarını yazın. Tapşırığı eyni k ədədi və fərqli \vec{v} , \vec{z} , \vec{w} vektorları üçün də yerinə yetirin.

- 8 > Şəklə görə tapşırıqları yerinə yetirin.

1) \vec{ON} vektorunu komponentləri ilə yazın və uzunluğunu hesablayın.

2) \vec{OM} vektorunu komponentləri ilə yazın və uzunluğunu hesablayın.

3) \vec{ON} və \vec{OM} vektorlarının uzunluqlarını və uyğun komponentlərini müqayisə edin.

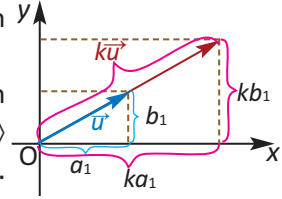


8-5

Komponentləri ilə verilmiş vektorlar üzərində əməllər

$\vec{u} = \langle a_1; b_1 \rangle$ vektorunun k ədədinə hasili, $k\vec{u}$ vektorunun y komponentləri ilə yazılışı $k\vec{u} = \langle ka_1; kb_1 \rangle$ olur.

Xüsusi halda $k = -1$ olduqda $\vec{v} = \langle a_2; b_2 \rangle$ vektoru üçün $-\vec{v} = \langle -a_2; -b_2 \rangle$ olduğundan $\vec{u} = \langle a_1; b_1 \rangle$ və $\vec{v} = \langle a_2; b_2 \rangle$ vektorlarının fərqi $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \langle a_1 - a_2; b_1 - b_2 \rangle$ olar.



1. Nümunə. $\vec{u} = \langle 3; -2 \rangle$ və $\vec{v} = \langle -1; 4 \rangle$ vektorları verilmişdir.

a) $3\vec{u}$; b) $2\vec{u} + 3\vec{v}$; c) $\vec{u} - \vec{v}$ vektorlarının komponentləri ilə yazın.

Həlli. a) $3\vec{u} = 3 \cdot \langle 3; -2 \rangle = \langle 9; -6 \rangle$

b) $2\vec{u} + 3\vec{v} = 2 \cdot \langle 3; -2 \rangle + 3 \cdot \langle -1; 4 \rangle = \langle 6; -4 \rangle + \langle -3; 12 \rangle = \langle 6 + (-3); -4 + 12 \rangle = \langle 3; 8 \rangle$

c) $\vec{u} - \vec{v} = \langle 3; -2 \rangle - \langle -1; 4 \rangle = \langle 3 - (-1); -2 - 4 \rangle = \langle 4; -6 \rangle$

\vec{u} və $k\vec{u}$ vektorları kollinear olduğundan alırıq ki, kollinear vektorların uyğun koordinatları mütənasibdir. Tərsinə, \vec{u} və \vec{v} vektorlarının uyğun koordinatları mütənasibdirsə, onda bu vektorlar kollinearlıdır. $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ olduqda $\vec{u} \langle a_1; b_1 \rangle$ və $\vec{v} \langle a_2; b_2 \rangle$ vektorlarının kollinearlıq şərti $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$ kimi yazılır.

2. Nümunə. m -in hansı qiymətində $\vec{u} \langle -1; 4 \rangle$ və $\vec{v} \langle 3; m \rangle$ vektorları kollinearlıdır?

Həlli. Vektorların kollinearlıq şərtinə görə tapırıq: $\frac{3}{-1} = \frac{m}{4} \Rightarrow m = -12$

1 > $\vec{u} = \langle 2; 3 \rangle$ və $\vec{v} = \langle -4; 5 \rangle$ olduqda aşağıdakı vektorları komponentləri ilə yazın.

a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$

b) $\vec{u} + 2\vec{v}$

c) $3\vec{u} - 2\vec{v}$

d) $4\vec{u} - 3\vec{v}$

2 > a) $\vec{u} = \langle -6; 2 \rangle$ və $\vec{v} = \langle 2; -4 \rangle$ olarsa, $2\vec{u} + 3\vec{v}$ vektorunun uzunluğunu tapın.

b) $\vec{z} = \langle 2; 3 \rangle$ və $\vec{w} = \langle 1; -3 \rangle$ olarsa, $3\vec{z} - \vec{w}$ vektorunun uzunluğunu tapın.

3 > $\vec{f} = \langle 2; -3 \rangle$ vektoru ilə kollinear olan vektorları seçin.

a) $\vec{u} = \langle 4; 6 \rangle$

b) $\vec{v} = \langle 1; -1,5 \rangle$

c) $\vec{z} = \langle -4; 6 \rangle$

d) $\vec{w} = \langle -2; -3 \rangle$

4 > k -nin hansı qiymətlərində verilmiş vektorlar kollinearlıdır?

a) $\vec{u} = \langle 2; -3 \rangle$ və $\vec{v} = \langle k; 9 \rangle$

b) $\vec{u} = \langle 3; k \rangle$ və $\vec{v} = \langle k; 12 \rangle$

5 > A $(-3; 1)$ və B $(6; 7)$ nöqtələri verilir. AB parçasını AC : CB = 1 : 2 nisbətində bölən C nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

Göstəriş: C $(x; y)$ olmaqla \vec{AC} və \vec{AB} vektorlarını komponentləri ilə yazın və $\vec{AB} = 3 \cdot \vec{AC}$ bərabərliyindən istifadə edin.

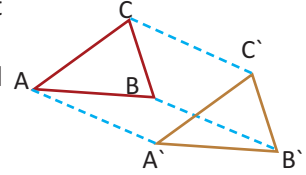
6 > A $(1; 1)$, B $(1; 7)$, C $(7; 7)$ nöqtələri verilir. $\triangle ABC$ -nin medianlarının kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

8-6

Paralel köçürmə

Paralel köçürmədə nöqtələr paralel (yaxud üst-üstə düşən) düz xətlər üzrə eyni məsafə qədər yerini dəyişir və fiqur özünə konqruent fiqura çevrilir.

Şəkildəki $A'B'C'$ üçbucağı ABC üçbucağının paralel köçürülməsi ilə alınmışdır. Burada $AA' = BB' = CC'$,
 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$



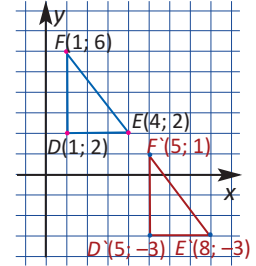
Koordinat müstəvisində verilmiş DEF üçbucağının hər bir nöqtəsi 4 vahid sağa, 5 vahid aşağı köçürülmüşdür:

$$D(1; 2) \rightarrow D'(5; -3)$$

$$E(4; 2) \rightarrow E'(8; -3)$$

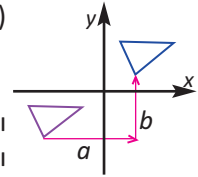
$$F(1; 6) \rightarrow F'(5; 1)$$

İki nöqtə arasındakı məsafə düsturunu tətbiq etməklə alırıq:
 $DE = 3$, $D'E' = 3$; $DF = 4$, $D'F' = 4$; $FE = 5$, $F'E' = 5$. Üçbucaqların konqruentliyinin TTT əlamətinə görə $\triangle DEF \cong \triangle D'E'F'$ olur.



Fiqurun paralel köçürülməsində ixtiyari $A(x; y)$ nöqtəsi $A'(x'; y')$ nöqtəsinə çevrilir və bu nöqtələrin koordinatları arasında $x' = x + a$, $y' = y + b$ bərabərlikləri doğrudur.

Koordinat müstəvisi üzərində paralel köçürmədə koordinat oxları boyu sağa və yuxarı yerdəyişmə müsbət, sola və aşağı yerdəyişmə isə mənfi a və b ədədləri ilə təyin olunur.



Paralel köçürmədə iki nöqtə arasındakı məsafə dəyişmir.

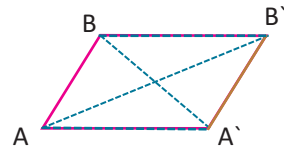
Doğrudan da, paralel köçürmədə ixtiyari iki $A(x_1; y_1)$ və $B(x_2; y_2)$ nöqtələri uyğun olaraq $A'(x_1 + a; y_1 + b)$ və $B'(x_2 + a; y_2 + b)$ nöqtələrinə çevrilirsə, alırıq:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}; \quad A'B' = \sqrt{((x_2 + a) - (x_1 + a))^2 + ((y_2 + b) - (y_1 + b))^2}$$

Buradan $AB = A'B'$. Deməli, paralel köçürmədə məsafə saxlanılır.

AB' parçasının orta nöqtəsinin koordinatları

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + a}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + b}{2} \quad \text{kimi tapılır.}$$



$A'B$ parçasının orta nöqtəsinin koordinatları da bunun kimi olur (özünüz yoxlayın). Deməli, $ABB'A'$ dördbucaqlısının diaqonalları kəsişir və kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünür. Yəni, bu dördbucaqlı paraleloqramdır. Paraleloqramın isə qarşı tərəfləri paraleldir.

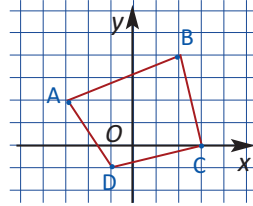
Paralel köçürmədə düz xətt paralel düz xəttə (və ya özünə) çevrilir.

Bir fiqurun digərinə çevrilməsində nöqtələr arasındakı məsafə saxlanarsa, bu çevrilməyə hərəkət deyilir. Paralel köçürmə hərəkətdir.

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Paralel köçürmələri $(x; y) \rightarrow (x + a; y + b)$ şəklində yazın.
 a) 4 vahid sola, 2 vahid aşağı; b) 2 vahid sağa, 2 vahid yuxarı;
 c) 3 vahid sağa, 5 vahid yuxarı; d) 3 vahid sola, 1 vahid yuxarı.
- 2 > Şəkildəki dördbucaqlının verilən paralel köçürməsini dəftərinizdə təsvir edin.

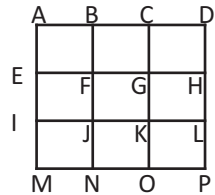
- a) $(x; y) \rightarrow (x - 1; y + 2)$
 b) $(x; y) \rightarrow (x + 3; y - 2)$
 c) $(x; y) \rightarrow (x - 3; y - 1)$
 d) $(x; y) \rightarrow (x + 1; y + 2)$



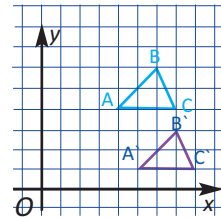
- 3 > Tərə nöqtələri $A(3; -4)$, $B(3; 2)$, $C(5; 1)$ olan $\triangle ABC$ $(x; y) \rightarrow (x - 2; y + 1)$ paralel köçürməsi ilə $\triangle A'B'C'$ -ə çevrilir. $\triangle A'B'C'$ -in tərəf nöqtələrinin koordinatlarını müəyyən edin və üçbucaqları çəkin.
- 4 > Tərəf nöqtələri $A(2; -1)$, $B(4; 2)$, $C(-3; 3)$ olan $\triangle ABC$ verilir. Paralel köçürmədə A nöqtəsi $A'(-1; -1)$ nöqtəsinə çevrilmişdir. Eyni paralel köçürmə ilə B nöqtəsi B' və C nöqtəsi C' -ə çevrilmişdir. B' və C' nöqtələrinin koordinatlarını tapın. Bu paralel köçürməni $(x; y) \rightarrow (x + a; y + b)$ şəklində yazın.

- 5 > Şəkildə 9 konqruent düzbucaqlı göstərilmişdir. Burada A nöqtəsi paralel köçürmə ilə G nöqtəsinə çevrilir. Eyni paralel köçürmə ilə aşağıdakı nöqtələrin hər birinin çevrildiyi nöqtəni müəyyən edin.

- a) F b) E c) B d) J e) I



- 6 > Tərəf nöqtələri $A(4; 4)$, $B(6; 6)$ və $C(7; 4)$ olan $\triangle ABC$ $(x; y) \rightarrow (x + 1; y - 3)$ paralel köçürməsi ilə $\triangle A'B'C'$ -ə çevrilmişdir. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ olduğunu isbat edin.



İsbat üçün plan:

- 1) Paralel köçürməni tətbiq etməklə A' , B' , C' nöqtələrinin koordinatlarını tapın.
- 2) İki nöqtə arasındakı məsafə düsturunu tətbiq edin.
- 3) Üçbucaqların konqruentlik əlamətlərindən istifadə edin.

7 > $(x; y) \rightarrow (x + a; y + b)$ paralel köçürməsində a və b -nin verilən qiymətlərinə görə fiqurun təpə nöqtələrinin yeni koordinatlarını yazın.

a) $a = 3, b = -2$

$F(-4; 1), A(-2; 5), S(-1; 4), N(-1; 2)$

b) $a = -4, b = -3$

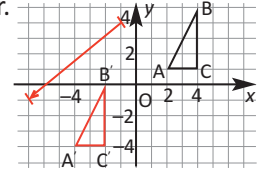
$D(-4; -3), E(-2; -2), F(-2; -4)$

✓ Paralel köçürmə və vektorlar

Hər bir paralel köçürmə bir vektor müəyyən edir. Yəni paralel köçürmədə fiqurun bütün nöqtələrinin yerdəyişməsi bir vektor üzrə icra edilir. Paralel köçürmənin vektorla ifadəsi yazılışları da sadələşdirir. Aşağıdakı şəkildə ΔABC -nin $\vec{u} \langle -6; -5 \rangle$ vektoru üzrə paralel köçürməsi təsvir edilmişdir.

Vektorun komponentlərindən istifadə etməklə fiqurun yerdəyişməsini müəyyən etmək olar. Vektorun komponentləri Ox oxu və Oy oxu boyunca nöqtənin yerdəyişməsini göstərir. ABC üçbucağının bütün nöqtələri $\vec{u} \langle -6; -5 \rangle$ vektorunun uzunluğu qədər yerini dəyişərək $\Delta A'B'C'$ -yə çevrilmişdir.

Vektorun uzunluğu: $|\vec{u}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2} \approx 7,8$ (vahid)



Paralel köçürmə vektoru: $\langle -6; -5 \rangle$

8 > Paralel köçürməyə uyğun vektoru komponentləri ilə yazın:

a) 5 vahid sağa 8 vahid yuxarı;

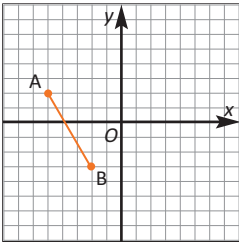
b) 2 vahid sola, 5 vahid yuxarı;

c) 3 vahid sola, 5 vahid aşağı;

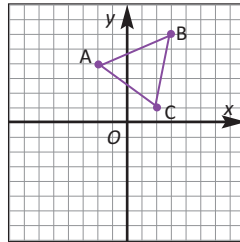
d) 4 vahid sola, 5 vahid aşağı.

9 > Verilən vektora görə fiquru paralel köçürün.

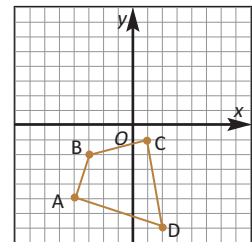
a) $\langle -2; 5 \rangle$



b) $\langle 1; -4 \rangle$



c) $\langle 3; 2 \rangle$



10 > A $(-3; -2)$ nöqtəsi $(x; y) \rightarrow (x + 5; y + 3)$ qaydası ilə paralel köçürülmüş, A' nöqtəsinə çevrilmişdir.

1) paralel köçürməni müəyyən edən vektoru yazın;

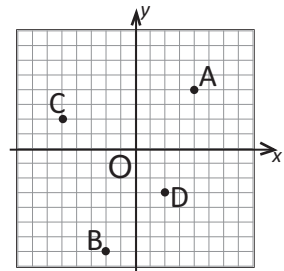
2) A' nöqtəsinin koordinatlarını yazın.

11 > Paralel köçürməni müəyyən edən vektoru yazın.

a) $B \rightarrow D$

b) $A \rightarrow C$

c) $A \rightarrow B$



8-7

Hərəkət və konqruyent fiqurlar

Tutaq ki, F fiqurunun hər bir nöqtəsinə müstəvinin müəyyən nöqtəsi qarşı qoyulub. Belə nöqtələr çoxluğu ümumi halda F -dən fərqli F' fiqurunu əmələ gətirir. Bu halda deyilir ki, F' fiquru F fiqurunun çevrilməsi ilə alınmışdır. Müstəvi də həndəsi fiqurdur. Müstəvinin özünə çevrilməsində onun ixtiyari nöqtəsi bu müstəvinin nöqtəsinə çevrilir, həm də bu çevrilmədə müstəvinin hər bir nöqtəsinə çevrilən nöqtə var. Fiqurların çevrilməsində nöqtələr arasındakı məsafə saxlanarsa, fiqurun bütün həndəsi xassələri saxlanılır və fiqur özünə konqruyent fiqura çevrilir. Belə çevrilmələrə hərəkət deyilir. İki ardıcıl hərəkətin nəticəsi də hərəkətdir.

Teorem. Hərəkətdə parça parçaya çevrilir.

Nəticə. Hərəkətdə üçbucağın hər bir tərəfi konqruyent parçaya çevrildiyindən üçbucaq konqruyent üçbucağa (TTT əlamətinə görə) çevrilir.

Hərəkətdə düz xətt düz xəttə, şüa şüaya, bucaq özünə bərabər bucağa çevrilir. Paralel köçürmə, mərkəzi simmetriya, ox simmetriyası, dönmə hərəkətdir, yəni bu çevrilmələrdə fiqur konqruyent fiqura çevrilir.

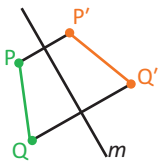
Bunu ox simmetriyası (əksetmə) üzərində araşdıraq.

Teorem. Düz xəttə nəzərən simmetriya çevrilməsi (əksetmə) hərəkətdir.

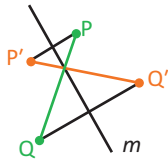
Şəkildə PQ parçasının m xəttinə görə əksetmə hərəkəti təsvir edilmişdir.

PQ parçası və m düz xəttinin vəziyyətinə görə 4 müxtəlif hala baxaq.

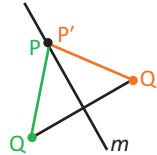
1. P və Q nöqtələri m düz xəttinin bir tərəfindədir.



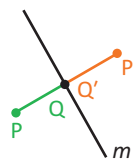
2. P və Q nöqtələri m düz xəttinin müxtəlif tərəfindədir.



3. Nöqtələrdən biri düz xəttin üzərindədir, PQ m düz xəttinə perpendikulyar deyil.



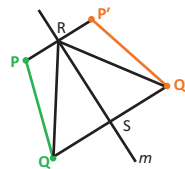
4. Q nöqtəsi m düz xəttinin üzərindədir $PQ \perp m$



1-ci hala görə teoremi isbat edək.

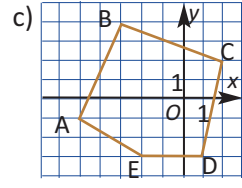
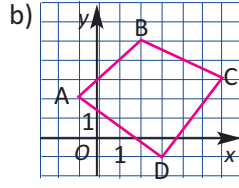
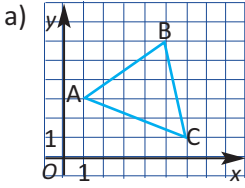
İsbatı (mətnlə). Bu halda P və Q nöqtələri m düz xəttindən eyni tərəfdədir.

Əksetmə hərəkətinin tərifinə görə RS parçası PP' və QQ' parçalarının orta perpendikulyarıdır. Onda $RQ \cong RQ'$ və $\angle QRS \cong \angle Q'RS$, $PR \cong RP'$, $\angle PRQ \cong \angle P'RQ'$ olduğundan üçbucaqların konqruentliyinin TBT əlamətinə görə alırıq: $\Delta RQP \cong \Delta RQ'P'$. Buradan $PQ \cong P'Q'$ olur. Teorem isbat olundu.

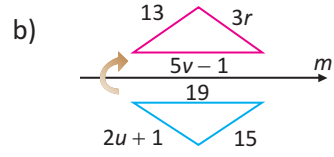
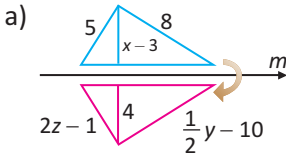


Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Çoxbucaqlının Ox və Oy oxlarına görə əksətməsini təsvir edin.



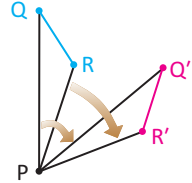
- 2 > Şəkilə m düz xəttinə nəzərən əksətmə hərəkəti təsvir edilmişdir. Dəyişənlərin qiymətlərini tapın.



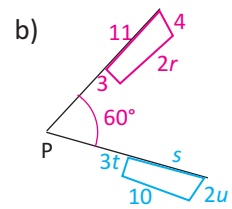
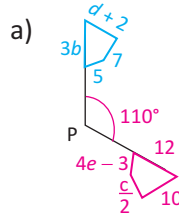
- 3 > Şəkil dönmə hərəkəti nəticəsində Q nöqtəsinin Q' , R nöqtəsinin R' nöqtəsinə çevrilməsini əks etdirir.

İsbat edin: $PQ \cong P'Q'$

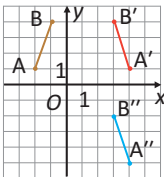
İsbat üçün plan: Dönmənin tərifinə görə $PQ \cong PQ'$, $PR = PR'$ və $\angle QPQ' \cong \angle RPR'$. Bucaqların toplanması və üçbucaqların kongruentlik əlamətindən istifadə etməklə isbatı tamamlayın.



- 4 > Şəkilə çoxbucaqlının P nöqtəsi ətrafında dönmə hərəkəti təsvir edilmişdir. Verilənlərə görə dəyişənləri tapın.

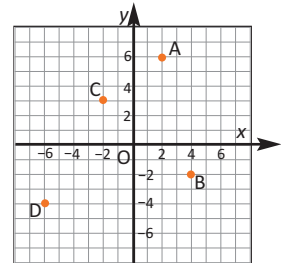


- 5 > AB parçası hansı iki ardıcıl hərəkət nəticəsində $A''B''$ parçasına çevrilmişdir?



- 6 > Verilən vektora görə paralel köçürmədə C nöqtəsinin çevrildiği nöqtəni göstərin.

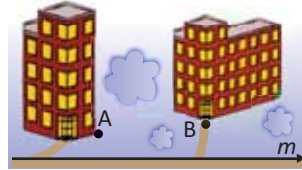
- a) $\langle 4; 3 \rangle$
b) $\langle 6; -5 \rangle$
c) $\langle -4; -7 \rangle$



- 7 > Təpə nöqtələri $A(-1; 0)$, $B(2; 3)$, $C(3; -3)$ olan üçbucaq $\vec{u} \langle 4; -2 \rangle$ vektoru ilə paralel köçürülmüşdür. Alınan üçbucağın təpələrinin koordinatlarını yazın.

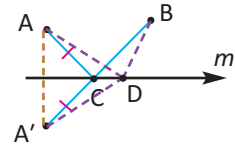
- 8 > Koordinat müstəvisində koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbinin hərəkətinə əks istiqamətdə dönmədə koordinatların dəyişmə qaydasını tamamlayın. Şəkil üzərində göstərin.
 a) $90^\circ (x; y) \rightarrow (\quad ; \quad)$ b) $180^\circ (x; y) \rightarrow (\quad ; \quad)$
- 9 > a) A (-3; 5) nöqtəsi Ox oxuna nəzərən əskətmə hərəkəti nəticəsində A' nöqtəsinə çevrilmişdir. A' nöqtəsinin koordinatlarını yazın.
 b) D (3; 4) nöqtəsi koordinat başlanğıcı ətrafında 180° dönmədə D' nöqtəsinə çevrilmişdir. D' nöqtəsinin koordinatlarını yazın.
 c) E (-3; 4) nöqtəsi $\vec{u} \langle 4; 5 \rangle$ vektoruna görə paralel köçürmə ilə E' nöqtəsinə çevrilmişdir. E' nöqtəsinin koordinatlarını yazın.

- 10 > Məsələni və həllini araşdırın. Dəftərinizdə yazın. Düzxətli m yolunun kənarında yerləşən A və B binalarına telefon çəkmək üçün paylayıcı cihazı elə C nöqtəsində yerləşdirmək lazımdır ki, $AC + BC$ minimum olsun və mümkün qədər az kabel işlənilsin. Paylayıcı cihazın yerləşdiyi C nöqtəsini necə müəyyən etmək olar?



Həlli. A nöqtəsinin m düz xəttinə nəzərən əskətməsi

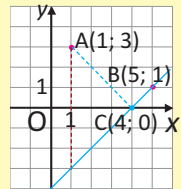
ilə çevrildiyi A' nöqtəsinə qeyd edək və A'B parçasını çəkək, m düz xətti ilə kəsişməsinə C nöqtəsi ilə qeyd edək. A'B parçası A' və B nöqtələri arasındakı ən qısa məsafədir və $AC = AC'$ olduğundan, C nöqtəsi bu məqsədlə seçilmiş ən əlverişli nöqtədir. Doğrudan da, m düz xəttinin başqa bir D nöqtəsi üçün üçbucaq bərabərsizliyindən alarıq:



$$AD + DB = A'D + DB > A'B = A'C + CB = AC + CB$$

- 11 > Absis oxu üzərində elə C nöqtəsi tapın ki, $AC + BC$ minimum olsun.
 a) A(1; 3), B(5; 1) b) A(2; -2), B(11; -4)
 c) A(-1; 4), B(6; 3) d) A(-4; 6), B(5; 3)

Nümunə. Ox oxu üzərində elə C nöqtəsi tapın ki, $AC + CB$ məsafəsi ən kiçik olsun. A(1; 3) nöqtəsinə Ox oxuna görə simmetrik köçürək: A'(1; -3). A'(1; -3) və B(5; 1) nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi $y = x - 4$ şəklindədir. Bu düz xəttin Ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsi C (4; 0) məsələnin şərtini ödəyir.

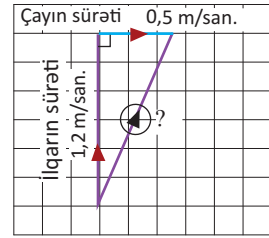




Ümumiləşdirici tapşırıqlar

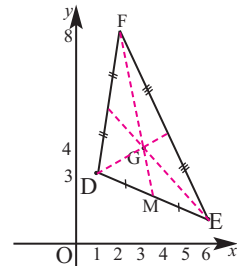
- 1 > P(8; -7), Q(-2; 5), R(8; -7) nöqtələri verilmişdir. $\vec{PQ} = \vec{RT}$ olduğunu bilərək T nöqtəsinin koordinatlarını tapın.
- 2 > $\vec{u} = \langle 6; 2 \rangle$, $\vec{v} = \langle 5; -1 \rangle$, $\vec{z} = \langle -2; -5 \rangle$ olduğuna görə verilmiş vektorları komponentləri ilə yazın və modulunu tapın.
- a) $\vec{u} + \vec{z}$ b) $3\vec{u} - 2\vec{v}$ c) $2\vec{z} + \vec{u}$
- 3 > Cismə şaquli və üfüqi istiqamətlərdə tətbiq edilmiş iki qüvvənin əvəzləyicisinin qiyməti 40 N, meyil bucağı 22° -dir. Cismə tətbiq edilmiş qüvvələrin qiymətlərini tapın.
- 4 > Modulu və meyil bucağı verilmiş vektorları komponentləri ilə yazın.
- 1) $|\vec{v}| = 12$; $\theta = 60^\circ$ 2) $|\vec{v}| = 16$; $\theta = 120^\circ$

- 5 > İlqar 1,2 m/san sürətlə sahilə perpendikulyar olmaqla çayda üzür. Çayın axın sürəti 0,5 m/san, eni isə 60 m olarsa, tapın:
- a) İlqarın çayı üzüb keçmə müddətini;
- b) İlqarın üzdüyü məsafəni.
- c) İlqar çayı sahilə nəzərən hansı bucaq altında üzüb keçəcək?



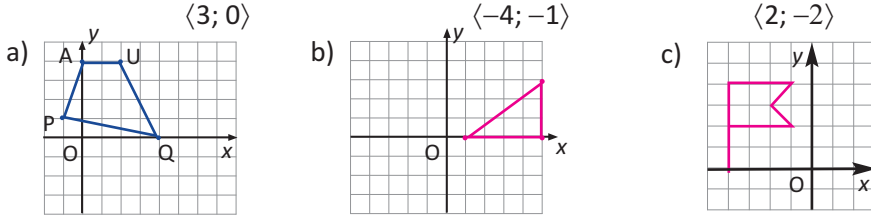
- 6 > $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$ təklifini sözlə yazın. Təklif doğrudur, yoxsa yanlış? Cavabınızı əsaslandırın.
- 7 > M (3; 5) və C (9; 8) nöqtələri verilir. K nöqtəsi MC parçasını $MK : KC = 2 : 1$ nisbətində bölür. MK parçasının uzunluğunu tapın.

- 8 > Medianların kəsişmə nöqtəsi üçbucağın ağırlıq mərkəzi adlanır. D(1; 3) və E(6; 1) nöqtələri $\triangle DEF$ -in təpə nöqtələri, G(3; 4) isə onun ağırlıq mərkəzini göstərir. F təpəsinin koordinatlarını müəyyən edin.

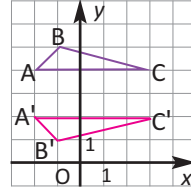


- 9 > P(6; -2) nöqtəsi P' nöqtəsinə paralel köçürülmüşdür. Hər bir hal üçün paralel köçürmə vektorunu müəyyən edin.
- a) P' (2; 0) b) P' (-3; 1) c) P' (8; -3)

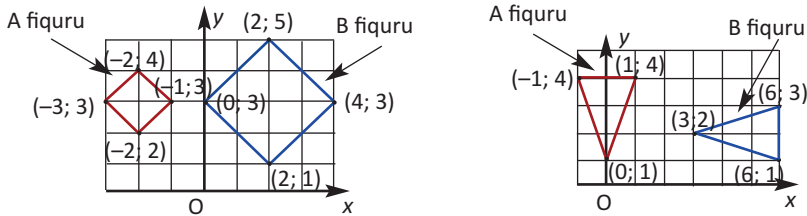
- 10) Şəkilləri dəftərinizdə çəkin. Hər birini verilən vektora görə paralel köçürün.



