RİYAZİYYAT

DƏRSLİK 11

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASININ DÖVLƏT HİMNİ

Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin,*
sözləri *Əhməd Cavadındır.*

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!

Minlərlə can qurban oldu,
Sinən hərbə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştaqdır!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!

HEYDƏR ƏLİYEV
AZƏRBAYCAN XALQININ ÜMUMMİLLİ LİDERİ

Nayma Qəhrəmanova
Məhəmməd Kərimov
Əbdürrəhim Quliyev

Ümumi təhsil müəssisələrinin 11-ci sinifləri üçün

RİYAZİYYAT

fənni üzrə

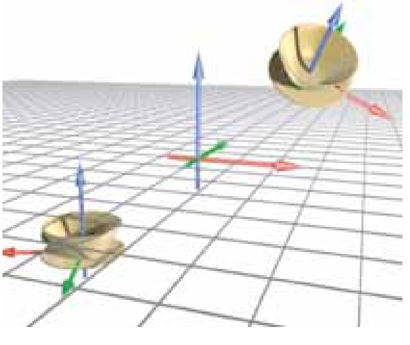
DƏRSLİK

Bu nəşrlə bağlı irad və təkliflərinizi *radius_n@hotmail.com* və *derslik@edu.gov.az* elektron ünvanlarına göndərməyiniz xahiş olunur. Əməkdaşlığınız üçün əvvəlcədən təşəkkür edirik!

Mündəricat

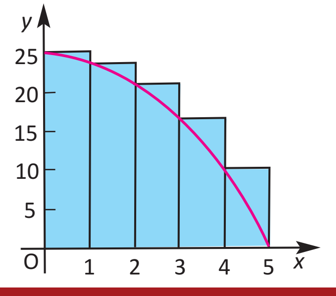
1. Çoxhədlilər

2. Fəzada vektorlar



3. Limit

4. Fırlanma fiqurları. Silindr, konus, kürə


y
25
20
15
10
5
O
1
2
3
4
5
x

1 Çoxhədlilər

- Çoxhədlinin çoxhədliyə bölünməsi
- Qalıq haqqında teorem
- Çoxhədlinin vuruqları haqqında teorem
- Rasional köklərin tapılması
- Cəbrin əsas teoremi
- Çoxhədli funksiya
- Rasional funksiya

Riyazi lüğət

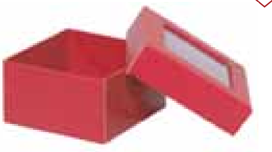
✓ n dərəcəli çoxhədli
✓ Bölünən, bölən, qalıq
✓ Budaqlı bölmə
✓ Sintetik bölmə
✓ Qalıq haqqında teorem
✓ Çoxhədlinin vuruqları
✓ Rasional köklər
✓ Çoxhədlinin kökləri

Bunları bilmək maraqlıdır!

1048-1131-ci illərdə yaşamış rübailər ustadı Ömər Xəyyamın adı dahi riyaziyyatçıların adı ilə yanaşı çəkilir.
$f(x) = x^3 - px - q$ kub çoxhədlisinin köklərinin $p > 0$, $q > 0$ halı üçün həndəsi üsulla tapılmasını ilk dəfə Ömər Xəyyam vermişdir.

Çoxhədlini ikihədliyə sintetik bölmə qaydasını ilk dəfə italyan riyaziyyatçısı Paolo Ruffini (1765-1822) vermişdir.

Polinomoqrafiya rəssamlıq, riyaziyyat və kompüter elminin sintezi ilə yaradılan incəsənət növüdür. Polinomoqrafiyanın əsasında kompüter proqramı ilə çoxhədlinin köklərinin vizuallaşdırılması durur.



Məsələ. Ölçüləri santimetrlə verilən hədiyyə qutularının həcmini $V(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar, burada x müsbət tam ədəddir və $5 \le x \le 15$. Qutuların hündürlüyü $h(x) = x + 1$ xətti funksiyası ilə müəyyən edilirsə, digər ölçülərini çoxhədli şəklində necə ifadə etmək olar? Siz bu məsələni çoxhədlini çoxhədliyə bölmə qaydasını öyrənməklə həll edə bilərsiniz.

Araşdırma. Çoxrəqəmli ədədləri budaqlı bölmə qaydasının çoxhədliyə tətbiqini araşdırın.

$$
\begin{array}{r|l}
-552 & 17 \\ \cline{2-2}
\underline{51} & 32 \\
-42 & \\
\underline{34} & \\
8 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
-x^2 + 6x + 11 & x + 3 \\ \cline{2-2}
\underline{x^2 + 3x\phantom{{}+11}} & x + 3 \\
-3x + 11 & \\
\underline{3x + 9} & \\
2 &
\end{array}
$$

a) Hər iki hal üçün bölünən, bölən, qismət, qalıq anlayışlarına uyğun ədədləri və çoxhədliləri təqdim edin.

b) Çoxhədlini bölərkən qismətdə yazılan ilk hədd necə müəyyən edilmişdir? Çoxrəqəmli ədədlərin bölünməsi ilə oxşar və fərqli cəhətləri hansılardır?

c) Hər iki bölmə əməlinin düzgün yerinə yetirildiyini necə yoxlayardınız?

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ifadəsinə n dərəcəli birdəyişənli çoxhədli deyilir. Burada x dəyişən, $a_n, a_{n-1},\ldots, a_1, a_0$ müəyyən ədədlərdir və $a_n \ne 0$.
$a_n x^n$ baş hədd, a_n baş əmsal, a_0 sərbəst hədd adlanır.
Tam ədədləri budaqlı bölmə qaydasına oxşar qayda ilə çoxhədlini çoxhədliyə bölmək olar.

Natural ədədləri bölmə əməli üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

Bölünən = qismət × bölən + qalıq

Çoxhədlini çoxhədliyə bölmə əməli üçün də eyni qayda doğrudur. Bölünən çoxhədli $P(x)$, bölən $B(x)$, natamam qismət $Q(x)$, qalıq $R(x)$ olduqda $\dfrac{R(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{P(x)}{B(x)}$ və ya $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$ bərabərliyi doğrudur.
Burada $R(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsi $B(x)$-in dərəcəsindən kiçikdir.

Bölən $x - m$ şəklində ikihədli olduqda qalıq müəyyən ədəd (r) ola bilər.

Bu halda alırıq: $\dfrac{P(x)}{x-m} = Q(x) + \dfrac{r}{x-m}$; $\qquad P(x) = (x - m) \cdot Q(x) + r$

Nümunə 1. a) $x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ çoxhədlisini budaqlı bölmə qaydası ilə $x - 3$ ikihədlisinə bölün. Nəticəni $\dfrac{P(x)}{x-m} = Q(x) + \dfrac{r}{x-m}$ şəklində yazın.

b) Dəyişənin mümkün qiymətlərini müəyyən edin.

c) Həllinizi yoxlayın.

Həlli: a)

$$
\begin{array}{rr|l}
- & x^3-2x^2-4x+5 & x-3 \\
\cline{3-3}
 & x^3-3x^2 & x^2+x-1 \\
\cline{2-2}
- & x^2-4x & \\
 & x^2-3x & \\
\cline{2-2}
- & -x+5 & \\
 & -x+3 & \\
\cline{2-2}
 & 2 &
\end{array}
$$

Hər bir bölmə addımında soldan başlayaraq bölünənin ilk həddi bölənin baş həddinə (bu halda x-ə) bölünür .

$$\frac{x^3}{x}\quad \frac{x^2}{x}\quad \frac{-x}{x}$$

$$x^2 \;+\; x \quad -1$$

Deməli,

$$\frac{x^3-2x^2-4x+5}{x-3} = \underbrace{x^2+x-1}_{qismət} + \frac{2}{x-3}$$

qalıq

b) $x-3 \neq 0$ və ya $x \neq 3$ olmalıdır (əks halda sıfıra bölmə alınır).

c) Yoxlama: $x^3-2x^2-4x+5=(x-3)(x^2+x-1)+2$ eyniliyi ödənməlidir.

$$= x^3+x^2-x-3x^2-3x+3+2$$

$$= x^3-2x^2-4x+5$$

Nümunə 2. $5x+3x^3+2x^4-1$ çoxhədlisini x^2-2x+2 çoxhədlisinə bölün.

Həlli: Bölünən çoxhədlini dəyişənin dərəcəsinin azalma sırası ilə yazaq, iştirak etməyən dərəcəli hədləri şərti olaraq 0 əmsalı ilə çoxhədliyə daxil edək.

$$
\begin{array}{rr|l}
- & 2x^4+3x^3+0x^2+5x-1 & x^2-2x+2 \\
\cline{3-3}
 & 2x^4-4x^3+4x^2 & 2x^2+7x+10 \\
\cline{2-2}
- & 7x^3-4x^2+5x & \\
 & 7x^3-14x^2+14x & \\
\cline{2-2}
- & 10x^2-9x-1 & \\
 & 10x^2-20x+20 & \\
\cline{2-2}
 & 11x-21 &
\end{array}
$$

Hər bir bölmə addımında soldan başlayaraq bölünənin ilk həddi bölənin baş həddinə (bu halda x²-na) bölünür.

$$\frac{2x^4}{x^2}\quad \frac{7x^3}{x^2}\quad \frac{10x^2}{x^2}$$

$$2x^2 + 7x + 10$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. 1) Bölmə əməlini budaqlı bölmə ilə yerinə yetirin.

a) $(2x^2-3x+6):(x-2)$

b) $(2y^3-5y^2+3y-1):(y-4)$

c) $(4x+2x^2-x^3+5):(x+2)$

d) $(-3y^3+4y-5):(y-1)$

e) $(-z^3+2z^2-3z+2):(z-2)$

f) $(2x^3-12x-7x^2-3):(2x+3)$

2) Həlli $P(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$ bərabərliyinə görə yoxlayın.

2. Çoxhədlini $x-3$ ikihədlisinə böldükdə natamam qismətdə $2x^2+3x-11$ çoxhədlisi, qalıqda isə -4 alınır. Bölünən çoxhədlini tapın.

3. Bir bölmə əməlində $2x^2-7x+9$ çoxhədlisi bölünən, $2x-3$ ikihədlisi natamam qismət, 3 qalıqdır. Bölən çoxhədlini tapın.

4. Bölmə əməlini yerinə yetirin.

a) $(x^4-x^3-x^2-x-3):(x^2-1)$ b) $(x^4+2x^2+4):(x^2-2)$

5. $x^3-x^2-5x+6=(x-2)\cdot Q(x)$ olarsa, $Q(2)$-ni hesablayın.

Praktik məşğələ 1) $2x^3 + 3x^2 - 5x + 7$ çoxhədlisini $x - 2$ ikihədlisinə budaqlı bölməni araşdırın.
2) Hər bir bölmə addımında bölünənin ilk həddi bölənin baş həddinə, x-ə bölünür və nəticə qismətə yazılır. İkincidən başlayaraq hər bir bölmə addımında bölünənin ilk həddinin necə alındığını araşdırın və təqdim edin.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 5x + 7 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\;\underline{2x^3 - 4x^2} \quad\quad\quad & 2x^2 + 7x + 9 \\ 7x^2 - 5x \quad\; & \\ -\;\underline{7x^2 - 14x} \quad\; & \\ 9x + 7 & \\ -\;\underline{9x - 18} & \\ 25 & \end{array}$$

$3x^2 - (-4x^2) = x^2 \cdot (3 + 2\cdot 2)$

$-5x - (-14x) = x \cdot (-5 + 2\cdot 7)$

$7 - (-18) = 7 + 2\cdot 9$

Çoxhədlini $x - m$ ikihədlisinə bölmə üçün sintetik qayda (Hörner sxemi)

Çoxhədlini $x - m$ ikihədlisinə bölərkən budaqlı bölməyə alternativ olan sintetik bölmə qaydasından da istifadə edilir. Sintetik bölmədə çoxhədlinin yalnız əmsalları istifadə edildiyindən daha az hesablamalar aparmaq lazım gəlir.

Nümunə. $2x^3 + 3x^2 - 4x + 11$ çoxhədlisini $x + 3$ ikihədlisinə sintetik qayda ilə bölün.

Həlli: Bölünən çoxhədlinin əmsalları hədlərin dərəcəsinin azalma sırasına görə üst sətirdə yazılır və iştirak etməyən dərəcəli hədlər sıfır əmsalı ilə daxil edilir. İkihədli $x + m$ şəklində olduqda $x - (-m)$ şəklinə gətirilir.

Bölən ikihədlini $x + 3 = x - (-3)$ kimi yazaq. Deməli, $m = -3$.

$2x^3 + 3x^2 - 4x + 11$

m-in qiyməti → -3	2	3	-4	11	← Çoxhədlinin əmsalları
×					

-3	2	3	-4	11
		-6		
×	2	-3		

1. Baş əmsal (2) olduğu kimi aşağı sətirə yazılır.

2. Baş əmsalın (2-nin) $m = -3$-ə hasili (-6) ilə bölünən çoxhədlidə 2-ci həddin əmsalının (3-ün) cəmi qismətin 2-ci həddinin əmsalını (-3-ü) verir.

-3	2	3	-4	11
		-6	9	-15
×	2	-3	5	-4

$2x^2 - 3x + 5$

qalıq

3. Qismətin 2-ci əmsalının (-3-ün) $m = -3$-ə hasili (9) ilə bölünənin 3-cü əmsalının cəmi qismətin 3-cü əmsalını (5-i) verir. Digər əmsalların müəyyən edilməsi oxşar qayda ilə davam etdirilir.

Beləliklə, bölünən P(x) = $2x^3 + 3x^2 - 4x + 11$, bölən B(x) = $x + 3$ olduqda natamam qismət Q(x) = $2x^2 - 3x + 5$ və qalıq $r = -4$ olur.

Deməli, $$\frac{2x^3 + 3x^2 - 4x + 11}{x+3} = 2x^2 - 3x + 5 - \frac{4}{x+3}.$$

Ümumi halda n dərəcəli çoxhədlini $x - m$ ikihədlisinə sintetik bölmə qaydası (və ya Hörner sxemi) aşağıdakı cədvəldə verilmişdir.

	a_n	a_{n-1}	....	a_2	a_1	a_0
m		$+\ m\cdot b_{n-1}$		$+\ m\cdot b_2$	$+\ m\cdot b_1$	$+\ m\cdot b_0$
	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = a_{n-1} + m\cdot b_{n-1}$	....	$b_1 = a_2 + m\cdot b_2$	$b_0 = a_1 + m\cdot b_1$	$r = a_0 + m\cdot b_0$

Öyrənmə tapşırıqları

6. Bölmə əməlini sintetik bölmədən istifadə etməklə yerinə yetirin. Həlli P(x) = ($x - m$) Q(x) + r bərabərliyinə görə yoxlayın.

a) $(x^2 + 3x + 15) : (x - 5)$

b) $(x^2 + 7x - 2) : (x - 2)$

c) $(x^3 - 4x + 2) : (x + 2)$

d) $(x^3 - 14x + 8) : (x + 4)$

e) $(x^4 - 9x^2 + x + 3) : (x + 3)$

f) $(10x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 9) : (x + 1)$

7. Bölmə əməlini istədiyiniz üsulla yerinə yetirin.

a) $(x^3 + 3x^2 - 3x - 2) : (x - 1)$

b) $\dfrac{t^3 + 2t^2 - 7t - 2}{t - 2}$

c) $(y^3 + 3y + 10):(y + 2)$

d) $\dfrac{m^4 + 6m^3 + 2m^2 - m + 8}{m + 1}$

8. a) $12x^3 - 8x^2 + 5x + 2$ çoxhədlisini əvvəlcə $2x + 1$, $3x + 1$ və $4x + 1$ ikihədlilərinə budaqlı bölmədən istifadə etməklə, sonra isə həmin çoxhədlini sintetik bölmədən istifadə etməklə $x + \frac{1}{2}$, $x + \frac{1}{3}$ və $x + \frac{1}{4}$ ikihədlilərinə bölün. Bu iki bölmədən alınan qalıq və qismətin əmsalları haqqında hansı fikirləri söyləmək olar?

b) Sintetik bölmə qaydası bölən $x - m$ şəklində olduqda doğrudur. Bölən $2x - 4$ olarsa, bu qaydadan necə istifadə edə bilərsiniz?

9. Verilən sintetik bölmə sxeminə görə bölünəni, böləni, qisməti və qalığı yazın.

3	1	–5	3	12
		3	–6	–9
	1	–2	–3	3

Qalıq haqqında teorem (Bezu teoremi)

P(x) çoxhədlisinin $x - m$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalıq P(x) çoxhədlisinin $x = m$ nöqtəsindəki qiymətinə bərabərdir.

$$P(x) = (x - m)Q(x) + P(m), \quad r = P(m)$$

İsbatı: $P(x) = (x - m) \cdot Q(x) + r$ bərabərliyində $x = m$ yazsaq, $P(m) = (m - m) \cdot Q(m) + r$, buradan da $r = P(m)$ alınır.

Nümunə. Qalıq haqqında teoremə görə $P(x) = x^3 - 11x + 9$ çoxhədlisinin $x + 4$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalığı tapın.

Həlli: $x + 4 = x - (-4)$ şəklində yazaq.
Deməli, $m = -4$.
Qalıq haqqında teoremə görə qalıq
$r = P(-4) = (-4)^3 - 11 \cdot (-4) + 9 =$
$= -64 + 44 + 9 = -11$ olur.

Həlli yoxlayaq.

$x^3 - 11x + 9$

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 0 & -11 & 9 \\ & & -4 & 16 & -20 \\ \hline \times & 1 & -4 & 5 & -11 \end{array}$$

$x^2 - 4x + 5$ qalıq

$P(-4) = -11$

Öyrənmə tapşırıqları

10. Verilmiş P(x) çoxhədlisini $x - m$ ikihədlisinə sintetik qayda ilə bölün, alınan qalığı bu çoxhədlinin P(m) qiyməti ilə müqayisə edin.

a) $P(x) = 2x^2 + 4x + 3; \quad m = 2$ b) $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 9; \quad m = -4$
c) $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 6x - 4; \quad m = -2$ d) $P(x) = x^4 + x^3 - 2x + 3; \quad m = 1$

11. Qalıq haqqında teoremə görə verilən çoxhədlinin: 1) $x - 4$; 2) $x + 2$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalığı müəyyən edin.

a) $x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ b) $2x^3 + 5x - 2x^4$ c) $3x^3 + 7x^2 - 2x - 3$
d) $3x^3 + 4x^2 - 19$ e) $8x^2 - 8x - 5x^3 + 3$ f) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 2x - 7$

12. Hörner sxemini tətbiq edərək bölmə əməlini yerinə yetirin. Qalıq haqqında teoremə görə həllinizi yoxlayın.

a) $(x^3 + 2x^2 - 3x + 9) : (x + 3)$ c) $(2x^3 + 2x^2 - 5x + 4) : (x - 2)$
b) $(2y^2 + 3y - y^3 + 5) : (y - 4)$ d) $(2t^4 + 3t^3 - t^2 + 4t) : (2 + t)$

13. Hər bir bölünən üçün c əmsalının elə qiymətini tapın ki, qalıq 2 olsun.

a) $(x^3 + 3x^2 - x + c) : (x - 1)$ c) $(x^3 + cx^2 + x - 3) : (x - 2)$
b) $(x^3 + x^2 + cx - 15) : (x + 2)$ d) $(cx^3 + 3x + 1) : (x + 3)$

14. a) c-nin hansı qiymətində $x^3 - 5x^2 - 5x + c$ çoxhədlisi $x + 3$ ikihədlisinə qalıqsız bölünür?
b) c-nin hansı qiymətində $x^4 + 2x^3 - x + c$ çoxhədlisi $x + 2$ ikihədlisinə qalıqsız bölünür?

15. k-nın hansı qiymətində $3x^2 + 6x - 10$ çoxhədlisini $x + k$ ikihədlisinə böldükdə qalıq 14 olar?