- 11) ΔABC əksətmə hərəkəti ilə $\Delta A'B'C'$ -ə çevrilmişdir. Əksətmə xəttini müəyyən edin və tənliyini yazın.



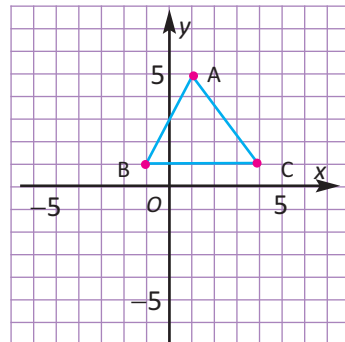
- 12) Elə iki ardıcıl çevrilmə təsvir edin ki, A fiqurundan B fiqurunu almaq mümkün olsun.



- 13) Təpə nöqtələri $A(2; -2)$, $B(2; 3)$, $C(-4; -2)$ olan üçbucaq Ox oxuna nəzərən əks edilmiş və koordinat başlanğıcı ətrafında saat əqrəbinin hərəkətinin əksi istiqamətində 90° dönmüş, daha sonra isə 3 vahid aşağı, 2 vahid sola köçürülmüşdür. Hər bir hərəkətə uyğun şəkli çəkin və təpə nöqtələrinin koordinatlarını yazın:
- a) əksətmədən sonra; b) dönmədən sonra; c) paralel köçürmədən sonra.

- 14) Hər bir çevrilmədən sonra A' , B' , C' təpə nöqtələrinin koordinatlarını yazın.

- 1) $\langle 3; 0 \rangle$ vektoruna görə paralel köçürmə;
- 2) $\langle -4; 2 \rangle$ vektoruna görə paralel köçürmə;
- 3) Oy oxuna nəzərən əksətmə;
- 4) $y = -2$ xəttinə nəzərən əksətmə;
- 5) B nöqtəsi ətrafında saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində 90° dönmə;



- 6) Koordinat başlanğıcı ətrafında 180° dönmə;
- 7) Mərkəzi A nöqtəsində və əmsalı $k = 2$ olan homotetiya;
- 8) Mərkəzi koordinat başlanğıcında və əmsalı $k = 2$ olan homotetiya.

9

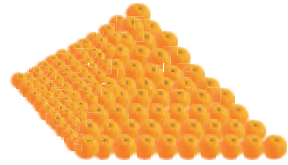
Ədədi ardıcılıqlar

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz




- ✓ Ədədi ardıcılıq və onun verilmə üsullarını
- ✓ Ədədi və həndəsi silsilənin n -ci həddinin düsturlarını
- ✓ Ədədi və həndəsi silsilənin hədlərinin xassələrini
- ✓ Ədədi və həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturlarını
- ✓ Ədədi və həndəsi silsiləyə aid məsələlər həll etməyi



Araşdırma. Satış dəzgahında portağallar 1-ci cərgədə 1, 2-ci cərgədə 4, 3-cü cərgədə 9 və s. portağal olmaqla, oturacağı kvadratşəkilli piramida əmələ gətirərək qat-qat yığılmışdır.



1) İlk 5 qatdakı portağalların sayını göstərən cədvəli tamamlayın.

n	1	2	3		
					
a_n	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$		

- 2) İstənilən qatdakı (n -ci cərgədəki) portağalların sayını (a_n) tapmaq üçün düstur yazın.
- 3) Bu düstura görə 4-cü, 7-ci, 10-cu qatdakı portağalların sayını tapın.
- 4) Portağalların sayının qatların nömrəsindən asılılığını göstərən qrafiki dəftərinizdə çəkin.

9-1

Ədədi ardıcılıq

Tərif. Natural ədədlərlə ardıcıl nömrələnmiş ədədlər çoxluğuna ədədi ardıcılıq, həmin ədədlərə isə ardıcılığın hədləri deyilir.

◆ Ardıcılığı əmələ gətirən ədədlərə uyğun olaraq ardıcılığın birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü və s. hədləri deyirlər. Ardıcılığın hədlərini adətən hərflərlə işarə edirlər, hərfin indeksi həddin sıra nömrəsini göstərir.

Məsələn, birinci hədd a_1 , ikinci hədd a_2 , n -ci hədd a_n və s.

$$\begin{array}{cccccc} 5, & 10, & 15, & 20, & 25, & \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots \end{array}$$

Ardıcılığın özünü belə işarə edəcəyik: (a_n) və ya (b_n) və s.

◆ Ardıcılıqlar sonlu və sonsuz ola bilər. Məsələn, ikirəqəmli ədədlər ardıcılığı sonlu, bütün natural ədədlər ardıcılığı isə sonsuz ardıcılıqdır.

◆ Ardıcılığı verməkdən ötrü onun istənilən nömrəli həddini tapmağa imkan verən üsulu göstərmək lazımdır. Ardıcılıq analitik üsulla - nömrəsinə görə istənilən həddini tapmağa imkan verən düsturla verilə bilər. Belə düstura ardıcılığın ***n*-ci həddinin düsturu** deyilir. Məsələn, 2, 4, 6, 8, ... cüt ədədlər ardıcılığının istənilən həddini $a_n = 2n$ düsturu ilə tapmaq olar.

Nümunə. Ardıcılıq $a_n = n^2 + 3n$ düsturu ilə verilmişdir. Bu ardıcılığın 1-ci, 5-ci və 10-cu hədlərini tapın.

Həlli: $n = 1$ olduqda $a_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$,
 $n = 5$ olduqda $a_5 = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40$,
 $n = 10$ olduqda $a_{10} = 10^2 + 3 \cdot 10 = 130$.

Öyrənmə tapşırıqları

1 > Hədlərin dəyişmə qanunauyğunluğunu müəyyən edib, ardıcılığın növbəti iki həddini yazın.

a) 1; 3; 5; 7; ...

b) 1; 10; 100; 1000; ...

c) -5; 10; -15; 20; ...

d) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{3}; \frac{4}{3}; \dots$

e) $\frac{1}{10}; \frac{2}{20}; \frac{3}{30}; \frac{4}{40}; \dots$

f) 1,9; 2,7; 3,5; 4,3; ...

2 > Verilən düstura görə ardıcılığın ilk beş həddini yazın.

$$a_n = n + 1$$

$$a_n = 3 - n$$

$$a_n = n^2 + 1$$

$$f_n = \frac{n-1}{n}$$

$$a_n = (n+1)^2$$

$$a_n = (n-1)^2$$

$$a_n = n(n-1)$$

$$f_n = \frac{n+2}{2n}$$

3 > a) Hədləri 3-ün bölünəni olan natural ədədlər ardıcılığının ilk yeddi həddini yazın. Onun 5-ci və n -ci həddini göstərin.

b) 3-ə bölündükdə qalığı 1 olan natural ədədlər ardıcılığının ilk beş həddini yazın.

4 > 1) (a_n) ardıcılığının hansı həddi:

a) $a_7, a_{72}, a_k, a_{k+4}$ həddindən sonra gəlir?

b) a_6, a_{50}, a_k, a_{2k} həddindən əvvəl gəlir?

2) (b_n) ardıcılığının verilmiş iki həddi arasında yerləşən hədlərini sadalayın:

a) b_{11} və b_{15}

b) b_k və b_{k+3}

c) b_{n-3} və b_{n+2}

5 > 1) $b_n = 2n^2 + 1$ düsturu ilə verilmiş ardıcılığın:

a) 4; b) 5; c) 7; d) $k + 1$ nömrəli həddini tapın.

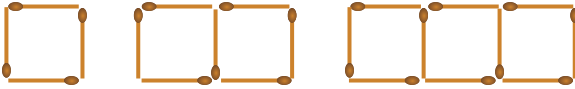
2) $c_n = 4n - 1$ düsturu ilə verilən ardıcılığın:

a) 27-yə; b) 35-ə; c) 71-ə bərabər həddinin nömrəsini göstərin.

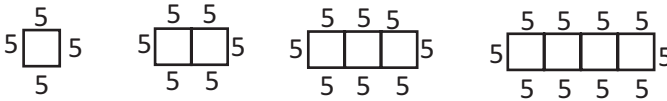
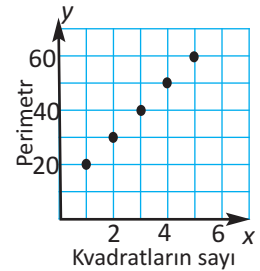
- 6 > $a_n = n^2 - 8n$ düsturu ilə verilən ardıcılığın:
 a) 20-yə; b) 48-ə; c) -15-ə; d) 0-a; e) 4-ə bərabər həddi varmı?
 Varsa, bu həddin nömrəsi neçədir?

Tətbiq tapşırıqları

- 7 > Şəkildə göstərilmiş qayda ilə 5-ci addımda quraşdırılmış fiqurda neçə kibrit çöpü istifadə olunacaq? İstənilən addımdakı kibrit çöplərinin sayını ifadə edən düstur yazın.



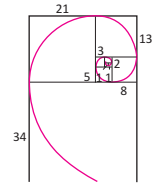
- 8 > Tərəfləri 5 vahid olan kvadratlar şəkildə göstərilən qayda ilə yan-yanı düzülür.
 a) hər addımda düzülmüş kvadratların yaratdığı fiqurun perimetrini tapın.
 b) n -ci addımda yaranan fiqurun perimetrini tapın.
 c) Qrafikin bu ardıcılığı ifadə etdiyini izah edin.



- 9 > $a_n = 4^n - 1$ düsturu ilə verilən ardıcılığın hədləri 3-ə, $c_n = 5^n - 1$ düsturu ilə verilən ardıcılığın hədləri isə 4-ə bölünür. İlk beş hədd üçün bunu yoxlayın.



Tarixi məlumat. Təbiətin bir çox hadisələrinin Fibonaççi ardıcılığı ilə bağlı olduğu müşahidə edilir.



Fibonaççi İtaliyanın Piza şəhərində anadan olmuşdur. O, Liber Abaci (abakus kitabı və ya

hesablama qaydası) əsərini yazmaqla müasir dövrdə istifadə olunan hind-ərəb onluq say sistemini Avropaya tanıtmışdır. Onun dövründə Avropada ədədlərin yazılışında və hesablamalarda Roma rəqəmlərindən istifadə edilirdi. Fibonaççi həmçinin bu əsərində dovşanların çoxalma ardıcılığına aid məsələnin həllinə geniş yer ayırmışdır. Bu ardıcılığın hədləri: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... kimidir. Bu sıranın hədləri ($n \geq 2$) üçün $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ münasibəti doğrudur. Fibonaççi sırasını daha 3 addım davam etdirin.

**Ardıcılığın verilməsinin rekurrent üsulu**

Ardıcılığın bəzi hədlərindən başlayaraq, istənilən həddini ondan əvvəlki (bir və ya bir neçə) hədlərlə ifadə edən düstura **rekurrent düstur** deyilir (latın sözü rekurre-geri dönmək, qayıtmaq mənası verir).

Məsələn, 3; 6; 12; 24; ... ardıcılığında $a_1 = 3$ olduqda, $a_{n+1} = 2a_n$ düsturu rekurrent düsturdur və ardıcılığın bu qayda ilə davam etdirmək olar.

Göstərmək olar ki, bu ardıcılığın n -ci həddinin düsturu $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ şəklindədir.



Nümunə. Rekurrent üsulla verilmiş $b_1 = 3$; $b_{n+1} = 2b_n + 1$ ardıcılığının 2-ci, 3-cü və 4-cü hədlərini tapın.

Həlli. Göründüyü kimi, ardıcılığın ikincidən başlayaraq hər bir həddini tapmaq üçün özündən əvvəlki həddi 2-yə vurub, alınan hasilə 1 əlavə etmək lazımdır. $b_1 = 3$ olduğundan alırıq:

$$b_2 = 2 \cdot b_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7,$$

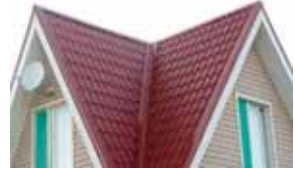
$$b_3 = 2 \cdot b_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15,$$

$$b_4 = 2 \cdot b_3 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$$

Öyrənmə tapşırıqları

- 10** > Verilən ardıcılıq üçün rekurrent düsturu və n -ci həddin düsturunu yazın.
1) Tək natural ədədlər ardıcılığı; 2) Cüt natural ədədlər ardıcılığı.
- 11** > İlk beş həddini tapın:
a) birinci həddi 4-ə bərabər, ikincidən başlayaraq hər bir hədd özündən əvvəlki həddə 3 əlavə etməklə alınan ardıcılığın;
b) birinci həddi 4-ə bərabər, ikincidən başlayaraq hər bir hədd özündən əvvəlki həddi 3-ə vurmaqla alınan ardıcılığın.
- 12** > Rekurrent düsturla verilmiş ardıcılığın ilk 5 həddini yazın.
a) $a_1 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} + 2$ c) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
b) $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$ d) $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$
- 13** > **Araşdırma. Qruplarla iş.** a) $a_1 = 11$ olduqda verilən şərtlərlə düsturlardan istifadə edin və ardıcılığın ilk dörd həddini yazın.
- $$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ cüt ədəd olduqda;} \\ 3a_n + 1, & a_n \text{ tək ədəd olduqda.} \end{cases}$$
- b) $a_1 = 6$ olduqda a) bəndindəki düsturlarla verilmiş ardıcılığın ilk dörd həddini yazın.
- 14** > Ardıcılığın hədləri üçün qanunauyğunluğu müəyyən edin və onun daha dörd həddini yazın.
a) 3; 6; 4; 8; 6; 12; 10; ... b) 2; 4; 6; 12; 14; ...

Araşdırma. Dam örtüyü quraşdırılarkən kirəmitlər müəyyən qayda ilə düzülür. Şəkiləki dam örtüyündə kirəmitlərin düzülüş qaydası cədvəldə verildiyi kimidir.



Cərgə	1	2	3	4	5	6	7	8
Kirəmit	3	4	5	6	7	8	9	10

- 1) Hər cərgədəki kirəmitlərin sayı ilə özündən sonrakı cərgədəki kirəmitlərin sayları fərqi tapın.
- 2) Bu fərqə və birinci cərgədəki kirəmitlərin sayına görə hər hansı cərgədəki kirəmitlərin sayını tapmaq mümkündürmü?
- 3) Kirəmitlərin sayları ardıcılığını rekurrent və analitik üsulla təqdim edin.

9-2

Ədədi silsilə

Tərif. Ədədi ardıcılığın ikincidən başlayaraq hər bir həddi özündən əvvəlki həddlə eyni ədədin cəminə bərabər olarsa, belə ardıcılığa **ədədi silsilə** deyilir. Yəni, istənilən natural n üçün $a_{n+1} = a_n + d$ olarsa, onda (a_n) ardıcılığı ədədi silsilədir, burada d ədədi verilən ardıcılıq üçün sabit olub, silsilə fərqi adlanır. Tərifi belə nəticə çıxırıq ki, $d = a_{n+1} - a_n$ bərabərliyi istənilən n natural ədədi üçün doğrudur. Xüsusi halda alırıq: $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots$

Ədədi silsilənin fərqi müsbət ədəd, mənfi ədəd və ya sıfır ola bilər. $d > 0$ olduqda, ikincidən başlayaraq hər bir hədd əvvəlki hədddən böyük (artan ardıcılıq), $d < 0$ olduqda isə kiçik (azalan ardıcılıq) olur.

$d = 0$ olduqda isə bütün hədlər eyni bir ədədə (1-ci həddə) bərabər olmaqla sabit ardıcılıq alınır. Məsələn, 5; 5; 5; ...

n -ci həddi a_n olan ədədi silsilə simvolik olaraq $\div (a_n)$ kimi işarə olunur.

Ədədi silsiləni vermək üçün onun birinci həddini və fərqi göstərmək kifayətdir.

1. Nümunə. Aşağıdakılardan hansının ədədi silsilə olduğunu müəyyən edin.

a) -6, 0, 6, 12, 18, 24, ... ardıcılığı ədədi silsilədir, çünki iki qonşu hədd arasındakı fərq həmişə sabit qalır.

b) -1, -3, -6, -10, -15, -21 ... ardıcılığı ədədi silsilə deyil, çünki iki qonşu hədd arasındakı fərq dəyişir.

2. Nümunə. a) $a_1 = 2$, $d = 3$ şərtinə görə ədədi silsilə: 2; 5; 8; 11; 14; 17; ... kimi olar. Bu silsilənin rekurrent düsturu: $a_{n+1} = a_n + 3$

b) $a_1 = 11$, $d = -4$ şərtinə görə ədədi silsilə: 11; 7; 3; -1; -5; ... kimi olar. Bu silsilənin rekurrent düsturu: $a_{n+1} = a_n - 4$

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Verilən ardıcılıqlardan hansı ədədi silsilədir? Bu silsilənin fərqi tapın. Silsilə üçün rekurrent düsturu yazın.
- a) $-1,9; -2,1; -2,5; -3,1; -3,9; \dots$ c) $-1,6; -1,3; -1,0; -0,7; -0,4; \dots$
 b) $\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; \frac{4}{2}; \frac{5}{2}; \dots$ d) $\frac{13}{2}; \frac{13}{3}; \frac{13}{4}; \frac{13}{5}; \frac{13}{6}; \dots$
- 2 > Ədədi silsilənin naməlum hədlərini tapın:
- a) $x_1; 5; x_3; -3; -7; \dots$ b) $x_1; x_2; 17; 23; \dots$
- 3 > Birinci həddi və silsilə fərqi verilmiş ədədi silsilənin ilk beş həddini yazın.
- a) $a_1 = -1,2$ $d = 2$ b) $a_1 = 3,$ $d = -2$
- 4 > Rekurrent üsulla verilmiş ədədi silsilənin ilk dörd həddini tapın.
- a) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n - 3$ b) $a_1 = 1 - \frac{2}{3}, a_{n+1} = a_n + \frac{2}{3}$

✓ Ədədi silsilənin n -ci həddinin düsturu

Ədədi silsilənin hər bir həddi özündən əvvəlki hədlə bu ardıcılıq üçün eyni olan bir ədədin cəminə bərabərdir. Bu qaydaya görə alırıq:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\ a_5 &= a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d \\ &\dots \end{aligned}$$

Bu qayda ilə $a_n = a_1 + (n-1)d$ olduğunu yaza bilərik.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ düsturu ədədi silsilənin n -ci həddinin düsturudur.

1. **Nümunə.** Ədədi silsilədə $a_1 = -2, d = 2,5$ olduqda a_6 və a_9 -u tapın:

Həlli. $a_6 = a_1 + 5d = -2 + 5 \cdot 2,5 = 10,5$

$a_9 = a_1 + 8d = -2 + 8 \cdot 2,5 = 18$

Qeyd edək ki, a_9 -u aşağıdakı üsulla da hesablamaq olar:

$a_9 = a_1 + 8d = (a_1 + 5d) + 3d = a_6 + 3d = 10,5 + 3 \cdot 2,5 = 18$

Ədədi silsilənin hədləri üçün,

$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + (k-1)d + (n-k)d = a_k + (n-k)d$

yəni, **$a_n = a_k + (n-k)d$** bərabərliyi doğrudur.

$a_5 = a_1 + 4d$

$a_5 = a_2 + 3d$

$a_5 = a_3 + 2d$

Buradan da, silsilə fərqi üçün **$d = \frac{a_n - a_k}{n - k}$** ($n \neq k$) düsturunu alırıq.

2. **Nümunə.** Ədədi silsilədə $a_5 = 7, a_9 = 19$ olarsa, silsilə fərqi və 12-ci həddi tapın.

Həlli. $d = \frac{a_9 - a_5}{9 - 5} = \frac{19 - 7}{4} = 3,$ $a_{12} = a_9 + 3d = 19 + 9 = 28$

Öyrənmə tapşırıqları

- 5 > Ədədi silsilənin daha beş həddini yazın. Silsilə üçün rekurrent düsturu və n -ci həddinin düsturunu yazın.
- a) 11; 17; 23; ... b) $-6; -2; 2; \dots$ c) $\frac{1}{4}; 1; \frac{7}{4}; \dots$
d) 3,5; 4,3; 5,1; ... e) $\frac{17}{3}; \frac{15}{3}; \frac{13}{3}; \dots$ f) $-12; -10; -8; \dots$
- 6 > a) a_n ədədi silsiləsinin $a_9, a_{12}, a_{21}, a_{k+2}, a_{2k}$ hədlərini a_1 və d ilə ifadə edin.
b) Ədədi silsilədə $a_1 = -4, d = 3$ olduqda a_6 və a_{15} hədlərini tapın.
c) Ədədi silsilədə $a_1 = 18, d = -3$ olduqda a_5 və a_{12} hədlərini tapın.
- 7 > Ədədi silsilədə verilənlərə görə tələb olunanları tapın.
- a) $a_{12} = -7, d = 3$ b) $c_1 = 0,5, c_{15} = -2,3$ c) $a_5 = -10, a_8 = 8$
 a_1 və a_8 d və c_{16} a_1 və a_6
- d) $-20; -15; \dots$ olarsa, d və a_{10} e) $5; 4,5; \dots$ olarsa, d və a_9
- 8 > 4 və 40 ədədləri arasında elə dörd ədəd yazın ki, onlar verilmiş ədədlərlə birlikdə ədədi silsilə əmələ gətirsin.
- 9 > 1) Ədədi silsilədə $a_1 = -12, d = 3$ olarsa:
a) 6-ya; b) 0-a; c) 9-a bərabər olan hədd varmı?
2) $-2; 5; \dots$ ədədi silsiləsində: a) 53-ə; b) 75-ə bərabər olan hədd varmı?
Varsa, bu həddin nömrəsini tapın.
- 10 > $-40; -37; \dots$ ədədi silsiləsində hansı hədlər üçün: a) $a_n > 0$; b) $a_n < 0$ şərti ödənilir?
- 11 > a) $a_1 = -18; d = 1,5$ olarsa, silsilənin ilk müsbət həddini tapın. Bu silsilənin neçə həddi mənfidir?
b) $4,1; 3,9; \dots$ ədədi silsiləsində ilk mənfi həddi tapın.
- 12 > Ədədi silsilədə $x_1 = -45; d = 4$ olarsa, hansı hədlər üçün:
a) $x_n > 99$; b) $x_n < 160$ bərabərsizliyi ödənilir?
- 13 > a) $x_n = 2n - 5$ düsturu ilə verilmiş ardıcılığın ədədi silsilə olduğunu göstərin. Onun birinci həddini və fərqi tapın.
b) $(n + 1)$ -ci və n -ci hədlərin fərqi tapmaqla $a_n = k \cdot n + b$ düsturu ilə verilmiş ardıcılığın ədədi silsilə olduğunu göstərin.
- 14 > a) Ədədi silsilədə $a_n = 2n + 3$ olarsa, a_8 və d -ni tapın.
b) Ədədi silsilədə $a_n = 1 - 4n$ olarsa, a_6 və d -ni tapın.

- 15 > a) Ədədi silsilədə $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{12}$ olarsa, bu silsilənin neçənci həddi $\sqrt{48}$ -ə bərabərdir?
 b) 3; 8; 13; ... ; 58 ədədi silsiləsinin neçə həddi var?
 c) İlk həddi 6, silsilə fərqi 5, sonuncu həddi 66 olan ədədi silsilənin neçə həddi var?
- 16 > **Açıq tipli tapşırıq.** İlk altı həddini göstərməklə: a) artan ; b) azalan;
 c) bütün hədləri mənfi olan; d) bütün hədləri cüt ədəd olan ədədi silsilələrə nümunələr yazın.
- 17 > Verilənlərə görə ədədi silsilələrin fərqi, altıncı və birinci həddini tapın.

$$a) \begin{cases} a_1 + a_7 = 42 \\ a_{10} - a_3 = 21 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = 3 \\ a_2 \cdot a_3 = 8 \end{cases}$$

- 18 > a) Üç ədəd artan ədədi silsilə təşkil edir. Bu ədədlərin cəmi 12, hasilisi isə 28-dir. Bu ədədləri tapın.
 b) Üç ədəd ədədi silsilə təşkil edir. Ortadakı ədəd 8-dir. Bu ədədlərin kvadratları cəmi 264-dür. Digər iki ədədi tapın.
- 19 > Ədədi silsilənin bəzi hədləri cədvəllə verilmişdir. Cədvəli dəftərinizdə tamamlayın və silsiləni rekurrent qayda ilə təqdim edin ($n \in \mathbb{N}$).

a)

n	a_n
1	-3,5
2	1
4	

b)

n	a_n
1	40
7	22
13	

c)

n	a_n
1	
3	30
50	500
150	

- 20 > Bir ədədi silsilənin hədlərinə başqa ədədi silsilənin uyğun hədlərini (eyni nömrəli hədlərini) əlavə etdikdə alınan ardıcılıq ədədi silsilə olarmı?

Tətbiq tapşırıqları

- 21 > Zavod yanvar ayında 120 detal, hər sonrakı ayda əvvəlki aydakından 8 detal artıq hazırladı. Zavod may, dekabr aylarında neçə detal hazırladı?
- 22 > Stolların sayından asılı olaraq stulların sayının necə dəyişdiyini araşdırın. Bu qayda ilə düzülə: a) 7 stolun; b) 10 stolun; c) n sayda stolun arxasında neçə stul olacaq? **Göstəriş:** $a_n = a_1 + d(n - 1)$ düsturunda a_1 və d -ni tapın.

1 stol.



2 stol

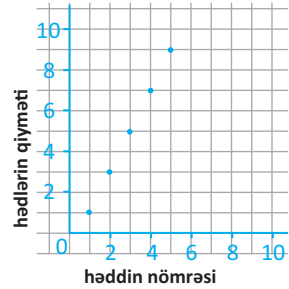


3 stol



- 23 > Cisim birinci saniyədə $6 m$, hər sonrakı saniyədə əvvəlkindən $2 m$ çox yol getmişdir. Cisim: a) beşinci saniyədə; b) ilk 5 saniyə ərzində hansı məsafəni getmişdir?

- 24 > a) Qrafikdə $a_n = 2n - 1$ ədədi silsiləsinin hədlərinin nömrələri ilə qiymətləri arasındakı asılılıq əks edilmişdir. Qeyd edilmiş nöqtələrdən keçən düz xəttin tənliyini yazın.
b) $f(x) = 2x - 1$ (x həqiqi ədəddir) funksiyasının qrafikini qurun. Ədədi silsilənin qrafiki ilə xətti funksiyanın qrafikinə oxşar və fərqli cəhətlərini göstərin. Xətti funksiyanın düsturundakı bucaq əmsalı ədədi silsilədə nəyi ifadə edir?



- 25 > Verilən a_n ədədi silsiləsinin: a) ilk 5 həddini yazın; b) fərqi tapın; c) qrafik olaraq göstərin.

$$a_n = 4 + 2(n - 1) \quad \left| \quad a_n = \frac{5}{2} - (n - 1) \quad \left| \quad a_n = 4 - 3(n - 1) \quad \left| \quad a_n = \frac{1}{2}(n - 1) \right. \right.$$

- 26 > Ədədi silsilənin ilk 6 həddi koordinat müstəvisində qeyd edilmişdir. Bu nöqtələrdən ikisinin koordinatları $(3; 11)$ və $(6; 23)$ kimidir. Bu ardıcılığın n -ci həddinin düsturunu yazın.
- 27 > Əmanət kassasına qoyulmuş əmanət ildə 5% artır. Sadə faiz düsturu ilə hesablandıqda, 3 il müddətinə kassaya qoyulmuş 40000 manat pul hansı məbləğə çevrilər?

- 28 > Düzbucaqlı üçbucağın a , b , c tərəflərinin uzunluqları artan ədədi silsilə təşkil edir. $c = 10$ sm olarsa, bu üçbucağın sahəsini tapın.

- 29 > Hər hansı ardıcılığın hədlərinin tərsi ədədi silsilə yaradırsa, bu ardıcılıq **harmonik ardıcılıq** adlanır. Aşağıdakı ardıcılığın harmonik olduğunu izah edin.

$$1, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}, \dots$$

- 30 > **Arxitektura.** Bakıdakı "İçərişəhər", "Koroğlu", "Avtovağzal" metro stansiyalarında şəffaf piramida elementindən istifadə edilmişdir. Məsələn, "İçərişəhər" metro stansiyasının binasında ən yuxarı cərgədə 2 pəncərə, hər sonrakı cərgədə isə əvvəlkindən 2 pəncərə çox olmaqla dizayn edilmişdir. 12-ci cərgədə neçə pəncərə var? Neçənci cərgədə 18 pəncərə var?



Araşdırma. 1) Hər hansı ədədi silsilənin ilk 10 həddini yazın. Məsələn, $a_1 = 4$, $d = 3$ olduqda, bu hədlər aşağıda yazılanlar olur:

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

2) Orta hədlərdən hər hansı birini götürün və onu bu hədlə qonşu olan iki həddin ədədi ortası ilə müqayisə edin. Bərabərlik alındımı?

$$a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6 \quad \text{bərabərlikləri doğrudurmu?}$$



Ədədi silsilənin xassələri

Xassə 1. Ədədi silsilənin birincidən (sonlu silsilədə həm də sonuncudan) başqa istənilən həddi, onunla qonşu olan hədlərin ədədi ortasına bərabərdir.

Doğrudan da, $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ bərabərliyindən $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$ alınır.

Ümumi halda, $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$ olduğundan

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n \geq 2) \quad \text{bərabərliyi doğrudur.}$$

Bu xassənin tərsi də doğrudur: əgər bir ardıcılığın ikincidən başlayaraq istənilən həddi, özündən əvvəlki və sonrakı hədlərin ədədi ortasıdırsa, onda bu ardıcılıq ədədi silsilədir.

Bu xassəni belə ümumiləşdirmək mümkündür: ədədi silsilənin ikincidən başlayaraq hər bir həddi özündən eyni uzaqlıqda duran hədlərin ədədi ortasına bərabərdir:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

Xassə 2. Ədədi silsilədə nömrələri $m + k = n + p$ şərtini ödəyən hədlər üçün $a_m + a_k = a_n + a_p$ bərabərliyi doğrudur.

Nəticə: Sonlu ədədi silsilədə uclardan eyni uzaqlıqda olan hədlərin cəmi sabit olub, kənar hədlərin cəminə bərabərdir:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \dots$$

Öyrənmə tapşırıqları

- 31** > 1) Ədədi silsilədə $a_1 = 3$, $a_3 = 7$ olarsa, a_2 -ni tapın.
 2) Ədədi silsilədə $a_4 + a_{10} = 6$ olarsa, tapın: a) $a_5 + a_9$; b) a_7
 3) Ədədi silsilədə $a_8 = 5$ olarsa, $a_1 + a_{15}$ cəmini tapın.
- 32** > Verilmiş ədədlərin ədədi silsilənin ardıcıl hədləri olduqlarını bilərək, x -i tapın.
 a) $3x - 4$; 6; $x + 6$ b) $x - 2$; x^2 ; $3x + 2$
- 33** > \div (x_n) ədədi silsiləsinin hədləri üçün bərabərliyi isbat edin.
 a) $x_1 + x_9 = x_4 + x_6$ b) $x_3 + x_{12} = x_8 + x_7$ c) $x_4 + x_{n-4} = x_6 + x_{n-6}$

34) Verilən ədədlər arasında: 1) elə bir ədəd; 2) elə iki ədəd yazın ki, onlar ədədi silsilə əmələ gətirsin.

a) $-1; 5$ b) $30; 50$ c) $12; 48$ d) $0; 20$ e) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$

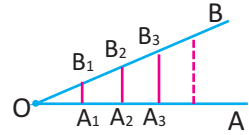
35) Ədədi silsilənin 5-ci həddi c -yə bərabərdir. Bu silsilənin 2-ci həddi ilə 8-ci həddinin cəmini göstərən ifadəni yazın.

Tətbiq tapşırıqları

36) Bir üçbucağın bucaqlarının dərəcə ölçüləri ədədi silsilə əmələ gətirir. Bu üçbucağın bucaqlarından birinin dərəcə ölçüsünün 60° olduğunu isbat edin.

37) Üçbucağın perimetri 24 sm-dir. Bu üçbucağın tərəflərinin uzunluqları ədədi silsilə təşkil edir. Üçbucağın orta uzunluqlu tərəfini tapın.

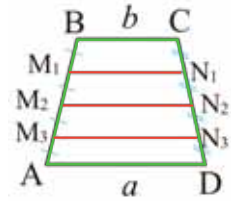
38) $\angle AOB$ -nin OA tərəfi üzərində tərədən başlayaraq bərabər parçalar ayrılmış və bölgü nöqtələrindən paralel düz xətlər çəkilmişdir. $A_1B_1 = 2$ sm olarsa, A_5B_5 parçasının uzunluğunu tapın.



39) ABCD trapesiyasının AB yan tərəfi dörd bərabər hissəyə bölünmüş və bölgü nöqtələrindən oturmaqlara paralellər çəkilmişdir.

a) İsbat edin ki, BC , M_1N_1 , M_2N_2 , M_3N_3 və AD parçalarının uzunluqları ədədi silsilə təşkil edirlər.

b) $AD = 18$ sm, $BC = 6$ sm olduqda M_1N_1 , M_2N_2 , M_3N_3 parçalarının uzunluqlarını tapın.



40) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ ədədləri ədədi silsilə əmələ gətirərlərsə, $\frac{b}{c} + \frac{b}{a} = 2$ bərabərliyinin doğruluğunu isbat edin.

41) Həkim xəstənin qəbul etdiyi dərmanı 5 gün ərzində bərabər dozalarla gündəlik 100 mq-dan 300 mq-a qədər artırmaq istəyir. Xəstənin 5 gün ərzində qəbul etdiyi dərmanın miqdarını ardıcıl yazın.

42) a, b, c ədədləri ədədi silsilə təşkil edir. $a^2 + ab + b^2, a^2 + ac + c^2, b^2 + bc + c^2$ ardıcılığının da ədədi silsilə olduğunu isbat edin.

Praktik məşğələ. 1-dən 100-ə qədər natural ədədlərin cəmini tapın. Tutaq ki, bu cəm x -ə bərabərdir. I cərgədə bu cəmin toplananlarını artan sırada, II cərgədə isə azalan sırada yazın və bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplayın.

$$\begin{array}{r}
 x = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\
 + \\
 x = 100 + 99 + 98 \dots + 3 + 2 + 1 \\
 \hline
 2x = \underbrace{101 + 101 + 101 \dots + 101 + 101 + 101}_{100} \\
 x = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050
 \end{array}$$

Alınmış nəticəni $x = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5050$ şəklində yazın.

✓ Ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturu

İstənilən ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmini S_n ilə işarə edək.

$$\begin{array}{r}
 S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\
 + \\
 S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1
 \end{array}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Sonlu ədədi silsilənin uclarından eyni uzaqlıqda duran hədlərinin cəmi kənar hədlərin cəminə bərabər olduğundan mötərizə daxili cəmlərin hər biri $(a_1 + a_n)$ -ə bərabərdir. Mötərizə daxili cəmlərin sayı n -ə bərabər olduğu üçün

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n, \text{ buradan isə } S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \text{ alırıq.}$$

Sonlu ədədi silsilənin cəmi kənar hədlərin yarım cəmi ilə hədlərin sayının hasilinə bərabərdir.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ olduğundan ilk n həddin cəmi düsturunu

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n - 1)d) \cdot n}{2} \text{ şəklində yazmaq olar.}$$

1. Nümunə. $a_n = 3n + 1$ düsturu ilə verilmiş ədədi silsilənin ilk on iki həddinin cəmini tapın.

Həlli. $a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ $a_{12} = 3 \cdot 12 + 1 = 37$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = (4 + 37) \cdot 6 = 246$$

2. Nümunə. $-3; 5; 13; \dots$ ədədi silsiləsində ilk on həddin cəmini tapın.

Həlli. $a_1 = -3, a_2 = 5, d = 8, a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 72 = 69$

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = (-3 + 69) \cdot 5 = 330$$

3. Nümunə. Toplantı salonunda 30 sıra var. Birinci sırada 24 yer, hər sonrakı sırada isə bundan 1 yer çoxdur. Salonda neçə yer var?

Həlli. $a_1 = 24, d = 1, n = 30$

Sonuncu sırada: $a_{30} = 24 + 29 \cdot 1 = 53$ yer var.

$$30 \text{ sırada yerlərin ümumi sayı: } S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} = 1155$$

4. Nümunə. 5; 7; 9; ... ədədi silsiləsinin ilk neçə həddinin cəmi 320-yə bərabərdir?

Həlli. $\frac{(2a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2} = 320$ bərabərliyində $a_1 = 5, d = 2$ yazaraq:

$$\frac{(2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 2) \cdot n}{2} = 320, \quad \frac{(8 + 2n) \cdot n}{2} = 320, \quad n^2 + 4n = 320,$$

$$n^2 + 4n - 320 = 0, \quad (n-16)(n+20) = 0, \quad n_1 = 16, n = -20$$

Hədlərin sayı mənfi ədəd ola bilməz, deməli, bu silsilənin ilk 16 həddinin cəmi 320-dir.

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d) \cdot n}{2} = \frac{(n \cdot d + (2a_1 - d)) \cdot n}{2} = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \frac{2a_1 - d}{2} \cdot n$$

şəklində yazıb, $\frac{d}{2} = a, \frac{2a_1 - d}{2} = b$ işarə etməklə alırıq ki, istənilən

ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturu $S_n = a \cdot n^2 + b \cdot n$ şəklində olur.

S_n məlumdursa, ədədi silsilə verilmiş hesab oluna bilər.

Bəzi məsələlərin həllində a_n -i müəyyən etmək üçün $a_n = S_n - S_{n-1}$ düsturundan istifadə etmək əlverişlidir.

5. Nümunə. İlk n həddinin cəmi $S_n = 2n^2 - 3n$ düsturu ilə verilən ədədi silsilənin fərqi və birinci həddini tapın.

Həlli. $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -1$

$$a_2 = (a_1 + a_2) - a_1 = S_2 - S_1 = (2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2) - (-1) = 3$$

$$d = a_2 - a_1 = 3 - (-1) = 4$$

Öyrənmə tapşırıqları

43 > Verilənlərə görə ədədi silsilənin tələb olunan sayda həddinin cəmini tapın.

a) $a_1=10; a_{20}=48$
 $S_{20}=?$

b) $a_1=6,5; a_{10}=7,5$
 $S_{10}=?$

c) $a_1=-13; d=7,$
 $S_8=?$

d) $a_1=9; d=-4,$
 $S_{12}=?$

e) $a_3=-8; a_8=2$
 $S_9=?$

f) $a_2=-5; a_6=11$
 $S_6=?$

g) 14,2; 9,6;
 $S_{16}=?$

h) -17; -14; ...
 $S_{11}=?$

44 > $a_n = 2n - 3$ düsturu ilə verilmiş ədədi silsilənin:

a) ilk 15 həddinin cəmini; b) ilk n həddinin cəmini tapın.

45 > Ədədi silsilədə verilənlərə görə tələb olunanı tapın.

a) $a_3 = 31$, $a_7 = 79$ olarsa, $a_{11}=?$ $S_{11}=?$

c) $a_4 + a_7 = 20$ olarsa, $S_{10}=?$

b) $a_9 = 10$ olarsa, $S_{17}=?$

d) $a_5 = 38$, $S_7=203$, olarsa, $S_{12}=?$

46 > Tələb olunan cəmi tapın:

a) ilk 80 natural ədədin; b) bütün ikirəqəmli ədədlərin;

c) 3-ə bölünən və 100-dən kiçik olan natural ədədlərin;

d) 4-ə bölünən və 130-dan kiçik olan natural ədədlərin.

47 > Toplananları ədədi silsilənin hədləri olan cəmi tapın.

a) $2 + 6 + 10 + \dots + 198$

b) $1 + 4 + 7 + \dots + 91$

48 > Ədədi silsilənin birinci həddi 7-yə, fərqi 1,5-ə bərabərdir. Silsilənin 5-dən 11-ə qədər (11-ci də daxil olmaqla) hədlərinin cəmini tapın.

49 > Ədədi silsilənin 3-cü və 5-ci həddinin cəmi 12-yə bərabərdir. 2-dən 5-ə qədər (5-ci də daxil olmaqla) olan hədlərinin cəmi 8-ə bərabərdir. Bu silsilənin ilk 5 həddini yazın.

50 > Ədədi silsilənin verilən sayda hədlərinin cəmini və neçə həddinin cəminin verilən ədədə bərabər olduğunu tapın.

1) $3 + 7 + 11 + 15 + 19 + \dots$

a) $n = 20$ b) $S_n = 210$

$S_n = ?$ $n = ?$

2) $30 + 24 + 18 + 12 + 6 + \dots$

a) $n = 15$ b) $S_n = -36$

$S_n = ?$ $n = ?$

3) $-10 + (-5) + 0 + 5 + 10 + \dots$

a) $n = 15$ b) $S_n = 315$

$S_n = ?$ $n = ?$

4) $45 + 42 + 39 + 36 + 33 + \dots$

a) $n = 31$ b) $S_n = -48$

$S_n = ?$ $n = ?$

51 > İlk n həddinin cəmi düsturuna görə tələb olunanı tapın.

a) $S_n = 4n^2 - 3n$

b) $S_n = 2n^2 + n$

c) $S_n = 2n^2 + 3n$

$a_1 = ?$ və $a_2 = ?$

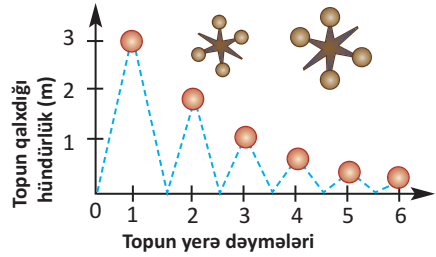
$a_5 = ?$ və $a_{11} = ?$

neçənci hədd 21-ə bərabərdir?

52 > Cədvəli doldurun.

No	a_1	d	n	a_n	S_n
1	2		11	7	
2		-0,4	8	-5,2	
3	0,5			14	72,5
4			7	16	17,5

Araşdırma. Top ilk dəfə yerə dəydikdən sonra 3 m yüksəkliyə qalxdı. Hər sonrakı dəfə əvvəl qalxdığı hündürlüyün 60%-i qədər hündürlüyə qalxdı. Qrafik topun yerə dəymə sayı ilə qalxdığı yüksəklik arasındakı əlaqəni göstərir. 1) Topun qalxdığı hündürlükləri $h_1, h_2, h_3, h_4, \dots$ işarə etməklə hər dəfə qalxdığı hündürlüyü yerə ilk dəymədən sonra qalxdığı hündürlüklə ifadə edin.



2) Top 8-ci dəfə yerə dəydikdən sonra neçə metr hündürlüyə qalxacaq?
3) Topun n -ci dəfə yerə dəyməsindən sonra qalxdığı hündürlüyü tapmaq üçün $h_n = 3 \cdot (0,6)^{n-1}$ düsturundan istifadə etməyin mümkün olduğunu izah edin.

9-3

Həndəsi silsilə

Tərif. Birinci həddi sıfırdan fərqli olan ədədlər ardıcılığında ikincidən başlayaraq hər bir hədd özündən əvvəlki hədlə sıfırdan fərqli eyni ədədin hasilinə bərabədirsə, belə ardıcılığa **həndəsi silsilə**, həmin sabit ədədə isə **həndəsi silsilənin vuruğu** deyilir.

Yəni, istənilən natural n üçün $b_n \neq 0$ və $b_{n+1} = b_n \cdot q$ şərti ödənərsə, onda (b_n) ardıcılığı həndəsi silsilədir. Burada $q \neq 0$ silsilə vuruğudur.

Həndəsi silsilə simvolik olaraq $\therefore (b_n)$ kimi işarə edilir.

$b_{n+1} = b_n \cdot q$ düsturu həndəsi silsilənin rekurrent qayda ilə ifadəsidir.

Tərifdən belə nəticə çıxır ki, istənilən n natural ədədi üçün $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ bərabərliyi doğrudur. Xüsusi halda, alırıq: $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \dots$

$q > 0$ olduqda, həndəsi silsilənin hədləri eyni işarəli olur,

$q < 0$ olduqda isə hədlərin işarələri növbələşir,

$q = 1$ olduqda sabit ardıcılıq alırıq.

1. Nümunə.

a) $b_1 = 2, q = 3$ olduqda, 2; 6; 18; 54; 162; ... həndəsi silsiləsi,

b) $b_1 = 3, q = -2$ olduqda, 3; -6; 12; -24; 48; ... həndəsi silsiləsi alınır.

2. Nümunə. Verilən ədədi ardıcılıqlardan hansı həndəsi silsilədir?

a) 4; 12; 22; 34; 48. b) 625; 125; 25; 5; 1.

Həlli. Həndəsi silsilənin hər bir həddinin özündən əvvəlki həddə olan nisbəti sabit qalır. Bu şərti hər iki ardıcılıq üçün yoxlayaq.

$$a) \frac{b_2}{b_1} = \frac{12}{4} = 3, \quad \frac{b_3}{b_2} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6} \quad \text{Şərt ödənmir, bu ardıcılıq həndəsi silsilə deyil.}$$

$$b) \frac{b_2}{b_1} = \frac{125}{625} = \frac{1}{5}, \quad \frac{b_3}{b_2} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5}, \quad \frac{b_4}{b_3} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}, \quad \frac{b_5}{b_4} = \frac{1}{5}$$

Şərt ödənilir, bu ardıcılıq həndəsi silsilədir.

Öyrənmə tapşırıqları

1 > Həndəsi silsilənin növbəti iki həddini yazın.

500; 100; 20; ...	$\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \dots$	$7; \frac{14}{3}; \frac{28}{9}; \dots$
16; 24; 36; ...	$\frac{1}{3}; \frac{5}{6}; \frac{25}{12}; \dots$	0,4; -0,16; 0,064; ...
1,25; 1,5; 1,8; ...		$1; \sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}; \dots$

2 > Həndəsi silsilənin növbəti üç həddini yazın.

a) 512; -256; 128; -64, ... b) $\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{8}{5}; \frac{16}{5}; \dots$

3 > Həndəsi silsilənin dəyişənlə işarə edilmiş hədlərini tapın.

a) $y_1; 1; \frac{1}{2}; y_4; \dots$ b) $y_1; y_2; 24; 36; 54; \dots$

4 > a) $b_2 = 3$ olduğunu bilərək, $b_{n+1} = 0,3 \cdot b_n$ rekurrent qaydasına görə həndəsi silsilənin ilk 5 həddini yazın.

b) 2; 8; 32; 128; ... həndəsi silsiləsini rekurrent üsulla verin.

5 > **Açıq tipli tapşırıq.** Verilənlərə görə həndəsi silsilə qurun və ilk dörd həddini yazın.

a) $q = \frac{1}{2}$ b) $b_1 = 0,5$ c) $b_3 = 20$

6 > Verilən ardıcılıqlardan hansı ədədi silsilə, hansı həndəsi silsilədir? Bu silsilələr üçün rekurrent düsturu yazın.

a) 7; 14; 28; 56; 112; ... d) 1; 2; 5; 26; ...
 b) 1000; 500; 250; 125; ... e) 1; 5; 9; 13; ...
 c) 4; 8; 13; 19; ... f) 200; 20; 2; 0,2; ...

7 > Həndəsi silsilənin vuruğunu tapın.

1) 81; 27; 9; ... 2) 4; 8; 16; ...
 3) $14; 7; \frac{7}{2}; \dots$ 4) $\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \dots$

8 > Ardıcılıqlar üçün rekurrent qaydanı yazın və növbəti iki həddini göstərin.

a) 1; 7; 13; 19; ... b) 66; 33; 16,5; 8,25; ... c) 41; 32; 23; 14; ...
 d) 2; 3; 8; 63; ... e) 2; 5; 11; 23; 47; ... f) 2; 5; 10; 50; 500; ...

Araşdırma. Həndəsi silsilənin $b_{n+1} = b_n \cdot q$ rekurrent münasibətilə verildiyini bilərək, cədvəldə boş xanaların yerinə uyğun ifadəni yazın.

b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$b_1 \cdot q$	$b_2 \cdot q = b_1 q^2$	$b_3 \cdot q = b_1 q^3$	$\square \cdot q = \square$	$\square \cdot q = \square$

Hansı nəticəyə gəldiniz?

b_5 -i tapmaq üçün b_1 həddi q -nün hansı qüvvətinə vurulur?

q -nün bu qüvvət üstü ilə b_5 və b_1 hədlərinin indeksləri arasında hansı əlaqəni görürsünüz?

Sizcə, b_8 -i tapmaq üçün b_1 -i q -nün hansı qüvvətinə vurmaq lazımdır?



Həndəsi silsilənin n -ci həddinin düsturu

Həndəsi silsilədə b_n həddi üçün $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ düsturu doğrudur.

Bu, həndəsi silsilənin n -ci həddinin düsturu adlanır.

Həndəsi silsilənin n -ci həddinin düsturunu aşağıdakı üsulla alağ.

Tərifə görə alırıq:

$$b_2 = b_1 \cdot q$$

$$b_3 = b_2 \cdot q$$

$$b_4 = b_3 \cdot q$$

.....

$$b_n = b_{n-1} \cdot q$$

Bu $(n-1)$ sayda bərabərlikləri tərəf-tərəfə vuraq:

$$b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \dots \cdot b_{n-1} \cdot b_n = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_{n-1} \cdot q^{n-1}.$$

Burada sağ və sol tərəflərdə eyni hədləri ixtisar etsək, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ düsturunu alırıq.

Həndəsi silsilənin verilməsi üçün onun birinci həddinin və vuruğunun verilməsi kifayətdir.

1. Nümunə. Həndəsi silsilədə $b_1 = 3$, $q = 2$ olduqda b_4 və b_7 -ni tapın.

Həlli. $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 3 \cdot 2^3 = 24$, $b_7 = b_1 \cdot q^6 = 3 \cdot 2^6 = 192$

Qeyd. $b_7 = b_1 \cdot q^6 = b_1 \cdot q^3 \cdot q^3 = b_4 \cdot q^3 = 24 \cdot 2^3 = 192$ üsulu ilə də hesablamaq olar.

Həndəsi silsilənin hədləri üçün,
 $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q^{n-k} = b_k \cdot q^{n-k}$, yəni
 $b_n = b_k \cdot q^{n-k}$ bərabərliyi doğrudur.

$$b_6 = b_1 \cdot q^5$$

$$b_6 = b_2 \cdot q^4$$

$$b_6 = b_3 \cdot q^3$$

2. Nümunə. Həndəsi silsilədə $b_2 = 4$; $b_5 = 32$ olarsa, b_7 -ni tapın.

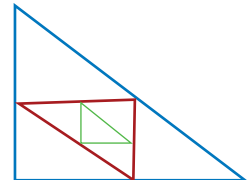
Həlli. $b_5 = b_2 \cdot q^3$ olduğundan, $q^3 = \frac{b_5}{b_2} = \frac{32}{4} = 8$, $q = 2$ və
 $b_7 = b_5 \cdot q^2 = 32 \cdot 2^2 = 128$ alınır.

Öyrənmə tapşırıqları

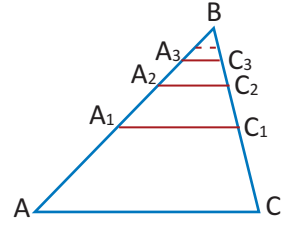
- 9 > Verilənlərə görə tələb olunanları tapın.
- a) $b_1 = 3$; $q = 2$ olarsa, $b_4 = ?$ $b_5 = ?$
 b) $b_1 = 24$; $q = 0,5$ olarsa, $b_3 = ?$ $b_4 = ?$
 c) $b_6 = 48$; $q = -2$ olarsa, $b_4 = ?$ $b_5 = ?$
 d) $b_5 = 64$; $q = 2$ olarsa, $b_1 = ?$ $b_7 = ?$
 e) $b_4 = 15$; $b_6 = 135$ olarsa, $q = ?$ $b_7 = ?$
 f) $b_1 = 3$; $b_5 = 48$ olarsa, $q = ?$ $b_7 = ?$
- 10 > Həndəsi silsilənin yeddinci həddini tapın.
- a) $\frac{5}{2}$; 5; 10; ... b) $-\frac{1}{4}$; -1; -4; ... c) $-\frac{64}{81}$; $\frac{32}{27}$; $-\frac{16}{9}$; ...
- 11 > Verilənlərə görə həndəsi silsilənin n -ci həddinin düsturunu yazın.
- a) $b_1 = 45$, $q = \frac{1}{3}$ b) $b_3 = 72$, $q = 6$ c) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_6 = -16$
- 12 > a) Həndəsi silsilədə $b_1 = 2$, $q = 3$ olarsa, 162-yə bərabər olan həddin nömrəsini tapın.
 b) 0,1; 0,3; ... həndəsi silsiləsində 24,3 -ə bərabər olan həddin nömrəsini tapın.
 c) $c_n = 3 \cdot 2^n$ düsturu ilə verilmiş ardıcılığın həndəsi silsilə olduğunu göstərin. Silsilə vuruğunu yazın.
- 13 > 1) Verilənlərə görə həndəsi silsilənin n -ci həddini rekurrent qayda ilə yazın.
 a) $b_1 = -4$, $q = 6$ b) $b_1 = 4$, $q = 3$ c) $b_1 = 2$, $q = -3$ d) $b_1 = -4$, $q = 2$
 2) $b_1 = 2$, $b_{n+1} = b_n \cdot 3$ rekurrent münasibəti ilə verilmiş ardıcılığın n -ci həddinin düsturunu yazın.
- 14 > Verilənlərə görə həndəsi silsilənin ilk 5 həddini yazın. Silsiləni rekurrent və analitik üsullarla verin: 1) $b_4 = 25$, $q = -5$; 2) $b_1 = 4$, $q = 5$
- 15 > Həndəsi silsilənin birinci və üçüncü həddinin cəmi 15, ikinci və dördüncü həddinin cəmi isə 30 olarsa, ilk dörd həddini tapın.

Tətbiq tapşırıqları

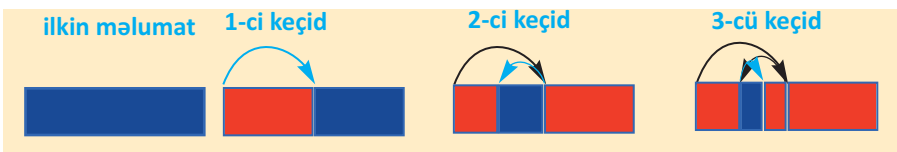
- 16 > Katetləri 12 sm və 16 sm olan düzbucaqlı üçbucağın daxilinə təpələri onun tərəflərinin orta nöqtələri olan üçbucaq çəkilmişdir. Eyni qayda ilə ikinci üçbucağın da daxilinə üçbucaq çəkilib və s. 6-cı üçbucağın perimetrini tapın.



- 17 > ΔABC -də A_1C_1 orta xətti çəkildi, ΔA_1BC_1 -də A_2C_2 orta xətti çəkildi, yeni alınmış ΔA_2BC_2 -də də A_3C_3 orta xətti çəkildi və s. ABC üçbucağının sahəsi 3072 sm^2 olarsa, A_5BC_5 üçbucağının sahəsini tapın.



- 18 > Süd məhsulları istehsalı zavodu 200 min manata yeni avadanlıq aldı. Avadanlığa hər il 10% amortizasiya (köhnəlmə) hesablanır. 3 ildən sonra bu avadanlığın qiyməti neçə manat olacaq?
- 19 > Meşə təcrübə sahəsində oduncaq ildə 10% artır. Sahədə oduncaq əvvəldə 20000 m^3 olarsa, 4 ildən sonra nə qədər olar?
- 20 > Nasos bir dəfəyə çəndəki yanacağı $\frac{1}{10}$ hissəsini çəkir. Nasos 3 dəfə qoşulduqdan sonra çəndə yanacağın neçə faizi qalar?
- 21 > Canlı orqanizmə düşən bakteriya 20-ci dəqiqənin sonunda iki yerə bölünür; bunlardan da hər biri sonrakı 20 dəqiqənin sonunda yenə də iki yerə bölünür və s. 24 saat sonra bakteriyaların sayı neçə olar?
- 22 > Kompüterdə hər hansı element axtarışı yarıya bölmə üsulu ilə həyata keçirilir. Bu üsulda məlumatın nizamlanmış sırasındakı hər hansı element axtarışı üçün ilk olaraq məlumatlar siyahısının ortasına keçilir və axtarılan elementin siyahının hansı yarım hissəsində olduğu müəyyən edilir. Bununla da məlumatın digər yarısını yoxlamağa ehtiyac qalmır. Daha sonra bu yarım hissə yarıya bölünür və elementin yeri müəyyən edilir. Lazımi element tapılana qədər axtarış bu qayda ilə davam etdirilir.



- a) 2048 elementdən ibarət məlumatlar siyahısında n -ci keçiddən sonra qalan elementlərin sayını göstərən ifadəni yazın.
- b) Axtarılan element ən pis halda ən sonuncu keçiddə tapıla bilər. Bu halda 2048 elementli məlumatlar toplusunda n -in hansı qiymətində axtarılan element tapılacaq?

Araşdırma. Hər hansı həndəsi silsilənin ilk səkkiz həddini yazıb, hədlər arasında əlaqəni araşdırın. Məsələn, $b_1 = 3$, $q = 2$ olduqda, bu hədlər cədvəldə yazılanlar olur.

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
3	6	12	24	48	96	192	384

$$\sqrt{3 \cdot 12} = 6 \quad \sqrt{12 \cdot 48} = 24$$

✓ Həndəsi silsilənin xassələri

Xassə 1. Həndəsi silsilədə birincidən (sonlu silsilədə həm də sonuncudan) başqa hər bir həddin kvadratı onunla qonşu olan hədlərin hasilinə bərabərdir.

Həndəsi silsilənin tərifinə görə $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$

olduğundan, bu bərabərlikləri cüt-cüt götürməklə alırıq:

$$b_2^2 = b_1 \cdot b_3, \quad b_3^2 = b_2 \cdot b_4, \quad \dots, \quad b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Tərsi də doğrudur: Hədləri sıfırdan fərqli ardıcılığın ikincidən başlayaraq hər bir həddinin kvadratı qonşu hədlərin hasilinə bərabədirsə, bu ardıcılıq həndəsi silsilədir.

Bu xassə daha ümumi şəkildə aşağıdakı kimi verilir.

Həndəsi silsilədə ikinci həddən başlayaraq hər bir həddin kvadratı özündən eyni uzaqlıqda olan hədlərin hasilinə bərabərdir, yəni: $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$

Hədləri müsbət olan həndəsi silsilə üçün bu xassəni

$$b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}} \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad \text{şəklində yazmaq olar.}$$

Xassə 2. Həndəsi silsilədə nömrələri $n + m = k + l$ şərtini ödəyən hədlər üçün

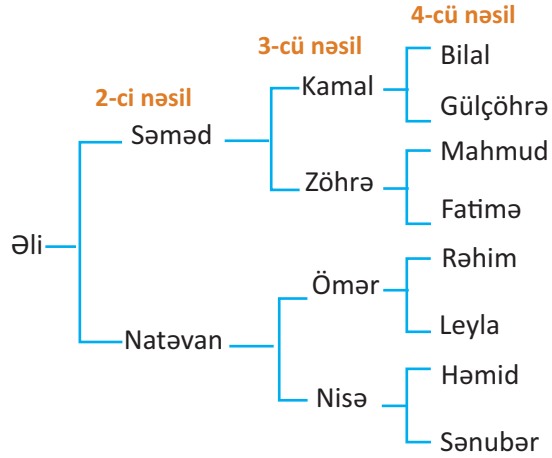
$$b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l \quad \text{bərabərliyi doğrudur.}$$

Öyrənmə tapşırıqları

- 23** > 1) Həndəsi silsilədə $b_3=4$ olarsa, $b_2 \cdot b_4$ hasilini tapın.
2) Həndəsi silsilədə $b_3 \cdot b_5 = 36$ olarsa, tapın: a) $b_2 \cdot b_6$; b) $|b_4|$
- 24** > a) $x - 1$; 8; $x + 11$ ədədləri həndəsi silsilənin ardıcıl hədləridir. x -i tapın.
b) $x - 1$; $x + 2$; $x + 8$ ədədləri həndəsi silsilənin ardıcıl hədləridir. x -i tapın.
- 25** > Verilmiş ədədlər arasında elə ədəd yazın ki, onlar həndəsi silsilə əmələ gətirsin.
a) 3; $?$; 12 b) 6; $?$; $2\frac{2}{3}$
- 26** > (b_n) həndəsi silsiləsində: a) $b_4^2 = b_3 \cdot b_5$; b) $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$;
c) $b_5 \cdot b_9 = b_6 \cdot b_8$; d) $b_3 \cdot b_7 = b_4 \cdot b_6$; e) $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$ ($n+m = k+l$) olduğunu göstərin.
- 27** > $\therefore (b_n)$ həndəsi silsilə olarsa, a) b_1 ; b_3 ; b_5 ; b_7 ; ... b) b_1^2 ; b_2^2 ; b_3^2 ; ... ardıcılığı həndəsi silsilədirmi?