16. a) c-nin hansı qiymətində $P(x) = -2x^3 + cx^2 - 5x + 2$ çoxhədlisini həm $x - 2$, həm də $x + 1$ ikihədlisinə böldükdə qalıq eyni olar?
b) $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax - 7$ çoxhədlisinin $(x + 1)$-ə bölünməsindən alınan qalıq 4 olarsa, a həqiqi ədədini tapın.

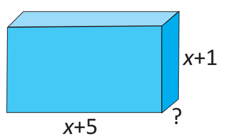
17. Gülnar deyir ki, $(x^4 + 1) : (x + 1)$ bölmə əməlini şifahi yerinə yetirə bilər və cavab $(x^3 + 1)$-dir. Gülnar doğru fikirləşir, yoxsa səhv? Fikrinizi əsaslandırın.

18. $P(x)$ çoxhədlisi $(x - 1)$-ə qalıqsız bölünür, $(x + 2)$-yə böləndükdə isə qalıq 3-ə bərabər olur. Bu çoxhədlini $(x^2 + x - 2)$-yə böldükdə alınan qalığı tapın.

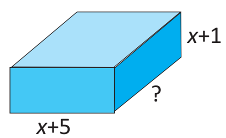
Tətbiq tapşırıqları

19. Verilən çoxhədli düzbucaqlı paralelepipedin həcmini ifadə edir. Paralelepipedin verilməyən tilini tapın.

a) $V = 3x^3 + 8x^2 - 45x - 50$



b) $V = 2x^3 + 17x^2 + 40x + 25$



20. **Kino və teatra illik xərclənən pul.** 2000-ci ildən 2007-ci ilə qədər şəhər əhalisinin kino və teatr üçün xərclədiyi pulun məbləğini (min manatla) $M(x) = 0{,}3x^3 + 64x^2 + 824x + 4800$ kimi, şəhərdəki əhalinin (min nəfərlə) sayını isə bu illər üçün $P(x) = 0{,}2\,x + 40$ kimi modelləşdirmək olar (x burada 2000-ci ildən başlayaraq keçən illərin sayını göstərir). Şəhər əhalisinin orta illik kino və teatr xərclərini göstərən çoxhədlini yazın.

21. **Orta tamaşaçı sayı.** Voleybol üzrə qadınlararası Super Liqa yarışlarında 2008-ci ildən etibarən keçirilən oyunların sayını (T) və bu oyunlardakı tamaşaçıların sayını (A) aşağıdakı çoxhədlilərlə modelləşdirmək olar:

$T(x) = 2x + 6$,
$A(x) = 6x^3 + 418x^2 + 7200x + 18000$,
burada x illərin sayını göstərir və $0 \le x \le 10$.
Bu illər ərzində hər oyundakı orta tamaşaçı sayını modelləşdirən çoxhədlini müəyyən edin.

Çoxhədlinin vuruqları haqqında teorem

x dəyişəninin P(x) çoxhədlisini sıfıra çevirən qiymətinə (yəni P(x) = 0 tənliyinin köklərinə) **çoxhədlinin kökü** (və ya **sıfırı**) deyilir.
Teorem. m ədədi P(x) çoxhədlisinin köküdürsə, $x - m$ ikihədlisi P(x)-in vuruğudur.
Doğrudan da, P(m) = 0 olarsa, $P(x) = (x - m)\cdot Q(x) + P(m)$ bərabərliyindən $P(x) = (x - m)\cdot Q(x)$ alınar.
Bu təklifin tərsi də doğrudur, yəni $x - m$ ikihədlisi P(x) çoxhədlisinin vuruğudursa, onda $P(m) = 0$

Nümunə 1. $x - 1$ və $x + 2$ ikihədlilərinin $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ çoxhədlisinin vuruqları olub-olmadığını vuruqlar haqqında teoremə görə müəyyən edin.

Həlli: $P(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$ çoxhədlisinin qiymətini $x = 1$ və $x = -2$ olduqda hesablayaq:

$x = 1$,
$P(1) = 1^3 - 1^2 - 5\cdot 1 + 2 = -3.$

$x = -2$,
$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 5\cdot(-2) + 2 = 0.$

Deməli, $(x - 1)$ verilmiş çoxhədlinin vuruğu deyil, $(x + 2)$ isə vuruğudur.

Nümunə 2. $f(-2) = 0$ olduğunu bilərək, $f(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ çoxhədlisini vuruqlarına ayırın.
Həlli: $f(-2) = 0$ olduğundan, $x - (-2)$, yəni $x + 2$ ikihədlisi $f(x)$ çoxhədlisinin vuruqlarından biridir, digər vuruğu sintetik bölmənin köməyilə tapaq.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & x^3 & -\,5x^2 & -\,2x & +\,24 \\
-2 & 1 & -5 & -2 & 24 \\
 & & -2 & 14 & -24 \\
\hline
\times & 1 & -7 & 12 & 0
\end{array}$$

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x + 2)(x^2 - 7x + 12)$$

$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = (x + 2)(x - 3)(x - 4) \text{ olar.}$$

Buradan aşkardır ki, verilən çoxhədlinin sıfırları $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$-dür.

Qeyd: Əgər $P(x) = (x - m)^k\, Q(x)$ şəklində göstərilirsə, burada $Q(m) \neq 0$, m ədədi P(x) çoxhədlisinin k dəfə təkrarlanan köküdür.
Məsələn, çoxhədlinin vuruqlara ayrılışı $P(x) = (x - 2)^3\,(x + 1)$ şəklindədirsə, $x = 2$ ədədi bu çoxhədlinin 3 dəfə təkrarlanan köküdür.

Öyrənmə tapşırıqları

1. $x - 1$ ikihədlisinin verilən çoxhədlilərdən hansılarının vuruğu olduğunu müəyyən edin.

$3x^3 - x - 3$	$2x^3 - x^2 - 3x - 2$	$x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$
$x^3 - 3x^2 + 4x - 2$	$2x^3 + 4x^2 - 5x - 1$	$4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

2. k-nın hansı qiymətində verilən ikihədli çoxhədlinin vuruğu olar?

a) $x^2 - x + k$, $x + 1$
b) $x^2 + kx - 16$, $x - 2$
c) $x^3 - x + k$, $x - 2$
d) $x^3 + 4x^2 + x + k$, $x + 2$

3. $f(a) = 0$ olduğunu bilərək, çoxhədlini vuruqlarına ayırın.

1) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 12x + 80$; $a = 10$
2) $f(x) = x^3 - 18x^2 + 95x - 126$; $a = 9$
3) $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 9x + 9$; $a = 1$
4) $f(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$; $a = -5$
5) $f(x) = x^3 - 11x^2 + 14x + 80$; $a = 8$
6) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 - 33x - 18$; $a = -6$

4. Tənliyin köklərindən biri verilmişdir. Bu tənliyi həll edin.

a) $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$; $x = 2$
b) $3x^3 + 7x^2 - 22x - 8 = 0$; $x = -\frac{1}{3}$
c) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$; $x = -2$
d) $12x^3 + 16x^2 - 5x - 3 = 0$; $x = -\frac{3}{2}$

5. 1) Üçdərəcəli çoxhədlinin kökləri x_1, x_2 və x_3 olarsa,
$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ ayrılışına görə

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}, \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

olduğunu göstərin.
2) $x^3 - 7x + 6 = 0$ tənliyinin kökləri x_1, x_2, x_3 olarsa:
a) $x_1 + x_2 + x_3$ cəmini; b) $x_1x_2x_3$ hasilini tapın.

6. a) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ tənliyinin köklərini $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ çoxhədlisini $x + 1$ ikihədlisinə bölməklə tapın.
b) Sintetik bölmədən istifadə etməklə $12x^3 - 11x^2 - 82x + 21 = 0$ tənliyinin köklərindən birinin 3-ə bərabər olduğunu göstərin və tənliyi həll edin.

7. Vuruqlar haqqında teoremdən istifadə etməklə göstərin ki, $x + 1$ ikihədlisi $P(x) = x^{25} + 1$ çoxhədlisinin vuruğudur, $Q(x) = x^{25} - 1$ çoxhədlisinin isə vuruğu deyil.

8. a) 7-ci səhifədəki məsələdə qutunun digər ölçülərinə uyğun tam əmsallı çoxhədliləri yazın.
b) Düzbucaqlı paralelepiped şəklindəki akvariumun tutumunu $V(x) = x^3 + 14x^2 + 63x + 90$ düsturu ilə modelləşdirmək olar. Əgər $x + 6$ çoxhədlisi akvariumun dərinliyini ifadə edirsə, akvariumun digər ölçülərinə uyğun tam əmsallı çoxhədliləri yazın.

Praktik məşğələ

1. $15x^3 - 52x^2 + 19x + 6 = 0$ tənliyini $x\cdot(15x^2 - 52x + 19) = -6$ şəklində yazın. Bu tənliyin tam kökünün(varsa) hansı ədədin böləni olması zəruridir?
2. $x = 3$ ədədinin verilmiş tənliyin kökü olduğunu sintetik bölmə ilə yoxlayın. Tənliyin digər köklərinin $\frac{2}{3}$ və $-\frac{1}{5}$ olduğunu göstərin.
3. Tənliyin köklərini $\frac{3}{1}; \frac{2}{3}; \frac{-1}{5}$ şəklində yazın. Bu kəsrlərin surət və məxrəcləri verilmiş tənlikdə hansı əmsalların bölənləridir?

Rasional köklər haqqında teorem

Əmsalları tam ədədlər olan $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ çoxhədlisinin rasional kökü varsa, bu kök

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{sərbəst həddin } (a_0\text{-ın}) \text{ böləni}}{\text{baş əmsalın } (a_n\text{-in}) \text{ böləni}} \text{ kimidir.}$$

İsbatı. Tutaq ki, $\frac{p}{q}$ ixtisarolunmaz kəsri tam əmsallı $P(x)$ çoxhədlisinin köküdür: $$a_n\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\cdot\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini q^n-ə vuraq:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$$

Sonuncu bərabərlikdə a_0q^n həddindən başqa qalan bütün hədlərdə p vuruğu olduğundan, a_0 əmsalı p-yə, a_np^n həddindən başqa qalan hədlərdə q vuruğu olduğundan, a_n əmsalı q-yə bölünməlidir.

Nümunə 1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$ çoxhədlisinin rasional köklərini tapın.

Həlli: Sərbəst hədd 6, baş əmsal 2-dir. $p\in\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6\}$, $q\in\{\pm1;\pm2\}$ olmaqla $\frac{p}{q}$ şəklində mümkün ədədləri yazaq: ±1; ±2; ±3; ±6; $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{3}{2}$

$f(1) = 2\cdot1^3 - 3\cdot1^2 - 5\cdot1 + 6 = 0$ olduğundan, çoxhədlinin vuruqlarından biri $x - 1$ ikihədlisidir. Digər vuruğu sintetik bölmənin köməyilə, $(2x^3 - 3x^2 - 5x + 6) : (x - 1)$ bölmə əməlini yerinə yetirməklə tapaq.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & \multicolumn{4}{l}{2x^3 - 3x^2 - 5x + 6} \\
1 & 2 & -3 & -5 & 6 \\
 & & 2 & -1 & -6 \\
\hline
\times & 2 & -1 & -6 & 0 \\
 & \multicolumn{4}{l}{2x^2 - x - 6}
\end{array}$$

$2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = (x - 1)\cdot(2x^2 - x - 6) =$
$= (x - 1)(2x + 3)(x - 2)$ olduğuna görə verilmiş çoxhədlinin kökləri
$x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $x_3 = 2$ olur.

Nəticə 1. Baş həddin əmsalı ±1 olduqda tam əmsallı çoxhədlinin rasional kökü yalnız tam ədədlər ola bilər.
Nəticə 2. Tam əmsallı çoxhədlinin tam kökü (varsa) sərbəst həddin bölənidir.

Nümunə 2. $P(x) = x^3 + x^2 - 19x + 5$ çoxhədlisinin köklərini tapın.

Həlli: Çoxhədlinin rasional kökləri haqqındakı teoremdən alınan nəticəyə görə verilmiş çoxhədlinin tam kökü (varsa) 5-in bölənləri arasında olmalıdır. Bunlar ±5; ±1 ədədləridir.

m	1	1	–19	5
1	1	2	–17	–12
–1	1	0	–19	24
5	1	6	11	60
–5	1	–4	1	0

$x = -5$ çoxhədlinin köküdür.

Sintetik bölməni qısa şəkildə yazmaqla bu ədədlərin çoxhədlinin kökü olub-olmadığını yoxlayaq.

$x^3 + x^2 - 19x + 5 = (x + 5)(x^2 - 4x + 1)$ olduğundan

$x^2 - 4x + 1 = 0$ kvadrat tənliyini həll etsək, digər kökləri taparıq: $2 \pm \sqrt{3}$

Deməli, verilən üçdərəcəli çoxhədlinin üç kökü var: -5; $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$

Diqqət! Əgər çoxhədlinin əmsalları rasional ədədlər olarsa, $P(x) = 0$ tənliyinin rasional köklərini tapmaq üçün əvvəlcə tənliyin hər iki tərəfini elə (sıfırdan fərqli) ədədə vurun ki, bütün əmsallar tam ədədə çevrilsin.

Məsələn, $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{5}{6}$ çoxhədlisinin köklərini tapmaq üçün $\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{5}{6} = 0$ və ya onun bütün hədlərini 12-yə vurmaqla alınan $6x^3 - 4x^2 - 21x + 10 = 0$ tənliyini həll etmək lazımdır.

Çoxhədlinin rasional köklərini axtararkən aşağıdakı addımları yerinə yetirin.
1. Surəti sərbəst həddin, məxrəci baş əmsalın böləni olmaqla bütün mümkün kəsrlər çoxluğu yazılır.
2. Bu ədədlərdən çoxhədlinin qiymətini sıfıra çevirənləri yoxlayıb seçməklə çoxhədlinin kökü olan m ədədi, yəni çoxhədlinin qalıqsız bölündüyü $x - m$ ikihədlisi müəyyən edilir.
3. Verilən çoxhədlini $x - m$ ikihədlisinə sintetik bölməni yerinə yetirməklə digər vuruq müəyyən edilir.
4. Digər vuruq kvadrat üçhədli və ya müxtəsər vurma düsturları ilə vuruqlarına ayrılan çoxhədli olarsa, digər kökləri tapılır. Bu mümkün olmadıqda sintetik bölmə qaydası çoxhədlinin bütün xətti vuruqları tapılana qədər davam etdirilir.
5.Yazılmış kəsrlər çoxluğundakı ədədlərin heç biri çoxhədlinin sıfırı olmaya bilər. Deməli, bu halda çoxhədlinin rasional kökü yoxdur.

Məsələn, $f(x) = x^3 + x + 1$ çoxhədlisinin rasional kökü ±1 ola bilər. Yoxlayaq:
$f(-1) = (-1)^3 - 1 + 1 = -1 \neq 0$; $f(1) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$.
Bu o deməkdir ki, $f(x) = x^3 + x + 1$ çoxhədlisinin rasional kökü yoxdur.

Öyrənmə tapşırıqları

9. –1; 1; –2; 2 ədədlərindən hansının verilmiş çoxhədlinin kökü olduğunu müəyyən edin. Sintetik bölmənin köməyilə çoxhədlini vuruqlarına ayırın və digər kökləri tapın.

a) $f(x) = x^3 + 7x^2 - 4x - 28$
b) $f(x) = 6x^3 - 19x^2 + 15x - 2$
c) $f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$
d) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 7x + 2$
e) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$
f) $f(x) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 7x - 12$

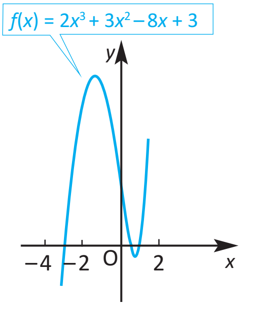
10. Sintetik bölmədən istifadə etməklə göstərin ki, 5 ədədi $x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 16x + 20 = 0$ tənliyinin köküdür və bu tənliyi həll edin.

11. Rasional kökləri tapma qaydasını tətbiq edərək tənliyi həll edin.

a) $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0$ b) $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = 0$

12. Baş həddinin əmsalı $a = 2$ olan üçdərəcəli $P(x)$ çoxhədlisi üçün $P(-2) = P(1) = P(2) = 0$ olduğu məlumdur. Çoxhədlinin vuruqlara ayrılış şəklini yazın.

13. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ funksiyasının qrafiki şəkildə göstərildiyi kimidir.
Qrafikə görə funksiyanın sıfırlarını müəyyən edin.
Rasional kökün tapılma qaydasından və sintetik bölmədən istifadə etməklə də sıfırları tapın, qrafikə görə yoxlayın.



Kompleks ədədlər haqqında

Məlumdur ki, D < 0 olduqda $ax^2 + bx + c = 0$ tənliyinin həqiqi ədədlər çoxluğunda kökü yoxdur. Məsələn, ən sadə halda $x^2 + 1 = 0$ tənliyini ödəyən həqiqi ədəd yoxdur. Deməli, istənilən kvadrat tənliyin köklərini özündə saxlayan yeni ədədlər çoxluğu daxil edilməlidir.
Bu məqsədlə $i^2 = -1$ qəbul edilir. Burada i xəyali vahid adlanır.
Ədədlər çoxluğunu elə genişləndirək ki, bütün həqiqi ədədlər və i xəyali vahidi bu çoxluğa daxil olsun,həm də bu çoxluqda toplama, vurma əməllərinin xassələri saxlanılsın.
$a + bi$ şəklində ifadəyə kompleks ədəd deyilir. Burada a və b həqiqi ədədlərdir, i isə xəyali vahiddir.
Kompleks ədədlər z, w, ω və s. kimi işarə edilir. Məsələn, $z = a + bi$.

$z = a + bi$ kompleks ədədində a-ya z-in həqiqi hissəsi, b-yə isə xəyali hissəsi deyilir və belə yazılır: $a = \text{Re } z$, $b = \text{İm } z$.
$a = 0$ olduqda bi şəklində ədədlər alınır. Belə ədədlərə sırf xəyali ədədlər deyilir.
$a = 0$, $b = 0$ olduqda kompleks ədəd sıfra bərabər hesab olunur və tərsinə $a + bi = 0$ olarsa, $a = 0$ və $b = 0$ olur. “0” yeganə kompleks ədəddir ki, həm həqiqi, həm də sırf xəyali ədəddir. Kompleks ədədlər çoxluğu ***C*** hərfi ilə işarə edilir.
Nəticə: $a + bi$ və $c + di$ kompleks ədədləri üçün $a + bi = c + di$ bərabərliyi yalnız və yalnız $a = c$, $b = d$ olduqda doğrudur.
Nümunə. $x + 3i = 5 + (x + y)i$ bərabərliyindən x və y-i tapın.
Həlli: Həqiqi və xəyali hissələrin bərabərliyindən alırıq:

$$\begin{cases} x = 5 \\ 3 = x + y \end{cases}, \text{ yəni } x = 5,\ y = -2.$$

$a + bi$ və $c + di$ kompleks ədədlərinin cəmi $(a + c) + (b + d)i$ kompleks ədədinə deyilir, yəni $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$a + bi$ və $c + di$ kompleks ədədlərinin hasili $ac - bd + (ad + bc)i$ kompleks ədədinə deyilir, yəni $(a + bi)\cdot(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$

Deməli, iki kompleks ədədi vurmaq üçün onları ikihədlilərin vurulması kimi vurub, $i^2 = -1$ olduğunu nəzərə almaq lazımdır.