Araşdırma. Əli öz ata-anasının, 4 nənə-babasının, 8 ulu nənə-babasının adını yazmaqla yalnız birbaşa valideynləri göstərən nəsil ağacını tərtib etmişdir.

Əlinin 10 nəsil valideynlərinin sayı neçə nəfərdir?



Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturu

Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmini S_n ilə işarə edək:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \quad (1)$$

$q = 1$ olarsa, bütün hədlər b_1 -ə bərabərdir və bu halda $S_n = n \cdot b_1$ olar.
 $q \neq 1$ olan hala baxaq.

(1) bərabərliyinin hər iki tərəfini q -yə vuraq:

$$q \cdot S_n = b_1 \cdot q + b_2 \cdot q + b_3 \cdot q + \dots + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q \quad (2)$$

(2) bərabərliyindən (1) bərabərliyini çıxsaq, alarıq:

$$q \cdot S_n - S_n = b_n \cdot q - b_1$$

$$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}, \quad (q \neq 1) \quad (3)$$

(3) düsturuna həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturu deyilir.

Burada $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ olduğunu nəzərə alsaq, onu

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad (q \neq 1) \quad \text{şəklində yazıla bilər.}$$

Nümunə. Həndəsi silsilədə $b_2 = 6$, $b_5 = 48$ olarsa, ilk altı həddin cəmini tapın.

Həlli. $b_5 = b_2 \cdot q^3$ olduğundan $q^3 = \frac{b_5}{b_2} = \frac{48}{6} = 8$, $q = 2$,

$b_2 = b_1 \cdot q$ düsturuna görə $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{6}{2} = 3$ tapılır.

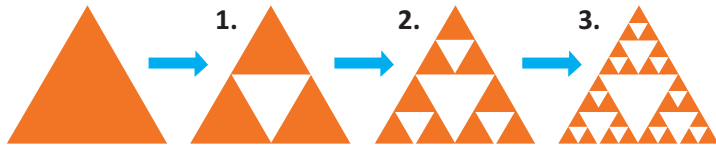
Onda $S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = 189$ olar.

Öyrənmə tapşırıqları

- 28** > Verilənlərə görə həndəsi silsilənin tələb olunan sayda hədlərinin cəmini tapın.
- a) $b_1 = 16, q = \frac{1}{2}, S_6 = ?$ b) $b_1 = 1, q = -2, S_5 = ?$
c) $3; 6; \dots, S_{10} = ?$ d) $1; -2; 4; \dots, S_8 = ?$
- 29** > Toplananları həndəsi silsilənin hədləri olan cəm üçün tələb olunanı tapın.
- 1) $-4 + 12 + (-36) + 108 + \dots$ 2) $160 + (-80) + 40 + (-20) + \dots$
a) $n = 6, S_6 = ?$ b) $S_n = -244, n = ?$ a) $n = 7, S_7 = ?$ b) $S_n = 105, n = ?$
- 30** > Həndəsi silsilədə verilənlərə görə tələb olunanları tapın.
- a) $S_4 = 45, q = 2, b_1 = ?$ b) $S_4 = 130, q = \frac{2}{3}, b_4 = ?$
c) $b_1 = 2, b_5 = 162$ olarsa, $S_6 = ?$ d) $b_2 = \frac{1}{5}, b_5 = \frac{1}{625}$ olarsa, $S_5 = ?$
- 31** > Həndəsi silsilə olan $b_n = 3 \cdot 2^n$ ardıcılığının: a) ilk 5 həddinin; b) ilk n həddinin cəmini tapın.
- 32** > Həndəsi silsilənin dördüncü və birinci hədlərinin fərqi 26, beşinci və ikinci hədlərinin fərqi isə 78-dir. Bu silsilənin ilk altı həddinin cəmini tapın.
- 33** > $x \neq 1$ olduqda ifadəni sadələşdirin.
- a) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ b) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$
- 34** > İfadəni sadələşdirin ($n \neq 1$).
- a) $\frac{1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5}{1 + n + n^2}$ b) $\frac{1 + n + n^2 + n^3}{1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7}$
- 35** > Verilən həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturunu yazın ($y \neq 1$).
- a) $1, y, y^2, y^3, y^4, \dots$ b) $1, y^3, y^6, y^9, \dots$
- 36** > Hədlərinin sayı cüt olan sonlu həndəsi silsilədə cüt nömrəli hədlərin cəminin, tək nömrəli hədlərin cəminə olan nisbəti silsilə vuruğuna bərabərdir. Bunu isbat edin.

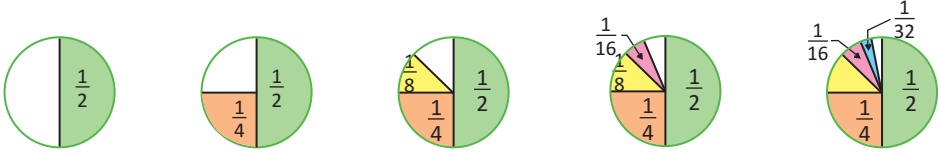
Tətbiq tapşırıqları

- 37 > Təhlükəsizlik üçün signalizasiya cihazları istehsal edən şirkət iş başladıqda ildə 10000 cihaz istehsal edirdi. İstehsalın artımı ildə 20% olmuşdur.
- a) Şirkət fəaliyyətinin 5-ci ilində neçə cihaz istehsal etmişdir.
b) İlk 5 ildə cəmi neçə cihaz istehsal edilmişdir?
- 38 > Fərrux bir şəkllə baxırdı. Şəkildə bir it çəkilmişdi, itin arxasında 4 balası var idi. Hər balanın arxasınca 4 pişik gedirdi. Hər pişiyin arxasında 4 balası var idi. Hər pişik balasının arxasınca 4 siçan gedirdi. Fərrux bu şəkildə cəmi neçə ayaq saya bilərdi?
- 39 > Polyak alimi Vatslav Serpinski bərabərtərəfli üçbucağın tərəflərinin orta nöqtələrini birləşdirməklə yaranan bərabərtərəfli üçbucaqları kəsib çıxarmaqla "Serpinski xəlbiri" kimi tanınan mozaikani yaratmışdır. Təsəvvür edin ki, ilkin üçbucaq tərəfləri vahid uzunluqda olan bərabərtərəfli üçbucaqdır.



- a) 1-ci addımda kəsilib çıxarılan üçbucağın sayı 1, 2-ci addımda 3, 3-cü addımda 9-dur və s. n -ci addımda kəsilib çıxarılan üçbucaqların sayını göstərən düstur yazın.
- b) Bu qayda ilə 4-cü; 5-ci addımda neçə bərabərtərəfli üçbucaq kəsilib çıxarılmış olacaq?
- c) 3-cü addımda verilən üçbucaqdan bölünməmiş qalan (rəngli) sahəni hesablayın.
- 40 > Proqram təminatı ilə məşğul olan şirkət oyunun təkmilləşdirilməsi üçün 100 000 manat xərcləməyi planlaşdırır. Şirkətin maliyyə menecerləri bu iş üçün birinci həftə 4000 manat, sonrakı hər həftə isə əvvəlkindən 20% çox olmaqla pul xərcləməli olacaqlar. a) 5-ci həftədə; b) ilk beş həftədə nə qədər pul xərclənəcək? c) Neçənci həftədə artıq xərcləmək üçün yetərinçə pul qalmayacaq? Seçib yoxlamaqla həll edin.
- 41 > Hər biriniz 10 nəsil üçün ata-ana, nənə-baba, ulu nənə və babalarınızın sayını hesablayın. Neçənci nəsilə bu insanların sayı 1 000 000-dan çox olacaq?

Praktik məşğələ. Şəkilə bir dairənin müəyyən qayda ilə hissələrə bölünmə addımları verilmişdir. a) Bu qaydanı sözlə təqdim edin. b) dairəni bu qayda ilə kiçik hissələrə bölmə prosesi sonludurmu?



c) Dairəni hissələrin cəmi şəklində ifadə edin. Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturunun tətbiqini araşdırın.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

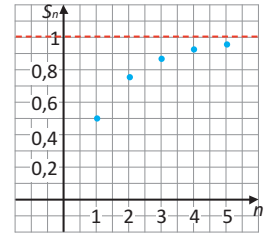
$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0,75$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \approx 0,88$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \approx 0,94$$

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \approx 0,97$$

$$S_n = b_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$



d) n -in qiyməti artdıqca $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ həddinin qiymətini 0-la müqayisə edin.

e) Verilən qrafiki situasiyaya uyğun izah edin. $n \rightarrow \infty$, $S_n \rightarrow 1$ fikrini qrafikə görə təqdim edin.



Sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi

Sonsuz həndəsi silsilənin vuruğu $|q| < 1$ şərtini ödədikdə ona **sonsuz azalan həndəsi silsilə** deyilir. Həndəsi silsilənin ilk n həddinin cəmi düsturunu aşağıdakı şəkildə çevirək:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n$$

$|q| < 1$ olarsa, onda n sonsuz artıqda q^n vuruğu, deməli, $\frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n$ hasilə də sıfıra yaxınlaşır. Ona görə də n sonsuz olaraq artıqda S_n cəmi $\frac{b_1}{1 - q}$ ədədinə yaxınlaşır. $\frac{b_1}{1 - q}$ ədədinə sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi deyirlər.

Bu cəmi S ilə işarə etsək, yaza bilərik: $S = \frac{b_1}{1 - q}$, ($|q| < 1$)

Nümunə. Sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi düsturunu $0,(3)$ dövrü onluq kəsrini adi kəsre çevirmək üçün tətbiq edin.

Həlli. $0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots$

$q = \frac{1}{10}$, $b_1 = \frac{3}{10}$ olduğundan, sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi düsturu

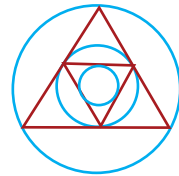
görə $0,(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \dots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ olur.

Öyrənmə tapşırıqları

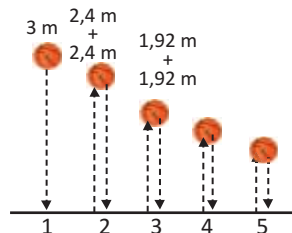
- 42) Həndəsi silsilənin vuruğunun $|q| < 1$ şərtini ödədiyini yoxlayın və silsilə cəmini tapın.
a) 18; 6; 2; b) 0,3; 0,03; 0,003;
- 43) Sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmini tapın.
a) $-\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots$ b) $1; \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$
- 44) Sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəminə və birinci həddinə görə vuruğunu tapın.
a) $S = 4; b_1 = 1$ b) $S = 12; b_1 = 3$ c) $S = -\frac{1}{9}; b_1 = -\frac{1}{6}$
d) $S = 8; b_1 = \frac{1}{2}$ e) $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}; b_1 = \sqrt{3}$ f) $S = \frac{11}{13}; b_1 = 1$
- 45) Toplananları sonsuz həndəsi silsilənin hədləri olan ($|a| < 1$) cəmi tapın
a) $1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ b) $1 - a + a^2 - a^3 + \dots$
c) $1 + a^2 + a^4 + a^6 + \dots$ d) $1 - a^3 + a^6 - a^9 + \dots$
- 46) Dövri onluq kəsləri adi kəsre çevirin
a) 0,(2) b) 0,(15) c) 2,(6) d) 0,2(7)

Tətbiq tapşırıqları

- 47) Radiusu 6 sm olan çəvrənin daxilinə düzgün üçbucaq çəkilmişdir. Üçbucağın daxilinə çevrə, bu çəvrənin daxilinə düzgün üçbucaq çəkilmişdir və s. Çəvrələrin uzunluqları cəmini tapın.



- 48) Top 3 m yüksəklikdən yerə dəyir. Hər dəfə yerə dəyəən top əvvəl qalxdığı hündürlüyün 80%-i qədər yuxarı qalxır. Topun qət etdiyi məsafənin ümumi uzunluğu təxmini neçə metr olar?





Ümumiləşdirici tapşırıqlar

1 > Ardıcılığın 4-cü və 6-cı həddini yazın.

a) $a_1 = 5$

$$a_n = a_{n-1} + 3$$

b) $a_1 = 1$

$$a_n = 4a_{n-1}$$

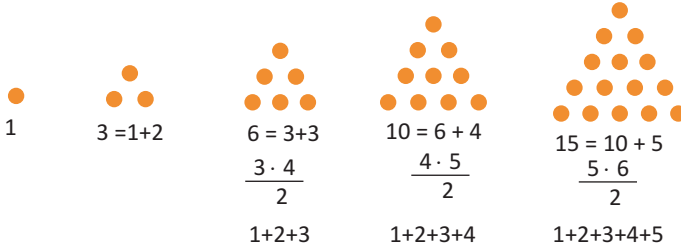
c) $a_n = n^2 - 3n$

d) $a_1 = 1, a_2 = 2$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

2 > 1; 2; 5; 10; a ; 12; b ; c artan ardıcılığında (a, b, c natural ədədlərdir) hədlərin ədədi ortası 12-yə bərabərdir. b -nin ən böyük qiyməti neçə ola bilər?

3 > Aşağıdakı şəkli araşdırın. Ardıcılığın daha 5 həddini yazın. Bu ardıcılığın istənilən həddini tapmaq üçün düstur yazın.



4 > Ardıcılığın ədədi və ya həndəsi silsilə olduğunu müəyyən edin, növbəti iki həddini yazın.

a) $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}, \dots$

b) $\sqrt{3}; 3; 3\sqrt{3}; 9; \dots$

c) $1; -1; 1; -1; \dots$

5 > a) Ədədi silsilədə $a_3 = 4, a_7 = 6$ olarsa, a_5 və a_8 hədlərini tapın.

b) Ədədi silsilədə $a_3 + a_6 + a_{24} = 12$ olarsa, ilk 21 həddin cəmini tapın.

6 > Ədədi silsilədə $a_4 = 9, a_9 = -6$ olarsa, ilk neçə həddin cəmi 54-ə bərabər olar?

7 > 6,6; 5,8; ədədi silsiləsinin müsbət hədlərinin cəmini tapın.

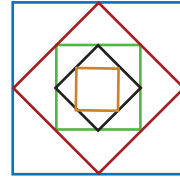
8 > İlk n həddinin cəmi $S_n = 2n^2 + 3n$ düsturu ilə verilən ədədi silsilənin birinci həddini və fərqi tapın.

9 > Tikinti şirkəti 500000 manata buldozer almışdır. Buldozerin qiyməti hər il əvvəlkinə görə 20% ucuzlaşır. Buldozerin qiymətini istənilən n -ci ildə müəyyən etməyə imkan verən düstur yazın. Buldozerin qiyməti neçə ildən sonra 256 min manat olacaq?

10 > a) Həndəsi silsilədə $b_2 = 0,1$ və $b_5 = 0,8$ olarsa, b_6 və b_8 hədlərini tapın.

b) Həndəsi silsilənin ilk dörd həddinin cəmi 8, sonrakı dörd həddin cəmi isə 4-ə bərabərdir. İlk on iki həddin cəmini tapın.

- 11 > $a, b, 12$ ədədləri həndəsi silsilə, $a, b, 9$ ədədləri isə ədədi silsilə əmələ gətirirsə, a və b ədədlərini tapın.
- 12 > Ardıcılıqlar üçün uyğunluğu müəyyən edin (c_n -ardıcılığın n -ci həddi, S_n -ilk n həddin cəmidir).
1. $c_n = 2n^2 - 3$
 2. $c_n = 3 \cdot 2^n$
 3. $S_n = n^2 + 2n$
- A) Həndəsi silsilədir
B) Ədədi silsilədir
C) $c_3 = 7$
D) $c_3 = 15$
- 13 > Düzxətli hərəkət edən cisim birinci saniyədə 6 m, hər sonrakı saniyədə əvvəlkindən 4 m çox olmaqla yol gedir.
- a) Cisim ilk 20 saniyə ərzində hansı məsafəni getmişdir?
b) Cisim 4800 m məsafəni neçə saniyəyə qət edər?
- 14 > Tərəfi 6 sm olan kvadrat verilmişdir. Onun tərəflərinin ortaları ikinci kvadratın təpələridir, ikinci kvadratın tərəflərinin ortaları üçüncü kvadratın təpələridir və s. Bu qayda ilə qurulmuş bütün kvadratların sahələri cəmini tapın.



- 15 > Tahir və Orxan velosiped almaq arzusundadırlar. Velosipedin qiyməti 120 manatdır. Tahir fikirləşir ki, atası ona birinci gün 4 man, hər sonrakı gün isə əvvəlkindən 4 manat çox pul verərsə, yeddi günə lazımı miqdar pul toplaya bilər. Orxan isə hesab edir ki, atası ona birinci gün 1 man., hər sonrakı gün isə əvvəlkindən 2 dəfə çox pul verərsə, yeddi günə lazımı miqdar toplar. Onlardan hansının fikri doğrudur?
- 16 > Hədləri tam ədədlər olan ədədi silsilədə $a_3 = 11$, ilk 8 həddin cəmi isə 72-dən böyük, 80-dən kiçikdir. a_2 -ni tapın.
- 17 > Ədədi silsilə əmələ gətirən üç ədədin cəmi 45-ə bərabərdir. Birinci həddən 2, ikinci həddən 9, üçüncü həddən isə 8 çıxsaq, bu ədədlər həndəsi silsilə əmələ gətirər. Ədədi silsilənin hədlərini tapın.
- 18 > **(Qədim məsələ)** Tacirin 14 gümüş pulu var. Gümüş pulların kütləsi silsilə fərqi 4-ə bərabər olan ədədi silsilə kimi artır. Axırncı gümüş pulun kütləsi 59 lotdur (lot – qədim ölçü vahididir və 12,8 qrama bərabərdir). Bütün pulların kütləsi nə qədərdir?
- 19 > Cəmi tapın.
- a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \dots$
- b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^5} + \frac{7}{2^7} + \dots$

10

Məlumatın təqdimi Birləşmələr. Ehtimal

Siz bu bölmədə öyrənəcəksiniz

- ✓ Məlumatı sistemləşdirməyi və təqdim etməyi
- ✓ Qruplaşdırılmış məlumatı analiz etməyi
- ✓ Mümkün variantlarının sayını hesablamağı
- ✓ Permutasiyaları və kombinezonları hesablamağı
- ✓ Ehtimalın hesablanmasına aid məsələlər həll etməyi



10-1

Tezlik paylanması cədvəli

Məlumat bazasında ədədi qiymətin təkrarlanma sayına həmin ədədi qiymətin tezliyi deyilir. Tezlik paylanması cədvəlinin qurulmasını nümunə üzərində araşdıraq.

Nümunə 1. Aşağıda 25 şagird arasında özləri də daxil olmaqla ailədə neçə uşaq olduqları haqqında aparılan araşdırmanın nəticələri göstərilmişdir. Məlumatı tezlik cədvəli ilə təqdim edin.

2 2 3 4 5 2 2 2 3
2 1 2 5 3 4 3 1 2
3 5 3 2 1 3 2

Həlli. Göründüyü kimi, uşaqlar ailədə 1, 2, 3, 4 və ya 5 nəfər olduqlarını bildirmişlər.

Üçsütunlu cədvəl çəkək.

1-ci sütunda hər ailədəki uşaqların sayı - 1, 2, 3, 4, 5 ədədi məlumatları yerləşdirilir.

2-ci sütunda bu məlumatlara uyğun sayı göstərən tellər çəkilir.

3-cü sütunda isə tezlik ədədlə yazılır.

Məlumatın təqdimi: Cədvəldən görünür ki, 5 ailədə 3-dən çox uşaq var, 20 ailədə isə 3 və ya 3-dən az uşaq var.

Uşaqların sayı	Sayı (tellə)	Tezlik
1		3
2		10
3		7
4		2
5		3

Məlumat bazasında ədədi qiymətlər çoxlu sayda olub az təkrarlanırsa, onda bu məlumatı intervallarda (siniflərdə) qruplaşdırırlar.

Qruplaşdırılmış məlumatın tezlik cədvəlinin qurulmasını aşağıdakı nümunə üzərində araşdıraraq.

Nümunə 2. Aşağıda verilənlər 50 internet istifadəçisinin yaşı haqqında məlumatı əks etdirir. Məlumatı tezlik cədvəli ilə təqdim edin.

50 40 41 17 11 7 22 44 28 21 19 23 37 51 54 42 88
 41 78 56 72 56 17 7 69 30 80 56 29 33 46 31 39 20
 18 29 34 59 73 77 36 39 30 62 54 67 39 31 53 44

- Həlli:** 1. Məlumatı müəyyən intervallarda qruplaşdırmaqla 7 sinfə ayıraraq.
 2. Hər bir sinfin ölçüsünü (intervalın uzunluğunu) müəyyən edək. Bunun üçün ən böyük qiymətdən (88) ən kiçik qiyməti (7) çıxaraq və siniflərin sayına bölək:
 $(88 - 7) : 7 \approx 11,57 \approx 12$
 3. Göründüyü kimi, ən kiçik qiymət 7-dir və bu birinci sinfin ən kiçik sərhəd qiymətidir, ən böyük isə 18 olacaq, 2-ci sinfin ən kiçik qiyməti 19, ən böyük qiyməti 30, 3-cü sinfin sərhədləri 31 və 42 olacaq və s. (sərhəd qiymətinin intervala daxil olduğunu unutmayın, məlumatların üst-üstə düşməsinə diqqət edin).
 4. Tezlik cədvəlini quraq.

Sınıf (yaş)	7-18	19-30	31-42	43-54	55-66	67-78	79-90	
Sayı	###	### ###	#####	###	###	###		
Tezlik	6	10	13	8	5	6	2	Cəmi: 50

Məlumat bazasını sistemləşdirməni və təqdimini aşağıdakı kimi ümumiləşdirmək olar.

- Məlumat bazasındakı ədədi qiymətlərə (və ya kateqoriyalara - rəng, növ və s.) görə məlumatlar siniflərdə - intervallarda qruplaşdırılır. Hesablamaların əlverişli olması üçün siniflərin sayının 5 ilə 12 arasında olması tövsiyə edilir.
- Siniflərin - intervalların ölçüsü müəyyən edilir. Bunun üçün məlumatın ən böyük və ən kiçik qiymətləri fərqi siniflərin sayına bölünür. Qiismətdə alınan ədədin təqribi qiyməti sinfin ölçüsü kimi qəbul edilir.
- Hər bir sinfin-intervalın sərhəd qiymətləri - ən böyük və ən kiçik qiyməti müəyyən edilir. Birinci intervalın ən kiçik qiyməti verilən məlumatlardan seçilir, ən böyük qiymət isə sinfin ölçüsünə görə tapılır.
- Tezlik cədvəli qurulur. Cədvəldə siniflərin sərhəd qiymətləri, məlumata uyğun tezlik tellə və ədədlə göstərilir.

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Sınıfdə 25 şagird riyaziyyatdan qiymətləndirmə tapşırıqlarını yerinə yetirdi. Onların aldıkları qiymətlər aşağıda verildiyi kimi oldu. Məlumatı tezlik cədvəli ilə təqdim edin.

3	2	3	3	4	3	3	2	5	4	5	4	
2	4	4	3	3	4	3	2	4	5	4	5	2

- 2 > Aşağıdakı məlumatları tələb olunan sayda siniflərdə qruplaşdırın.

a) **Satış.** Siniflərin sayı: 6

Məlumat: Avqust ayında satışdan əldə olunan məbləğ (manatla)

2114, 2468, 6992, 1876, 4105, 3183, 6932, 1355, 4278, 1030, 2702, 3077, 5835, 5512, 4697, 2478, 5981, 3643, 3858, 3500, 2608, 1000

b) **Reaksiya müddəti.** Siniflərin sayı: 7

Məlumat: 30 qadının səsli xəbərdarlığa reaksiya müddəti (millisaniyə ilə)

507, 389, 305, 298, 336, 310, 506, 382, 320, 450,
309, 416, 359, 442, 307, 337, 373, 469, 351, 411,
388, 422, 413, 428, 387, 454, 323, 441, 388, 426

- 3 > 1) İdmançılar kütlələrini ölçmüş və nəticələr aşağıdakı kimi olmuşdur. Siniflərin sayı 5 olmaqla məlumatı tezlik cədvəli ilə təqdim edin.

50,	50,	53,	53,	54,	55,	55,	55,	56,	60,
62,	62,	62,	64,	64,	64,	65,	65,	65,	66,
66,	66,	70,	72,	72,	72,	75,	75,	76,	80,
80,	80,	81,	81,	82,	82,	83,	84,	85,	85,
85,	86,	87,	93,	94,	97,	98,	98,	100,	100

- 2) Sizin sinfinizdəki şagirdlərin kütlələrini əks etdirən tezlik cədvəli tərtib edin.



Nisbi tezlik

Nisbi tezlik tezliyin ümumi məlumatın sayına olan nisbəti kimi müəyyən edilir.

$$\text{Nisbi tezlik} = \frac{\text{Tezlik}}{\text{Ümumi sayı}}$$

Nisbi tezlik adi kəsrlə, onluq kəsrlə və ya faizlə ifadə edilir. Nisbi tezliklərin cəmi 1-ə və ya 100%-ə bərabər olmalıdır.

Sinfin-intervalın orta nöqtəsi sinfin aşağı sərhəd qiyməti ilə yuxarı sərhəd qiymətinin cəminin yarısına bərabərdir.

$$\text{Sinfin-intervalın orta nöqtəsi} = \frac{\text{Aşağı sərhəd qiyməti} + \text{Yuxarı sərhəd qiyməti}}{2}$$

İnternet istifadəçilərini yaşı haqqında verilən nümunə üzərində bu göstəriciləri müəyyən edək:

Sınıf	Tezlik	Sinfin orta nöqtəsi	Nisbi tezlik
7-18	6	$\frac{7+18}{2} = 12,5$	$\frac{6}{50} = 0,12$
19-30	10	$\frac{19+30}{2} = 24,5$	$\frac{10}{50} = 0,2$
31-42	13	$\frac{31+42}{2} = 36,5$	$\frac{13}{50} = 0,26$
...

12,5; 24,5; 36,5 ardıcılığından görüldüyü kimi, birinci intervalın orta nöqtəsini tapdıqdan sonra hər sonrakı intervalın orta nöqtəsini özündən əvvəlki intervalın orta nöqtəsi ilə sinfin ölçüsünü toplamaqla tapmaq olar.

Məlumat bazasını bu göstəricilər daxil olmaqla aşağıdakı cədvəllə təqdim edək.

İstifadəçilərin yaşı və istifadə müddəti			
Sınıf (yaş)	Tezlik	Sinfin orta nöqtəsi	Nisbi tezlik
7-18	6	12,5	0,12
19-30	10	24,5	0,2
31-42	13	36,5	0,26
43-54	8	48,5	0,16
55-66	5	60,5	0,1
67-78	6	72,5	0,12
79-90	2	84,5	0,04
	Cəmi: 50		Cəmi: 1

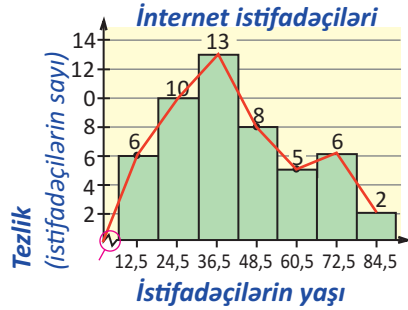
Bu araşdırma göstərir ki, istifadəçilərin 26%-ni 31- 42 yaşlı şəxslər təşkil edir.

Məlumatın təqdimi. Tezlik histoqramından görünür ki, istifadəçilərin yarısından çoxu yaşı 42-dən az olan şəxslərdir.

Tezlik poliqonu məlumatın tezliyə görə paylanmasını qrafik olaraq əks etdirir. Tezlik poliqonunu 2 üsulla qurmaq olar.

1. Histoqramdan istifadə etməklə:

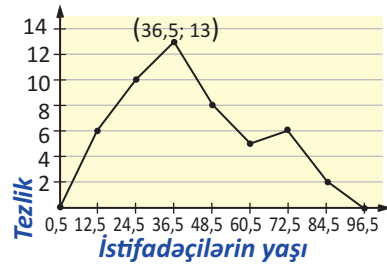
- histoqram qurulur;
- intervalların orta nöqtəsi qeyd edilir (histoqramın sütunu üzərində);
- bu nöqtələr birləşdirilir.



2. Tezlik cədvəlindən istifadə etməklə:

- absis oxu üzərində uyğun miqyasla sinfin-intervalın orta nöqtəsi, ordinat oxu üzərində sinfə uyğun tezlik qeyd edilir.
- qeyd edilmiş nöqtələr birləşdirilir.

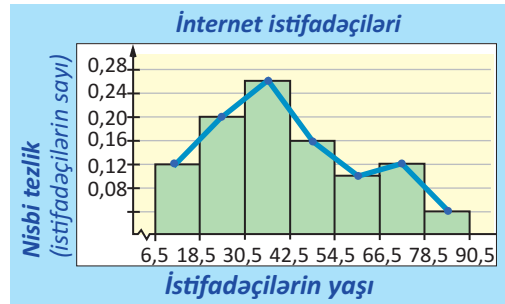
Alınan qrafik tezlik poliqonu adlanır.



Tezlik poliqonuna görə məlumatı analiz etmək və yeni məlumatlar əldə etmək olar. Məsələn, tezlik poliqonundan (36,5;13) nöqtəsinin koordinatlarına görə müəyyən etmək olar ki, internet istifadəçiləri arasında orta yaşı (təxminən) 36,5 olan sinfdəki şəxslər çoxluq təşkil edir.