Nümunə. $(3 + 2i)\cdot(2 - i) = 3\cdot2 - 3i + 4i - 2i^2 = 6 + i - 2\cdot(-1) = 8 + i$

$a - bi$ ədədinə $a + bi$ ədədinin qoşması deyilir və $\overline{z} = a - bi$ kimi işarə edilir.
Aydındır ki, $a - bi$ ədədi $a + bi$ ədədinin qoşmasıdırsa, $a + bi$ ədədi də $a - bi$ ədədinin qoşmasıdır. Ona görə də $z = a + bi$ və $\overline{z} = a - bi$ ədədlərinə qarşılıqlı qoşma kompleks ədədlər deyilir. Qarşılıqlı qoşma ədədlərin həqiqi hissələri bərabərdir, xəyali hissələri isə əksdir.
Qarşılıqlı qoşma kompleks ədədlərin hasili həqiqi ədəddir:

$$z\cdot\overline{z} = (a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

Xüsusi halda həqiqi ədədin qoşması özünə, xəyali ədədin qoşması isə onun (–1) ilə hasilinə bərabərdir.
Hər bir $z = a + bi$ kompleks ədədinin əksi olan $-z$ kompleks ədədi var və $-z = -a - bi$. Hər bir sıfırdan fərqli $z = a + bi$ kompleks ədədinin tərsi var.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \underbrace{\frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)}}_{\text{surət və məxrəci } (a - bi)\text{-yə vurulur}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\, i$$

Kompleks ədədlərin çıxılması və bölünməsi aşağıdakı bərabərliklərlə təyin ounur:

$z - w = z + (-w)$

$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} (w \neq 0)$

Kompleks ədədlərin nisbətini tapmaq üçün surət və məxrəci məxrəcin qoşmasına vurmaq əlverişlidir.

Nümunə. $z_1 = 3 + 2i$ və $z_2 = 2 - i$ ədədlərinin fərqini və nisbətini tapın.

Həlli: $z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (2 - i) = 1 + 3i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{2-i} = \frac{(3+2i)\cdot(2+i)}{(2-i)\cdot(2+i)} = \frac{6+3i+4i+2i^2}{4-i^2} = \frac{6+7i-2}{5} = \frac{4+7i}{5} =$$

$$= \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i = 0{,}8 + 1{,}4i$$

Həqiqi ədədlər üzərində aparılan hesab əməllərinin, həmçinin qüvvətin xassələri kompleks ədədlər üçün də doğrudur.

Xüsusi halda xəyali vahidin qüvvətlərinə baxaq:

$i^3 = i^2 \cdot i = -i$ $\quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$ $\quad i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$ $\quad i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$ $\quad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$

Göründüyü kimi, i-nin natural qüvvətləri yalnız i, -1, $-i$ və 1 ola bilir və bunlar hər dörd addımdan bir təkrarlanır, yəni $i^{4m+k} = (i^4)^m \cdot i^k = i^k$ bərabərliyi doğrudur.

Nümunə. Hesablayın: a) i^{58} b) i^{63}

Həlli: a) $i^{58} = i^{4\cdot 14+2} = i^2 = -1$ b) $i^{63} = i^{4\cdot 15+3} = i^3 = -i$

İstənilən cəbri eynilik kompleks ədədlər çoxluğunda da doğrudur. Məsələn, z və w kompleks ədədlər olduqda da

$(z \pm w)^2 = z^2 \pm 2zw + w^2$

$(z + w)(z - w) = z^2 - w^2$ və s. eynilikləri doğrudur.

Kompleks ədədlər çoxluğunda $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ kvadrat tənliyinin kökləri həqiqi ədədlərdə olduğu kimi eyni düsturla hesablanır:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nümunə. $x^2 + 4x + 5 = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4\cdot i^2}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

$x_1 = -2 + i$ $\qquad x_2 = -2 - i$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, Viyet düsturları qüvvəsində qalır və əmsalları həqiqi ədədlər olan kvadrat tənliyin kompleks kökləri qarşılıqlı qoşma ədədlər olur.

Öyrənmə tapşırıqları

1. x və y-in hansı həqiqi qiymətlərində bərabərlik doğrudur?

a) $(x + y) + 2i = 3 - (x - y)i$ b) $4 + xyi = x + y + 3i$

2. Verilmiş ədədlərin cəmini, fərqini, hasilini və nisbətini tapın.

a) $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 + i$ b) $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 3 + i$

3. x və y-in hansı həqiqi qiymətlərində verilmiş ədədlər qarşılıqlı qoşma ədədlər olur?

a) $z_1 = 5 + xi$, $z_2 = y + 4i$ b) $z_1 = (x + y) + i$, $z_2 = 5 - (x - y)i$

4. Tapın.

a) i^{12} b) i^{15} c) i^{21} d) i^{82} e) i^{101}

5. Əməlləri yerinə yetirin.

a) $(3 + 4i) + (4 - 3i)$ b) $(5 + 4i) - (3 + 2i)$
c) $(2 + 3i)\cdot(3 + 2i)$ d) $(4 - i)\cdot(4 + i)$
e) $(i + 1)^2$ f) $(2 + i)^2$
g) $(1 + i)^2\cdot(3 - i)$ h) $(2 + i)^2\cdot(2 - i)^2$
i) $(i + 1)^8$ j) $(i^8 + i^5)\cdot(i + 1)$

6. Sadələşdirin.

a) $\dfrac{2 + i}{2 - i} + \dfrac{2 - i}{2 + i}$ b) $\dfrac{1 + i}{1 - i} - \dfrac{1 - i}{1 + i}$

7. Verilmiş ədədin qoşmasını tapın.

a) $z = 3 + 4i$ b) $z = \dfrac{2}{1 - i}$ c) $z = (2 + i)^2$

8. a) Hansı ədədin kvadratı i-yə bərabərdir?

b) Qoşmasının kvadratına bərabər olan kompleks ədədi tapın ($z \notin R$).

9. Vuruqlara ayırın.

a) $m^2 + 4$ b) $y^2 + 9$ c) $4x^2 + 1$

Nümunə. a) $m^2 + 4 = m^2 - 4\cdot i^2 = m^2 - (2i)^2 = (m - 2i)\cdot(m + 2i)$

10. Tənlikləri həll edin.

a) $x^2 + 4 = 0$ b) $x^2 + 3 = 0$ c) $x^2 + 16 = 0$

11. Tənlikləri həll edin.

a) $x^2 - 4x + 5 = 0$ b) $x^2 - 6x + 13 = 0$
c) $x^2 + 8x + 41 = 0$ d) $x^2 - 2x + 3 = 0$

12. Kökləri $3 + 2i$ və $3 - 2i$ olan çevrilmiş kvadrat tənlik yazın.

n dərəcəli çoxhədlinin bütün köklərinin tapılmasına aid nümunəyə baxaq.

Nümunə . $P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5$ çoxhədlisinin bütün köklərini tapın.

Həlli: Verilən çoxhədlinin rasional kökləri (varsa) ±1, ±5 ədədləri ola bilər. Yoxlayaq:

$P(1) = 1^4 - 6 \cdot 1^3 + 14 \cdot 1^2 - 14 \cdot 1 + 5 = 0.$

Deməli, $x=1$ verilən $P(x)$ çoxhədlisinin köküdür. Digər vuruğu sintetik bölmə ilə müəyyən edək.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & x^4 - & 6x^3 + & 14x^2 - & 14x + & 5 \\
1 & 1 & -6 & 14 & -14 & 5 \\
\times & & 1 & -5 & 9 & -5 \\
\hline
 & 1 & -5 & 9 & -5 & 0 \\
 & x^3 - & 5x^2 + & 9x - & 5 &
\end{array}$$

$P(x) = (x-1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 5)$ ifadəsində $(x^3 - 5x^2 + 9x - 5)$ vuruğuna yenidən rasional köklər haqqında teoremi və sintetik bölməni tətbiq etsək,
$x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x-1) \cdot (x^2 - 4x + 5)$; $P(x) = (x-1)^2(x^2 - 4x + 5)$ olar.
$(x-1)^2(x^2 - 4x + 5) = 0$ tənliyini həll edək:
$(x-1)^2 = 0$; $x_1 = x_2 = 1$ (2 dəfə təkrar kök);
$x^2 - 4x + 5 = 0$; $x = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$

Köklər: $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2 + i$, $x_4 = 2 - i$

Baxılan nümunədə dörd dərəcəli çoxhədlinin təkrarlanan köklər daxil olmaqla dörd kökü (həqiqi və ya kompleks) olduğunu gördük.

Cəbrin əsas teoremi (Qauss teoremi)

Teorem. Dərəcəsi sıfırdan böyük olan istənilən çoxhədlinin kompleks ədədlər çoxluğunda ən azı bir kökü var.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + . . + a_1 x + a_0$ dərəcəsi sıfırdan böyük kompleks əmsallı çoxhədlidirsə, cəbrin əsas teoreminə görə onun ən azı bir r_1 kökü var. Vuruqlar haqqında teoremə görə $P(x) = (x - r_1)Q_1(x)$ alarıq. Burada $Q_1(x)$ coxhədlisi $n-1$ dərəcəlidir. $n-1 = 0$ olarsa, $Q_1(x) = a_n$; $n-1 > 0$ olarsa, yenə həmin teoremə görə $Q_1(x)$ çoxhədlisinin ən azı bir kökü var və bunu r_2 ilə işarə etsək,
$Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x)$ ayrılışı doğru olar, $Q_2(x)$ isə $n-2$ dərəcəli çoxhədlidir.
Deməli, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x)$ ayrılışını yaza bilərik.
Eyni qayda ilə $n-2 = 0$ olarsa, $Q_2(x) = a_n$; $n-2 > 0$ olarsa, həmin teoremə görə $Q_2(x)$ çoxhədlisinin ən azı bir kökü var və bunu r_3 ilə işarə etsək,

$Q_2(x) = (x - r_3)Q_3(x)$ olar, yəni

$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)Q_3(x)$ yaza bilərik.

Prosesi n dəfə aparsaq, nəhayət, $Q_n(x) = a_n$ olar. Onda $P(x)$ çoxhədlisinin

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_n)a_n$$

kimi ayrılışını yaza bilərik, burada $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ədədləri $P(x)$ çoxhədlisinin kökləridir. Bu köklər müxtəlif olmaya bilər.

Nəticə. n dərəcəli ($n \geq 1$) çoxhədlinin kompleks ədədlər çoxluğunda təkrarlanan köklər də daxil olmaqla n sayda kökü var.

Qeyd edək ki, $a + bi$ kompleks ədədi həqiqi əmsallı çoxhədlinin kökküdürsə, onda qoşma kompleks $a - bi$ ədədi də bu çoxhədlinin kökündür.

İxtiyari həqiqi əmsallı çoxhədli baş əmsalla həqiqi köklərə uyğun $(x - r)$ kimi xətti vuruqların və qoşma kompleks köklərə uyğun $(x^2 + px + q)$ kimi kvadrat üçhədlilərin hasili şəklində göstərilə bilər.
Buradan belə nəticəyə gəlmək olar ki, əmsalları həqiqi ədədlər olan təkdərəcəli çoxhədlinin heç olmasa bir həqiqi kökü həmişə var.
Nümunə. Baş həddin əmsalı 2, kökləri 3 və $1+i$ olan ən kiçik dərəcəli həqiqi əmsallı çoxhədlini vuruqlara ayrılmış şəkildə yazın.
Həlli: $1+i$ ədədi çoxhədlinin kökküdürsə, onda $1-i$ qoşma kompleks ədədi də çoxhədlinin kökündür. Onda axtarılan çoxhədli

$$P(x) = 2(x - 3)(x - 1 - i)(x - 1 + i) = 2(x - 3)[(x - 1)^2 - i^2)] =$$
$$= 2(x - 3)(x^2 - 2x + 2)$$ şəklində yazıla bilər.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Çoxhədlinin vuruqlara ayrılışı verilmişdir. Çoxhədlinin köklərini yazın, dərəcəsini müəyyən edin.

a) $P(x) = (x - 1)(x - 1)(x + 2)$
b) $P(x) = (x - 1)^3(x - 4)^2$
c) $P(x) = (x + 2)(x - i)(x + i)$
d) $P(x) = (x + 2)^3(x - 2)$
e) $P(x) = 3(x - 4)^3(x - 3)^2(x - 1)$
f) $P(x) = (x - 7)(x + 4)^3(x + 8)$

2. Verilən köklərinə görə çoxhədlinin digər köklərini tapın.

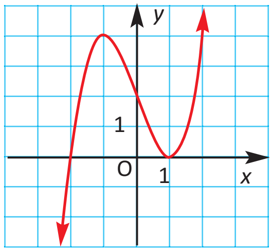
a) $P(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + 16;\quad x_1 = -1$
b) $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18;\quad x_1 = 3$
c) $P(x) = 2x^3 - 17x^2 + 38x - 15;\quad x_1 = \frac{1}{2}$
d) $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4;\quad x_1 = 1,\ x_2 = -1$

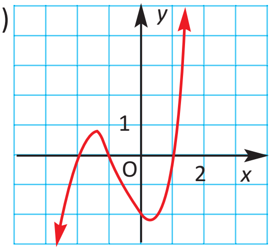
3. Tənliyi həll edin.

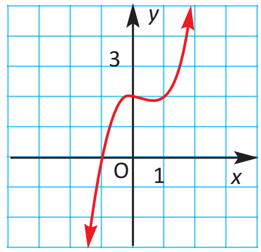
a) $x^3 + 6x^2 - 5x - 30 = 0$
b) $x^3 - 22x + 24 = 0$
c) $x^3 - 8x + 8 = 0$
d) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$

4. 1) Çoxhədlilərin həqiqi köklərini tapın.
2) Hansı qrafikin hansı çoxhədliyə uyğun olduğunu müəyyən edin.

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ $\quad$ $g(x) = x^3 - 3x + 2$ $\quad$ $h(x) = x^3 - x^2 + 2$

a)


b)


c)


5. Tənlikləri həll edin.

a) $x^3 - 19x + 30 = 0$

b) $x^3 - 7x - 6 = 0$

c) $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$

d) $2x^3 - 10x^2 + 12x - 4 = 0$

e) $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0$

f) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = 0$

6. Hörner sxemini ardıcıl tətbiq edərək:
a) $x = 1$ ədədinin $x^3 - 3x + 2$ çoxhədlisinin;
b) $x = -2$ ədədinin $x^3 + 3x^2 - 4$ çoxhədlisinin
neçə dəfə təkrarlanan kökü olduğunu tapın.

7. $x^3 + 2x^2 + ax - 6 = 0$ tənliyinin bir kökünün $x = -2$ olduğunu bilərək a-nı tapın və tənliyi həll edin.

8. Çoxhədlinin köklərini yazın.

a) $P(x) = x^3 + 1$ $\quad$ b) $P(x) = x^4 - 1$ $\quad$ c) $P(x) = x^6 - 1$

9. a) Köklərindən biri $3 - \sqrt{2}$ olan tam əmsallı hər hansı kvadrat üçhədli yazın.

b) Köklərindən biri $2 + 3i$ olan həqiqi əmsallı kvadrat üçhədlilərdən birinin $x^2 - 4x + 13$ olduğunu yoxlayın.

c) a və b bəndlərindəki tapşırıqların həllini ümumiləşdirilmiş təkliflə yazın.

10. Baş həddinin əmsalı 1, kökləri verilən ədədlər olan ən kiçik dərəcəli həqiqi əmsallı $P(x)$ çoxhədlisini vuruqlara ayrılmış şəkildə yazın, dərəcəsini göstərin.

a) -2 (3 dəfə təkrar kök) və 1 (2 dəfə təkrar kök)

b) 1 (2 dəfə təkrar kök), $-i$ və i $\quad$ c) 2 və $3 - i$.

Tətbiq tapşırıqları

Nümunə: Lunaparkdakı sürət karuselinin kabinəsinin sıfır səviyyəsindən hündürlüyünün (metrlə) dəyişməsini hərəkətin ilk 5 saniyəsi ərzində $h(t) = 2t^3 - 9t^2 + 3t + 14$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Hərəkətə başladıqdan 5 saniyə ərzində hansı anlarda karuselin kabinəsi sıfır səviyyəsində olmuşdur?

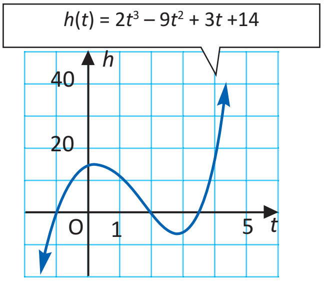
Həlli: $h(t)$-nin sıfıra bərabər olduğu anlardan başqa qalan hallarda karuselin kabinəsi sıfır səviyyəsindən ya yuxarıda, ya da aşağıda olmuşdur. Deməli, biz verilən çoxhədlinin köklərini tapmalıyıq. Rasional kökləri axtarma qaydasından istifadə edək.

1. Köklərdən birinin –1 olduğunu yoxlayaq.
$h(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 9\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1) + 14 = -2 - 9 - 3 + 14 = 0$

2. Köklərdən biri –1 olduğundan $t + 1$ verilən çoxhədlinin vuruğudur. Sintetik bölmə ilə digər vuruğu müəyyən edək.

–1	2	–9	3	14
		–2	11	–14
×	2	–11	14	0

$h(t) = 2t^3 - 9t^2 + 3t + 14 = (t + 1)(2t^2 - 11t + 14)$, ifadəsində $2t^2 - 11t + 14 = (t - 2)(2t - 7)$ olduğunu nəzərə alsaq, $h(t) = (t + 1)(t - 2)(2t - 7)$ olar. Deməli $h(t)$ çoxhədlisinin kökləri $t_1 = -1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3{,}5$-dir. $t_2 = 2$, $t_3 = 3{,}5$ anları hərəkətə başladıqdan sonrakı 5 saniyə ərzindədir və bu anlarda karuselin kabinəsi sıfır səviyyəsində olmuşdur. Qrafkalkulyatorla qurulmuş qrafik də çoxhədlinin tapılmış köklərinin doğruluğunu göstərir.



11. İdman köynəkləri istehsal edən şirkətin mənfəətini $P(x) = -x^3 + 4x^2 + x$ kimi modelləşdirmək olar. Burada P mənfəəti (milyon manatla), x isə istehsal olunan köynəklərin sayını (milyonlarla) ifadə edir. Hesabata görə şirkət 4 milyon köynəyin satışından 4 milyon manat mənfəət əldə etmişdir. Şirkət daha az sayda köynək istehsal etməklə eyni mənfəəti əldə etmək istəsə, köynəklərin sayı nə qədər olmalıdır?

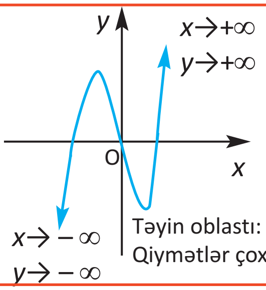
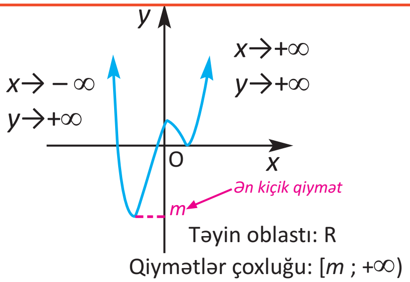
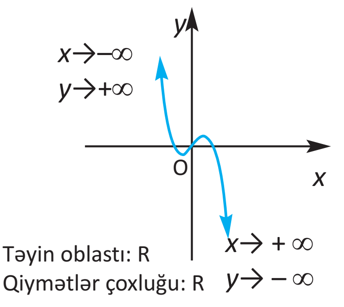
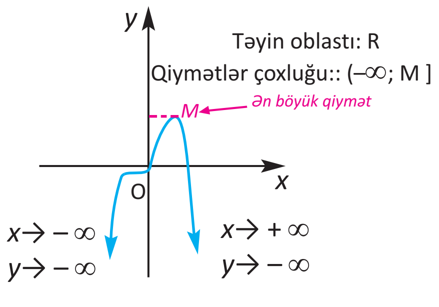
12. İki ədədin hasili $2n^2 + 7n + 3$ ifadəsi ilə verilmişdir, burada n həqiqi ədəddir. Ədədlərdən biri $n + 3$ olarsa, digər ədədi göstərən ifadəni yazın.
$n = 1$ olduqda bu ədədlər haqqında hansı fikri söyləmək olar?

Çoxhədli funksiyanın qrafiki

Çoxhədli funksiya standart şəkildə $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ kimi yazılır. Xüsusi halda, $n = 1$ olduqda xətti funksiya (qrafiki düz xətdir), $n = 2$ olduqda kvadratik funksiya (qrafiki paraboladır) alınır.
İstənilən çoxhədli funksiya bütün həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin olunub və qrafiki kəsilməz xətdir.

Arqumentin modulca böyük qiymətlərində çoxhədli özünü baş hədlə ifadə olunmuş $y = a_n x^n$ funksiyası kimi aparır. Aşağıda çoxhədlinin qrafiklərinə aid nümunələr və onların bəzi xassələri verilmişdir.

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

	n təkdir	*n cütdür*
$a_n > 0$		
$a_n < 0$		

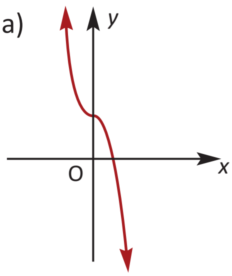
Nümunə 1. Dərəcəsinə və baş həddin əmsalına görə arqumentin modulca böyük qiymətlərində çoxhədlinin özünü necə aparmasını müəyyən edin.

a) $f(x) = -2x^3 - 5x + 3$ b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$

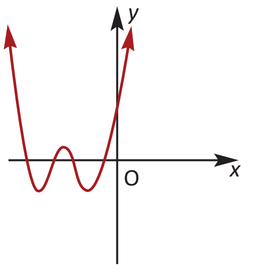
Həlli: a) $f(x) = -2x^3 - 5x + 3$ çoxhədlisinin dərəcəsi 3-dür, təkdir. Baş həddin əmsalı –2-dir. Cədvəldən də göründüyü kimi, bu halda $x \to -\infty$ olduqda, $f(x) \to +\infty$; $x \to +\infty$ olduqda $f(x) \to -\infty$ olur.
b) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$ çoxhədlisinin dərəcəsi 4-dür, cütdür. Baş həddin əmsalı 1-dir. Bu halda $x \to -\infty$ olduqda $f(x) \to +\infty$; $x \to +\infty$ olduqda $f(x) \to +\infty$ olur.

Nümunə 2. Qrafikinə görə arqumentin modulca böyük qiymətlərində çoxhədli funksiyanın özünü necə aparmasını, çoxhədlinin dərəcəsinin tək və ya cüt olduğunu, baş həddin əmsalının işarəsini müəyyən edin.

a)



b)



Həlli: $x \to -\infty$ olduqda $f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty$ olduqda $f(x) \to -\infty$
Çoxhədli tək dərəcəlidir.
$a_n < 0$.

Həlli: $x \to -\infty$ olduqda $f(x) \to +\infty$
$x \to +\infty$ olduqda $f(x) \to +\infty$
Çoxhədli cüt dərəcəlidir.
$a_n > 0$.

Qeyd edək ki, n təkdirsə, çoxhədlinin ən azı bir həqiqi sıfırı var, n cüt olduqda isə həqiqi sıfırı olmaya bilər.

Çoxhədlinin sxematik qrafikini aşağıdakı addımlarla qurmaq olar.
1. Qrafikin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri tapılır(əgər varsa). Bu nöqtələr koordinat müstəvisində qeyd edilir.
2. Həqiqi sıfırlar arasında yerləşən bir neçə qiymətdə funksiyanın qiymətləri hesablanır. Uyğun nöqtələr koordinat müstəvisində qeyd edilir.
3. Arqumentin modulca böyük qiymətlərində qrafikin özünü necə aparması müəyyən edilir.
4. Əldə olunan məlumatlara əsasən sxematik qrafik çəkilir.

Nümunə 3. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ funksiyasının qrafikini qurun.

1. Rasional köklər haqqında teoremdən istifadə edərək funksiyanın verildiyi ifadəni vuruqlara ayıraraq sıfırlarını tapaq.

Teoremə görə mümkün rasional köklər 8-in bölənləri: ±1; ±2; ±4; ±8 ədədləri arasında ola bilər.

–1– i yoxlayaq: $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 6(-1) - 8 = 0$

Deməli, $x + 1$ ikihədlisi vuruqlardan biridir. Sintetik bölmə ilə digər vuruğu tapaq:

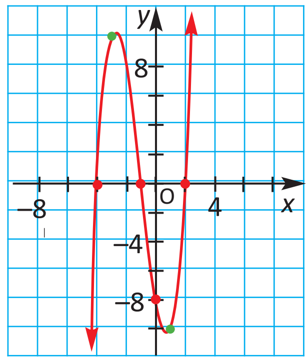
$$\begin{array}{r|rrrr} & \multicolumn{4}{c}{x^3 + 3x^2 - 6x - 8} \\ & 1 & 3 & -6 & -8 \\ -1 & & -1 & -2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & -8 & 0 \\ & \multicolumn{4}{c}{x^2 + 2x - 8} \end{array}$$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = (x + 1)(x^2 + 2x - 8)$

$(x^2 + 2x - 8) = (x - 2)(x + 4)$ olduğundan, verilən çoxhədli funksiyanı xətti vuruqların hasili şəklində yazaq: $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 4)$.

Buradan sıfırların -1; 2; -4 olduğu aşkardır. Yəni qrafik x oxunu $(-4;0)$, $(-1;0)$ və $(2;0)$ nöqtələrində kəsir.

$f(0) = -8$ olduğundan,qrafikin y oxu ilə kəsişmə nöqtəsi $(0;-8)$ olur. Bu nöqtələri koordinat müstəvisində qeyd edək.



2. Hesablanması sadə olan $x = 1$ və $x = -3$ qiymətlərində funksiyanın uyğun qiymətlərini hesablayaq: $f(-3) = (-3 + 1)\cdot(-3 - 2)\cdot(-3 + 4) = 10$,
$f(1) = (1 + 1)\cdot(1 - 2)\cdot(1 + 4) = -10$.
$(-3;\ 10)$ $(1;\ -10)$ nöqtələrini də koordinat müstəvisində qeyd edək.

3. x-in qiymətlərinin azalması və ya artması ilə qrafikin dəyişməsini müəyyən edək. Baş həddin dərəcəsi 3-dür, təkdir, əmsalı isə müsbətdir.
Deməli, $x \to +\infty$ olduqda $y \to +\infty$, $x \to -\infty$ olduqda isə $y \to -\infty$ olur.

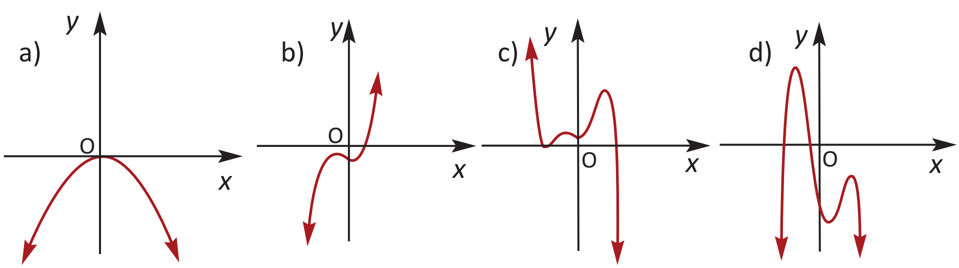
4. Qeyd edilmiş nöqtələri birləşdirməklə, $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$ funksiyasının qrafikini sxematik çəkək.

Öyrənmə tapşırıqları

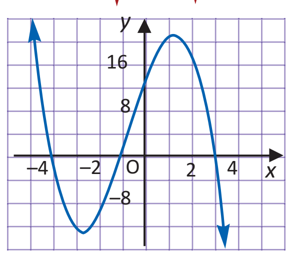
1. Çoxhədlinin dərəcəsinə və baş həddin əmsalına görə arqumentin modulca böyük qiymətlərində özünü necə apardığını müəyyən edin.

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2x - 7$ b) $f(x) = 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4$
c) $f(x) = -x^6 + 2x^3 + 3x + 1$ d) $f(x) = -4x^5 + 2x^3 - 3x + 1$

2. Qrafikinə görə çoxhədlinin dərəcəsinin tək və ya cüt olduğunu, baş həddin əmsalının işarəsini və arqumentin modulca böyük qiymətlərində funksiyanın qiymətlərinin işarəsini müəyyən edin.

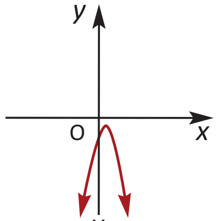


3. Çoxhədlinin qrafikinə görə müəyyən edin:
a) dərəcəsinin tək və ya cüt olduğunu;
b) baş həddin əmsalının işarəsini;
c) x oxu ilə kəsişmə nöqtələrini;
d) funksiyanın işarəsinin müsbət və ya mənfi olduğu intervalları.

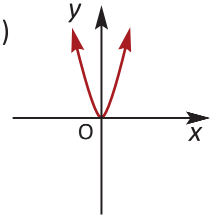


4. Hansı qrafikin hansı funksiyaya uyğun olduğunu müəyyən edin.

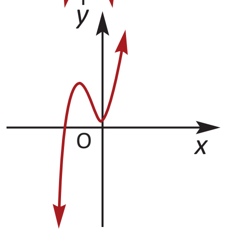
a)



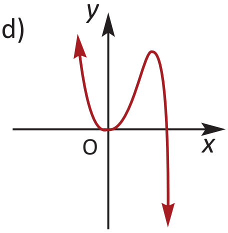
b)



c)



d)



1) $f(x) = 5x^3 + 9x^2 + 1$

2) $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 3x^2$

3) $f(x) = 3x^4 - x^5 + x$

4) $f(x) = -4x^2 + 3x - 1$

5. Funksiyanın qrafikini sxematik təsvir edin.

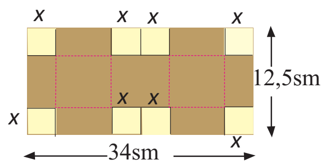
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ b) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2$

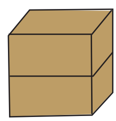
6. Şirkət ölçüləri 34 sm ×12,5 sm olan düzbucaqlı kartonlardan tərəfi x sm olan kvadratlar kəsilib çıxarılmaqla qutu istehsal etməyi planlaşdırır.

a) Qutunun həcminin x-dən asılılığını göstərən çoxhədli funksiyanı yazın.

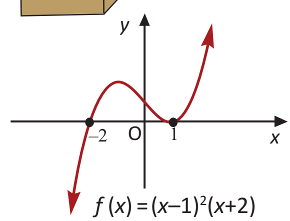
b) Funksiyanın qrafikini sxematik qurun.

c) x-in hansı tam qiymətində qutunun həcmi 324 sm^3 olar?

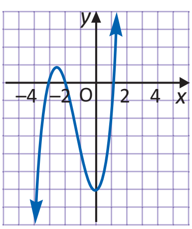




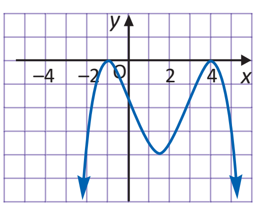
7. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ funksiyasının qrafiki şəkildə verilmişdir. Funksiyanın qrafiki cüt sayda təkrarlanan sıfırlarda x oxuna toxunub dönür. Bu faktı nəzərə alaraq aşağıdakı qrafiklərə uyğun çoxhədlinin ən azı neçə dərəcəli olduğunu müəyyən edin.



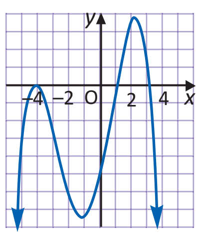
a)



b)



c)



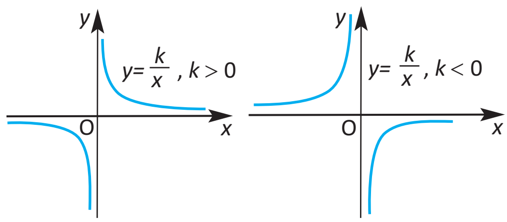
8. Funksiyanın qrafikinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapın. Seçdiyiniz hər hansı iki funksiyanın qrafikini sxematik təsvir edin.

$f(x) = 2(x-1)^2(x+1)$ $f(x) = -3(x+3)^2(x+1)^2$ $f(x) = (x-2)^2(x+5)$

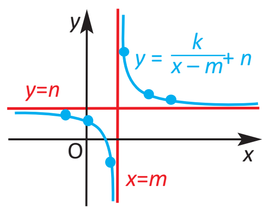
$f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

İki çoxhədlinin nisbəti şəklində göstərilən funksiyaya **rasional funksiya** deyilir:
$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0};\quad a_m\neq 0,\ b_n\neq 0$$

Rasional funksiyaya ən sadə nümunə $y=\frac{k}{x}$ funksiyasıdır.



$y=\frac{k}{x}$ funksiyasının qrafiki hiperbola adlanır. x-in qiymətləri sıfıra yaxınlaşdıqca hiperbola üzərindəki nöqtələr ordinat oxuna, yəni $x=0$ düz xəttinə, x-in qiymətləri mütləq qiymətcə sonsuz böyüdükcə isə hiperbola üzərindəki nöqtələr absis oxuna, yəni $y=0$ düz xəttinə sonsuz yaxınlaşır. $x=0$ düz xətti $y=\frac{k}{x}$ hiperbolasının **şaquli asimptotu**, $y=0$ düz xətti isə onun **üfüqi asimptotu** adlanır.



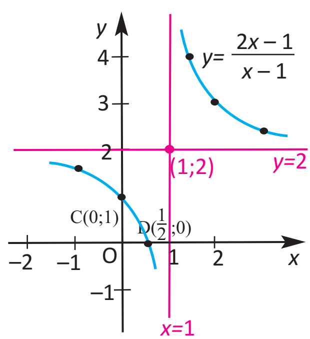
$y=\frac{k}{x}$ hiperbolasını $\langle m;n\rangle$ vektoru ilə paralel köçürdükdə $f(x)=\frac{k}{x-m}+n$ funksiyasının qrafiki alınır. Bu halda koordinat başlanğıcı $(m;n)$ nöqtəsinə çevrilir və alınmış hiperbolanın şaquli asimptotu $x=m$ düz xətti, üfüqi asimptotu isə $y=n$ düz xətti olur.

Nümunə 1. $y=\frac{2x-1}{x-1}$ funksiyasının qrafikini qurun.

Həlli: $\frac{2x-1}{x-1}=0$ tənliyindən qrafikin x oxu ilə $(\frac{1}{2};0)$ kəsişmə nöqtəsi tapılır.
$x=0$ olduqda $y=1$ olduğundan qrafik y oxunu $(0;1)$ nöqtəsində kəsir.
Kəsrin surətini məxrəcinə bölməklə funksiyanı $y=2+\frac{1}{x-1}$ şəklində yazaq.
$x=1$ düz xətti bu funksiyanın şaquli asimptotu, $y=2$ düz xətti isə üfüqi asimptotudur. Şaquli asimptotdan sağda və solda bir neçə nöqtədə funksiyanın uyğun qiymətləri cədvəlini tərtib edək.

x	–1	0	0,6	1,5	2	3
y	1,5	1	0	4	3	2,5

Koordinatları cədvəldə verilmiş uyğun cütlər olan nöqtələri koordinat müstəvisində qeyd edib, şaquli və üfüqi asimptotları nəzərə almaqla koordinat oxlarını C(0;1) və D($\frac{1}{2}$; 0) nöqtələrində kəsən hiperbola budaqlarını təsvir edək.



Hiperbolanın budaqlarının (1;2) nöqtəsinə nəzərən simmetrik olduğuna diqqət edin!

Ümumi halda rasional funksiyanın qrafikini qurmaq üçün onun koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri (əgər varsa) və asimptotları müəyyən edilməlidir. Funksiyanın verildiyi ifadə $x=a$ nöqtəsində məxrəci sıfıra çevrilən, surəti isə sıfırdan fərqli kəsr şəklində olarsa, rasional funksiyanın şaquli asimptotu var.
f rasional funksiyasının üfüqi asimptotu $P(x)$ və $Q(x)$ çoxhədlilərinin m və n dərəcələrinin qiymətlərindən asılı olaraq müəyyən edilir.

$m < n$ olarsa, $y = 0$ düz xətti qrafikin üfüqi asimptotudur.

$m = n$ olarsa, $y = \frac{a_m}{b_n}$ düz xətti qrafikin üfüqi asimptotudur.

$m > n$ olarsa, qrafikin üfüqi asimptotu yoxdur.

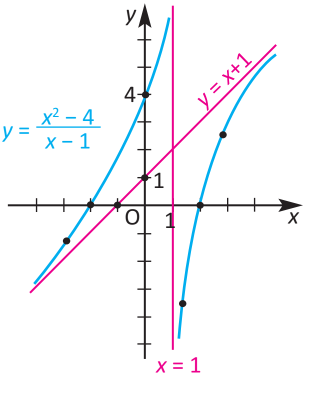
$m = n + 1$, yəni sürətdəki çoxhədlinin dərəcəsi məxrəcdəki çoxhədlinin dərəcəsindən 1 vahid böyük olduqda, çoxhədlilərin bölünməsindən alınan qismət $y = ax + b$ şəklində xətti funksiya olur və x-in modulca böyük qiymətlərində funksiyanın qrafiki bu düz xəttə sonsuz yaxınlaşır. Bu halda deyirlər ki, $y = ax + b$ düz xətti rasional funksiyanın **maili asimptotudur.**

Nümunə 2. $y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ funksiyasının asimptotlarını tapın və qrafikini sxematik təsvir edin.

Həlli: $\frac{x^2 - 4}{x - 1} = 0$ tənliyindən qrafikin x oxu ilə (–2;0), (2;0) kəsişmə nöqtələri tapılır. $x = 0$ olduqda $y = 4$ olduğundan qrafik y oxunu (0; 4) nöqtəsində kəsir. $x = 1$ olduqda məxrəc sıfıra çevrilir, sürət isə sıfırdan fərqli olur. Deməli, $x = 1$ düz xətti funksiyanın şaquli asimptotudur. Verilmiş funksiyanın üfüqi asimptotu yoxdur ($m > n$).
Sürəti məxrəcə bölməklə verilmiş funksiyanı $y = x + 1 - \frac{3}{x - 1}$ kimi yazaq:

x-in modulca böyük qiymətlərində $\frac{3}{x - 1}$ kəsri modulca kiçildiyindən verilmiş funksiyanın qrafiki $y = x + 1$ düz xəttinə sonsuz yaxınlaşır, yəni $y = x + 1$ düz xətti verilmiş funksiyanın maili asimptotudur. Şaquli asimptotdan sagda və solda bir neçə nöqtədə funksiyanın uyğun qiymətləri cədvəlini tərtib edək.

x	–3	–2	–1	0	1,5	2	3
y	–1,25	0	1,5	4	–3,5	0	2,5



Koordinatları cədvəldə verilmiş uyğun cütlər olan nöqtələri koordinat müstəvisində qeyd edib, şaquli və maili asimptotları nəzərə almaqla funksiyanın qrafikini sxematik çəkək.