Nisbi tezlik histoqramı.

Toplanmış məlumatın müqayisəsinin asan, əyani olması üçün bir çox hallarda məlumatı nisbi tezlik histoqramı və ya nisbi tezlik poliqonu ilə təqdim etmək daha əlverişli olur.



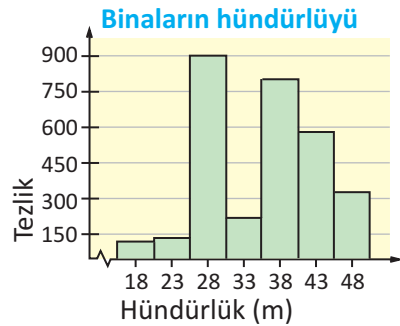
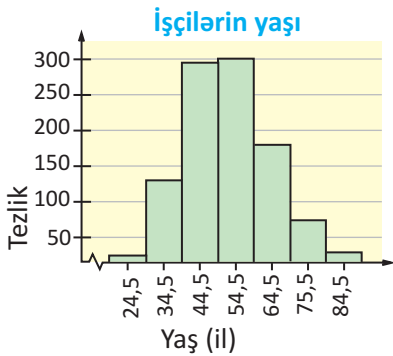
Tezlik histoqramından görünür ki, təxminən 25% istifadəçi 30 ilə 42 yaş arasındadır.

Öyrənmə tapşırıqları

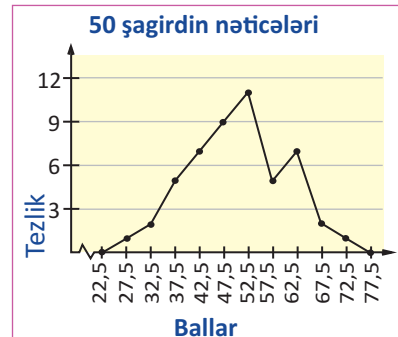
- 7 > Verilən məlumat ailələrin aylıq ərzağa neçə manat pul xərclədikləri haqqında seçmə nümunələr üzərində aparılan araşdırmanın nəticələrini əks etdirir.
- Məlumatı 6 sinifdə qruplaşdırın və uyğun tezlik cədvəli qurun:
 - Məlumatı tezlik poliqonu ilə təqdim edin.

279	205	279	266	199	177	162	232
192	181	321	309	246	278	50	40
116	100	151	240	474	297	170	188
429	294	570	342	279	235	434	123
303	335	320	325	180	290	578	205

- 8 > 1) Histroqramlara görə müəyyən edin:
- siniflərin sayını;
 - siniflərin ölçüsünü;
 - ən böyük və ən kiçik tezlikli sinifləri və bu siniflərin tezliklərinin təqribi qiymətlərini;
- 2) Hər bir histoqrama uyğun tezlik poliqonunu qurun.



- 9 > Tezlik poliqonuna görə tapşırıqları yerinə yetirin.
- Ən böyük və ən kiçik tezliyi olan sinifləri müəyyən edin.
 - Təxminən neçə nəfərin 50-dən az bal topladığını söyləmək olar?



10> Cədvəl meşədə ağacların hündürlüyü haqqında məlumatı əks etdirir.

- a) Nisbi tezliyi əks etdirən sütun əlavə etməklə cədvəli dəftərinizdə çəkin.
b) Uyğun tezlik histoqramını və poliqonunu qurun.

Sınıf (ağacların hündürlüyü, m)	Tezlik (ağacların sayı)
10-14	10
15-19	15
20-24	20
25-29	30
30-34	25
35-39	15
40-44	10

11> Verilən məlumatları 5 sinifdə qruplaşdırmaqla:

- a) tezlik histoqramı;
b) nisbi tezlik histoqramı;
c) tezlik poliqonu qurun.
d) ən böyük və ən kiçik nisbi tezlikli sinifləri müəyyən edin.

1) **Oyunun nəticələri** (xalların sayı ilə)

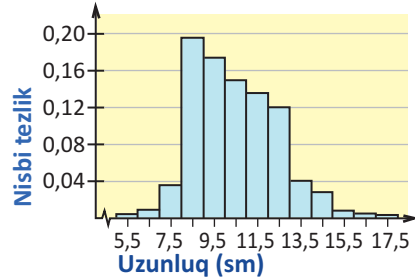
Məlumat: 154 257 195 220 182 240 177 228 235 149 174 192 207
185 180 264 169 225 239 148 190 182 205 148 188

2) **Kənddə fermerlərin sahələri (hektarla)**

Məlumat: 12 7 9 8 9 8 12 10 9 10 6 8 13
12 10 11 7 14 12 8 10 9 11 13 5

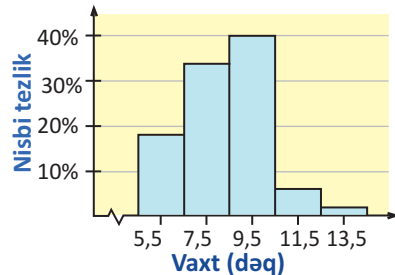
- 12> a) Nisbi tezliyi ən böyük və ən kiçik olan sinfi müəyyən edin;
b) Uzunluğu orta hesabla 12,5 sm olan balıqlar bütün balıqların neçə faizini təşkil edir?

Akvariumdakı balıqların uzunluğu (sm-lə)



- 13> a) Histoqrama görə "hər 100 çağırışdan 50-də təcili yardım 10 dəqiqədən az müddətdə yetişmişdir" fikri doğrudurmu?
b) Nisbi tezliyin qiymətinin ən böyük olduğu hala uyğun məlumatı təqdim edin.

Təcili yardımın gəlmə müddəti





Tezlik paylanmasına görə ədədi orta

Qruplaşdırılmış məlumatın tezlik paylanmasına görə ədədi ortası aşağıdakı addımlarla tapılır.

1. Hər bir sinfin-intervalın orta nöqtəsi (x) tapılır.

$$x = \frac{\text{ən böyük qiymət} + \text{ən kiçik qiymət}}{2}$$

2. Tezliklərin (f) cəmi tapılır.

$$n = \sum f$$

3. Hər sinfin orta nöqtəsinə uyğun ədəd (x) ilə tezliyin (f) hasilini tapılır və nəticələr cəmlənir.

$$\sum(x \cdot f)$$

4. Ümumi məlumata uyğun ədədi orta hesablanır.

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot f)}{n}$$

\sum işarəsi cəmi göstərir və "siqma" kimi oxunur. $n = \sum f$ olduğuna diqqət edin.

Nümunə. Cədvəl bir gündəki telefon danışqlarının müddətinə görə şirkət işçilərinin sayını göstərir. Bu şirkətdə bir nəfər orta hesabla neçə dəqiqə telefonla danışır?

Həlli. Bu məsələdə qruplaşdırılmış məlumata uyğun ədədi ortanı hesablamaq tələb edilir.

1. Hər sinfin - intervalın orta nöqtəsini (x) müəyyən edib, cədvələ əlavə edilmiş sütunda yazaq.

Sinif (danışq müddəti)	Tezlik (işçilərin sayı)
1–5	12
6–10	26
11–15	20
16–20	7
21–25	11

2. Tezliklərin (f) cəmini tapaq: $12 + 26 + 20 + 7 + 11 = 76$

3. Hər bir sinfin - intervalın orta nöqtəsinə uyğun ədəd ilə tezliyin hasilini tapıb alınan nəticələri cəmləyək: $3 \cdot 12 + 8 \cdot 26 + 13 \cdot 20 + 18 \cdot 7 + 23 \cdot 11 = 883$

4. Üçüncü nəticəni ikinci nəticəyə bölməklə ədədi ortanı tapaq:

$$\text{Ədədi orta} = \frac{883}{76} \approx 11,6$$

Ədədi ortaya görə demək olar ki, bu şirkətdə hər işçi gündə orta hesabla 11,6 dəqiqə telefonla danışır.

Sinif	Sinfin orta nöqtəsi(x)	Tezlik (f)	Tezlik \times Sinfin qiyməti
1–5	3	12	36
6–10	8	26	208
11–15	13	20	260
16–20	18	7	126
21–25	23	11	253
		$\sum f = 76$	$\sum(x \cdot f) = 883$

Öyrənmə tapşırıqları

- 14) Şirkətdəki 30 işçidən 8 nəfərinin maaşı 120 manat, 22 nəfərinin maaşı 330 manatdır. Şirkətdəki işçilərin orta əmək haqqını tapın.

- 15) Eyni şirkətin hazırladığı piroqlar şəhərin müxtəlif mağazalarında müxtəlif qiymətə satılır. Bir gün ərzində satılan piroqların sayı və bir ədədinin qiyməti cədvəldə verilmişdir. Şirkət bir piroqu orta hesabla neçə manata satır?

Piroq satışı		
Mağaza	Qiyməti (manat)	Sayı
A	1,20	120
B	1,50	70
C	1,60	110
D	1,10	200

- 16) Cədvəldə verilmiş məlumatlara görə ədədi ortanı tapın.

a) Kompüter oyununda toplanan xallara görə oyunçuların orta xalını tapın.

Topladığı xal	Oyunçuların sayı
1–10	2
11–20	5
21–30	6
31–40	4
41–50	3

b) Bir həftə ərzində doğulan körpələrin kütlələri haqqında məlumata görə bir körpənin kütləsinin orta qiymətini tapın.

Kütləsi	Sayı
[1 - 1,5)	1
[1,5 - 2)	3
[2 - 2,5)	8
[2,5 - 3)	15
[3 - 3,5)	10
[3,5 - 4)	9
[4 - 4,5)	0

- 17) Məlumatları siniflərdə qruplaşdırın, cədvəl qurun və ədədi ortanı hesablayın.

a) Məlumat bazası: 30 kolun hündürlüyü (sm-lə). Siniflərin sayı: 5.

67 76 69 68 72 68 65 63 75 69
66 72 67 66 69 73 64 62 71 73
68 72 71 65 69 66 74 72 68 69

b) Məlumat bazası: 20 xəstənin xəstəxanada qalma müddəti (günlə). Siniflərin sayı: 4.

6 9 7 14 4 5 6 8 4 11
10 6 8 6 5 7 5 6 3 11

10-2

Birləşmələr

Müəyyən xassəli elementlərin (variantların) seçilməsi, müxtəlif kombinasiyaların sayılması, bu elementlərin müəyyən nizamla düzülməsi və s. kimi məsələlərə birləşmə (kombinator) məsələləri deyilir. Verilən kəmiyyətlərin (parametrlərin) kiçik qiymətlərində kombinator məsələləri variantları saymaqla (budaqlanan diaqram qurmaqla və ya siyahı tutmaqla) həll etmək asandır. Parametrlərin böyük qiymətlərində bu üsullar az səmərəli olur. Belə hallarda əsas prinsiplərdən biri olan vurma qaydası tətbiq edilir.

Vurma prinsipi. a elementini n üsulla seçmək mümkündürsə və hər seçimə qarşı b elementini m üsulla seçmək mümkündürsə, (a, b) nizamlı cütünü $m \times n$ sayda üsulla seçmək mümkündür.

Vurma prinsipi istənilən sonlu sayda obyektlərin seçimi üçün doğrudur.

Nümunə. Tutaq ki, avtomobillər latın əlifbasının üç hərfinin və üç rəqəmin ardıcıl yazılışı ilə nömrələnir. İşarələrin düzülüşünə görə neçə müxtəlif avtomobil nömrəsi hazırlamaq mümkündür? a) hərfin təkrarlanmasına icazə verilir. b) hərfin təkrarlanmasına icazə verilmir.

Həlli.

	Hərflər			Rəqəmlər			Seçimlərin ümumi sayı
a)	26	26	26	10	10	10	$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17\,576\,000$
b)	26	25	24	10	10	10	$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 15\,600\,000$

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Yazılışında 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 rəqəmlərinin hər birinin ən çoxu bir dəfə istifadə edildiyi müxtəlif ikirəqəmli ədədlər yazılır.
 - a) Ədədin yazılışında onluqlar neçə müxtəlif üsulla seçilə bilər?
 - b) Onluqlar seçildikdən sonra təklil neçə müxtəlif üsulla seçilə bilər?
 - c) Verilən şərtlərlə neçə ikirəqəmli ədəd yazıla bilər?
- 2 > 1, 2, 3, 4, 5 rəqəmləri ilə neçə müxtəlif üçrəqəmli ədəd yazıla bilər? Onlardan neçəsi 5-ə bölünür?
- 3 > Əli, Vüqar, Yaşar, Leyla, İlahə və Toğrul öz aralarında keçirdikləri şahmat yarışında müxtəlif xallar topladılar. I və II yerləri bölüşdürməyin mümkün variantlarının sayını tapın.



Permutasiya - yerdəyişmə. ${}_n P_n$

Bəzi hallarda çoxluğa daxil olan elementlərin düzülmə sırasına görə mümkün variantların sayını tapmaq tələb edilir. Məsələn, 1, 2, 3 rəqəmlərinin hər birindən bir dəfə istifadə etməklə neçə müxtəlif üçrəqəmli ədəd yazmaq olar? 123, 132, 213, 231, 312, 321. Burada hər bir düzülüş **permutasiya** (yerdəyişmə) adlanır. Hər hansı rəqəmin 1-ci yerdə seçilməsinin 3, qalan 2 rəqəmdən birinin 2-ci yerdə seçilməsinin 2, üçüncü rəqəmin isə bir variantı var. Deməli, vurma prinsipini tətbiq etsək, verilən rəqəmlərin bütün permutasiyaları sayı $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ -dır.

Yalnız elementlərinin düzülüşü ilə fərqlənən müxtəlif nizamlanmış çoxluqlar baxılan çoxluğun permutasiyaları (yerdəyişmələri) adlanır, onların sayı ${}_n P_n$ ilə işarə edilir və "permutasiya n elementdən n " kimi oxunur.

Permutasiyanın 1-ci elementini n elementli çoxluqdan n üsulla, 2-ci elementini qalan $(n - 1)$ elementdən $(n - 1)$ üsulla, 3-cü elementini qalan $(n - 2)$ elementdən $(n - 2)$ üsulla və s. nəhayət, n -ci (sonuncu) elementi 1 üsulla seçmək olar. Onda bütün permutasiyaların sayı vurma prinsipinə görə

$${}_n P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \text{ olar.}$$

İlk n natural ədədin hasili $n!$ ilə işarə olunur və "en faktorial" kimi oxunur.

Beləliklə, n elementli çoxluğun bütün mümkün permutasiyaları sayı ${}_n P_n = n!$ düsturu ilə hesablanır.

$$\text{Burada } n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Xüsusi halda, $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$... və s. $0! = 1$ qəbul edilir.

Hesablamalarda $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ və $(n+2)! = (n+2) \cdot (n+1) \cdot n!$ düsturlarından

istifadə səmərəli olur. Məsələn: $\frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 72$

Nümunə. 5 nəfərin bir sırada düzülməsinin neçə mümkün variantı var?

Həlli. Burada $n = 5$ olduğundan mümkün variantların sayı

$${}_5 P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ olur.}$$

Öyrənmə tapşırıqları

- 4 > 1234 ədədinin rəqəmlərini yerdəyişmə etməklə neçə müxtəlif ədəd yazmaq olar?
- 5 > Turnirdə 6 nəfər iştirak edir. Turnir cədvəlində yerlər neçə müxtəlif üsulla bölüşdürülə bilər?
- 6 > 0, 1, 2, 3, 4 rəqəmlərindən, rəqəmləri təkrarlanmamaqla neçə beşrəqəmli ədəd yazmaq olar?

7 > Hesablayın.

a) $\frac{8!}{6!}$

b) $\frac{18! - 2 \cdot 17!}{16! + 15!}$

c) $\frac{9! \cdot 5!}{8! \cdot 6!}$

d) $\frac{{}_5P_5 - 2 \cdot {}_3P_3}{{}_4P_4 + 5 \cdot {}_3P_3}$

8 > “ATOM” sözündəki hərflərin yerini dəyişərək neçə müxtəlif “söz” düzəltmək olar?

9 > Qrupdakı 8 şagird Lalə və Elmirin yanaşı dayanması şərti ilə neçə müxtəlif üsulla cərgəyə düzülə bilər?

10 > 6 nəfər dəyirmi masa ətrafında neçə müxtəlif üsulla əyləşə bilər?

11 > “EHTİMAL” sözündəki hərfləri yerdəyişmələr edərək müxtəlif “sözlər” düzəldilir. Onların neçəsində saitlər yanaşı yazılır?

12 > Sınıfdə 8 şagird var - 5 oğlan, 3 qız. Onların qapıdan çıxma ardıcılıqlarının neçə mümkün variantı var: a) qapıdan əvvəlcə qızlar çıxır; b) qapıdan əvvəlcə oğlanlar çıxır; c) istənilən ardıcılıqda çıxma bilər.

✓ Təkrarlı permutasiyalar

Verilmiş n müxtəlif elementin mümkün permutasiyaları $n!$ saydadır. Lakin bu elementlər arasında bir-birindən fərqlənməyən (təkrarlanan) elementlər varsa, müxtəlif permutasiyaların sayı azalır. Bunu nümunələr üzərində göstərik.

1 **Nümunə.** “ALTAY” sözündəki hərfləri yerdəyişmə edərək, oxunuşları müxtəlif olan neçə “söz” düzəltmək olar?

Həlli. Əgər hərflər müxtəlif olsaydı $5!$ sayda yerdəyişmələr etməklə müxtəlif sözlər düzəldə bilərdik. Lakin hər bir belə yerdəyişmədə iki A hərfinin yerlərini öz aralarında dəyişdirdikdə oxunuş dəyişmir.

Ona görə də müxtəlif yerdəyişmələrin sayı $2!$ dəfə az olur və $\frac{5!}{2!} = 60$ saydadır.

2 **Nümunə.** “BANAN” sözünün hərflərini neçə müxtəlif vəziyyətdə düzmək olar? Məsələn, AABNN, ANABN, BAANN və s.

Həlli. BANAN sözündə iki A, iki N və bir B hərfi var.

5 elementi $5!$ sayda müxtəlif cür düzmək olar. Lakin burada ikisi təkrarlanmaqla 3 müxtəlif element var. Mümkün düzülüşlərin sayı:

$$\frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{2 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{60}{2} = 30$$

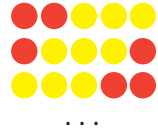
Ümumiyyətlə, n elementli çoxluğun k növ elementi varsa və bunlardan n_1 sayda 1-ci növdən, n_2 sayda 2-ci növdən, n_3 sayda 3-cü növdən, nəhayət n_k sayda k -ci növdən olarsa, müxtəlif təkrarlı permutasiyaların sayı (bunu $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ ilə işarə edəcəyik) $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ olmaqla

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!} \quad \text{düsturu ilə tapılır.}$$

Öyrənmə tapşırıqları

13> a) NƏNƏ; b) NƏVƏ; c) ŞƏLALƏ; d) ELEMENT sözlərinin hərflərini oxunuşu müxtəlif olan neçə variantda düzmək olar?

14> Ardıcıl düzölmüş 5 şarın ikisi qırmızı, üçü sarı rəngdədir. Şarları düzmənin görünüşü müxtəlif olan neçə mümkün variantı var?



15> Verilən ifadələrə görə elementlərin sayını, neçə elementin təkrarlandığını və neçə dəfə təkrarlandığını yazın. Rəngi dairələrlə göstərin.

a) $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$

b) $\frac{12!}{7! \cdot 3! \cdot 2!}$

c) $\frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 2!}$



Permutasiya - Yerləşdirmə. nP_k

Məsələ. Qrupda 8 şagird var. Qrup nümayəndəsini və divar qəzetinin redaktorunu neçə müxtəlif üsulla seçmək olar?

Həlli: Qrup nümayəndəsini 8 nəfərdən 8 müxtəlif üsulla, qrup nümayəndəsi seçildikdən sonra redaktoru qalan 7 nəfərdən 7 müxtəlif üsulla seçə bilərik. Vurma qaydasına görə müxtəlif seçimlərin sayı $8 \cdot 7 = 56$ olur.

Şagirdləri adlarında olan hərflərlə, məsələn a, b, c, d, e, f, g, h kimi kodlaşdırsaq, ab ardıcılığı ilə seçim ba ardıcılığı ilə seçimdən fərqlənir. Birinci halda a qrup nümayəndəsi, b isə redaktor seçilib. İkinci halda isə tərsinə, b qrup nümayəndəsi, a isə redaktor seçilib.

Baxılan məsələdə 8 elementli çoxluğun ya elementi, ya da düzülüş sırası ilə fərqlənən iki elementli alt çoxluqlarının sayını tapmaq lazım gəlir.

Verilmiş n elementli çoxluğun k elementli nizamlı (yəni bir-birindən ya elementi, ya da düzülüşü ilə fərqlənən) alt çoxluqlarına verilmiş çoxluğun k elementli permutasiyaları deyilir, onların sayı nP_k ilə işarə olunur və "permutasiya n elementdən k " kimi oxunur.

n elementli çoxluğun k sayda elementini seçərək nizamlı sıraya düzək.

Düzümün 1-ci elementini n elementli çoxluqdan n üsulla, 2-ci elementini qalan $(n - 1)$ elementdən $(n - 1)$ üsulla və s., nəhayət k -cı elementini $(n - k + 1)$ üsulla seçmək olar. Vurma qaydasına görə permutasiyaların sayı $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$ olur. Beləliklə alırıq:

$${}_n P_k = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \quad 0 \leq k \leq n.$$

vuruqlar k sayda olmalıdır

$(n - k)!$ ifadəsinə vurub bölməklə bu düsturu daha qısa şəkildə yazmaq olar:

$$\begin{aligned} {}_n P_k &= n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{\overbrace{n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \cdot \overbrace{(n - k) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}^{n!}}}{(n - k) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \\ &= \frac{n!}{(n - k)!} \quad {}_n P_k = \frac{n!}{(n - k)!} \end{aligned}$$

Nümunə. ${}_7 P_3$ ifadəsinin qiymətini hesablayın.

Həlli. ${}_7 P_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

$$\text{və ya } {}_7 P_3 = \frac{7!}{(7 - 3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Öyrənmə tapşırıqları

- 16 > “AZOT” sözündəki hərflərin hərəsi bir karta yazılıb. Bu kartların hər hansı ikisini yanaşı düzməklə alınan müxtəlif “sözlərin” sayını tapın.
- 17 > Hesablayın. a) ${}_{10} P_3$ b) ${}_7 P_2$ c) ${}_8 P_3$ d) ${}_5 P_4$ e) ${}_7 P_4$
- 18 > Hansı böyükdür? a) ${}_8 P_2$, yoxsa ${}_6 P_3$ b) ${}_{10} P_3$, yoxsa ${}_7 P_5$ c) ${}_9 P_6$, yoxsa ${}_8 P_7$
- 19 > Hesablayın. a) $\frac{{}_5 P_3}{{}_5 P_2}$ b) $\frac{{}_8 P_5}{{}_8 P_4}$ c) $\frac{{}_7 P_3 + {}_6 P_3}{{}_{11} P_2}$ d) $\frac{{}_6 P_5 + {}_6 P_4}{{}_6 P_3}$
- 20 > Fidanın 6 iş kostuyumu var. O, bazar ertəsi, çərşənbə axşamı, çərşənbə günləri seminarda iştirak etməlidir. Fidan bu günlərin hər birində müxtəlif kostyumlar geyinirsə, onun neçə müxtəlif seçimi var?
- 21 > 4 məktubu 6 zərfə hər zərfə bir məktubdan artıq olmamaqla neçə müxtəlif üsulla yerləşdirmək olar?
- 22 > Sınıfda 20 şagird var. Sınıf iclasını aparmaq üçün sədr və katibi neçə üsulla seçmək olar?
- 23 > Üç sərnişin 5 dayanacaqda hər dayanacaqda ən çoxu biri düşmək şərti ilə neçə müxtəlif üsulla avtobusu tərk edə bilər?
- 24 > 1, 2, 3, 4, 5, 6 rəqəmlərindən rəqəmləri təkrarlanmayan neçə üçrəqəmli ədəd düzəltmək olar? Onların neçəsi 200-dən böyükdür?



Kombinezon. ${}_n C_k$

Nümunə. 7 üzvü olan qrup layihə işini təqdim etmək üçün aralarından üç nəfəri seçməlidir. Qrup üzvləri bunu neçə müxtəlif üsulla edə bilərlər?

Həlli. Üç nəfərin hansı ardıcılıqla seçilməsi əhəmiyyətli deyil. Məsələn, şagirdləri adlarındakı hərflərlə kodlaşdırsaq, abc üçlüyü cab üçlüyündən fərqlənməyib eyni heyəti göstərir. Şagirdlərin hər hansı üçünü çağıraraq, onları çağırıldıqları ardıcılıqla sıraya düzsək, bütün mümkün halların sayı ${}_7 P_3$ olar. Seçilmiş üç nəfərin sıradakı yerlərini $3!$ üsulla dəyişdirməklə alınan müxtəlif permutasiyalar eyni heyəti göstərdiyindən müxtəlif seçimlərin sayı $3!$ dəfə az, yəni

$$\frac{{}_7 P_3}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \text{ olur.}$$

Elementlərin hansı ardıcılıqla, düzülüşlə seçilməsi tələb edilmədikdə seçimlər **kombinezon** adlanır. Kombinezonlar bir-birindən yalnız elementlə fərqlənir. n elementli çoxluğun k elementli alt çoxluqlarının hər birinə verilmiş çoxluğun k elementli kombinezonu deyilir. n elementli çoxluğun k elementli kombinezonlarının sayı ${}_n C_k$ ilə işarə edilir və "kombinezon n elementdən k " kimi oxunur. Bu cür k elementli kombinezonların hər birindən $k!$ sayda permutasiyalar düzəlsək, bütövlükdə ${}_n P_k$ sayda permutasiya alınır. Vurma prinsipinə görə ${}_n P_k = {}_n C_k \cdot k!$ olur. Beləliklə, alırıq:

$${}_n C_k = \frac{{}_n P_k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

vuruqlar k sayda olmalıdır

Nümunələr. ${}_7 C_3 = \frac{{}_7 P_3}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ ${}_8 C_2 = \frac{{}_8 P_2}{2!} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$

Kombinezonların sayı düsturunu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$${}_n C_k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$


Bu düsturun özünəməxsus simmetriyasına diqqət yetirin. Əgər k -ni $(n-k)$ ilə əvəz etsək, eyni düstur alınır. Təkcə məxrəcdəki faktoriallar yerini dəyişəcək: ${}_n C_k = {}_n C_{n-k}$. Asanlıqla göstərmək olar ki, ${}_n C_0 = 1$, ${}_n C_n = 1$, ${}_n C_1 = n$.

Öyrənmə tapşırıqları

- 25** > Çevrə üzərində A, B, C, D, E, F nöqtələrini qeyd edib, onları parçalarla birləşdirin. Neçə parça alındı?
- 26** > Hesablayın. a) ${}_4 C_3$ b) ${}_4 C_4$ c) ${}_5 C_2$ d) ${}_6 C_3$ e) ${}_6 C_1$ f) ${}_7 C_3$
- 27** > Müqayisə edin. a) ${}_7 P_3$ və ${}_7 C_3$ b) ${}_{11} P_2$ və ${}_{11} C_2$ c) ${}_7 C_3$ və ${}_7 C_4$

- 28 > a) 12 növ sərirləşdirici içkidən 3 müxtəlif içki seçmənin neçə mümkün variantı var?
b) 20 nəfər arasından 2 finalçını müəyyən etməyin neçə mümkün variantı var?
- 29 > Verilən hər bir kombinezona uyğun bir məsələ yazın.
a) ${}_{10}C_3$; b) ${}_5C_2$; c) ${}_7C_4$
- 30 > İfadələri sadələşdirin.
a) $\frac{6!}{5!} - \frac{5!}{4!} + \frac{7!}{6!}$ b) $\frac{7! + 6!}{7! - 6!}$ c) $\frac{{}_7C_3}{{}_6P_3}$ d) ${}_7C_3 : {}_8P_5$

Tətbiq tapşırıqları

- 31 > Hansı halda permutasiyaların, hansı halda kombinezonların tapıldığını müəyyən edin və hesablayın.
a) 20 növ güldən 3 növ gülün seçilməsi; b) Kredit kartının üçrəqəmli kodu;
c) 10 idmançının iştirak etdiyi yarışda 1-ci, 2-ci, 3-cü yerlərin bölüşdürülməsi.
- 32 > İdman malları mağazası yeni mövsüm mallarını almağa hazırlaşır. İdman kostyumlarının 6 rəngdə, 4 stildə təklifi var. Mağaza sahibi 4 rəngdə, 2 stildə kostyum seçməyi qərara aldı. Onun neçə seçim imkanı var?
- 33 > Lamiyə öz adının hərfləri ilə 6 kiçik hərfdən ibarət e-mail parolu seçmək istəyir. O bunu neçə üsulla edə bilər?
- 34 > 10 reklam lövhəsindən 3-ü ağ, 2-i boz, 5-i mavi rəngdədir. Bu lövhələri bir cərgədə düzmənin neçə müxtəlif variantı var?
- 35 > Azər, Anar, Əli, Vəli, Vidadi və Araz dəyirmi masanın ətrafında Əli ilə Vəli yanaşı olmamaq şərti ilə neçə müxtəlif üsulla əyləşə bilərlər?
- 36 > Çevrə üzərində 8 nöqtə qeyd edilmişdir. Təpələri bu nöqtələrdə olan neçə üçbucaq qurmaq olar?
- 37 > Şəkildə neçə paraleloqram saymaq olar? 
- 38 > 10 suala iki cavab - *doğrudur* və *yanlıştır* yazmaq neçə müxtəlif variantda cavab vermək olar?
- 39 > 5 oğlan və 4 qızdan, hərəsində ən azı 1 qız olmaqla, 3 nəfərlik neçə müxtəlif qrup yaratmaq olar?
- 40 > Qabda 5 ağ, 3 qırmızı kürə var. Qabdan 2-si ağ, 1-i qırmızı olmaqla 3 kürəni çıxarmağın neçə müxtəlif variantı var?

10-3

Ehtimalın hesablanmasına aid məsələ həlli

Sınağın daha sadə hadisələrə ayrılmayan nəticəsinə elementar hadisə deyilir. Sınaq nəticəsində elementar hadisələrdən yalnız biri hökmən baş verir. Elementar hadisələrin ehtimalları cəmi vahidə bərabərdir. Elementar hadisələr çoxluğunun ixtiyari alt çoxluğuna bu sınağa aid hadisə deyilir. Ona görə də çoxluqlar üçün təyin edilən əməllər hadisələr üçün də eyni qaydada təyin edilir.

Elementar hadisənin baş verməsi A hadisəsinin baş verməsinə gətirirsə, ona A hadisəsi üçün əlverişli nəticə deyilir. Eyniimkanlı elementar nəticələri olan sınaqda hadisənin ehtimalı aşağıdakı qaydada tapılır.

$$P(A) = \frac{\text{Əlverişli nəticələrin sayı}}{\text{Mümkün nəticələrin sayı}} \quad \text{Aydındır ki, } 0 \leq P(E) \leq 1$$

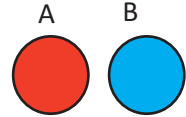
A hadisəsinə daxil olmayan bütün nəticələr çoxluğuna A hadisəsinin əksi (və ya tamamlayıcısı) deyilir və \bar{A} ilə işarə olunur.

Tamamlayıcı hadisənin ehtimalı: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ düsturu ilə tapıla bilər.



Uyuşmayan hadisələr

Ortaq nəticələri olmayan hadisələrə uyuşmayan hadisələr deyilir. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan $P(A \cap B) = 0$ olur.



Uyuşmayan A və ya B hadisəsinin baş vermə ehtimalı $P(A \text{ və ya } B)$ bu hadisələrin hər birinin baş vermə ehtimalının cəminə bərabərdir.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

1.

Nümunə. Torbaya RİYAZİYYAT sözünün hərfləri kəsilib yığılmışdır. Torbadan ilk cəhddə A və ya İ hərfini çıxaran Fərəh qalib gəlir. Fərəhin qalib olma ehtimalını hesablayın.

Həlli. Təsadüfi bir hərf çıxarılsa, onun A hərfi olması **A hadisəsi**, ehtimalı isə $P(A)$ olsun. Hərflərin sayı 10, A hərfinin sayı 2 olduğundan alırıq:

$$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Təsadüfi bir hərf çıxarılsa, onun İ hərfi olması **B hadisəsi**, ehtimalı isə $P(B)$ olsun: $P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Burada A və B uyuşmayan hadisələr olduğundan Fərəhin qalib olma ehtimalı yəni $A \cup B$ hadisəsinin baş vermə ehtimalı, A və B hadisələrinin ehtimalları cəminə bərabərdir:

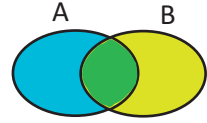
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$



Hadisələrin birləşməsinin ehtimalı

İstənilən A və B hadisələri üçün

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ münasibəti doğrudur.



2.

Nümunə. 24 nəfər seminar iştirakçısından 12 nəfəri ingilis, 10 nəfəri alman dilində, bunlardan 4-ü həm ingilis, həm alman dilində danışır. Seminar iştirakçılarında təsadüfi olaraq bir nəfər seçilsə, onun ingilis və ya alman dilində danışan olması ehtimalı nə qədərdir?

Həlli. **A hadisəsi.** Təsadüfi bir nəfər seçilsə, onun ingilis dilində danışan olması

$$P(A) = \frac{12}{24}$$

B hadisəsi. Təsadüfi bir nəfər seçilsə, onun alman dilində danışan olması

$$P(B) = \frac{10}{24}$$

A və B hadisələrinin ortaq nəticələri var. Təsadüfi bir nəfər seçilsə, onun həm ingilis, həm də alman dilində danışan olması ehtimalı: $P(A \cap B) = \frac{4}{24}$

$$\text{Onda alırıq: } P(A \cup B) = \frac{12}{24} + \frac{10}{24} - \frac{4}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$



Asılı olmayan hadisələrin baş vermə ehtimalı

Bir hadisənin baş verməsi digər hadisənin baş verməsinə təsir etməsə, bu hadisələr asılı olmayan hadisələrdir. Asılı olmayan A və B hadisələri üçün $P(A \vee B) = P(A) \cdot P(B)$ düsturu doğrudur. Burada "və" bağlayıcısını çoxluqların kəsişməsi işarəsi - " \cap " ilə əvəz etmək olar: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3.

Nümunə. Zər və metal pul atılır. Zərin yuxarı üzündə 6 xal, pulun şəkil üzü düşərsə, Afaq qalib gəlir. Afaqın qalib olma ehtimalı nə qədərdir?

Həlli. **A hadisəsi** zərin yuxarı üzündə 6 xal düşməsi və ehtimalı $P(A)$,

B hadisəsi pulun şəkil üzü düşməsi və ehtimalı $P(B)$ olsun.

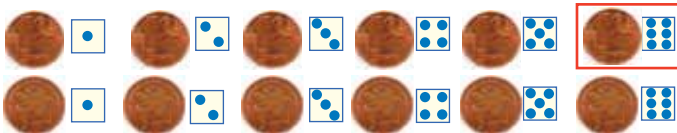
$A \cap B$ hadisəsinin ehtimalını $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ düsturu ilə hesablayaq:

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{1}{2}; P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$A \cap B$ hadisəsinin baş vermə ehtimalını ehtimalın tərifinə görə hesablasaq, eyni nəticəni almalıyıq. Bunu yoxlayaq.

Zər və pulun atılması sınağında elementar hadisələr: **1 əlverişli nəticə**

12 nəticə



$$P(A \cap B) = \frac{\text{əlverişli nəticələrin sayı}}{\text{mümkün nəticələrin sayı}} = \frac{1}{12}$$

✓ Asılı hadisələrin baş vermə ehtimalı

Bir hadisənin baş verməsi digər hadisənin baş verməsinə təsir edirsə, bu hadisələr asılı hadisələrdir. A hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində B hadisəsinin ehtimalını **P(B hadisəsi A-dan sonra)** ilə işarə etsək, A və B hadisəsinin $(A \cap B)$ baş vermə ehtimalı **$P(A \text{ və } B) = P(A) \cdot P(B \text{ hadisəsi A-dan sonra})$** düsturu ilə hesablanır. Bu düstur $P(A \cap B) = P(A) P(B/A)$ şəklində də yazılır. Xüsusi halda, asılı olmayan hadisələr üçün $P(B \text{ hadisəsi A-dan sonra}) = P(B)$ olduğundan bu halda **$P(A \text{ və } B) = P(A) \cdot P(B)$** alınır.

4. Nümunə. Qutuda 6 qara, 4 qırmızı karandaş var. Toğrul qutuya baxmadan bir karandaş çıxardı və özünə götürdü. Sonra isə Gülnar bir karandaş çıxardı. Həm Toğrulun, həm də Gülnarın qara karandaş çıxarma ehtimalını hesablayın.

Həlli: Bu hadisələr asılı hadisələrdir, çünki Toğrul bir qara karandaş götürdükdə karandaşların sayı dəyişir və bu Gülnarın qara karandaş çıxarma ehtimalına təsir edir.

Toğrul: mümkün halların sayı 10, əlverişli halların sayı 6

$$\text{Hadisənin ehtimalı: } P(T_{\text{qara}}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Gülnar Toğrudan sonra: mümkün halların sayı 9, əlverişli halların sayı 5

$$\text{Hadisənin ehtimalı: } P(G_{\text{qara}} | T_{\text{qaradan sonra}}) = \frac{5}{9}$$

Həm Toğrulun, həm də Gülnarın qara rəngli karandaş çıxarma hadisəsinin

$$\text{ehtimalı: } P(T_{\text{qara}} \text{ və } G_{\text{qara}}) = P(T_{\text{qara}}) \cdot P(G_{\text{qara}} | T_{\text{qaradan sonra}}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Öyrənmə tapşırıqları

- 1 > Hadisələrin uyuşmayan olub-olmadığını müəyyən edin, ehtimalını hesablayın.
 - 1) Torbaya hər birinin üzərində Azərbaycan əlifbasının bir hərfi yazılmış kartlar yığılmışdır. Təsədüfən çıxarılan kartın üzərində:
 - a) A hərfi və ya hər hansı sait olması; b) L, M və ya N hərflərindən biri olması.
 - 2) zər bir dəfə atılır: a) $P(1 \text{ və ya } 5)$; b) $P(\text{tək ədəd və ya } 5\text{-dən kiçik ədəd})$.
- 2 > Hadisələrin asılı olub-olmadığını müəyyən edin, ehtimalı hesablayın.
 - 1) zər iki dəfə atılır.
 - a) $P(2, \text{ sonra } 3)$; b) $P(\text{iki dəfə } 6)$; c) $P(3, \text{ istənilən xal})$
 - 2) Qutuda üzərində A, B, G, N, L, Ə, M hərflərindən biri yazılmış hərf kartları var. Ardıcıl iki kart çıxarılır.
 - a) Kartlar geri qaytarılmadıqda: $P(A, \text{ sonra } \text{Ə})$
 - b) Kartlar geri qaytarıldıqda: $P(L, \text{ sonra } N)$
- 3 > Supermarket hədiyyə kampaniyasının finalında alıcıları üçün hər birində uduş olan 10 günəbaxan tumu bağlaması təqdim etdi. Uduşlarda 6 televizor, 3 kompüter, 1 avtomobil olduğu elan edildi. Bu məlumatlara görə hadisələrin ehtimalını hesablayın.
 - a) Birinci uduşun kompüter, ikincinin avtomobil olması.
 - b) Ardıcıl iki televizor olması.



Birləşmələrin tətbiqi ilə ehtimalın hesablanması

Bir çox məsələlərdə mümkün hallar və əlverişli halların sayını tapmaq üçün birləşmələrin tətbiqi əlverişli olur. Bunu nümunələr üzərində göstərək.

- 1. Nümunə.** Qutuda üzərində heç bir məlumat olmayan 6 ədəd CD-dən ikisi xalq musiqisi, ikisi caz, ikisi isə estrada CD-sidir. Təsadüfi götürdüyünüz iki diskdən birincinin caz, ikincinin estrada musiqisi olması ehtimalını tapın.

Həlli.

$$P(\text{caz, estrada}) = \frac{\text{Əlverişli halların sayı}}{\text{Mümkün halların sayı}}$$

Əlverişli halların sayı vurma prinsipinə görə $2 \cdot 2$ olur (iki estrada, iki caz diski olduğu üçün). 6 CD-dən ikisinin seçilməsinin mümkün halları sayı ${}_6P_2$

olduğundan alırıq:
$$P(\text{caz, estrada}) = \frac{2 \cdot 2}{{}_6P_2} = \frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

- 2. Nümunə.** Torbada 12 tennis topu var, onlardan 4-ü zayıdır. Torbadan iki top çıxarsanız, hər ikisinin zayı olma ehtimalı nə qədərdir?

Həlli. Mümkün halların sayı 12 elementdən hər birində 2 element olmaqla kombinezonların sayı qədərdir: ${}_{12}C_2$.

Əlverişli halların sayı 4 elementdən hər birində 2 element olmaqla kombinezonların sayı qədərdir: ${}_4C_2$

$$P(2 \text{ zayı}) = \frac{\text{Əlverişli halların sayı}}{\text{Mümkün halların sayı}} = \frac{{}_4C_2}{{}_{12}C_2}$$

$${}_4C_2 = \frac{{}_4P_2}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6, \quad {}_{12}C_2 = \frac{{}_{12}P_2}{2!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66 \text{ olduğundan alırıq:}$$

$$P(2 \text{ zayı}) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

- 3. Nümunə.** Torbada 5 qırmızı, 3 mavi kürə var. Torbadan 2 kürə çıxarsanız, heç olmazsa birinin qırmızı rəngdə olma ehtimalı nə qədərdir?



Həlli. İki kürə çıxarılsa, birinin qırmızı olması hadisəsini E ilə işarə edək. Lakin bir kürənin qırmızı olma variantlarının mümkün sayını tapmaq yorucudur. Biz əvvəlcə bu hadisəni tamamlayan, iki kürədən heç birinin qırmızı rəngdə olmaması, yəni hər iki kürənin mavi olması hadisəsinin (E') ehtimalını tapaq. Bu halda əlverişli halların sayı ${}_3C_2$ və mümkün halların sayı ${}_8C_2$ olduğundan alırıq:

$$P(E') = \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 7} = \frac{3}{28}$$

E hadisəsinin baş vermə ehtimalı: $P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28} \approx 0,89$

Öyrənmə tapşırıqları

- 4 > 2, 3, 5, və 7 rəqəmlərindən rəqəmlərinin təkrarlanmaması şərtilə neçə üçrəqəmli ədəd düzəltmək olar?
Bu ədədlərdən təsadüfi biri seçilərsə, onun cüt ədəd olması ehtimalını tapın.
- 5 > a) Bir zər atılır. Düşən xalın tək ədəd və ya sadə ədəd olması ehtimalını hesablayın.
b) İki zər birlikdə atılır. Düşən xallar cəminin 7 və ya 11 olması ehtimalını tapın.
- 6 > Metal pul 3 dəfə atılır. Hər üçündə şəkil üzünün düşmə ehtimalı nə qədərdir?
- 7 > Sınıf rəhbəri üç qız, beş oğlan arasından üç nəfəri məktəb şagird təşkilatına nümayəndə seçməlidir.
a) O bunu neçə müxtəlif üsulla edə bilər?
b) Bunların neçəsində hər üç nümayəndə oğlan olacaq?
c) Hər üç nümayəndənin oğlan olması ehtimalını tapın.
- 8 > Qutudakı 5 göy, 4 qırmızı kürədən istənilən üçü müxtəlif üsullarla götürülə bilər. Götürülmüş kürələrdən ən azı birinin göy rəngli olması ehtimalını tapın.
- 9 > Qutuda hər birinin üzərində bir imtahan sualı yazılmış 60 kart var. Bu suallardan 45-ni öyrənmiş tələbə qutudan təsadüfi seçimlə 2 kart çıxarır. Tapın:
a) Tələbə hər iki sualı bilir hadisəsinin ehtimalını;
b) Tələbə hər iki sualı bilmir hadisəsinin ehtimalını;
c) Tələbə suallardan yalnız birini bilir hadisəsinin ehtimalını.
- 10 > 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, və 13 ədədlərinin hər biri ayrı-ayrı kartlara yazılaraq torbaya yığılmışdır. Təsadüfi üç kart çıxarılsa, onların üzərində yazılmış ədədlərin Pifaqor üçlüyü olma ehtimalı nə qədərdir?
- 11 > Dostuna zəng etmək istəyən şagird nömrənin son iki rəqəmini unutmuşdur, bu rəqəmlərin müxtəlif olduğunu isə xatırlayır. Şagirdin ilk dəfə təsadüfən yığdığı nömrənin düzgün olması ehtimalını tapın.
- 12 > 3 qız, 2 oğlan müxtəlif ardıcılıqla sıraya düzüləndə oğlanların yanaşı olması ehtimalını tapın.
- 13 > Rəna və rəfiqəsi Leyla, həmçinin daha beş şagird məktəb şagird təşkilatının sədri və müavini seçimində iştirak edirlər.
a) Rənanın sədr, Leylanın müavin seçilməsinin ehtimalını tapın.
b) Hər iki vəzifəyə rəfiqələrin seçilmə ehtimalını tapın.

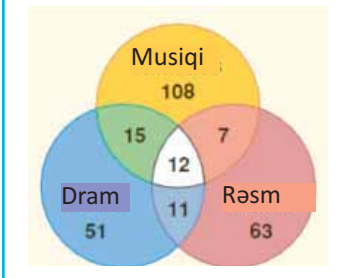
- 14 > Torbada 8 qırmızı, 5 sarı kürə var. Geri qaytarılmadan ardıcıl iki kürə çıxarılsa, onlardan birincinin qırmızı, ikincinin isə sarı olması ehtimalını hesablayın.
- 15 > Qutuda 4 ağ, 3 qara kürə var. Təsadüfən çıxarılan 2 kürənin:
a) hər ikisinin ağ;
b) hər ikisinin qara;
c) birinin ağ, digərinin qara olması ehtimalını tapın.
- 16 > 9^a sinfindən 12 nəfər, 9^b-dən 8 nəfər olimpiadanın təşkilatı işlərində könüllü olaraq iştirak etmək istəyir. Ardıcıl iki nəfər çağırılsa:
a) onların hər ikisinin 9^b; b) birinin 9^a, digərinin 9^b;
c) hər ikisinin 9^a sinfindən olma ehtimalı nə qədərdir?
- 17 > 1-dən 30-a qədər ədəd kartları qutuya yığılmışdır. Qutudan bir kart çıxarılsa, bu kartdakı ədədin: a) 2-yə və ya 3-ə bölünən ədəd; b) 2-yə bölünüb, 3-ə bölünməyən ədəd; c) həm 2-yə həm də 3-ə bölünən ədəd olması ehtimalını tapın.
- 18 > Qutuda sarı və yaşıl rəngdə 45 kürə var. Kürələrin sayları nisbəti uyğun olaraq 5 : 4 kimidir. Qutudan iki kürə çıxarılsa, hər ikisinin sarı rəngdə olma ehtimalı nə qədərdir?

- 19 > Venn diaqramına görə məsələləri həll edin.

Bir şagird seçilərsə, verilən şərtlərlə ehtimalını hesablayın:

- a) P (musiqi və ya rəsm)
b) P(dram və ya rəsm)
c) P (dram və musiqi və ya dram və rəsm)

Dərnlərdə şagirdlərin sayı



- 20 > “Son xəbərləri haradan əldə edirsiniz” sorğusunun nəticəsi: 85% xəbərləri internetdən oxuyur, 40% qəzetlərdən oxuyur, 25% hər ikisindən oxuyur. Məlumatı Venn diaqramı ilə təqdim edin. Respondentlər arasında təsadüfi biri seçilsə, uyğun ehtimalı tapın: a) xəbərləri qəzətdən deyil, internetdən alan şəxs olması; c) məlumatı hər iki mənbədən alan şəxs olması.
- 21 > Torbada 3 iyirmimanatlıq, 2 onmanatlıq, 5 beşmanatlıq var. Geri qaytarılmadan 3 banknot çıxarılsa, birincinin beşmanatlıq, ikincinin onmanatlıq, üçüncünün iyirmimanatlıq olma ehtimalı nə qədərdir?
- 22 > “ARABA” sözündəki hərflərin hərəsini bir karta yazıb qutuya yığıdılar. Kartları qutudan bir-bir çıxararaq sıraya düzdükdə “ARABA” sözünün alınması ehtimalını tapın.



Ümumiləşdirici tapşırıqlar

- 1 > Cədvəldə Sənanın kompüter oyununda topladığı xallar verilmişdir.

Bu məlumatlardan ən kiçiyini nəzərə almasanız, ən çox hansı mərkəzə meyilli göstərici dəyişər: ədədi orta, yoxsa median?

Sənanın topladığı xallar

164	128	151	138
158	162	130	162
109	134	157	137

- 2 > Verilən məlumatlara görə tezlik cədvəli qurun.

Uşaqların boyu. Siniflərin sayı: 5. Məlumat: 30 uşağın boyu

67 76 69 68 72 68 65 63 75 69 66 72 67 66 69
73 64 62 71 73 68 72 71 65 69 66 74 72 68 69

- 3 > Verilən məlumatlara görə tezlik poliqonu və nisbi tezlik poliqonu qurun.

a)

Qızların boyu	Sayı
140-145	3
146-151	7
152-157	12
158-163	6
164-169	2

b)

Oğlanların boyu	Sayı
145-150	2
151-156	3
157-162	8
163-168	11
169-174	6

- 4 > Yürüş iştirakçılarının yaşı haqqında verilən məlumata görə orta yaşı tapın.

Yaşı	Sayı
[18-22)	24
[22-26)	19
[26-30)	5
[30-34)	2

- 5 > 1) Məlumat şirkətdə işləyən işçilərin maaşlarını və onların sayını göstərir. Cədvələ görə tapşırıqları yerinə yetirin.

a) Məlumata görə nisbi tezlik cədvəli qurun.

b) Neçə nəfərin maaşı 351 manatdan azdır?

c) İşçilər arasından təsadüfi bir nəfər seçilsə, onun 401 manatdan az maaş alan şəxs olması ehtimalı nə qədərdir?

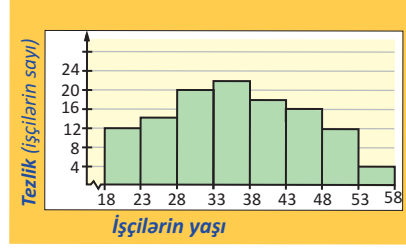
Maaş	Sayı
251 - 300	5
301 - 350	6
351 - 400	4
401 - 450	3
451 - 500	7

2) Şirkətdə bayram şənliyində işçilərin adları yazılmış kartların yığıldığı qutudan təsadüfi 2 kart çıxartmaqla 2 soyuducu hədiyyə-priz olaraq oynanılır:

a) hər iki soyuducunu 301 manatdan az maaş alan şəxsin udma ehtimalını;

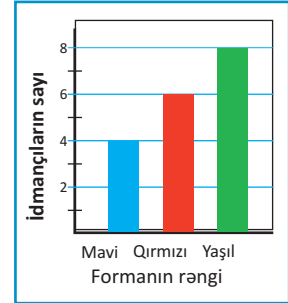
b) ən azı birini 301 manatdan az maaş alan şəxsin udma ehtimalını tapın.

- 6 > Histoqramda işçilərin yaşı haqqında məlumat verilmişdir.
- Yaşı 18-dən 23-ə qədər olan neçə işçi var?
 - Ən çox işçi hansı yaş qrupuna aiddir?
 - İşçilərin sayını tapın.
 - Ədədi ortanı hesablayın



- 7 > Məktəbdə şagirdlərin 56%-i qızlardır. Onların yarısı idmanla məşğul olur. Bu qızların sayı 140 nəfərdir. Məktəbdəki oğlanların 65%-i idmanla məşğul olur.
- Bu məktəbdə neçə şagird var?
 - Məktəbdə neçə oğlan, neçə qız şagird var?
 - Təsadüfi bir şagird seçilsə, onun idmanla məşğul olan şagird olması ehtimalı nə qədərdir?
- 8 > Məktəbdə 3 nəfər altıncı, 5 nəfər yeddinci, 4 nəfər səkkizinci sinif şagirdləri arasından növbətçilik üçün 3 nəfər şagird seçilməlidir.
- Bütün növbətçilərin yeddinci sinifdən olması ehtimalını tapın;
 - Növbətçilərin heç birinin 7-ci sinifdən olmamasının ehtimalını tapın.

- 9 > Məktəbli iştirakçılar yarışda mavi, qırmızı və yaşıl rəngli geyimlərdə iştirak edəcəklər. İştirakçıların sayı geyimlərinə görə barqrafda verilmişdir.
- Təsadüfi bir idmançı seçilsə, onun mavi rəngli forma ilə yarışan idmançı olma ehtimalı nə qədərdir?
 - Təsadüfi iki idmançı seçilsə, onların hər ikisinin mavi rəngli forma ilə yarışan idmançı olma ehtimalı nə qədərdir?



- 10 > Torbadakı hərflərdən üçünün çıxarılmasının neçə mümkün variantı var? Torbadan 3 hərf çıxarılsa, heç olmazsa birinin sait olma ehtimalını tapın.
- A B C D E**
 - E F G H I J K**
 - M N O P**
- 11 > Qabda 6 sarı və 8 ağ kürə var.
- Qabdan 3 kürə çıxarmanın neçə mümkün variantı var?
 - Çıxarılan kürələrin hər üçünün ağ olması ehtimalını tapın.
- 12 > “MUĞAN” sözündəki hərfləri yerdəyişmə edərək müxtəlif “sözlər” düzəldilib. Bunlardan neçəsində: a) samitlər yanaşı yazılıb, b) saitlər yanaşı yazılmayıb?
- 13 > Tənlikdə n -ni tapın.
- $(n + 2)! = 20 \cdot nP_n$
 - $nP_2 = 90$
 - $nC_2 - nC_1 = 9$



Bölmələr üzrə ümumiləşdirici tapşırıqlar

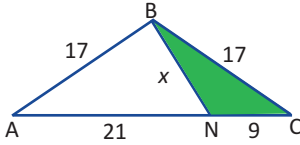
1 > Qab şəkər tozu ilə tam dolu olarkən onun kütləsi 14,5 kq, yarısı dolu olduqda isə 7,7 kq olur. Boş qabın kütləsini tapın.

2 > $y = kx + b$ düz xətti absis oxunu $(-2; 0)$ nöqtəsində, $y = 3(x - 1)^2$ parabolasını ordinat oxu üzərində kəsir. Düz xətt parabola ilə daha hansı nöqtədə kəşisir?

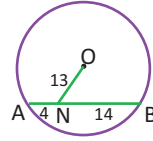


3 > a) $x = 4 - \sqrt{5}$ olduqda $x^2 - 8x + 15$;
b) $x = \sqrt[3]{7}$ olduqda $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ ifadəsinin qiymətini tapın.

4 > Şəkildə verilənlərə görə rəngli hissənin perimetrini və sahəsini tapın.



5 > Çevrənin radiusunu tapın. O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.



6 > 56 turisti yerləşdirmək üçün üçnəfərlik və beşnəfərlik çadırlar quruldu. Cəmi 16 çadır quruldu, onların neçəsi üçnəfərlikdir?

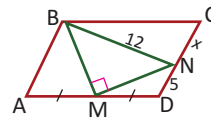
7 > Ədədi silsilədə $a_1 = -2$, $a_5 = 18$ olarsa, onuncu həddi tapın. Bu silsilənin 50-dən kiçik olan hədlərinin cəmini hesablayın.

8 > Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan və verilən nöqtədən keçən çevrənin tənliyini yazın. Uyğun dairədə 45° -li mərkəzi bucağa uyğun sektorun sahəsini tapın.
a) $(0; -10)$ b) $(-3; -1)$ c) $(-4; -4)$ d) $(-6; 4)$

9 > Bərabərsizlikləri həll edin:
a) $2(x-3) < 5x$ b) $\frac{x-3}{1-\sqrt{2}} > \sqrt{2} + 1$ c) $1 < 3 - 2x \leq 7$ d) $2|x-3| - 1 < 3$

10 > $\begin{cases} \frac{S}{x+y} = 3 \\ \frac{S}{x-y} = 5 \end{cases}$ tənliklər sistemindən $\frac{S}{x} + \frac{S}{y}$ cəmini tapın.

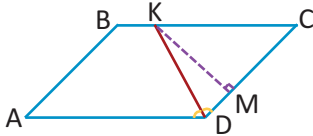
11 > ABCD paraleloqramdır. Şəkildə verilənlərə görə x-i tapın.



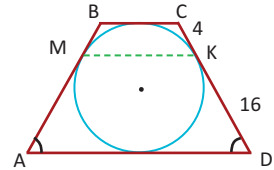
12 > Boş xanalara müqayisə işarələrindən ($>$, $<$, $=$) uyğun olanını yazın.
a) $a > b$ olarsa, $(-a) + b \square 0$ b) $a > b$ olarsa, $(-a) - (-b) \square 0$

- 13 > Seymur 32 dəqiqəyə kitabın 24 səhifəsini oxuyursa: a) 40 dəqiqəyə neçə səhifə oxuyar? b) 264 səhifəlik kitabı nə qədər vaxta oxuyar?
- 14 > Əkin sahəsində məhsuldarlıq 25 s-dən 30 s-ə qalxdı. Məhsuldarlıq neçə faiz artdı?
- 15 > Düzgün çoxbucaqlının bir tərəfi 8 m, perimetri 64 m-dir. Bu çoxbucaqlının: a) hər bir daxili bucağı neçə dərəcədir? b) bir tərəsindən neçə diaqonal çəkmək olar? c) neçə diaqonalı var?
- 16 > İfadənin qiymətini tapın.
 a) $(7x - y)^2 - 2(7x - y)(x - y) + (x - y)^2$, $x = \sqrt{2}$ olduqda
 b) $\frac{2\sqrt{2} - ab^2}{2 + b^2} + \frac{\sqrt{2}b^2 - 2a}{2 + b^2}$, $a = \sqrt{2} - 1$ olduqda
- 17 > 3 saata 240 km yol gedən avtomobil eyni sürətlə: a) 5 saata hansı məsafəni qət edər? b) 560 km yolu nə qədər vaxta gedər?
- 18 > Torbada kürələr sarı və yaşıl rəngdədir. Sarı kürələrin sayının yaşıl kürələrin sayına nisbəti 4 : 1 kimidir. Sarı kürələrin yarısını çıxarsaq, torbada qalan sarı kürələrin sayı yaşıl kürələrin sayından 2 ədəd çox olar. 1) Torbada neçə kürə var? 2) Torbaya baxmadan iki kürə çıxarılsa:
 a) hər ikisinin sarı rəngli olması; b) müxtəlif rəngli olması ehtimalını tapın.

- 19 > ABCD paraleloqram, DK tən bölə, $KM \perp CD$, $KM = 3$ sm, $BK = 2$ sm və $S_{\Delta CKD} = 9$ sm² olarsa, paraleloqramın perimetrini və sahəsini tapın.



- 20 > Şəkilə verilənlərə görə ABCD bərabəryanlı trapesiyasının perimetrini və sahəsini, yan tərəflərinin çevrəyə toxunma nöqtələrini birləşdirən MK parçasının uzunluğunu tapın.



- 21 > a) Üçbucağın tərəflərinin uzunluqları nisbəti 2 : 3 : 4 kimidir. Üçbucağın perimetri 54 sm olarsa, tərəflərinin uzunluqlarını tapın.
 b) Yan tərəfi 10 sm, oturaçağa çəkilmiş hündürlüyü 8 sm olan bərabəryanlı üçbucağın perimetrini, sahəsini, daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın

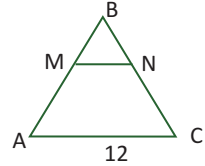
- 22 > a) Diaqonalları 6 sm və 8 sm olan rombun sahəsini, perimetrini, hündürlüyünü və daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.
b) Perimetri 28 sm, hündürlükləri 3 sm və 4 sm olan paraleloqramın sahəsini tapın.