Öyrənmə tapşırıqları:

1. $y = \dfrac{2}{x}$ hiperbolasını paralel köçürməklə verilmiş funksiyanın qrafikini qurun.

a) $y = \dfrac{2}{x-1}$ b) $y = \dfrac{2}{x+3}$ c) $y = \dfrac{2}{x} - 1$ d) $y = \dfrac{2}{x} + 1$

2. Verilmiş funksiyanın asimptotlarını tapın və qrafikini qurun.

a) $y = \dfrac{x-3}{x-2}$ b) $y = \dfrac{2x-3}{x-1}$ c) $y = \dfrac{2x+1}{x}$ d) $y = \dfrac{3x+2}{x+1}$

3. Verilmiş rasional funksiyanın asimptotlarını tapın.

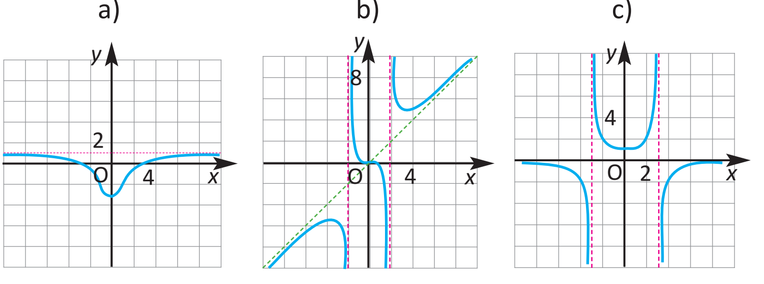
a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$ c) $y = \dfrac{x^3+1}{x-1}$ d) $y = \dfrac{2x^2+x+2}{x+1}$

4. Funksiyalar və qrafiklər verilmişdir. Hansı qrafikin hansı funksiyaya uyğun olduğunu müəyyən edin.

1) $y = \dfrac{-10}{x^2-9}$

2) $y = \dfrac{x^2-10}{x^2+3}$

3) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$



5. Funksiyanın asimptotlarını tapın, qiymətlər cədvəlini tərtib edin və qrafikini sxematik təsvir edin.

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$ b) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ c) $y = \dfrac{x^2-3x}{x-2}$

6. İdeal Qaz Qanununa görə P təzyiqi, V həcmi, T temperaturuna malik ideal qaz üçün PV = nRT tənliyi ilə ifadə olunan münasibət doğrudur, burada n qazın mollar sayı, R isə universal sabitdir.

a) T-ni sabit qəbul edərək P-nin V-dən asılılıq qrafikini qurun.

b) Qrafikin asimptotları hansı xətlərdir?

c) T sabit olduqda qazın həcmi sonsuz böyüdükcə onun təzyiqinin dəyişməsi haqqında nə demək olar?

1. $x^3 + mx^2 + nx + 2$ çoxhədlisini $x + 3$ ikihədlisinə böldükdə qalıq -1, $x - 2$ ikihədlisinə böldükdə qalıq 4 olur. m və n parametrlərinin qiymətlərini tapın.

2. Verilən sintetik bölmə sxeminə görə bölünəni, böləni, qisməti və qalığı yazın.

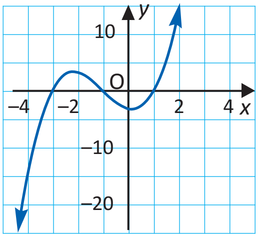
-3	1	-2	-9	18
		-3	15	-18
	1	-5	6	0

3. Bölmə əməlini budaqlı bölmə ilə yerinə yetirin.

a) $(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (x + 1)$
b) $(x^3 + 3x^2 - 4) : (x + 2)$
c) $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 3)$
d) $(x^3 - 3x^2 - 7x + 6) : (x - 2)$
e) $(x^3 + 2x^2 - x + 5) : (x^2 - x + 1)$
f) $(7x^3 + x^2 + x) : (x^2 + 1)$

4. Şəkildə $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ funksiyasının qrafiki təsvir edilmişdir.
a) $f(x) : (x - m)$ bölmə əməlində qalıq -15-dir. m-in qiymətini tapın.
b) Qrafikdən istifadə etməklə

$(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x + 3)$ və
$(x^3 + 3x^2 - x - 3) : (x + 1)$ bölmə əməlindən alınan qalıqları müəyyən edin.



5. Verilən ikihədlinin çoxhədlinin vuruğu olduğunu göstərin.

$g(x) = x^3 - x^2 - 20x$; $x + 4$
$h(x) = x^3 - x^2 - 24x - 36$; $x + 2$
$r(x) = x^3 - 37x + 84$; $x + 7$
$f(x) = x^4 - 6x^3 - 8x + 48$; $x - 6$
$s(x) = x^4 + 4x^3 - 64x - 256$; $x + 4$
$t(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$; $x - 5$

6. Bölmə əməllərini sintetik bölmə qaydası ilə yerinə yetirin.

a) $(3x^2 + 7x - 20) : (x + 5)$
b) $(5x^2 - 12x - 8) : (x + 3)$
c) $(4x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x - 1)$
d) $(5x^3 - 6x^2 + 3x + 11) : (x - 2)$
e) $(6x^5 - 2x^3 + 4x^2 - 3x + 1) : (x - 2)$
f) $(x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 2x + 3) : (x - 3)$

7. Çoxhədlinin verilən kökünə görə digər köklərini müəyyən edin.

a) $f(x) = -x^3 + x^2 + 3x + 1$; $x = -1$
b) $f(x) = x^3 - 9x + 10$; $x = 2$

8. Tənliyi həll edin.

a) $(4x^2 - 16)(x^2 - 3x - 10) = 0$
b) $(4x^2 - 81)(x^2 - 9) = 0$
c) $x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0$
d) $16x^6 = 54x^3$
e) $2x^3 + 5x^2 = 8x + 20$
f) $6x^5 - 18x^4 + 12x^3 = 36x^2$

9. Çoxhədlini vuruqlarına ayırın.

a) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$
b) $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

10. a) $f(x) = 3x - x^3$; b) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x}$ funksiyasının qrafikini sxematik təsvir edin.

2 Fəzada vektorlar

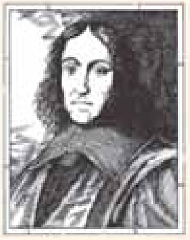
- **Fəzada Dekart koordinat sistemi**
- **Fəzada vektorlar**
- **İki vektorun skalyar hasili**
- **Düz xəttin ümumi tənliyi**
- **Müstəvinin tənliyi**
- **Müstəvilərin qarşılıqlı vəziyyətləri**
- **Sferanın tənliyi**
- **Fəzada və müstəvidə çevrilmələr**

Riyazi lüğət

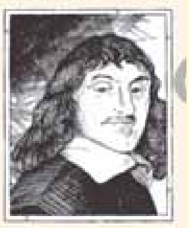
- ✓ düzbucaqlı koordinat sistemi
- ✓ koordinat müstəviləri
- ✓ fəzada nöqtənin koordinatları
- ✓ oktantlar
- ✓ vektor
- ✓ vektorun komponentləri
- ✓ vektorun uzunluğu
- ✓ ort vektorlar

Bunları bilmək maraqlıdır!

Dekart və Fermat analitik həndəsənin əsaslarını qoymuş böyük alimlərdir. Dekart öz nəticələrini ilk olaraq nəşr etdirmişdir. Fermatın nəticələri isə onun ölümündən çox sonralar işıq üzü görmüşdür. Maraqlıdır ki, onlar eyni nəticələrə tam fərqli yanaşmalarla gəlmişlər. Dekart öz tədqiqatlarına verilən əyrinin tənliyini axtarmaqdan, Fermat isə verilən tənliyə uyğun əyrini axtarmaqdan başlamışdır. Cəbri qaydaların həndəsəyə tətbiqi analitik həndəsənin yaranmasına gətirmişdir. Sonralar analitik həndəsini təkmilləşdirən, riyazi analizin yaradıcısı İsaak Nyuton yazırdı:



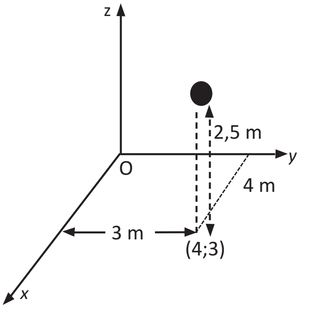
Pyer de Fermat
(1607-1665)



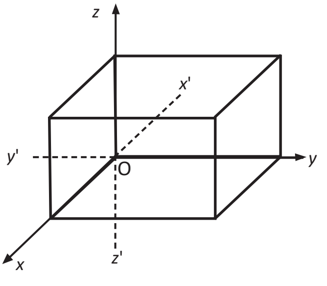
Rene Dekart
(1596-1650)

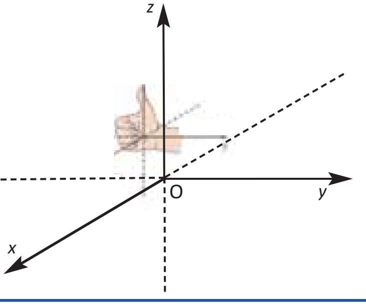
“Mən Dekartdan daha irəli gedə bildim, çünki mənim arxamda onun kimi nəhəng dayanmışdı”.

Tutaq ki, top otaqda döşəməyə dəyərək şaquli yuxarı qalxır. Topun döşəməyə dəydiyi yeri otağın eninə və uzunluğuna görə iki qiymətlə (koordinatlar cütü ilə) müəyyən edə bilərik. Lakin top yuxarı, fəzaya qalxmışdır və onun yerini artıq iki koordinat təyin edə bilməz. Döşəmədəki yeri (4;3) kimi müəyyən olunmuşsa və 2,5 m hündürlüyə qalxmışsa, topun fəzadakı vəziyyəti (4; 3; 2,5) kimi üç koordinatla müəyyən edilir.



Fəzada Dekart koordinat sistemi. Fəzada ixtiyari O nöqtəsi götürək və bu nöqtədən cüt-cüt perpendikulyar üç düz xətt keçirək. O nöqtəsini koordinat başlanğıcı qəbul edib, düz xətlər üzərində müsbət istiqamət və uzunluq vahidi seçməklə onları O*x*, O*y*, O*z* koordinat oxları adlandıraq. O koordinat başlanğıcı hər bir koordinat oxunu iki (müsbət və mənfi) yarımoxa bölür. Üç koordinat oxu cüt-cüt kəsişərək koordinat müstəvilərini yaradır. O*xy* müstəvisi şərti olaraq üfüqi götürülür, O*z* oxu isə müsbət istiqaməti yuxarı yönəlməklə şaquli çəkilir. Bu qayda ilə yaradılan üçölçülü koordinat sistemi **sağ əl sistemi** də adlandırılır. Sağ əlinizin barmaqlarını *x* oxunun müsbət istiqamətindən *y* oxunun müsbət istiqamətinə doğru olmaqla büksəniz, baş barmağınız *z* oxunun müsbət istiqamətində yönələcək.

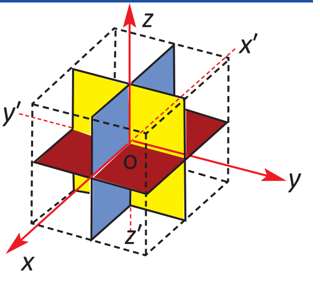




- O koordinat başlanğıcı
- *Ox*, *Oy*, *Oz* koordinat oxları
- *Oxy*, *Oyz*, *Ozx* koordinat müstəviləri adlanır.

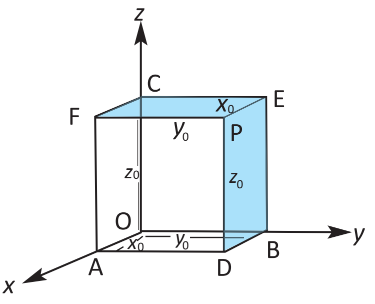
Koordinat müstəviləri *xy*, *yz*, *zx* kimi də işarə edilir.

Hər bir koordinat müstəvisi fəzanı iki yarımfəzaya ayırır və beləliklə, üç koordinat müstəvisi birlikdə fəzanı hər biri oktant adlanan səkkiz hissəyə ayırır:
1. O*xyz*;   2. O*x′yz*;   3. O*x′y′z*;   4. O*xy′z*;
5. O*xyz′*;   6. O*x′yz′*;   7. O*x′y′z′*; 8. O*xy′z′*



Tutaq ki, P fəzada hər hansı nöqtədir. P nöqtəsindən O*yz*, O*zx* və O*xy* müstəvilərinə paralel və koordinat oxlarını uyğun olaraq A, B və C nöqtələrində kəsən müstəvilər keçirək.

ADPF || *Oyz*
BEPD || *Oxz*
CFPE || *Oxy*



Fəzada nöqtənin koordinatları.
1) P nöqtəsindən keçən və *Oyz* müstəvisinə paralel olan müstəvi *x* oxunu $(x_0;0;0)$ nöqtəsində kəsir.
2) P nöqtəsindən keçən və *Oxz* müstəvisinə paralel olan müstəvi *y* oxunu $(0;y_0;0)$ nöqtəsində kəsir.
3) P nöqtəsindən keçən və *Oxy* müstəvisinə paralel olan müstəvi *z* oxunu $(0;0;z_0)$ nöqtəsində kəsir.

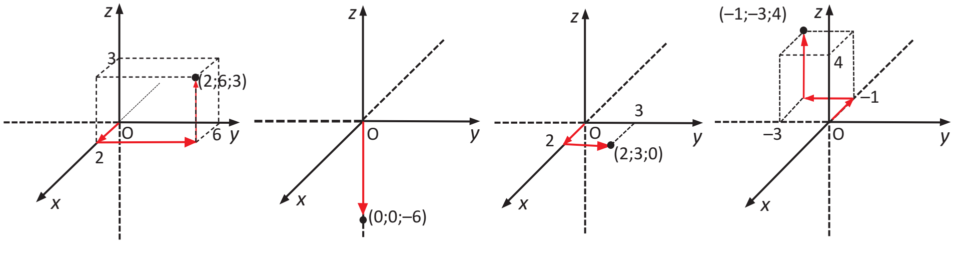
Fəzanın hər bir P nöqtəsinə nizamlı $(x_0; y_0; z_0)$ üçlüyü uyğundur və tərsinə:

$$P \leftrightarrow (x_0; y_0; z_0).$$

$(x_0; y_0; z_0)$ nizamlı üçlüyü düzbucaqlı (*Oxyz*) koordinat sistemində P nöqtəsinin koordinatları, yaxud **Dekart koordinatları** adlanır.
P nöqtəsindən *yz*, *zx* və *xy* müstəvilərinə qədər məsafələr uyğun olaraq onun x_0, y_0, z_0 koordinatlarının mütləq qiymətlərinə bərabərdir.
x_0; y_0; z_0 ədədlərinə P nöqtəsinin, uyğun olaraq absisi, ordinatı, applikatı deyilir və nöqtə koordinatları ilə $P(x_0; y_0; z_0)$ kimi yazılır.

1) Koordinat başlanğıcı: O (0; 0; 0).
2) *Ox* oxu üzərində yerləşən nöqtə: (*x*; 0; 0)
   Oy oxu üzərində yerləşən nöqtə: (0; *y*; 0)
   Oz oxu üzərində yerləşən nöqtə: (0; 0; *z*).
3) *Oxy* koordinat müstəvisində yerləşən nöqtə: (*x*; *y*; 0)
   Oyz koordinat müstəvisində yerləşən nöqtə: (0; *y*; *z*)
   Oxz koordinat müstəvisində yerləşən nöqtə: (*x*; 0; *z*).

Fəzada (2; 6; 3) nöqtəsi 1-ci oktantda, (0; 0;–6) nöqtəsi *z*-in mənfi yarımoxu üzərində, (2; 3; 0) nöqtəsi *xy* müstəvisi üzərində, (–1;–3;4) nöqtəsi isə III oktantda yerləşir.



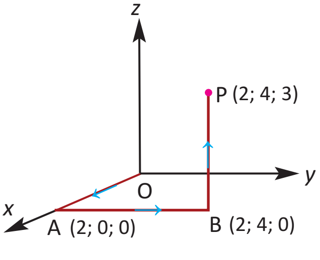
Nöqtənin koordinatlarının işarəsi. Nöqtənin koordinatlarının işarəsi onun hansı oktantda yerləşməsindən asılıdır. Aşağıdakı cədvəldə oktantlarda nöqtənin koordinatlarının işarələri verilmişdir.

Oktantlar	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
	OXYZ	OX'YZ	OX'Y'Z	OXY'Z	OXYZ'	OX'YZ'	OX'Y'Z'	OXY'Z'
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

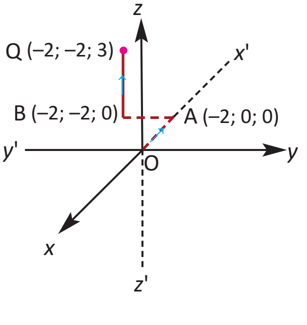
Birinci oktantda bütün koordinatların işarəsi müsbət, yeddinci oktantda isə mənfidir.

Nümunə 1: a) P (2; 4; 3); b) Q (–2; –2; 3) nöqtəsini düzbucaqlı koordinat sistemində qurun.

Həlli: a) P (2; 4; 3) nöqtəsini qurmaq üçün koordinat başlanğıcından *x* oxunun müsbət istiqamətində iki vahid məsafədə A (2; 0; 0) nöqtəsini qeyd edək. A nöqtəsindən *y* oxuna paralel düz xətt üzərində müsbət istiqamətdə 4 vahid məsafədə B (2; 4; 0) nöqtəsini, B nöqtəsindən *z* oxuna paralel düz xətt üzərində müsbət istiqamətdə 3 vahid məsafədə P (2; 4; 3) nöqtəsini qeyd edək.



b) Q (–2; –2; 3) nöqtəsini qurmaq üçün koordinat başlanğıcından *x* oxunun mənfi istiqamətində iki vahid məsafədə A (–2; 0; 0) nöqtəsini qeyd edək. A nöqtəsindən *y* oxuna paralel düz xətt üzərində mənfi istiqamətdə 2 vahid məsafədə B (–2; –2; 0) nöqtəsini, B nöqtəsindən *z* oxuna paralel düz xətt üzərində müsbət istiqamətdə 3 vahid məsafədə Q (–2; –2; 3) nöqtəsini qeyd edək.

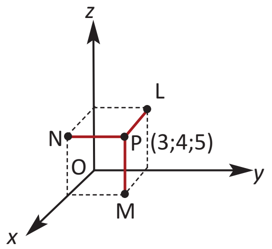


Nümunə 2: P (3; 4; 5) nöqtəsindən koordinat oxlarına perpendikulyarlar çəkilmişdir. Perpendikulyarların uyğun A, B və C oturacaqlarının koordinatlarını yazın.

Həlli: P nöqtəsindən *x* oxuna çəkilmiş perpendikulyarın oturacağının *y* və *z* koordinatı sıfırdır. Deməli, A nöqtəsinin koordinatları (3; 0; 0) olacaq. Oxşar yanaşma ilə digər nöqtələrin koordinatları tapılır: B(0;4;0) və C(0;0;5).

Nümunə 3. P (3; 4; 5) nöqtəsindən *Oxy*, *Oxz* və *Oyz* müstəvilərinə perpendikulyarlar çəkilmişdir. Perpendikulyarların uyğun M, N və L oturacaqlarının koordinatlarını yazın.

Həlli: P nöqtəsindən *Oxy* müstəvisinə çəkilmiş perpendikulyarın oturacağının *z* koordinatı sıfırdır. Deməli, M nöqtəsinin koordinatları (3; 4; 0) olacaq. Oxşar olaraq digər nöqtələrin koordinatları tapılır: L(0;4;5) və N(3;0;5)



Öyrənmə tapşırıqları

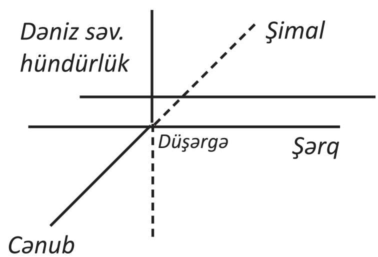
1. Üçölçülü koordinat sistemində (1; 1; 0), (2; 3;−1) və (−1; 2; 3) nöqtələrini qurun.

2. 1) Fəzada:
a) O*y* oxu üzərində yerləşən nöqtənin koordinatlarını müəyyən edin.
b) O*xy* müstəvisi üzərində yerləşən nöqtənin koordinatlarını müəyyən edin.
2) P(–2;3;1) nöqtəsindən koordinat müstəvilərinə və koordinat oxlarına çəkilmiş perpendikulyarların oturacağının koordinatlarını tapın.

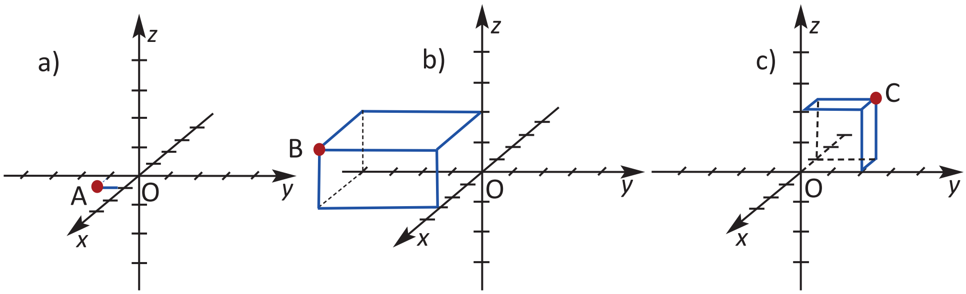
3. Verilən nöqtələrin hər birinin hansı oktantda yerləşdiyini yazın.

a) (1; 2; 5) b) (4; –2; 5) c) (6; –2; –3) d) (4; 5; –1)
e) (–4; 7; 2) f) (–3; –1; 8) g) (–3; 4; –9) h) (–6; –2; –1)

4. Mustafa və dostları alpinistlərlə birlikdə dağa qalxırlar. Onlar 3 km şərqə, 2 km şimala gedib 4 km yüksəkliyə qalxmaqla nəzərdə tutduqları məntəqəyə çatmağı planlaşdırırlar. Mustafagilin çatacaqları məntəqəni verilmiş koordinat sistemində çəkib göstərin.

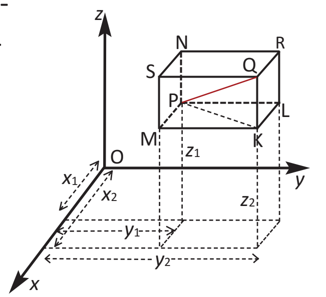


5. Qeyd edilmiş nöqtələrin koordinatlarını yazın. Dəftərinizdə koordinat sistemi çəkərək, bu nöqtələri siz də qurun.



Fəzada iki nöqtə arasındakı məsafə. P (x_1, y_1, z_1) və Q (x_2; y_2; z_2) nöqtələri arasındakı məsafə $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ düsturu ilə hesablanır.

İsbatı: Tutaq ki, diaqonalı PQ olan PMSNRLKQ paralelepipedinin MP, PL və KQ tilləri, uyğun olaraq, O*x*, O*y*, O*z* koordinat oxlarına paraleldir. PKQ düzbucaqlı üçbucağından (∠PKQ düz bucaqdır) $PQ^2 = PK^2 + KQ^2$;



PKL düzbucaqlı üçbucağından (∠PLK düz bucaqdır).

$PK^2 = KL^2 + PL^2 = MP^2 + PL^2$; $KL = MP$

Onda $PQ^2 = MP^2 + PL^2 + KQ^2$

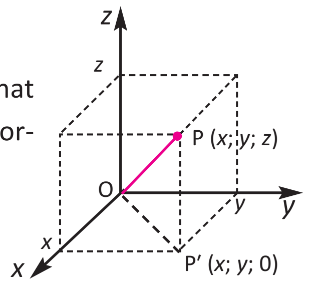
Burada $MP = |x_2 - x_1|$, $PL = |y_2 - y_1|$ və $KQ = |z_2 - z_1|$ olduğunu nəzərə alsaq,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{olar.}$$

Koordinat başlanğıcından məsafə. Fəza koordinat sistemində hər hansı P(x; y; z) nöqtəsinin O (0;0;0) koordinat başlanğıcından məsafəsi

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

düsturu ilə hesablanır.



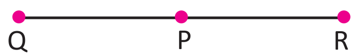
Nümunə 1. Bir düz xətt üzərində yerləşən nöqtələrə **kollinear nöqtələr** deyilir. İki nöqtə arasındakı məsafə düsturundan istifadə etməklə P (2; 4; 6), Q (– 2;– 2;–2) və R (6;10;14) nöqtələrinin kollinear olduğunu göstərin.

Həlli: $PQ = \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-4)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$,

$PR = \sqrt{(6-2)^2 + (10-4)^2 + (14-6)^2} = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$,

$QR = \sqrt{(6+2)^2 + (10+2)^2 + (14+2)^2} = \sqrt{64+144+256} = \sqrt{464} = 4\sqrt{29}$.

QR = QP + PR olduğundan, P, Q və R nöqtələri bir düz xətt üzərindədir, yəni kollineardır.



Nümunə 2. A (3; 2; 2) və B (5; 5; 4) nöqtələrindən eyni məsafədə olan və absis oxu üzərində yerləşən nöqtənin koordinatlarını tapın.

Həlli: Absis oxu üzərində olan nöqtə P (x;0;0) kimidir. P nöqtəsi A və B nöqtələrindən eyni məsafədə olduğundan PA = PB və ya $PA^2 = PB^2$ olmalıdır. İki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə alarıq:

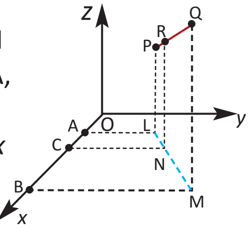
$$(x-3)^2 + (0-2)^2 + (0-2)^2 = (x-5)^2 + (0-5)^2 + (0-4)^2$$

Buradan $4x = 25 + 25 + 16 - 17$ və ya $x = 12{,}25$.

Deməli, verilmiş A və B nöqtələrindən eyni məsafədə olan və absis oxu üzərində yerləşən nöqtə P (12,25; 0; 0) olur.

Parçanı müəyyən nisbətdə bölən nöqtənin koordinatları.
P (x_1; y_1; z_1) və Q (x_2; y_2; z_2) nöqtələrini birləşdirən parçanı PR : RQ= m : n nisbətində bölən R nöqtəsinin koordinatları

$$R\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n};\ \frac{my_2+ny_1}{m+n};\ \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$ kimi tapılır.



İsbatı: PQ parçasını verilən nisbətdə bölən nöqtə R(x; y; z) olsun. P, R və Q nöqtələrindən xy müstəvisinə PL, RN və QM perpendikulyarlarını, L, N, M nöqtələrindən isə Ox oxuna LA, NC və MB perpendikulyarlarını çəkək.
Şəklə əsasən, AC = OC − OA = $x - x_1$ və BC = OB − OC = $x_2 - x$ olduğundan, mütənasib parçalar haqqındakı teoremə görə alırıq:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{LN}{NM} = \frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$n\,x - nx_1 = m\,x_2 - mx$$

$$(m+n)x = mx_2 + nx_1$$

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

Oxşar qayda ilə Oy və Oz oxlarına perpendikulyarlar çəkməklə y və z koordinatları müəyyən edilir.

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \qquad z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

Parçanın orta nöqtəsinin koordinatları. P (x_1; y_1; z_1) və Q (x_2; y_2; z_2) nöqtələrini birləşdirən parçanın orta nöqtəsi $M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2};\frac{z_1+z_2}{2}\right)$ olur.

Üçbucağın ağırlıq mərkəzinin koordinatları.
Təpələri M (x_1, y_1, z_1), N (x_2; y_2; z_2) və L (x_3; y_3; z_3) nöqtələrində olan üçbucağın ağırlıq mərkəzinin (medianlarının kəsişmə nöqtəsinin) koordinatlarını

$$P\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\frac{y_1+y_2+y_3}{3};\frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$ kimi tapmaq olar (özünüz yoxlayın).

Nümunə 3. A (– 2; 0; 6) və B (10; –6; –12) nöqtələri verilmişdır. AB parçasını AP : PB = 5 : 1 nisbətində bölən P nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

Həlli: Tutaq ki, P nöqtəsinin koordinatları P(x;y;z) kimidir. Bu nöqtə AB parçasını 5:1 nisbətində bölür. Parçanı verilən nisbətdə bölən nöqtənin koordinatları düsturuna əsasən

$$P(x;y;z) = P\left(\frac{5\cdot 10 + 1\cdot(-2)}{5+1};\frac{5\cdot(-6)+1\cdot 0}{5+1};\frac{5\cdot(-12)+1\cdot 6}{5+1}\right) =$$

$$= P(8; -5; -9) \text{ olur.}$$

Nümunə 4: Ağırlıq mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən üçbucağın iki təpə nöqtəsi verilmişdir: (3; –5; 7) və (–1; 7; –6) . Bu üçbucağın üçüncü təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

Həlli: Ağırlıq mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşdiyindən:

$$O\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3};\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right) =$$

$$= O\left(\frac{3-1+x_3}{3};\ \frac{-5+7+y_3}{3};\ \frac{7-6+z_3}{3}\right) = O\,(0;0;0)$$

Buradan $\frac{3-1+x_3}{3} = 0;\quad \frac{-5+7+y_3}{3} = 0;\quad \frac{7-6+z_3}{3} = 0$

$x_3 = -2 \qquad y_3 = -2 \qquad z_3 = -1$

Deməli, üçbucağın üçüncü təpə nöqtəsi (–2; –2;–1) olur.

Öyrənmə tapşırıqları

6. Nöqtələr arasındakı məsafəni tapın.

a) A(5;4;0) və B(7;8;4) b) M(7;6;–3) və N(–1;–3;9)

7. Göstərin ki, verilən üç nöqtə kollineardır.

a) (−3; 2; 4), (−1; 5; 9), (1; 8; 14) b) (5; 4; 2), (6; 2; −1), (8; −2; −7)

8. Göstərin ki, (0; 7; 10), (–1; 6; 6) və (– 4; 9; 6) nöqtələri bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucağın təpə nöqtələridir.

9. A(2; 1; 3) nöqtəsindən $\sqrt{17}$ vahid məsafədə olan və ordinat oxu üzərində yerləşən nöqtənin koordinatlarını tapın.

10. *a*-nın hansı qiymətlərində (5; −1; 7) və (*a*; 5; 1) nöqtələri arasındakı məsafə 9 vahid olar?

11. P (3; –1; 2) nöqtəsindən: 1) koordinat müstəvilərinə; 2) koordinat oxlarına; 3) koordinat başlanğıcına qədər məsafələri tapın.

12. Nöqtələrin yerinə uyğun məlumatı yazmaqla cümlələri tamamlayın.

1) P (3; 5; 6) nöqtəsindən O*xy* müstəvisinə qədər məsafə .... vahiddir.

2) M (3; 4; 2) nöqtəsindən O*z* oxuna qədər məsafə .... vahiddir.

13. A (–1; 1; 0), B (1; 0; –1) və C (0; –1; 0) nöqtələrindən eyni məsafədə olan və *yz* müstəvisi üzərində yerləşən nöqtənin koordinatlarını müəyyən edin.

14. A, B və C nöqtələrinin üçbucağın təpələri olub-olmadığını müəyyən edin.

a) A(4; –2; 0), B(6; –5; 6), C(0; –7; 9)

b) A(3;2; –2), B(5; 6; 2), C(1; – 2; –6)

15. M (1; –2; 3) nöqtəsi bir ucu A(3; 1; –1) olan AB parçasının orta nöqtəsidir. B nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

16. Tərəflərinin orta nöqtələri (3; 2; 3), (1;1;5) və (0;3;4) olan üçbucağın təpə nöqtələrinin koordinatlarını tapın.

17. Təpə nöqtələri A(17;– 2; –1), B(1;–2;11) və C(1;16;–1) olan üçbucağın BM medianının uzunluğunu tapın.

18. P (2;– 4; 3) və Q (– 4; 5; – 6) nöqtələri verilir. PQ parçasını 2:1 nisbətində bölən nöqtənin koordinatlarını tapın (iki hala baxın).

19. A (3; 2; – 4), B (5; 4; –6), C (9; 8; – 10) kollinear nöqtələrdir. B nöqtəsi AC parçasını hansı nisbətdə bölür?

20. Təpə nöqtələri (9;6;9); (3;3;15); (0;9;12) olan üçbucaqların medianlarının kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

21. AB parçası üzləri koordinat müstəvilərinə paralel olan paralelepipedin diaqonalıdır. Hər bir bənd üçün:
a) uyğun həndəsi təsviri çəkin;
b) paralelepipedin qalan 6 təpəsinin koordinatlarını tapın;
c) AB diaqonalının uzunluğunu tapın.

1. A(0; 0; 0) ; B(7 ; 2; 3)
2. A(1; 1 ; l); B(3; 4; 2)
3. A(–1; l; 2); B(2; 3; 5)
4. A(2; –1; –9); B(4; 0; –l)

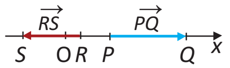
22. İsbat edin ki:
a) A(0; 4; 1) , B(2; 3; −1) , C(4;5;0) və D(2;6;2) nöqtələri kvadratın təpə nöqtələridir.
b) (5; –1; 1), (7; – 4; 7), (1; – 6; 10) və (–1; – 3; 4) nöqtələri rombun təpə nöqtələridir.

23. A (9; 6; 0), B (15; 9; 6), C (21; –3; – 8) üçbucağın təpə nöqtələridir.
$\angle$BAC-nin tənböləni BC tərəfini D nöqtəsində kəsir.
D nöqtəsinin koordinatlarını tapın.

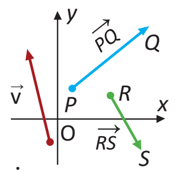
24. a) Otağın qarşı künclərindən birini koordinat başlanğıcında, digərini isə bu küncdən 4 m şimala, 3 m şərqə, 3,5 m şaquli istiqamətdə yuxarı olmaqla təsvirini çəkin.
b) Qarşı küncləri birləşdirən diaqonalın uzunluğunu tapın.
c) Otağın modelini göstərən paralelepipedin 8 təpə nöqtəsinin koordinatlarını yazın.

Təkcə qiyməti ilə deyil, həm də istiqaməti ilə müəyyən edilən kəmiyyətlərə vektorial kəmiyyətlər deyilir. Vektor, həndəsi olaraq, başlanğıcı və sonu qeyd olunmuş istiqamətlənmiş düz xətt parçasıdır. Vektoru göstərən parçanın uzunluğuna **vektorun uzunluğu və ya modulu** deyilir.

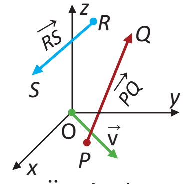
Vektor bir ölçülü, ikiölçülü, üçölçülü koordinat sistemində təsvir edilə bilər.



Birölçülü



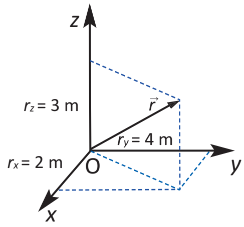
İkiölçülü



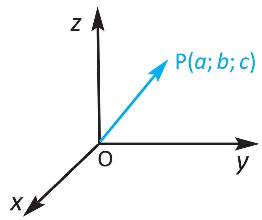
Üçölçülü

Başlanğıc nöqtəsi ilə son nöqtəsi üst-üstə düşən vektora **sıfır vektor** deyilir. Sıfır vektorun istiqaməti qeyri-müəyyəndir.

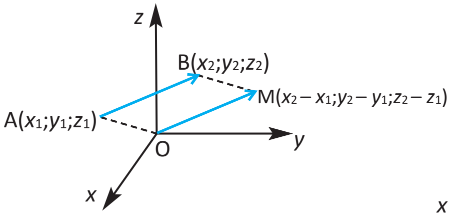
İstənilən nöqtənin (obyektin) fəzadakı yeri (vəziyyəti) başlanğıcı koordinat başlanğıcında, sonu bu nöqtədə olan vektoru qarşı qoymaqla təsvir edilə bilər. Məsələn, oyun meydançasının eni boyu 2 m, uzunluğu boyu 4 m nöqtəsindən 3 m yüksəklikyə atılan topun fəzadakı vəziyyəti, yeri şəkildəki kimi vektorla təsvir edilər.



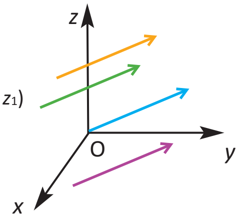
Fəzada başlanğıc nöqtə ilə verilən nöqtəni birləşdirən vektora **yer vektoru,** yaxud **radius-vektor** deyilir. Fəzada verilmiş hər bir nöqtəyə bir yer vektoru uyğundur. Koordinat sistemində $P(a;b;c)$ nöqtəsinin yerini $\overrightarrow{OP}\langle a;b;c\rangle$ vektoru müəyyən edir. $\overrightarrow{OP}\langle a;b;c\rangle$ yazılışı vektorun fəzada komponentləri ilə yazılışıdır.



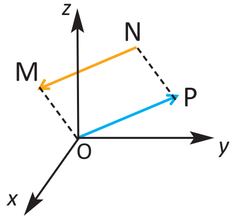
Modulları bərabər, istiqamətləri eyni olan vektorlara **bərabər vektorlar** deyilir. Bərabər vektorları paralel köçürmə ilə tamamilə bir-birinin üzərinə gətirmək olar. Məsələn, şəkildə $\overrightarrow{AB}$ və $\overrightarrow{OM}$ vektorları bərabərdir. $\overrightarrow{OM}$ yer vektoru ilə modulca bərabər və istiqamətcə eyni olan sonsuz sayda vektor çəkmək mümkündür. Fəzada başlanğıcı $A(x_1; y_1; z_1)$, sonu $B(x_2; y_2; z_2)$ nöqtəsi olan $\overrightarrow{AB}$ vektoru komponentləri ilə $\overrightarrow{AB}\langle x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\rangle$ kimi yazılır. Bərabər vektorların uyğun komponentləri bərabərdir və tərsinə.
Modulları bərabər, istiqamətləri əks olan vektorlara **əks vektorlar** deyilir.



bərabər vektorlar



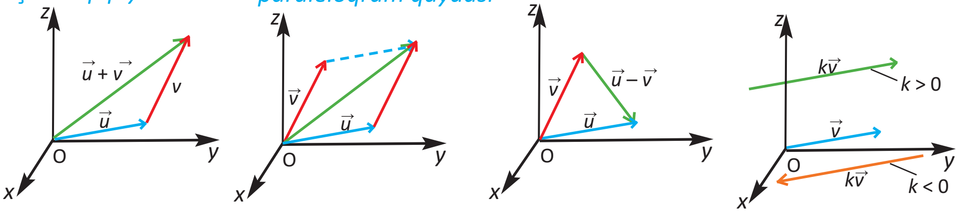
əks vektorlar



Müstəvidə olduğu kimi, fəzada da vektorların cəmini, fərqini və ədədə hasilini həndəsi olaraq qurmaq olar.

Vektorların toplanması *Vektorların çıxılması* *Vektorun ədədə vurulması*

üçbucaq qaydası *paraleloqram qaydası*



Fəza Dekart koordinat sistemində də vektorun komponentlərinin və uzunluğunun tapılması, vektorlar üzərində əməllər müstəvi koordinat sistemində öyrəndiyimiz qaydalara oxşar yerinə yetirilir.

Vektorun uzunluğu. İki nöqtə arasındakı məsafə düsturundan istifadə etməklə vektorun modulunu tapa bilərik.

Teorem. Başlanğıcı və sonu uyğun olaraq P (x_1, y_1, z_1) və Q (x_2, y_2, z_2) nöqtələri olan $\overrightarrow{PQ}$ vektorunun uzunluğu

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$ düsturu ilə tapılır.