23 > Hesablayın.

a) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52} - \sqrt{117^2 - 108^2}$ b) $(\sqrt{14} - 3\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{28}$ c) $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7 + 4\sqrt{3}}$

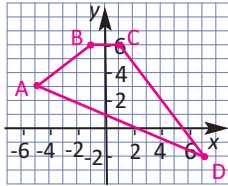
- 24 > $x^2 - 2x + y^2 + 1 = 4$ çevrəsinin:
a) mərkəzinin koordinatlarını;
b) radiusunu tapın;
c) uyğun dairənin sahəsini hesablayın.

- 25 > $MN \parallel AC$
 $S_{AMNC} = 8 \cdot S_{\Delta MBN}$
 $AC = 12$ isə
 MN -i tapın.



- 26 > Müəllim 30 şagirdin test imtahanında orta balını hesablayarkən şagirdlərdən birinin balı 50 əvəzinə 350 göstərilmiş olduğundan orta bal 70 olmuşdur. Yol verilmiş səhv düzəldilsə, orta bal neçə olacaq?

- 27 > Koordinat müstəvisi üzərində təsvir edilmiş dördbucaqlının perimetrini və sahəsini hesablayın.



28 > Hesablayın.

a) $\frac{9^5 \cdot 2^9}{36^4}$ b) $\frac{4^{-3} \cdot 9^{-2}}{6^{-5}}$
c) $2^{\frac{7}{3}} \cdot 32^{\frac{5}{6}} : 8^{\frac{3}{2}}$

- 29 > a) $2x^2 - 3x - 1 = 0$ tənliyinin köklərinin cəmini və hasilini tapın.
b) $x^2 + (1 - 2m)x + m - 3 = 0$ köklərinin cəmi onların hasilindən 3 vahid böyükdür. m -i tapın və tənliyi həll edin.

- 30 > a) 300 ədədini 20% artırıb, yeni ədədi 20% azaltsaq, hansı ədəd alınar?
b) Malın qiymətini 10% azaldıb, sonra yenidən 10% artırdılar. Qiymət necə dəyişdi?

- 31 > 1) Bərabəryanlı üçbucağın iki tərəfinin uzunluqları verilib: 8,4 m və 3,2 m. Bu üçbucağın perimetrini tapın. Məsələnin neçə həlli var?
2) Üçbucağın uzunluqları 6 və 8 vahid olan tərəfləri arasındakı bucaq:
a) 90° -dən kiçik; b) 90° -dən böyük olduqda üçüncü tərəfinin uzunluğu hansı tam qiymətlər ala bilər?

- 32 > c -nin hansı qiymətində $(c^2 - 1)x = c - 1$ tənliyinin: a) yeganə həlli var;
b) sonsuz sayda həlli var; c) həlli yoxdur?

33 > Tənliyi həll edin :

$$a) \frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} = 1$$

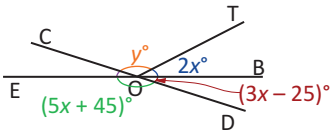
$$b) \frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{x}$$

$$c) \frac{x}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$$

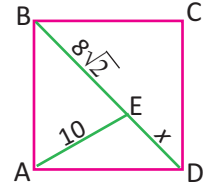
34 > a) Perimetri 64 sm olan düzbucaqlı hansı ölçülərdə olsa, sahəsi ən böyük olar?
b) Sahəsi 25 m² olan düzbucaqlı hansı ölçülərdə olsa, perimetri ən kiçik olar?

35 > 16 bənövşə, 32 çobanyastığı, 24 nərgiz güllərindən eyni tərkibli olmaqla ən çoxu neçə dəstə bağlamaq olar? Bu halda hər dəstədə olan müxtəlif növ güllərin sayını tapın.

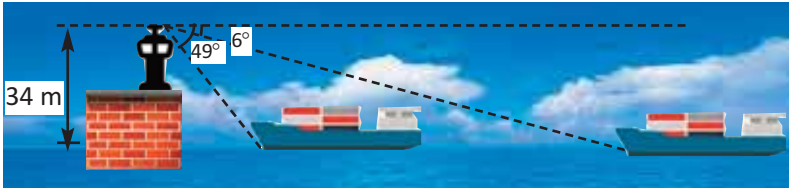
36 > Şəkiləki bucaqların dərəcə ölçülərini tapın.



37 > ABCD kvadratdır. Şəkilə verilənlərə görə x-i tapın.



38 > Dəniz fənəri qülləsindəki müşahidəçi qülləyə doğru hərəkət edən qayıqı əvvəlcə 6° bucaq altında gördü. Beş dəqiqə sonra isə qayıq 49° bucaq altında müşahidə edildi. Müşahidəçi gölün səthindən 34 m hündürlükdədir. Qayıqın sürətini (m/dəq ilə) hesablayın.



39 > Səbinənin pulu Gülərin pulunun $\frac{4}{5}$ hissəsi qədərdir. Kənanın pulu Səbinənin pulunun $\frac{7}{8}$ hissəsi qədərdir. Kənanın 28 manat pulu varsa, Səbinə və Gülərin nə qədər pulu var?

40 > 1) Radiusu 15 sm olan dairənin 60°-li mərkəzi bucağının söykəndiyi qövsün uzunluğunu tapın.
2) 60°-li qövsünün uzunluğu: a) 3π ; b) 5π olan çəvrənin radiusunu tapın.

41 > Kvadratik funksiyanın qrafiki olan parabolun təpə nöqtəsini və koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapın və parabolun qurun. Kvadratik funksiyanı $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində yazın.

$$a) y = x^2 + 8x + 7$$

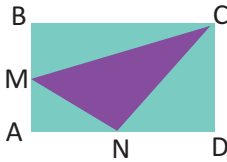
$$b) y = x^2 + 4x$$

$$c) y = 2x^2 + 4x + 6$$

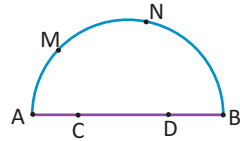
42 > Hesablayın. a) $\frac{7,1^2 - 1,5^2 + 8,6 \cdot 2,4}{6,3^2 - 2,3^2}$ b) $\frac{2,1^3 - 0,9^3}{1,2} + 0,9 \cdot 2,1$

43 > Məxrəci irrasionalıqdan azad edin. a) $\frac{8}{3\sqrt{5}}$ b) $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$ c) $\frac{4}{\sqrt[3]{36}}$

44 > ABCD düzbucaqlısında M və N tərəflərin orta nöqtələridir. $S_{ABCD} = 64 \text{ sm}^2$ olarsa, $S_{MNC} = ?$



45 > Təpələri yarımqvərvin və diametrin üzərində qeyd edilmiş nöqtələrdə olmaqla neçə üçbucaq qurmaq olar?



46 > Ədədləri standart şəkildə yazın.

a) 3560 b) 0,000204 c) 21020 000 d) $0,32 \cdot 10^7$ e) $3580 \cdot 10^9$

47 > Bir tədbirdə iştirak edənlər masaların ətrafında 5-5 otursalar, 3 nəfər ayaq üstə qalar, 8-8 otursalar, 3 masa boş qalar. Bu tədbirdə neçə nəfər iştirak edir?

48 > A (1 ; 3) , B (- 2 ; 1) və C (4 ; 2) nöqtələri verilir. $\vec{AB} - 2 \cdot \vec{CA}$ vektorunu komponentləri ilə yazın və uzunluğunu hesablayın.

49 > Lətifin il ərzində riyaziyyat fənni üzrə summativ qiymətləndirmələrdə aldığı qiymətlər aşağıdakı kimidir: bir "2", dörd "3", üç "4", iki "5". Bu məlumatlara görə ədədi ortanı, modanı və medianı tapın.

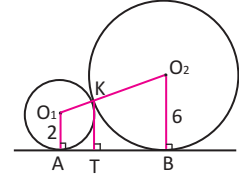
50 > Tənliklər sistemini həll edin.

a) $\begin{cases} 3x - 2y = \frac{1}{2} \\ 4y - x = \frac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ \frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(y-1) = 0 \\ x+5xy+y=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+xy=15 \\ y^2+xy=10 \end{cases}$

51 > Paralel köçürmədə A(-2; 1) nöqtəsi A'(-1; 3) nöqtəsinə çevrilir. Bu paralel köçürmədə: a) B(-1; 1) nöqtəsi hansı nöqtəyə çevrilər; b) Hansı nöqtə C'(-3; 1) nöqtəsinə çevrilər?

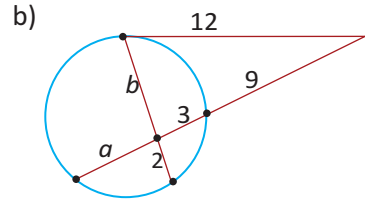
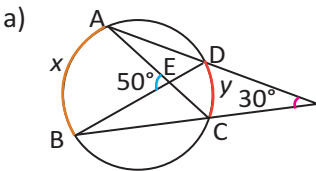
52 > Samir bir işi təklikdə 9 saata, Nadirlə birlikdə isə 6 saata yerinə yetirir. Nadir təklikdə bu işi neçə saata yerinə yetirər?

- 53 > Radiusları 2 və 6 olan iki çevrə K nöqtəsində xaricdən toxunur. K nöqtəsindən çevrələrin ortaq AB toxunanına qədər məsafəni tapın.



- 54 > Ədədləri artan sırada düzün. $a = \frac{71}{72}$, $b = \frac{72}{73}$, $c = \frac{75}{74}$, $d = \frac{76}{75}$
- 55 > Avtobuslardan biri ilk dayanacağa 30 dəqiqədən, ikincisi 36 dəqiqədən, üçüncüsü 45 dəqiqədən bir gəlir. Hər üç avtobus eyni vaxtda ilk dayanacaqdan çıxarsa, hansı müddətdən sonra yenidən ilk dayanacaqda görüşər?
- 56 > Tənlikləri həll edin.
 a) $4x = x^3$ b) $x^3 - x^2 - 2x = 0$ c) $x^3 + x^2 = 4x + 4$
 d) $(5x + 1)^2 + 6(5x + 1) - 7 = 0$ e) $(x^2 + 2x + 4)^2 - 7(x^2 + 2x + 4) + 12 = 0$
- 57 > İki nasosdan biri hovuzu 15 saata, digəri isə 10 saata doldurur. Üçüncü nasos dolu hovuzu 18 saata boşaldır. Hər üç nasos eyni vaxtda qoşulsa, boş hovuz neçə saata dolar?
- 58 > Bir kisə qəndin əvvəlcə $\frac{1}{3}$ hissəsi, sonra isə qalan qəndin $\frac{3}{5}$ hissəsi satıldı.
 a) Satılan qənd bütün qəndin hansı hissəsidir?
 b) Cəmi 45 kq qənd var idisə, kisədə nə qədər qənd qaldı?

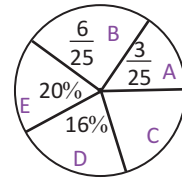
- 59 > Verilənlərə görə dəyişənləri tapın.



- 60 > Uyğunluğu müəyyən edin (c_n ardıcılığın n -ci həddi, S_n ilk n həddin cəmidir)
 1. $S_n = n^2 + n$ A) $c_3 = 12$ B) $c_3 = 5$ C) $c_3 = 6$
 2. $S_n = n^2$ D) həndəsi silsilədir E) $c_n = 2n - 1$
 3. $S_n = 3(2^n - 1)$
- 61 > Səbətdəki almaları qablara dörd-dörd, altı-altı, səkkiz-səkkiz yığıldıqda hər dəfə 3 alma artıq qalır. Səbətdə ən azı neçə alma var?
- 62 > Anbardakı taxılı 6 yük maşını 80 gündə daşıyır. Bu taxılı 8 belə yük maşını neçə gündə daşıyır? Anbardakı taxılı 30 günə daşımaq üçün neçə yük maşını lazım gələr?

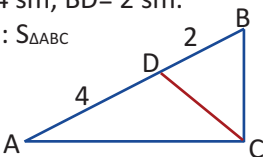
- 63 > Mərkəzi $C(-1; 2)$ nöqtəsində olan, $k=2$ əmsallı homotetiyada $A(3; 5)$ nöqtəsinin çevrildiği $N(x; y)$ nöqtəsinin koordinatlarını tapın. CA, CN parçalarının uzunluqlarını hesablayın və müqayisə edin.
- 64 > Təpə nöqtəsi $(1; -5)$ olan və $(0; -3)$ nöqtəsindən keçən parabolaya uyğun kvadratik funksiyanı $y = a(x - m)^2 + n$ şəklində yazın. Parabolanı qurun.
- 65 > $(2ab^2)^3 \cdot (3a^2b)^2$ birhədlisinin əmsalını və qüvvətini göstərin.
- 66 > 60%-li 400 q duz məhlulundan 25%-i götürülərək yerinə həmin miqdarda su töküldü. Alınmış qarışıq neçə faizli oldu?
- 67 > $a, b \in \mathbb{N}$, $a : b = 2 : 5$, $\text{ƏKOB}(a; b) - \text{ƏBOB}(a; b) = 45$ olarsa, $a + b$ cəmini tapın.
- 68 > Üçbucağın xarici bucaqlarının dərəcə ölçüləri nisbəti $3:4:5$ kimidir. Bu üçbucağın daxili bucaqlarını tapın.
- 69 > Durğun suda sürəti 20 km/saat olan motorlu qayıq 18 km axın əksinə, 11 km axın istiqamətində gedərək, bütün yola saat yarım vaxt sərf etdi. Qayıq axma sürətini tapın.
- 70 > Bərabərsizliyi həll edin.
- a) $x^2 + 3x - 18 \geq 0$ c) $3x^2 - 16x + 5 \leq 0$ e) $4x^2 < 25$
 b) $-x^2 - 12x < 32$ d) $2x^2 - 4x + 5 > 0$ f) $0,5x^2 + 3x \leq -6$

- 71 > Dairəvi diaqramda 125 sualı olan sınaq imtahanındakı doğru cavabların paylanması göstərilmişdir. Ən çox doğru cavab hansı bənddədir? Uyğun bəndlə neçə doğru cavab göstərilmişdir?

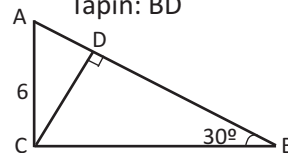


- 72 > Verilən çevrələrin kəsişmə nöqtələrinin koordinatlarını müəyyən edin.
- a) $x^2 + (y + 2)^2 = 13$ b) $(x + 1)^2 + y^2 = 5$ c) $x^2 + y^2 = 25$
 və $x^2 + (y - 3)^2 = 8$ və $(x - 4)^2 + y^2 = 10$ və $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 25$

- 73 > Verilir: $\angle ACB = 90^\circ$, CD tən bölən, $AD = 4$ sm, $BD = 2$ sm.
 Tapın: $S_{\Delta ABC}$



- 74 > Verilir: $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $\angle B = 30^\circ$, $AC = 6$.
 Tapın: BD



1. n -ci dərəcədən kök. Rasional üstlü qüvvət

- s. 7-11 №6 b) $2\sqrt{2}$; c)4 №9 b) $\frac{8}{9}$ №11 1) B doğru №14 f) 1 və $\sqrt{3} - 1$; g) 3 və $\sqrt{5} - 2$
 №17 a) 2; b) $2\sqrt{3}$; c)0. №18 b) 1; c)4 №22 e) [3;9); f) (0;4] №23 d) $\{-4\}$ №26 2) $A \cap (B \cup C)$
- s.13-20 №3 c)4; g)3; k)2. №7 d) $\sqrt[3]{9} > 2$, e) $\sqrt{25} < 3$ №8 a) $\sqrt[3]{1,2} < \sqrt[3]{7} < 2 < \sqrt[3]{9}$ №9 a) $\sqrt[3]{17} > 2 > \sqrt[3]{15}$
 №12 b) 2 və 3 ; c) 1 və 2 №13 b) 2; e) -3 ; f) 1 №14 b) 2; $\sqrt[3]{9} - 2$; e) 1 ; $\sqrt[3]{28} - 3$ №15 c)48;
 d) -128 №16 b) $x=17$; d) $x=-29$ №17 b) \emptyset ; c) ± 3 ; d) ± 2 №18 a)6; b)2; c) -8 ; d)0 №19 a) $2x$; b)0
 №20 1 №21 2) 8^3 ; 8^3 ; 9^3 ; 9 №22 1) $1014m^2$; 2) $1:2$ №23 a) 6 sm; b) $5,01m$ №24 $\approx 4,5sm$
 №25 $\approx 37,3m$ №27 c)6; d)0,4; e)1,5 №28 b)3; d)14; e)6; h)6 №30 a) 2; d) 40; e)1
 №31 a)12 b) 6 №33 c)2; f)6 №34 a)4; c)2 №35 a)2; c) -9 ; d)6 №37 2 dəfə №38 a) $2m^2$;
 b) $6sm^3$ №40 a) x ; d) a ; h) xy №41 a) $\frac{y}{x}$; d) $|x|$ №42 f) \sqrt{x} ; j) \sqrt{y} №43 a) $a^2 + 4a + 4$; c) $x^2 - 1$
 №44 b) $2\sqrt{3}$; c) $2\sqrt{2}$ №45 a) $4x\sqrt{x}$; b) $3a\sqrt[3]{a^2}$ №46 a) $x \geq 0$; $6x\sqrt{x}$; h) $x \geq 0, y > 0$; $x\sqrt[3]{2y}$
 №47 b) \sqrt{x} ; c) $x\sqrt[3]{2x^3}$ №48 a) $\sqrt{54}$; d) $-\sqrt{48}$ №49 d) $\sqrt[3]{2x}, x > 0$; e) $-\sqrt[3]{-3c^3}; c < 0$
 №50 a) $\sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{3}$; b) $2\sqrt[3]{3} < 3\sqrt[3]{2}$ №52 a) $2\sqrt[3]{2}$; c) $\sqrt[3]{2}$; d) $\sqrt[3]{x^2}$ №53 a)3; b)1. №54 a) $\sqrt[3]{b}$; b) $2\sqrt[3]{ab}$
 №55 b) \sqrt{a} ; c) $\sqrt{x^2}$; d) $\sqrt[3]{a}$ №56 b) doğru deyil №57 a) $\sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{3}$; b) $\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[3]{3}$
 №58 a) $3\sqrt[3]{3}$; c) $2\sqrt[3]{4}$ №59 a)1; b)2 №60 a) 4; b) 2; c) $1,5\sqrt{3}$
- s.21-25 №3 f) 10; h) 1 №5 a) 0,5; b) 6 №7 c) $3^{1/2} > 3^{1/3}$ №8 a) $x \geq 0$; b) $x \in \mathbb{R}$; c) $x > 1$;
 d) $x \geq -1$ №9 c) b^2 ; d) a^3 №10 b) $y^{1/3}$; d) c^2 №11 b) $m^{1/2}$; d) $c^{1/2}$ №12 b) 2 №13 a) 6; b) $\frac{1}{6}$;
 c)70 №14 b) $3x$; c) $\frac{1}{4c^2}$; d) $\frac{3}{x^2}$ №17 a)0,1a; c)10a №18 a) $x=a^2$; b) $x=a^{-3}$ №19 b) $\frac{1}{8}$; c)3
 №20 c) $x^{11/24}$ №21 c) $x^{0,5}$ №22 a) $2x$; c) $y - 1$ №23 a) $c^{3/2} + 4c^{1/2}$; c) $c^{4/3} - 1$
 №24 c) $(c - 3^{0,5})(c + 3^{0,5})$; g) $(x^{1/3} - 3)(x^{1/3} + 3)$ №25 a) $a^{1/2} + b^{1/2}$; d) $b^{1/6}$ №26 a)5 №28 100%;
 №29 2) 5 saat №30 a) 17 sm; b) 12 sm №32 a) $\approx 1587,4 sm^2$ №34 d) $A = P(1+r)^n$
- s.26-27 №1 a) 1; b) 6; c) -2 №2 a) $\sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{30} < \sqrt[3]{2}$ №3 a) $4\sqrt[3]{9}$; c) $\sqrt[3]{8}$; d) $\sqrt[3]{9}$ №4 a) $x \geq 3$;
 b) $x \in \mathbb{R}$; c) $x \leq 2$ №5 a) $x=2$; b) $x=\pm 2$; f) $x=6$ №6 a) $1,5$ m; b) $\approx 1,2m$; №7 d) $-\sqrt[3]{3a^4}$; e) $\sqrt[3]{2c^3}$;
 f) $-\sqrt[3]{-2c^3}$ №8 a) -1 ; b)1; c)1; e)5; f)2 №9 b) $\sqrt[3]{b}$; c) $\sqrt[3]{a}$; f) $x^{1/3}$ №10 $1 \rightarrow B$; $2 \rightarrow C$; $3 \rightarrow A$
 №11 $2a^3$ №12 $\frac{2}{a}$ №13 a) $3\frac{1}{3}$; b)14 №14 b) 8%; c) 5% №15 a) $\approx 90q$ b) $\approx 342q$

2. Çevrə

- s.29-31 №3 $\sphericalangle A = 72^\circ$, $\sphericalangle B = 90^\circ$, $\sphericalangle C = 108^\circ$, $\sphericalangle D = 54^\circ$, $\sphericalangle E = 36^\circ$ №4 a) $\approx 5,24$ sm
 d) $\approx 4,19$ mm №5 a) $\frac{3}{4}\pi$; c) $\frac{16}{3}\pi$ №6 b) $4\frac{1}{6}\pi$; $2,5\pi$; $3\frac{1}{3}\pi$ №7 $\approx 62,83$ sm №8 4) 5π m;
 s.32-36 №2 a) 4 №3 a) 27; b) 8; №4 a) 16; b) 30 №5 a) $7,5\sqrt{2}$; №6 25 №10 a)5; 12 b) 48; 26
 №11 a)10 b)3sm №12 21 №13 1sm; 7sm. №14 a)12 sm; b)10 sm; c)48sm. №16 144 m.
 s.37-38 №1 a) 40° №2 a) 95° ; c) 120° . №5 1) a) 63° ; b) 110° №7 90° ; 110° ; 90° ; 70°
 s.40-42 №4 a) 8,5; b)9; c)15. №6 a) 3,9 m; c) 36° №8 b)4; c)12 №9 a) $AD=14$ sm,
 $AB=16$ sm, $DC=17$ sm, $BC=19$ sm, $P=66$ sm; b) $SR=17$ sm, $SQ=12$ sm, $QR=13$ sm,
 $P=42$ sm №10 1) 8; 2)30; 3)12 №11 a) $15\sqrt{3}$; b) 36 №12 $9\sqrt{7}$ sm
 s.43-46 №2 a) 60° b) 50° c) 120° №3 a) 55° b) 75° c) 110° №5 a) 19° ; b) 17° №6 b) 94° ;
 d) 14° ; e) 26° №7 a) 30° b) 44° c) 15° №8 40° №9 15° №10 c) 55°
 s.47-48 №4 a)2; b) 25; c) 2 №5 a)2; b) 8; c) 5 №6 a) $c=5, d=6$; b) $a=4, b=3$; c) $a=12$,
 $x=18$ №7 6,5m №8 a)5,8 km; b) $\approx 36,4$ km №9 a) 2,25 m
 s.49-50 №1 30° №2 50° №3 a) $4\sqrt{3}$; b)3; c)6 №4 a) 139° ; b) 140° ; c) 30° №5 a) 36° ; b) 8;
 c) $x=58$; $y=32$ №7 89° ; 41° №8 c) $a=154, b=76$; d) $a=38, b=52, c=104, d=90$; f) $a=55$,
 $b=72, c=178, d=89$ №9 $\sphericalangle D = \sphericalangle G = 24^\circ$, $\sphericalangle F = \sphericalangle E = 84^\circ$; №10 a) $\approx 11,5$ km; №11 a) 120°

3. Funksiyalar. Qrafiklər

- s.51-66 №2** a) 4; b) 9; c) 1 **№3** a) -1; 2 **№4** 7 **№8** 1) $a = \frac{1}{4}$ **№9** a) $a > 1$; b) $0 < a < 1$; c) $a < -1$; d) $-1 < a < 0$ **№17** b) $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$, $y = 2(x-3)^2 + 2$ **№18** 4) (2; -1); $x = 2$; 6) (-1; 3); $x = -1$ **№19** 2) (-1; 4); $x = -1$; (1; 0), (-3; 0), (0; 3) **№21** a) $x = 5$; c) $x = 2$ **№22** $x = 13$ **№23** c) $y = -4(x-2)^2 + 5$; d) $y = \frac{1}{5}(x+3)^2 - 10$ **№24** a) $y = -(x-2)^2 - 1$; b) $y = -x^2 - 2$; c) $y = (x-2)^2 - 1$ **№26** a) 2; b) 1; c) 2; **№27** 1) b) (15; -100); c) $x = 15$; d) 2; 3) b) (-18; -8); c) $x = -18$; d) 2; **№28** a) $f(x) = (x-8)(x+3)$; $g(x) = (x-1)^2$; $p(x) = 4(x-2)(x-3)$; b) $f(x)$: (8; 0), (-3; 0), (0; -24); $g(x)$: (1; 0), (0; 1); $p(x)$: (2; 0), (3; 0), (0; 24) **№29** a) $y = (x-10)(x-4)$ **№30** 1 \rightarrow d; 2 \rightarrow c; 3 \rightarrow g; 4 \rightarrow h; 5 \rightarrow a; 6 \rightarrow f; 7 \rightarrow e; 8 \rightarrow b; **№31** a) (1; -8); b) (-2,5; $-\frac{1}{6}$); c) (-1; 4) **№32** a) $y = (x+4)^2 - 8$; b) $y = 2(x-4)^2 - 11$; c) $y = -(x-4)^2 + 3$; **№33** 1) a) $y = (x-1)^2 - 4$; b) $y = -(x+2)^2 + 9$; 3) a) (-1; 0), (3; 0); (0; -3); b) (1; 0); (-5; 0), (0; 5); 4) a) $x = 1$; b) $x = -2$ **№36** 2) a) 2; b) 6; d) 4; 3) a) $x = 2$; b) $x = -1$; d) $x = 1$ **№37** aşağı; (3; 0), (-1; 0), (0; 6); $x = 1$; T(1; 8); ƏBQ = 8; təyin oblastı $(-\infty; +\infty)$; qiymətlər çoxluğu $(-\infty; 8]$; $(-\infty; 1]$ aralığında artır, $[1; +\infty)$ aralığında azalır. **№38** a) yuxarı; (2; 0), (6; 0), (0; 12); $x = 4$; T(4; -4); ƏKQ = -4; təyin oblastı $(-\infty; +\infty)$; qiymətlər çoxluğu $[-4; +\infty)$; $(-\infty; 4]$ aralığında azalır, $[4; +\infty)$ aralığında artır. **№39** a) ƏKQ = 8; $[8; +\infty)$; b) ƏBQ = 4; $(-\infty; 4]$ **№41** a) (-2; -1) d) (1; 14); f) (2; 48) **№42** $y = -\frac{1}{20}(x-5)^2 + 20$ **№46** a) $b = -2$, $c = -3$; b) $b = -4$, $c = 3$; c) $b = -4$, $c = 4$
- s.67-69 №1** c) $S = 12x - x^2$; d) eni 6 sm olduqda $S_{max} = 36 \text{ sm}^2$ **№2** 24,5 sm^2 **№3** sahil xətti boyu 30 m, eni 15 m **№4** b) -0,5 **№5** 3-cü gün; 290 bilet **№6** a) *beş dəfə bahalanma aparıldıqda* b) 1125° **№7** b) (25; 450), ən yüksək gəlir 25-ci həftədə 450° olur **№9** 20 m **№10** a) $t_1 = 1$ san, $t_2 = 3$ san; b) $t = 2$ san, $h_{max} = 21$ m
- s.72-73 №3** 1 \rightarrow b; 2 \rightarrow c; 3 \rightarrow a **№4** a) $y = 2|x|$; b) $y = 1 - |x - 3|$ **№5** b) 6-cı ay, 5000 $^{\circ}$ **№9** 1) (0,6; 1,5); 2) (0; 0), (1,2; 0); 4) oturacağı 1,2 m, hündürlüyü 1,5 m
- s.74 №1** c) $m = -2$ **№3** (1; 1) **№5** A(1; 3), D(-2; -6) **№6** a) 512 sm^3 b) 61 sm^3 artar
- s.75-76 №1** $y = (x+3)^2 - 2$ **№2** a) $b = -3$, $c = 2$; b) (5; 0), (-3; 0), (0; -15) **№3** a) $k = 10$; b) $[2; +\infty)$ **№4** $b = \pm 4$ **№5** $y = x^2 - x - 2$ **№6** 1 \rightarrow A; 2 \rightarrow C; 3 \rightarrow B, D **№7** b) 20 m **№8** b) 20 min kitab **№9** Sahil xətti boyu 50 m, eni 25 m **№10** a) $b = -12$; $c = 24$, b) $b = 2$, $c = 3$ **№11** $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$; b) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$ **№12** oturacağı 4 m, hündürlüyü 1,5 m **№14** b) 20-ci həftə, 4000 albom **№15** 3 nöqtədə kəsişir: (-1; -1), (0; 0), (1; 1) **№16** 1) $y = 2,24 - \frac{8}{7}x^2$ (x və y metrə) 2) a) 1,68 m; b) $\approx 2,19$ m

4. Çevrənin tənliyi

- s.78-81 №3** a) 1) 10; 2) 5; 3) 13; b) RQ = $\sqrt{68}$, PT = 5 **№4** 1) a) $x = 10$, $y = 10$; b) $2\sqrt{13}$ **№5** 1) a) T(-1; 7); b) 10 **№6** 1) 18; 2) $4\sqrt{17}$ **№7** 5 **№8** 5 **№9** (-2; -2) **№10** $k = -1$; $k = -7$, iki nöqtə **№11** (6; 0); **№12** a) düzbucaqlı üçbucaq **№14** a) P = 12 **№16** 10 km **№18** a) $y = 2x + 4$ və $y = 2x - 1$; c) $\sqrt{5}$ **№19** 15 m
- s.83-89 №1** b) $x^2 + y^2 = 12$; c) $x^2 + y^2 = 15$ **№2** b) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 1$; f) $(x+5)^2 + (y-9)^2 = 20$ **№3** a) ± 12 ; b) ± 13 **№4** b) M(1; 2), $r = 4$; d) M(-4; 2), $r = 3$ **№5** b) M(-4; -8), $r = 10$; d) M(2; -1), $r = 1$; e) M(0; 3), $r = \sqrt{14}$; f) M(1; -3), $r = 5$ **№10** a) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 17$, (-1; 2), (-1; 4); c) $(x+3)^2 + (y+5)^2 = 16$ **№11** a) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 49$; b) (10; -2), (-4; -2)