Nəticə. $\overrightarrow{OP}\langle x;y;z\rangle$ yer vektorunun uzunluğu $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ olar (koordinat başlanğıcından verilən nöqtəyə qədər məsafə düsturu ilə eynidir).

Vektorların toplanması və çıxılması: $\vec{v}\langle v_1; v_2; v_3\rangle$ və $\vec{u}\langle u_1;u_2;u_3\rangle$ vektorlarının cəmi (fərqi), komponentləri bu vektorların uyğun komponentləri cəminə (fərqinə) bərabər olan vektordur: $\vec{v}+\vec{u}=\langle v_1+u_1; v_2+u_2; v_3+u_3\rangle$

$$\vec{v}-\vec{u}=\langle v_1-u_1; v_2-u_2; v_3-u_3\rangle$$

Nümunə 1. $\vec{v}=\langle 2; 1; -3\rangle$ və $\vec{u}=\langle 0; 4; -2\rangle$ vektorlarının cəmini və fərqini yazın.

Həlli: $\vec{v}+\vec{u}=\langle 2; 1; -3\rangle+\langle 0; 4; -2\rangle=\langle 2; 5; -5\rangle$

$\vec{v}-\vec{u}=\langle 2; 1; -3\rangle-\langle 0; 4; -2\rangle=\langle 2; -3; -1\rangle$

Vektorun ədədə vurulması: $\vec{v}\langle v_1; v_2; v_3\rangle$ vektorunun k həqiqi ədədinə hasili $k\vec{v}=\langle kv_1;kv_2;kv_2\rangle$ kimi təyin edilən vektordur.

Vektorun həqiqi ədədə hasili üçün aşağıdakı cəbri qaydalar doğrudur:

- Hər bir $k\in R$ üçün $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
- Hər bir $k_1, k_2 \in R$ üçün $(k_1+k_2)\vec{u}=k_1\vec{u}+k_2\vec{u}$
- Hər bir $k_1, k_2 \in R$ üçün $(k_1\cdot k_2)\cdot\vec{u}=k_1\cdot(k_2\cdot\vec{u})$

Nümunə 2. $\vec{u}\langle 1;-2; 3\rangle$ və $k=3$ ədədi verilir. $k\vec{u}$ vektorunu komponentləri ilə yazın.

Həlli: $k\vec{u}=\langle 3\cdot1; -2\cdot3; 3\cdot3\rangle=\langle 3; -6; 9\rangle$

Kollinear vektorlar. Vektorları təsvir edən istiqamətlənmiş parçalar paraleldirsə və ya eyni düz xətt üzərindədirsə, onlara **kollinear vektorlar** deyilir. $\vec{a} \neq 0$ və $\vec{b}$ vektorları kollineardırsa, onda elə yeganə k ədədi var ki, $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ ödənir. $k > 0$ olduqda bu vektorlar eyniistiqamətli, $k < 0$ olduqda isə əks istiqamətlidir. Kollinear vektorların uyğun koordinatları mütənasibdir:

$$\boldsymbol{b_1 = k \cdot a_1,\ b_2 = k \cdot a_2,\ b_3 = k \cdot a_3}.$$

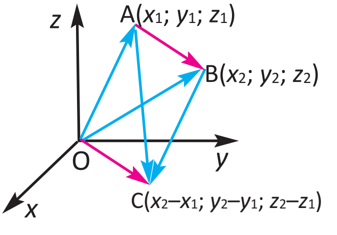
$a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ olduqda, bu şərt $\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = \dfrac{b_3}{a_3} = k$ kimi yazılır.

Nümunə 3. $\vec{a} = \langle -1;\ 2;\ -3 \rangle$ və $\vec{b} = \langle -3;\ 6;\ -9 \rangle$ vektorlarının kollinear olub-olmadığını müəyyən edin.

Həlli: $\dfrac{-1}{-3} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{-3}{-9} = \dfrac{1}{3}$ olduğundan, $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları kollinear və eyni istiqamətlidir.

Nümunə 4. $\overrightarrow{AB}$ vektoruna bərabər radius-vektoru qurun.

Həlli: Üçbucaq qaydasına görə $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
A və B nöqtələrinə uyğun radius-vektorlar $\overrightarrow{OA}\langle x_1;\ y_1;\ z_1 \rangle$ və $\overrightarrow{OB}\langle x_2;\ y_2;\ z_2 \rangle$ vektorlarıdır.
Müstəvi üzərində vektorların toplanma qaydasına görə $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$. Buradan,
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \langle x_2;\ y_2;\ z_2 \rangle - \langle x_1;\ y_1;\ z_1 \rangle =$
$= \langle x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1 \rangle = \overrightarrow{OC}$.



Nümunə 5. Başlanğıc nöqtəsi A(–3;–4; 1), son nöqtəsi B(1; –2; 3) olan $\overrightarrow{AB}$ vektoru verilir. a) $\overrightarrow{AB}$ vektorunun uzunluğunu tapın
b) $\overrightarrow{AB}$ vektoruna bərabər radius-vektoru komponentləri ilə yazın.

Həlli: a) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1-(-3))^2 + (-2-(-4))^2 + (3-1)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

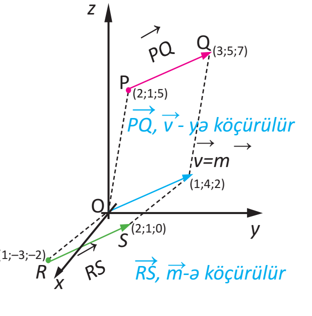
b) $\overrightarrow{AB}$ vektoruna bərabər radius-vektoru $\overrightarrow{OP}$ ilə işarə edək.
A nöqtəsinə uyğun radius-vektor $\overrightarrow{OA}\langle -3; -4; 1 \rangle$, B nöqtəsinə uyğun radius-vektor isə $\overrightarrow{OB}\langle 1; -2; 3 \rangle$ olur. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}\langle 1; -2; 3 \rangle - \overrightarrow{OA}\langle -3; -4; 1 \rangle = \overrightarrow{AB}\langle 4;2;2 \rangle$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ olduğundan axtarılan vektor $\overrightarrow{OP}\langle 4;2;2 \rangle$ olar.

Nümunə 6. P(2; 1; 5), Q(3; 5; 7),
R (1; –3; –2) və S (2; 1; 0) nöqtələri verilmişdir.
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ bərabərliyi doğrudurmu?

Həlli: $\overrightarrow{PQ} = \langle 3-2;\ 5-1;\ 7-2 \rangle = \langle 1;4;2 \rangle$

$\overrightarrow{RS} = \langle 2-1;\ 1-(-3);\ 0-(-2) \rangle = \langle 1;4;2 \rangle$.

Uyğun komponentlərin bərabərliyindən $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ olduğu aşkardır.



Öyrənmə tapşırıqları

1. Fəzada R və S nöqtələrinin koordinatlarına görə $\overrightarrow{RS}$ vektorunu komponentləri ilə yazın və uzunluğunu hesablayın.

a) R (3; −1; 1), S (3; −2; 1) b) R (4; 3; −6), S (−5; −2; 5)

2. Vektorun uzunluğunu hesablayın.

a) $\vec{v}\langle 2;-1;1\rangle$ b) $\vec{v}\langle 2;-1;0\rangle$ c) $\vec{v}\langle 3;2;-2\rangle$
d) $\vec{v}\langle 0;0;1\rangle$ e) $\vec{v}\langle 6;4;-4\rangle$ f) $\vec{v}\langle -2;3;-0\rangle$

3. Başlanğıcı A(1;–2;3), sonu B(–2;1;1) nöqtəsi olan vektoru komponentləri ilə yazın və uzunluğunu hesablayın.

4. a) Fəzanın P (1; −1; 1), Q (2; −2; 2), R (2; 0; 1), S (3; −1; 2) nöqtələri üçün $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$ bərabərliyi doğrudurmu?

b) A (1; 0; 1), B (−1; 1; 2), C (0; 2; −1) nöqtələri verilir. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ olarsa, D(*x*; *y*; *z*) nöqtəsini tapın.

5. Məchul koordinatın elə qiymətini tapın ki, verilmiş vektorlar kollinear olsunlar.

a) $\vec{a}\langle -1;2;3\rangle$ və $\vec{b}\langle x;6;9\rangle$ b) $\vec{a}\langle 4;y;6\rangle$ və $\vec{b}\langle 10;20;z\rangle$

6. $\vec{a}\langle 3;0;4\rangle$ və $\vec{b}\langle 2;1;-1\rangle$ verilir. $2\vec{a}-3\vec{b}$ vektorunu komponentləri ilə yazın.
Göstəriş: $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının komponentlərini vektorun ifadəsində yerinə yazın və vektorlar üzərində əməlləri yerinə yetirin.

7. $\vec{v}\langle 2;1;-1\rangle$ və $\vec{w}\langle 3;-4;2\rangle$ vektorları verilir.
Aşağıdakı vektorları komponentləri ilə yazın.

a) $\vec{v}-\vec{w}$ | b) $2\vec{v}-3\vec{w}$ | c) $-\vec{v}-2\vec{w}$ | d) $2(\vec{v}+\vec{w})$

8. $\vec{a}\langle -1;2;0\rangle$ vektoruna hansı vektor əlavə edilsə, $\vec{b}\langle 3;1;5\rangle$ vektoru alınar?

9. A (1; 2; 4) və B (4; 8; 19) nöqtələri verilir. AB parçasını AK : KB = 2 : 1 nisbətində bölən K nöqtəsinin koordinatlarını vektorların kollinearlıq şərtindən istifadə edərək tapın.

10. $\vec{a}\langle 1;-1;k\rangle$ və $\vec{b}\langle -1;-6;-4\rangle$ vektorları verilmişdir. *k*-nın hansı qiymətində $2\vec{a}-\vec{b}$ vektorunun uzunluğu 5-ə bərabərdir?

11. **Fizika.** Cismə tətbiq edilmiş iki qüvvə vektoru komponentləri ilə ⟨3;–2;4⟩ və ⟨6;2;5⟩ kimidir. Cismi tarazlıqda saxlayan üçüncü qüvvəni komponentləri ilə yazın.

Eyni müstəvi və ya paralel müstəvilər üzərində yerləşən vektorlara **komplanar vektorlar** deyilir. Məsələn, kubun qarşı üzlərində yerləşən bütün vektorlar komplanardır, kubun bir təpədən çıxan üç tili üzrə yönələn vektorlar isə komplanar deyil.

Vahid vektor. Uzunluğu vahidə bərabər olan vektora **vahid vektor** deyilir.

İstənilən sıfır olmayan $\vec{v}$ vektoru üçün $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ vektoru vahid vektordur.

Nümunə 1. $\vec{a} = \langle 4; -2; 4\rangle$ vektoru istiqamətində olan: a) $\vec{u}$ vahid vektorunu; b) uzunluğu 10 vahid olub $\vec{a}$ ilə eyniistiqamətli olan $\vec{v}$ vektorunu komponentləri ilə yazın.

Həlli: a) Vahid vektoru $\vec{u}$ ilə işarə edək:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{u} = \frac{\langle 4; -2; 4\rangle}{\sqrt{16+4+16}} = \frac{\langle 4; -2; 4\rangle}{6} = \left\langle \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\rangle$$

Bu vektorun uzunluğunun həqiqətən vahidə bərabər olduğunu yoxlayaq:

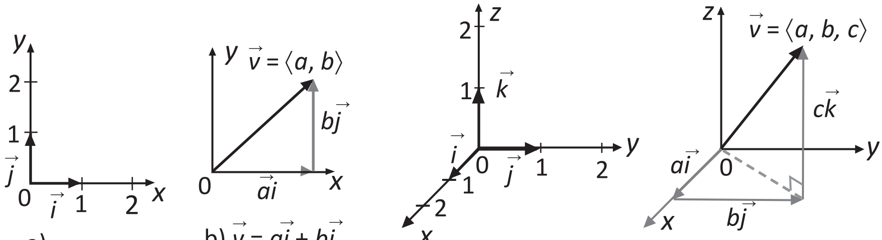
$$|\vec{u}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

b) $\vec{a} = \langle 4; -2; 4\rangle$ vektoru istiqamətində uzunluğu 10 vahid olan vektoru müəyyən etmək üçün a bəndində tapdığımız vahid vektorun komponentlərini 10-a vurmalıyıq:

$$\vec{v} = 10\,\vec{u} = 10 \cdot \left\langle \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\rangle = \left\langle \frac{20}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{20}{3}\right\rangle$$

Fəzada düzbucaqlı koordinat sistemində koordinat başlanğıcından çıxan, koordinat oxlarının müsbət istiqaməti üzrə yönələn və uzunluğu vahidə bərabər olan $\vec{i} = \langle 1;0;0\rangle$, $\vec{j} = \langle 0;1;0\rangle$ və $\vec{k} = \langle 0;0;1\rangle$ vektorlarına **ort vektorlar** deyilir. Aydındır ki, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektorları komplanar deyil.

Müxtəlif koordinat sistemlərində ort vektorlar



a) b) $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ (c) (d) $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

Müstəvi və fəzada istənilən yer vektorunu ort vektorlarla ifadə etmək olar. Müstəvidə A $(x; y)$ nöqtəsinə uyğun yer vektoru ort vektorlarla $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ kimi, fəzada A $(x; y; z)$ nöqtəsinə uyğun yer vektoru isə $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ kimi ifadə edilir və bu yazılış da vektorun komponentlərlə yazılışı adlanır. Burada x, y, z ədədləri A nöqtəsinin koordinatlarıdır.

Teorem. İstənilən $\vec{a}\langle a_1; a_2; a_3\rangle$ vektoru $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ort vektorları üzrə yeganə ayrılışa malikdir və $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$ bərabərliyi doğrudur.

Nümunə 2. Müstəvi koordinat sistemində başlanğıc nöqtəsi (2; –5), son nöqtəsi isə (1;–3) olan $\vec{a}$ vektorunu ort vektorlarla ifadə edin.
Həlli: $\vec{a} = \langle 1-2; -3-(-5)\rangle = \langle -1; 2\rangle$ olduğundan, $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ alarıq.

Nümunə 3. $\vec{a} = \langle -3;2;7\rangle$ vektorunun ort vektorlar üzrə ayrılışını yazın.
Həlli: Ayrılış haqqında teoremə görə yaza bilərik:
$\vec{a} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}$

Nümunə 4. a) P (1; –3; 2) nöqtəsinə uyğun yer vektorunu $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şəklində yazın.
b) $\vec{r} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ vektorunu $\vec{r}\langle x; y; z\rangle$ şəklində, komponentləri ilə yazın
Həlli: a) Yer vektorunun başlanğıc nöqtəsi O(0;0;0) koordinat başlanğıcındadır. Onda $\overrightarrow{OP} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ olar.
b) $\vec{r} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} = 3\langle 1;0;0\rangle - 2\langle 0;1;0\rangle - \langle 0;0;1\rangle = \langle 3;0;0\rangle - \langle 0;2;0\rangle - \langle 0;0;1\rangle =$
$= \langle 3;-2;-1\rangle$

Nümunə 5. $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ və $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ vektorlarının cəmini və fərqini tapın.

Həlli: $\vec{a} + \vec{b} = (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) + (-2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$
$\vec{a} - \vec{b} = (3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) - (-2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}) = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$

Öyrənmə tapşırıqları

12. P nöqtəsinin koordinatlarına görə $\overrightarrow{OP}$ yer vektorunu $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ şəklində yazın.

a) (1; 3;–1) b) (2; –1; 0) c) (–3; 2;–2) d) (–4; 0;–3)

13. $\overrightarrow{OP}$ yer vektorunun verilən ifadələrinə görə P nöqtəsinin koordinatlarını yazın.

a) $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ b) $-\vec{i} - 2\vec{k}$ c) $3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ d) $-\vec{i} - 4\vec{j}$

14. Vektorun uzunluğunu tapın.
a) $\vec{r} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ b) $\overrightarrow{OP} = \langle -3; 1; 2\rangle$ c) $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

15. Vektorların bərabər olduğunu bilərək, məchulları tapın.
a) $\vec{a} = 2\vec{i} + y\vec{k}$ və $\vec{b} = x\vec{i} - 3\vec{k}$ b) $\vec{a} = x\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ və $\vec{b} = \langle -3; y; z\rangle$

16. Hər bir vektor istiqamətində olan vahid vektoru yazın. Cavabınızı yoxlayın.

a) $\overrightarrow{OR} = \langle 3; 0; 1\rangle$ b) $\overrightarrow{OP} = \langle -3; 1; 2\rangle$ c) $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

17. $\vec{u}$ vektoru istiqamətində olub, uzunluğu verilən ədədə bərabər olan $\vec{v}$ vektorunu komponentləri ilə yazın.

a) $\vec{u} = \langle 0;3;\ 0\rangle$, $|\vec{v}| = 6$ c) $\vec{u} = \langle 1;1\rangle$, $|\vec{v}| = 5$
b) $\vec{u} = \langle \sqrt{3};3;\ 2\rangle$, $|\vec{v}| = 2$ d) $\vec{u} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$, $|\vec{v}| = 2$

18. $\vec{a} = -3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ və $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ olduğuna görə aşağıdakı vektorların ort vektorlar üzrə ayrılışını yazın.

a) $2\vec{a} - 3\vec{b}$ b) $3\vec{a} + \vec{b}$ c) $-2\vec{a} - 4\vec{b}$

19. Vektorun uzunluğunu tapın.

a) $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ b) $\vec{v} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$ c) $\vec{l} = 7\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$

20. Fəzada $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ və $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ vektorları verilmişdir. Aşağıdakı vektorların hər birinin $\vec{a}$ və ya $\vec{b}$ vektoruna kollinear olub-olmadığını müəyyən edin.

1) $-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ 2) $5\vec{i} - 10\vec{j} + 15\vec{k}$
3) $4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ 4) $6\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$
5) $-2\vec{i} + 4\vec{j} - 6\vec{k}$ 6) $-4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$

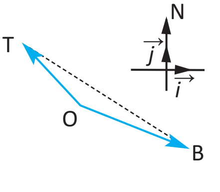
21. $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ və $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$ radius-vektorlardır. Aşağıdakı vektorların ort vektorlar üzrə ayrılışını yazın.

a) $\overrightarrow{AO}$ b) $\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB}$ c) $4\overrightarrow{BO}$ d) $-2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$

22. Dilbər deyir ki, $\langle 1;\ 1;\ 1\rangle$ vahid vektordur, $\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\rangle$ isə vahid vektor deyil. Siz Dilbərin fikrinin düz və ya səhv olduğunu necə əsaslandıra bilərsiniz?

23. İki vektorun cəminin uzunluğu onların uzunluqlarının cəmindən böyük deyil. Bu təklifi riyazi olaraq yazın və doğruluğunu əsaslandırın.
Göstəriş: Üçbucaq bərabərsizliyindən istifadə edin.

24. Yüksəklikdə dayanmış müşahidəçiyə görə yüksək gərginlikli işıq transformatoru 4 km qərb, 3 km şimal, yeni tikilən bina isə 2 km cənub, 5 km şərq istiqamətində olan nöqtədə yerləşir. Müşahidəçinin dayandığı yeri koordinat başlanğıcı qəbul edin.

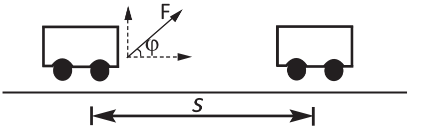


a) Transformatorun $\overrightarrow{OT}$ və binanın $\overrightarrow{OB}$ radius vektorunu müəyyən edin. b) Binanın transformatora nəzərən yerini müəyyən edən $\overrightarrow{TB}$ vektorunu yazın.

Məsələ. Araba düzxətli yolda meyil bucağı φ olan $\vec{F}$ qüvvəsinin təsiri ilə $\vec{s}$ yerdəyişməsini etmişdir. Görülən işi hesablayın.