№12 (2; 0), (4; 0), (0; -1), (0; -8) №13 $(x-12)^2 + y^2 = 64$ №1410 №15 5 №16 a)10; b)7
 №18 b) $y = -\frac{4}{5}x - \frac{41}{5}$; c) $y = 8x + 65$ №19 a) *toxunan*; b) *kəsən* №20 $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 82$
 №23 c) $(-2,5; 2,5\sqrt{3})$ №25 a) doğrudur c) doğru deyil. №26 b) $\cos\theta = 0,8$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$;
 c) $\cos\theta = -0,6$; $\tan\theta = -\frac{4}{3}$ №27 2) a) 60° ; b) 135° ; c) $\approx 64^\circ$ №29 a) $9\sqrt{3}$; c) $12\sqrt{3}$
 №30 $12\sqrt{2}$ sm² №31 81 sm² №32 13; $\frac{7\sqrt{3}}{26}$

s.90-91 №1 a) $\approx 39,3$ sm² b) $\approx 37,7$ mm² №2 a) $\pi-2$ №3 a) 32π sm²; b) 4 m; c) 135°
 №4 a) $\frac{2\pi}{3}$, π ; b) $\frac{4\pi}{3}$, 3π №5 a) M(1; -1), $r = 2$; b) $0,5\pi$ c) $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$; $\frac{8\pi}{3} + \sqrt{3}$
 №6 1) $x^2 + (y-2)^2 = 8$ 2) 4 3) $2\pi-4$; $6\pi+4$ №7 a) $\frac{75\pi+50}{4}$ c) $\frac{25\pi-48}{4}$ №8 $\approx 44,22$ mm²
 №9 $\approx 10,88$ sm² №11 $\approx 0,61$ m²

s.92-93 №2 1)1600 m, 2)1900 m №3 a) $y = -x+6$ №4 a) $(x-3)^2 + y^2 = 25$; b) (8; 0), (-2; 0),
 (0; 4), (0; -4); c)40 №5 a) (4; 3); b) 5π ; c) $12,5\pi + 24$ d) $y = -\frac{4}{3}x$ №6 1→A; 2→B, D;
 3→C №7 $12,5\pi$ №8 a) 108° , b) 144° , c) 30π sm² №9 $16\sqrt{3} - 8\pi$ №10 a) $2\pi - \sqrt{3}$ sm²
 №11 $\approx 0,19$ m² №12 $8\pi - 16$ №13 24 №14 ≈ 7540 sm²

5. Tənliklər. Tənlikər sistemi

s. 94-96 №1 a)3; e) ± 1 №2 b) 0;2 c) 0; ± 2 ; e) 0; ± 4 ; №3 1) 0; 4; -5, 3) -2; $\pm 0,5$ 10) ± 3 ;
 1,5 №4 a) *iki həqiqi ədəd*; b) *bir həqiqi kökü var*; c) *üç həqiqi kökü var* №5 c) ± 2
 i) ± 2 ; ± 3 №6 -2; 1; 3; $a = -2$ №7 a)5; b) 1; ± 3 ; c) ± 3 ; 1; -2; d) 1; -2; 5; -3 №8 10 il
 №12 a) ± 3 ; d) ± 2 ; ± 1 ; f)1; 2; i) -5; -1 №13 a) ± 1 ; ± 2 b)3; ± 1 c) ± 1 ; -2; -4; f) ± 1 ; g) 2; 3

s. 97-99 №1 d) -1; 0; e) 2; f) 4 №2 a) 1; 6; b)Ø; e)4; g) -3; 0; h) -3; 3 №3 a) -0,5; 4
 b) $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; c)1 d)1;8 e) 2;3;1;6 f) -0,5; -2; 1 №4 c) $r = \frac{A-P}{Pt}$; d) $q = \frac{rt}{r-t}$ №5 a) $k=2$
 b) $k=-1$ №6 20 oyun №8 a) 10; b) 8 №9 6 saat, 3 saat №11 4 saat, 12saat №12 a) 56;
 b) *son 4 həftədə orta bal 52,5 olmaq şərti ilə* №13 40səh. №14 10° , $12,25^\circ$ №15 a) 4 kq

s. 101-103 №1 a) ± 4 ; b) ± 13 ; c) 0; d) Ø №2 a)14; -6; c)1 №3 a) -1; 5; b) 2; 1
 №5 a) -1; 2; g) ± 3 ; h) -1;3; j) $\frac{2}{3}$; k) 2; $\frac{4}{3}$ №7 b) -1; 1,8; c) -2,4; 1; e) 1,1; f) 1,5
 №10 b) ± 1 ; ± 3 ; d) ± 2 №12 $|x-48|=2,4$ №13 $|x-110|=15$

s.104-105. №1 a) 13; b) -4; d) 3; e) -1,6; f) ± 3 ; h) 8 №4 a) 9; b) 8; d) 3; e) 11
 №5 a) 9; c) 1; e) 27 №6 a) 8; d) 1 №7 1) $\sqrt{h^2+25}$, $\sqrt{h^2+256}$; 2) 12 №8 8 km

s. 106-113 №4 a) -12; b) -6 №7 $a = 3$; $b = 1$ №8 $1 \rightarrow a$; $2 \rightarrow c$; $3 \rightarrow b$ №9 c) bir həlli var
 №10 b) (1;4),(4;1); d) (-3; 9), (2;4) №11 2) $y = 4 - (x+3)^2$, $y = -x-1$ №15 b)(2;2), (1;3);
 c)(4;2), d)(-1;3), (-3;1); e)(6;3)(1;-2); h) (2;-1) №16a) (2;2); b) (0;-1),(-1;0)
 №17 a)(-1; 1),(3; 9); b) (1; 2),(-2;5); c) (2;-9),(3;-8); d) (1;-1),(9;3) №18 b) -2, (2;-1),
 (1;-2) №19 a) (-2;-4), (4; 2) №20 $b=4$, (0;4) və (3; 1) №21 c) iki həlli var: (-1; -4),
 (5; 20) d) bir həlli var:(1; 1) №22 a) $b>7$; b) $b=-5$ №23 $k=-2$ və $k=10$ №24 1) $b<0$;
 2) $b=1$ №25 a) 15 san. b) 375 m №26 $t_1 = 1$ san, $t_2 = 3$ san №28 d) (1; 3)
 №30 a) (1; -2), (-1; 2); b) (0; 4), (-1,25; -1); c) $(\sqrt{3}; 0)$, $(-\sqrt{3}; 0)$, (2; 1), (-2; 1)

s.114-115 №1 24 №2 b)11;4 və ya 7;6 №3 1000° , 3000° №4 6 l, 4 l №5 88kq,32kq
 №6 108sm² №7 60sm² №8 6 sm, 9 sm №9 20 dəq, 30 dəq. №10 15 gün, 30 gün
 №11 96 km/saat, 64 km/saat №12 56 san.

s.116-117 №1 d) -0,5; -1; 1 i) $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$ j) -1 №2 300q №3 1) (1; -4),(2;-1); 2)(3;3),(-3;-3)
 3)(1;-2),(-1;2); 6)(3;-1); 9)(1;1) №4 4 km/saat, 5 km/saat №5 1→B, D; 2→A; 3→C
 №6 6;8;10 №7 b) (2; 1),(-2;5); c)(3;2) №8 a) 1; 7; b) ± 1 ; c) ± 1 ; ± 7 d) -2 №9 a)10; b)10
 №10 1→C; 2→A,D; 3→B №11 4m/san, 3 m/san №13 uzunluğunu 20m, enini 2 m;
 №14 a) $a = 0$; b) $a = \pm 6$ №15 a) $-2 < a < 2$; b) $a = -2$

6. Çoxbucaqlılar

- s.119-122 №4** a) 20; 54 b) 10; 15 №5 a) 7; b) 12; №6 2) 540°; 3) 900°; №7 1) a) 12; b) 54; 2) a) 120°; 60°; b) 144°; 36° №9 1260° №10 $n = 10$ №11 a) 127°; c) 108° №12 140° №13 160°; 20° №14 1) 5; 2) 9; 3) 10; 4) 12 №15 1) 6; 2) 12; 3) 9; 4) 18 №17 b) 10 №18 24
- s.124-130 №1** a) 30°; b) 7,5 №3 a) $x = 90^\circ, y = 60^\circ$; b) $x = 90^\circ, y = 50^\circ$; №4 96 sm² №6 20 m; 22 m №7 b) AP=AR=3sm, PB=BQ=7sm, QC=RC=5sm №8 b) $\sqrt{3}$ sm, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sm №9 2 sm, 5 sm №10 1) 3; 2) $3\frac{1}{3}$ №11 b) 2 №13 10 sm №14 b) $6\frac{1}{4}$ №15 b) 8 sm, 18 sm №18 22sm, 20sm, 26sm №19 a) $x=85, y=80$ №21 a) P=40, S=80 b) P=18, S=18 №22 130 sm² №23 $2,4\pi$ sm №24 6 sm, $27\sqrt{3}$ sm² №25 4,8sm №27 a) $2\sqrt{3}$ sm, $\sqrt{3}$ sm №28 b) 10sm, $5\sqrt{2}$ sm №29 a) $3\sqrt{3}$ sm, 6sm №31 a) 3sm b) $3\sqrt{3}$ sm №32 $3\sqrt{3}$ sm №33 36
- s.133-136 №2** a) $9\sqrt{3}$ №4 a) 48 sm²; b) 24 sm² c) 20 sm² №5 a) 256; c) $288\sqrt{3}$ №6 c) $54\sqrt{3}$ №7 a) P = 42; S = $\frac{147\sqrt{3}}{2}$; c) P≈56; S=243 №8 b) $24\sqrt{3}$ m² №9 ≈889,92 sm² №10 $3\sqrt{3}$ sm №11 b) $3\sqrt{3}$ sm №12 1,92 m² №13 c) 9 №15 4 №16 b) 3) $x=84^\circ$ №17 18; №18 3
- s. 137-138 №3** a) 126°; b) 45° №4 a) 35; b) 7; c) 1080° №5 36 sm №7 a) 1:4 №8 4 sm №9 c) 3,5 sm, 12 sm №10 $\sqrt{5}$ №11 $72\sqrt{3}$ sm² №12 a) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{3}}{18}$ c) 1; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

7. Bərabərsizliklər

- s.140-142 №2** a) [-4; 2]; b) (1; 10) c) \emptyset №3 a) [2; 4) b) $(-\infty; 4)$; c) $(-5; -1]$ №4 (4; 8) №5 a) $(-4; 1)$; c) $(-10; 2)$ №6 a) $(-1; 8)$; c) $(-0,5; +\infty)$ №7 a) [5; 7]; c) [-2; + ∞) №8 36 №9 10,8 kq-dan az, 32,4 kq-dan çox olmamaq şərti ilə №10 3 m-dən böyük, 9 m-dən kiçik №11 a) $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$; c) (1; + ∞) №12 b) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ d) [-3; 6] №13 a) (1; 3); b) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ №14 15 №15 b) $a < 10$ olduqda
- s.143-144 №1** a) $(-\infty; -3,2] \cup [2; +\infty)$; b) [2; 3]; c) $(-6; 0)$; h) $(-\infty; -2)$; i) (1,5; + ∞) №3 b) $(-5; 3)$; c) $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$ №4 a) [-5; 2]; d) $(-\infty; 0)$ №5 $|x - 45| \leq 30$ №6 a) mavi, b) yaşıl
- s.147-152 №2** a) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$; b) (1; 3); c) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ №3 a) $(-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$ d) [-2,5; -1]; e) $(-1,5; 1)$ №5 a) $(-\infty; +\infty)$; c) \emptyset №7 b) $x = 7$; c) \emptyset ; d) $(-\infty; +\infty)$ №8 a) (1; 8); b) $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$; d) [-4; 6]; i) $x \neq 2$ №10 a) $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$ b) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ №11 a) $(-2,5; 2)$; b) (1; 7) №12 (-1; 6) №13 a) $(-\infty; -6] \cup [3; +\infty)$ b) [1; 5]; e) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$ №14 b) [-5; -1] c) $(-\infty; 2,5] \cup [3; +\infty)$; d) (2,5; 4) e) $(-\infty; -12) \cup (2; +\infty)$ №18 c) $(-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$; f) (0; 4) №20 a) [-5; 3]; b) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ №22 6 sm-dən kiçik olmadıqda №23 7 sm-dən böyük, 12sm-dən kiçik №24 c) $x > 56,6$ №25 a) 5 sm; b) 4 sm, 5 sm №26 a) $t \in (1; 3)$ №27 sol dirəkdən 50 m-dən 480 m qədər məsafələrdə №29 a) 54 kq-dan az №30 b) 2 m-dən kiçik; c) 3,437 m-dən kiçik
- s.153-156 №1** a) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; c) [-4; 7]; d) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; g) $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$; h) [-3; 0] \cup [3; + ∞); i) $(-1; 0) \cup (2; +\infty)$ №2 c) [-4; -3] \cup [3; 5]; f) $(-\infty; -5) \cup (-2; 0) \cup (2; 5)$; g) (0; 4) \cup (4; 8); h) [0; 2] \cup {-5}; i) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; j) {-4} \cup [5; + ∞) №3 a) 7; $(-\infty; 5) \cup (7; +\infty)$; (5; 7) №4 a) $(-7; 3)$; b) $(-\infty; -8) \cup (5; +\infty)$; e) $(-\infty; -5] \cup (5; +\infty)$ f) $[-5\frac{1}{3}; -2\frac{1}{2}]$ №5 a) $(-\infty; -4] \cup [0; 4]$; b) [2; 6]; c) $(-\infty; -2) \cup (-1; 2)$ №6 1) a) (-6; 6); b) $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$ №7 a) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; b) (1; 2) №8 b) 27,9 sm-dən 28,6 sm-ə qədər №9 b) Stolun biri 65[°] olduqda həftəlik gəlir maksimum 1225[°] olar. 55 stol.
- s. 158. №2** a) [4; 13]; b) (2,5; + ∞); d) [3; 19) №4 a) $(-5; -3] \cup [3; 5)$; b) (-1; 1); c) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; d) [1; 5] №5 a) (9; + ∞); b) [1; + ∞)

s.159-160 №1 4000^n -dan 5500^n -a qədər №6 c) $x \neq 0,5$; g) \emptyset ; h) $(-\infty; +\infty)$ №7 9 və 11; 10 və 10 №8 a) 3;4;5;6 b) $x=4$ №9 d) $(-2; -1) \cup (1; 3)$; e) $[-3; 0) \cup [20; +\infty)$ f) $[-1; 3) \cup (3; +\infty)$; h) $(-\infty; -3) \cup (-2; 2)$; i) $(-\infty; -4) \cup [-2; 5]$; №10 10-sm-dən 12 sm-ə qədər
 №11 a) 41,25 m; b) $t \in [1; 2]$ №12 b) $(-\infty; -1\frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{4}; +\infty)$ №13 $a \in [0; 4)$
 №14 $1 \rightarrow B$; $2 \rightarrow C, D$; $3 \rightarrow A$ №15 $a \in (-3; 0)$ №16 a) 4 m; b) 2 m-dən kiçik

8. Vektorlar

s. 165-170. №1 a) $\langle 3; 4 \rangle$; 5 b) $\langle 12; 5 \rangle$; 13 c) $\langle -6; -8 \rangle$; 10 №2 a) $\langle 2; 4 \rangle$ c) $\langle 2; -4 \rangle$
 №4 1) a) $\langle 3; 6 \rangle$ b) $\langle 1; 3 \rangle$; 2) a) $\langle 5; 1 \rangle$ c) $\langle 5; -1 \rangle$ №6 a) 10 b) 4 c) 20 №8 $\vec{PQ} = \langle 3; 4 \rangle$ $|\vec{PQ}| = 5$,
 $v = 50$ km/saat №10 a) $k = -0,5$; b) $k = -1,5$; c) $k = 1$ №14 a) $5\sqrt{2}$, 45° ; c) $\sqrt{2}$, 135° ; d) $l \approx 127^\circ$
 №15 b) 5; $\approx 127^\circ$ №20 $\vec{v} = \langle 100\cos 25^\circ; 100\sin 25^\circ \rangle$, $v_{\text{uf}} \approx 90,63$ km/saat, $v_{\text{saq}} \approx 42,26$ km/saat
 №21 a) $\langle 10\sqrt{2}; 10\sqrt{2} \rangle$ №22 a) $\approx 893,5$ m/san, b) $v_s \approx 37,5$ km/saat, $v_{\text{şm}} \approx 64,95$ km/saat,
 №23 $F_{\text{ür}} \approx 159,35$ N, $F_{\text{saq}} = 103,48$ N №24 a) $\vec{u} = \langle 2; 2\sqrt{3} \rangle$, $\vec{v} = \langle -2; 0 \rangle$, $\vec{w} = \langle -3\sqrt{3}; 3 \rangle$
 s.172-178 №2 a) 220 N №6 a) 5; $\approx 143^\circ$, b) 500 m №7 300m, $\approx 36,9^\circ$ №8 $\approx 41,23$ km, $\approx 14^\circ$
 №10 b) $\approx 10,2$ km/saat, $\approx 78,7^\circ$ №11 2) a) \vec{AC} , b) \vec{DB} №13 a) \vec{AB} ; b) \vec{DB} ; c) \vec{BD} ; d) \vec{AD} ;
 e) $\vec{0}$ №16 a) $\langle 4; 7 \rangle$; $\sqrt{65}$; $\approx 60,3^\circ$ №17 a) $\langle 80; 650 \rangle$; ≈ 655 km/saat, $\approx 83^\circ$ №18 a) 20 san.;
 b) 20 m; c) $\approx 80,6^\circ$ №19 500 m; $\approx 81,9^\circ$ №20 a) ≈ 98 N
 s.179-180 №1 a) $2\vec{u}$; c) $3\vec{u} + 2\vec{v}$ №4 a) kollinear; №5 1) $\vec{v} - \vec{u}$; 2) $\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v}$ №6 ≈ 588 N, ≈ 96 N
 s.181 №1 a) $\langle -8; 21 \rangle$; b) $\langle -6; 13 \rangle$ №2 a) $\langle -6; -8 \rangle$, 10; №4 b) $k = \pm 6$ №5 C(0;3) №6 M(3;5)
 s.183-184 №4 a) $B'(1;2)$ $C'(-6;3)$, $(x;y) \rightarrow (x-3;y)$ №5 a) L; b) K; c) H №7 a) $F'(-1;-1)$,
 $A'(1;3)$, $S'(2;2)$, $N'(2;0)$ №10 1) $\langle 5;3 \rangle$, 2) $A' \langle 2; 1 \rangle$ №11 a) $\langle 4; 4 \rangle$; b) $\langle -9; -2 \rangle$
 s.186 №2 a) $x=7$, $y=36$, $z=3$ №4 a) $b=4$, $d=8$, $c=14$, $e=2$ №6 a) A; b) B; c) D
 №7 a) $A'(3;-2)$, $B'(6;1)$, $C'(7;-5)$ №9 a) $A'(-3;-5)$ b) $D'(-3;-4)$ c) $E'(1;9)$
 №11 b) C(5;0) c) C(3;0)
 s.188 №1 T(-2;5) №2 a) $\langle 4; -3 \rangle$, 5 №3 $F_{\text{ür}} \approx 37,09$ N, $F_s \approx 14,98$ N, №4 1) $\vec{v} = \langle 6; 6\sqrt{3} \rangle$
 №5 a) 50 san. b) 65m c) $\approx 67,4^\circ$ №8 F(2;8) №9 a) $\langle -4; 2 \rangle$; c) $\langle 2; -1 \rangle$ №13 c) $A_3(-4; -1)$,
 $B_3(1; -1)$, $C_3(-4; -7)$ №14 5) $B'(-1; 1)$, $A'(3; -1)$, $C'(-1; -4)$; 7) $A'(1; 5)$, $B'(-3; -3)$, $C'(7; -3)$

9. Ədədi ardıcılıqlar

s.191-193 №5 1) a) $b_4 = 33$; b) $b_5 = 51$; 2) a) $c_n = 27$, $n=7$ №6 a) $a_n = 20$, $n=10$;
 №7 16; $a_n = 3n+1$ №8 b) $P_n = 10n+10$ №12 a) 1; 5; 17; 53; 161 №13 a) 11; 34; 17; 52
 s.195-204 №2 a) $x_1 = 9$, $x_3 = 1$ №6 b) $a_6 = 11$, $a_{15} = 38$ №7 a) $a_1 = -40$, $a_8 = -19$ №8 11,2;
 18,4; 25,6; 32,8 №10 a) $n \geq 5$, $a_n > 0$ №11 a) $a_{14} = 1,5$ ilk 12 hədd mənfidir; b) $a_{22} = -0,1$,
 №14 b) $a_6 = -23$, $d = -4$ №15 a) $a_4 = \sqrt{48}$; b) 12; c) 13 №17 a) $d = 3$, $a_1 = 12$, $a_6 = 27$
 №18 a) 1; 4; 7 №21 152; 208 №26 $a_n = 4n - 1$ №27 46000 manat №28 24 sm²
 №31 2) a) 6; b) 3 №32 b) $x=0$, $x=2$. №35 $a_2 + a_8 = 2c$ №37 8 sm №38 10 sm
 №39 b) 9sm; 12sm; 15sm №41 100 mq, 150 mq, 200 mq, 250 mq, 300 mq
 №43 b) 70; c) 92; f) 6 №44 a) 195; b) $n^2 - 2n$ №45 $a_{11} = 127$, $S_{11} = 737$; b) 170; c) 100
 №46 a) 3240; c) 1683; d) 2112 №47 a) 5000; b) 1426 №48 122,5 №50 1) a) 820; b) 10
 №51 a) $a_1 = 1$; $a_2 = 9$ c) 5-ci hədd №52 4) $a_1 = -11$, $d = 4,5$ №53 a) $\frac{n(n+1)}{2}$; b) $n(n+1)$;
 c) n^2 №54 a) 8 b) 78 №56 78 №57 a) 19 №58 0,25 №59 c) $\approx 125,5$ m

s.206-215 №3 a) $y_1 = 2, y_4 = 0,25$. №7 2) $q = 2$; 3) $q = 0,5$ №9 c) $b_4 = 12, b_5 = -24$
 №10 c) -9 №12 a) $n = 5$; b) $n = 6$ №13 2) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ №15 3; 6; 12; 24 №16 1,5 sm
 №17 3 sm² №18 145800ⁿ №19 29282 m³ №20 72,9% №21 2⁷² №22 a) $b_n = 2^{11-n}$;
 b) $n = 11$ №23 2) b) 6 №24 a) $x = 5, x = -15$ №25 b) 4 və ya -4 №28 a) 31,5; c) 3069
 №29 1) a) 728; b) 5 №30 a) $b_1 = 3$ №31 a) 186 №32 364 №34 a) $n^3 + 1$ №35 a) $\frac{y^n - 1}{y - 1}$,
 ($y \neq 1$) №37 a) 20736; b) 74416 №38 1364 №39 c) $\frac{27\sqrt{3}}{256}$ №40 c) 10-cu həftə
 №42 a) 27 №44 e) $q = \frac{1}{3}$ №45 a) $\frac{1}{1-a}$; d) $\frac{1}{1+a^3}$ №47 24π sm №48 27 m

s.216-217 №2 27 №5 b) 84 №6 $S_4 = S_9 = 54$ №7 30,6 №8 $a_1 = 5, d = 4$ №9 b) 4 il
 №10 b) 14 №11 $a = 3, b = 6$ və ya $a = 27, b = 18$ №12 $1 \rightarrow D, 2 \rightarrow A, 3 \rightarrow B, C$ №13 a) 880 m;
 b) 48 san. №14 72 sm² №16 12 №18 462 lot və ya 5913,6 q №19 a) $\frac{3}{4}$

10. Məlumatın təqdimi. Birləşmələr. Ehtimal

s.220-227 №8 1) a) 7; 7; b) 10; 5 №9 b) ≈ 24 №12 b) 12% №14 274 man.
 №15 1,29 man. №16 a) 26; b) $\approx 2,87$ kq №17 b) 7
 s.228-234 №1 c) 42 №2 125; 25-i №3 30 №4 24 №5 720 №6 96 №7 d) 2 №8 24
 №9 $2! \cdot 7!$ №10 $5!$ №11 $5! \cdot 3!$ №12 a) $3! \cdot 5!$; c) $8!$ №13 a) 6; b) 12; c) 180; d) 840
 №14 10 №15 a) 6 element, 3 elementin hər biri 2 dəfə təkrarlanır; №16 12 №17 a) 720
 №18 a) ${}_8P_2 < {}_6P_3$ №19 b) 4; c) 3 №20 120 №21 360 №22 380 №23 60 №24 120; 100-ü
 №25 15 №26 a) 4; d) 20 №27 a) ${}_7P_3 > {}_7C_3$ №28 a) 220; b) 190 №31 a) *kombinezon*;
 b) *permutasiya*; №32 90 №33 $6!$ №34 2520 №35 72 №36 56 №37 60 №38 2^{10}
 №39 74 №40 30

s.237-240 №1 1) b) $\frac{3}{32}$; 2) b) $\frac{5}{6}$ №2 1) a) $\frac{1}{36}$; c) $\frac{1}{6}$; 2) a) $\frac{1}{42}$; b) $\frac{1}{49}$ №3 a) $\frac{1}{30}$; b) $\frac{1}{3}$
 №4 24; $\frac{1}{4}$ №5 a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{9}$ №6 $\frac{1}{8}$ №7 a) 56; b) 10; c) $\frac{5}{28}$ №8 $\frac{20}{21}$ №9 a) $\frac{33}{59}$; b) $\frac{7}{118}$; c) $\frac{45}{118}$
 №10 $\frac{1}{28}$ №11 $\frac{1}{90}$ №12 $\frac{2}{5}$ №13 a) $\frac{1}{42}$ №14 $\frac{10}{39}$ №15 a) $\frac{2}{7}$; b) $\frac{1}{7}$; c) $\frac{4}{7}$ №16 a) $\frac{14}{95}$; c) $\frac{33}{95}$
 №18 $\frac{10}{33}$ №19 b) $\frac{53}{89}$ №20 a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{1}{4}$ №21 $\frac{1}{24}$ №22 $\frac{1}{20}$

s.241-242 №1 Median №4 22,8 №5 1) b) 11; c) 0,6; 2) b) $\frac{11}{30}$ №6 a) 12; b) 33-38 yaş
 qrupu (22 nəfər) c) 118; e) 36,3 №7 a) 500; c) 0,586 №8 b) $\frac{21}{22}$ №9 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{2}{51}$
 №10 a) 10; 0,9 c) 4; $\frac{3}{4}$ №11 b) $\frac{2}{13}$ №13 a) $n = 3$, b) $n = 9$, c) $n = 6$

s.243-249 №1 0,9 kq №2 (2,5; 6,75) №3 a) 4; b) 34 №4 $P = 36, S = 36$ №5 15 №6 12
 №7 $a_{10} = 43, S_{11} = 253$ №8 a) $12,5\pi$ №9 d) (1;5) №10 18,75 №11 2 №13 a) 30 səh.
 №14 20% №15 a) 135° ; b) 5; c) 20 №16 a) 72; b) 1 №17 b) 7saat №18 1) 10;
 2) b) $\frac{16}{45}$ №19 $P = 28$ sm, $S = 24$ sm², №20 12,8 №24 a) (1;0); b) 2; c) 4π №25 4
 №26 60 №27 $P = 30; S = 36$ №29 b) $m = 1, x_1 = -1, x_2 = 2$ №30 b) 1% azaldı №32 a) $c \neq \pm 1$;
 b) $c = 1$; c) $c = -1$ №35 8 dəstə №37 $6\sqrt{2}$ №38 $\approx 58,8$ m/dəq №40 1) 5π sm №44 24 sm²
 №45 16 №57 9 saat №61 27 №66 45% №67 35 №69 2 km/saat №71 C bəndi, 28%,
 35 doğru cavab №72 c) (5; 0), (3; 4) №73 7,2 sm²

Buraxılış məlumatı

Riyaziyyat 9

Ümumtəhsil məktəblərinin 9-cu sinfi üçün

Riyaziyyat fənni üzrə

Dərslik

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər: **Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova**
Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
İlham Heydər oğlu Hüseynov

Məsləhətçi: **Çingiz Qacar**

İxtisas redaktoru: **Əbdürrəhim Quliyev**
Tariyel Talıbov

Dil redaktoru: **Asəf Həsənov**

Kompüter tərtibatı: **Fuad Qəhrəmanov**

Bədii tərtibatı: **Leyla Bəşirova**

Korrektoru: **Tərlan Qəhrəmanova**

© Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi (qrif nömrəsi: 2020-055)

Müəlliflik hüquqları qorunur. Xüsusi icazə olmadan bu nəşri və yaxud onun hər hansı hissəsini yenidən çap etdirmək, surətini çıxarmaq, elektron informasiya vasitələri ilə yaymaq qanuna ziddir.

Hesab-nəşriyyat həcmi: 14,5. Fiziki çap vərəqi: 16.

Kağız formatı: 70×100 ^{1/16}. Kəsimdən sonra ölçüsü: 165×240.

Səhifə sayı: 256. Şriftin adı və ölçüsü: Calibri qarnituru, 11-12 pt.

Ofset kağızı. Ofset çapı. Tiraj 130762. Pulsuz. Bakı – 2020.

Əlyazmanın yığıma verildiyi və çapa imzalandığı tarix: 29.07.2020

Çap məhsulunu hazırlayan:

“Radius” nəşriyyatı (Bakı, Binəqədi şossesi, 53)

Çap məhsulunu istehsal edən:

Çaşıoğlu Elm-İstehsalat MMC (Bakı, M.Müşfiq küç., 2A)

PULSUZ



Əziz məktəbli!

Bu dərslik sizə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir. O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sizə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, siz də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaqsınız, təmiz və səliqəli saxlayacaqsınız ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşınız ondan sizin kimi rahat istifadə edə bilsin.

Sizə təhsildə uğurlar arzulayırıq!