Həlli. $\vec{F}$ qüvvəsinin qiyməti F olarsa, $\vec{F} = \langle F\cos\varphi;\ F\sin\varphi\rangle$. $\vec{F}$ qüvvəsinin şaquli komponentinin üfüqi yolda gördüyü iş sıfıra bərabərdir. $\vec{F}$ qüvvəsinin üfüqi komponentinin s yolunda gördüyü iş isə

$$A = F \cdot s \cdot \cos\varphi \text{ olar.}$$



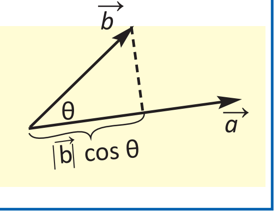
Yükün s məsafəsinə yerdəyişməsi zamanı görülən iş yerdəyişmə vektorunun uzunluğu ilə $\vec{F}$ qüvvə vektorunun hərəkət istiqamətində yönəlmiş komponentinin qiyməti ($|\vec{F}|\cos\varphi$) hasilinə bərabərdir: $A = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\varphi$.

İş skalyar kəmiyyətdir, lakin onun qiyməti tətbiq edilən qüvvə ilə yerdəyişmə vektorları arasındakı bucağın qiymətindən də asılıdır.

İki vektorun skalyar hasili

Sıfır olmayan iki vektor arasındakı bucaq onlara bərabər olmaqla eyni nöqtədən ayrılmış vektorlar arasındakı bucağa deyilir. Aydındır ki, iki vektor arasındakı θ bucağının qiyməti $0 \le \theta \le \pi$ aralığındadır.

Sıfır olmayan iki $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorunun skalyar hasili bu vektorların modulları ilə onlar arasındakı bucağın kosinusu hasilinə deyilir və $\vec{a} \cdot \vec{b}$ kimi yazılır.



Deməli, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$

Skalyar hasilin xassələri

- İstənilən $\vec{a}$ vektoru üçün $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, yəni vektorun özünə skalyar hasili onun uzunluğunun kvadratına bərabərdir.

- **Skalyar hasilin yerdəyişmə xassəsi.** İstənilən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları üçün
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

- **Skalyar hasilin qruplaşdırma xassəsi.** İstənilən $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorları və m həqiqi ədədi üçün
$$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (m\vec{b})$$

- **Skalyar hasilin paylama xassəsi:**

1) İstənilən $\vec{a}, \vec{b}$ vektorları və m həqiqi ədədi üçün $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

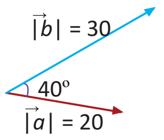
2) İstənilən $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorları üçün $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$

Xüsusi halda, ort vektorların skalyar hasili üçün alarıq:

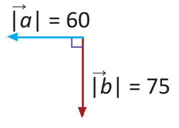
$$\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0.$$

Nümunə 1. Şəkildə verilənlərə görə $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasilini tapın.

a)



b)



Həlli: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$

a) $|\vec{a}|=20$ vahid, $|\vec{b}|=30$ vahid, $\theta=40°$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=20\cdot 30\cos 40°\approx 459{,}6$$

b) $|\vec{a}|=60$ vahid, $|\vec{b}|=75$ vahid, $\theta=90°$

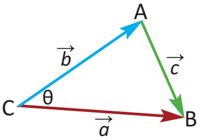
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=60\cdot 75\cos 90°=60\cdot 75\cdot 0=0$$

Nümunə 2. $(\vec{r}+\vec{s})\cdot(\vec{r}-\vec{s})$ ifadəsini skalyar hasilin xassələrindən istifadə etməklə sadələşdirin.

Həlli: $(\vec{r}+\vec{s})\cdot(\vec{r}-\vec{s})=(\vec{r}+\vec{s})\cdot\vec{r}+(\vec{r}+\vec{s})\cdot(-\vec{s})=\vec{r}\cdot\vec{r}+\vec{s}\cdot\vec{r}+\vec{r}\cdot(-\vec{s})+\vec{s}\cdot(-\vec{s})=$

$$=|\vec{r}|^2+\vec{s}\cdot\vec{r}-\vec{r}\cdot\vec{s}-|\vec{s}|^2=|\vec{r}|^2-|\vec{s}|^2$$

Müstəvi Dekart koordinat sistemində iki vektorun skalyar hasilini koordinatları ilə ifadə edək.



Tutaq ki, $\vec{a}\langle a_1;\, a_2\rangle$ və $\vec{b}\langle b_1;\, b_2\rangle$ vektorları verilmişdir.
İki vektorun skalyar hasilinin tərifinə görə

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ABC üçbucağından $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\langle a_1-b_1;\, a_2-b_2\rangle$

Kosinuslar teoreminə görə

$|\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$. Buradan alırıq:

$$2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2,\qquad |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2}{2},$$

$$\vec{a}\,\vec{b}=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{c}|^2}{2}=\frac{a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2-[(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2]}{2}$$

$$=\frac{\cancel{a_1^2}+\cancel{a_2^2}+\cancel{b_1^2}+\cancel{b_2^2}-\cancel{a_1^2}+2a_1b_1-\cancel{b_1^2}-\cancel{a_2^2}+2a_2b_2-\cancel{b_2^2}}{2}$$

$$=\frac{2a_1b_1+2a_2b_2}{2}=a_1b_1+a_2b_2.$$ Deməli,

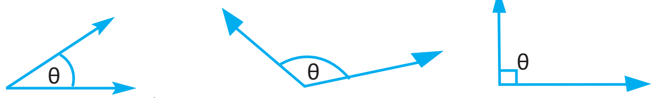
$$\vec{a}\,\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2.$$

Üçölçülü Dekart koordinat sistemində $\vec{a}\langle a_1;\, a_2;\, a_3\rangle$ və $\vec{b}\langle b_1;\, b_2;\, b_3\rangle$ vektorlarının skalyar hasili oxşar qayda ilə müəyyən edilir:

$$\vec{a}\,\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

İki vektor arasındakı bucaq

Sıfır olmayan iki vektor arasındakı bucaq $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ münasibətindən tapılır, burada $0 \le \theta \le \pi$.



Nümunə. $\vec{a} = \langle -3; 4\rangle$ və $\vec{b} = \langle 9; 12\rangle$ vektorları arasındakı bucağın kosinusunu tapın.

Həlli: $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{-3\cdot 9 + 4\cdot 12}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{9^2+12^2}} = \dfrac{-27+48}{5\cdot 15} = \dfrac{21}{75} = \dfrac{7}{25}$

Nəticə: Sıfır olmayan iki vektor yalnız skalyar hasili sıfır olduqda perpendikulyardır: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Nümunə. k-nın hansı qiymətində $\vec{a} = \langle 3; 2\rangle$ və $\vec{b} = \langle k; 6\rangle$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyardır?

Həlli: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ olmalıdır: $3\cdot k + 2\cdot 6 = 0$, buradan $k = -4$ olduqda $\vec{a} \perp \vec{b}$

Öyrənmə tapşırıqları

11. Vektorlar arasındakı bucaq neçə dərəcədir?

a) $\vec{a}\langle -3; 6\rangle$ və $\vec{b}\langle 4; 2\rangle$
b) $\vec{m}\langle 1; 3\rangle$ və $\vec{n}\langle 2; 1\rangle$
c) $\vec{e}\langle 2; 3; 0\rangle$ və $\vec{f}\langle 9; -6; 2\rangle$
d) $\vec{t}\langle -2; -1; 2\rangle$ və $\vec{s}\langle 2; 1; -2\rangle$

12. 1) Aralarındakı bucağı tapmaqla $\vec{u}\langle 6; -2; -5\rangle$ və $\vec{v}\langle -12; 4; 10\rangle$ vektorlarının kollinear olduğunu göstərin.

2) k-nın elə qiymətini tapın ki, $\vec{u}\langle 0; 1; 1\rangle$ və $\vec{v}\langle k; 2; 1\rangle$ vektorları arasındakı bucaq 45° olsun.

13. a) $\vec{a}\langle 4; 3\rangle$ vektoruna perpendikulyar və uzunluğu 10 olan vektoru komponentləri ilə yazın.
b) k-nın hansı qiymətində $\vec{u}\langle 2; 5; -3\rangle$ və $\vec{v}\langle k; 4; 2\rangle$ vektorları perpendikulyardır?

14. A(3; –1; –2), B(–1; 1; 2), C(1; 1; –3), D(3; –1; –3) nöqtələri verilmişdir. $\overrightarrow{AB}$ və $\overrightarrow{CD}$ vektorları arasındakı bucağı tapın.

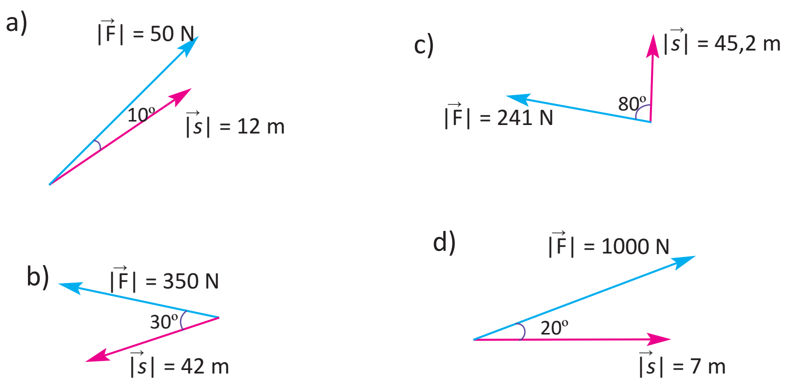
15. Üçbucaqların düzbucaqlı üçbucaq olub-olmadıqlarını yoxlayın. Düz bucağın adını yazın. Məsələni müxtəlif üsullarla həll edin.
a) Təpələri A(3; 1), B(–2; 3) və C(5; 6) nöqtələri olan ΔABC
b) Təpələri S(4; 6), T(–3; 7) və U(–5; –4) nöqtələri olan ΔSTU

16. a) Təpə nöqtələri A(5; 1), B(4; 7), və C(–7; –1) olan üçbucağın bucaqlarını tapın.
b) Təpə nöqtələri A(1; 2; –2), B(3; 4; –1), C(1; 5; 1) olan üçbucağın bucaqlarını tapın.

6. Verilən $\vec{F}$ qüvvəsinin (nyutonla) təsiri altında cismin $\vec{s}$ yerdəyişməsi zamanı (metrlə) gördüyü işi hesablayın.

a) $\vec{F}\langle 5; 2\rangle$, $\vec{s}\langle 7; 4\rangle$ b) $\vec{F}\langle 100; 400\rangle$, $\vec{s}\langle 12; 27\rangle$

7. Şəkildə verilən məlumatlara görə $\vec{F}$ qüvvəsinin $\vec{s}$ yerdəyişmə vektoru istiqamətində gördüyü işi hesablayın.



8. $\vec{a}\langle 3; 4\rangle$ vektoru istiqamətində 20 N qüvvə $(\vec{F})$ tətbiq edilmişdir.

a) $\vec{a}$ vektoru istiqamətində olan vahid vektoru yazın.

b) a bəndinin həllindən istifadə edərək $\vec{F}$ qüvvəsini komponentləri ilə yazın.

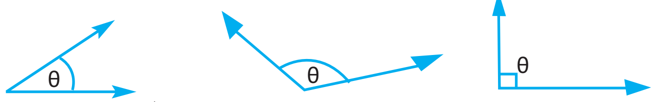
c) Bu qüvvənin təsiri altında obyektin (0; 0) nöqtəsindən (6; 8) nöqtəsinə yerdəyişməsi (metrlə) zamanı görülən işi tapın.

9. Konveyer xətti dayandığı üçün işçi onun üzərindəki qutunu meyil bucağı 30° olan 50 N qüvvə ilə dartaraq (−3; 0) nöqtəsindən (3; 0) nöqtəsinə gətirdi. Konveyer xəttinin uzunluğunun metrlə ölçüldüyünü nəzərə almaqla görülən işi tapın.

10. Meyil bucağı 20° olan qüvvə ilə tokar dəzgahının yerini üfüqi istiqamətdə 8 m dəyişməklə görülən iş 150 Coula bərabərdir. Tətbiq olunan qüvvənin qiymətini tapın.

İki vektor arasındakı bucaq

Sıfır olmayan iki vektor arasındakı bucaq $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ münasibətindən tapılır, burada $0 \le \theta \le \pi$.



Nümunə. $\vec{a} = \langle -3;\ 4\rangle$ və $\vec{b} = \langle 9;\ 12\rangle$ vektorları arasındakı bucağın kosinusunu tapın.

Həlli: $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{-3\cdot 9 + 4\cdot 12}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\cdot\sqrt{9^2+12^2}} = \dfrac{-27+48}{5\cdot 15} = \dfrac{21}{75} = \dfrac{7}{25}$

Nəticə: Sıfır olmayan iki vektor yalnız skalyar hasili sıfır olduqda perpendikulyardır: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Nümunə. k-nın hansı qiymətində $\vec{a} = \langle 3;4\rangle$ və $\vec{b} = \langle k\ ;12\rangle$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyardır?

Həlli: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ olmalıdır: $3\cdot k + 2\cdot 6 = 0$, buradan $k = -4$ olduqda $\vec{a} \perp \vec{b}$

Öyrənmə tapşırıqları

11. Vektorlar arasındakı bucaq neçə dərəcədir?

a) $\vec{a}\langle -3;\ 6\rangle$ və $\vec{b}\langle 4;\ 2\rangle$
b) $\vec{m}\langle 1;\ 3\rangle$ və $\vec{n}\langle 2;\ 1\rangle$
c) $\vec{e}\langle 2;\ 3;\ 0\rangle$ və $\vec{f}\langle 9;\ -6;\ 2\rangle$
d) $\vec{t}\langle -2;\ -1;\ 2\rangle$ və $\vec{s}\langle 2;\ 1;\ -2\rangle$

12. 1) Aralarındakı bucağı tapmaqla $\vec{u}\langle 6;\ -2;\ -5\rangle$ və $\vec{v}\langle -12;\ 4;\ 10\rangle$ vektorlarının kollinear olduğunu göstərin.

2) k-nın elə qiymətini tapın ki, $\vec{u}\langle 0;\ 1;\ 1\rangle$ və $\vec{v}\langle k;\ 2;\ 1\rangle$ vektorları arasındakı bucaq 45° olsun.

13. a) $\vec{a}\langle 4;\ 3\rangle$ vektoruna perpendikulyar və uzunluğu 10 olan vektoru komponentləri ilə yazın.

b) k-nın hansı qiymətində $\vec{u}\langle 2;\ 5;\ -3\rangle$ və $\vec{v}\langle k;\ 4;\ 2\rangle$ vektorları perpendikulyardır?

14. A(3; –1; –2), B(–1; 1; 2), C(1; 1; –3), D(3; –1; –3) nöqtələri verilmişdir. $\overrightarrow{AB}$ və $\overrightarrow{CD}$ vektorları arasındakı bucağı tapın.

15. Üçbucaqların düzbucaqlı üçbucaq olub-olmadıqlarını yoxlayın. Düz bucağın adını yazın. Məsələni müxtəlif üsullarla həll edin.

a) Təpələri A(3; 1), B(–2; 3) və C(5; 6) nöqtələri olan ΔABC
b) Təpələri S(4; 6), T(–3; 7) və U(–5; –4) nöqtələri olan ΔSTU

16. a) Təpə nöqtələri A(5; 1), B(4; 7), və C(–7; –1) olan üçbucağın bucaqlarını tapın.

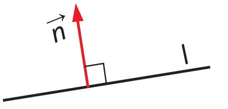
b) Təpə nöqtələri A(1; 2; –2), B(3; 4; –1), C(1; 5; 1) olan üçbucağın bucaqlarını tapın.

Düz xəttin tənliyi

Müstəvi koordinat sistemində düz xəttin tənliyi $ax + by + c = 0$ şəklində ifadə edilir. Bu tənliyə düz xəttin ümumi tənliyi də deyilir.

Düz xəttə perpendikulyar olan vektor düz xəttin **normal vektoru** və ya **normalı** adlanır.

Normalı $\langle a;b\rangle$ olan düz xəttin ümumi tənliyinin $ax + by + c = 0$ şəklində olduğunu göstərək.



$P_0(x_0; y_0)$ düz xətt üzərində verilmiş nöqtə, $P(x; y)$ düz xətt üzərində P_0-dan fərqli ixtiyari nöqtə, $\vec{n}\langle a;b\rangle$ isə düz xəttin normal vektoru olsun.

$\overrightarrow{P_0P}\langle x - x_0; y - y_0\rangle$ və $\vec{n}\langle a;b\rangle$ vektorları perpendikulyardır. Onda

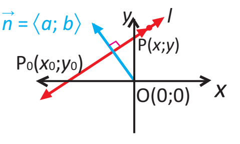
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P} = 0.$$

Buradan $\langle a;b\rangle \cdot \langle x - x_0; y - y_0\rangle = 0,$

$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0,$$

$$ax + by - by_0 - ax_0 = 0 \text{ alarıq.}$$

$-by_0 - ax_0 = c$ kimi işarə etsək,

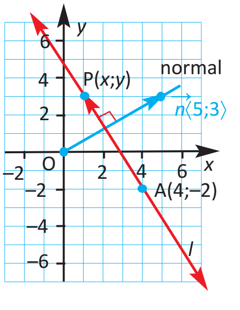


düz xəttin $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ ümumi tənliyini alarıq. Burada $a^2 + b^2 > 0$.

Xüsusi hallar:

- $a = 0,\ b \neq 0.$ $\quad y = -\dfrac{c}{b}$ *absis oxuna paralel düz xəttin tənliyi*
- $a \neq 0,\ b = 0.$ $\quad x = -\dfrac{c}{a}$ *ordinat oxuna paralel düz xəttin tənliyi*
- $c = 0.$ $\quad ax + by = 0$ *koordinat başlanğıcından keçən düz xəttin tənliyi*

Nümunə 1. A(4; –2) nöqtəsindən keçən və normalı $\vec{n} = \langle 5; 3\rangle$ olan l düz xəttinin tənliyini yazın.



Həlli: Koordinat sistemində $\vec{n} = \langle 5; 3\rangle$ normal vektorunu qurub A(4; –2) nöqtəsindən keçən və normala perpendikulyar düz xətti çəkərək məsələnin həllini qrafik təsvir edək. İndi isə tələb olunan tənliyi yazaq.

1-ci üsul.

Tutaq ki, $P(x;y)$ nöqtəsi l düz xətti üzərində olan və verilən A nöqtəsindən fərqli nöqtədir. Onda $\overrightarrow{AP}$ vektoru l düz xəttinə kollineardır və $\overrightarrow{AP} = \langle x - 4; y - (-2)\rangle = \langle x - 4; y + 2\rangle$.

$\vec{n}$ və $\overrightarrow{AP}$ vektorları perpendikulyar olduqlarından $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP} = 0$. Buradan

$\langle 5; 3\rangle \cdot \langle x - 4; y + 2\rangle = 0;\quad 5(x - 4) + 3(y + 2) = 0;\quad 5x + 3y - 14 = 0$ alarıq.

2-ci üsul.

$\vec{n} = \langle 5;3\rangle$ normalına görə düz xəttin $ax + by + c = 0$ tənliyini $5x + 3y + c = 0$ kimi yaza bilərik. A(4; –2) nöqtəsi bu düz xəttin üzərində olduğundan $5\cdot 4 + 3\cdot(-2) + c = 0$, $c = -14$ tapılır və düz xəttin tənliyi $5x + 3y - 14 = 0$ olur.

Nümunə 2. $x - y + 1 = 0$ və $2x + y - 3 = 0$ tənlikləri ilə verilmiş düz xətlər arasındakı bucağı tapın.
Həlli: Düz xətlər arasındakı bucağı onların normalları arasındakı bucaqla müəyyən etmək olar.
$\vec{n_1}\langle 1;-1\rangle$ və $\vec{n_2}\langle 2;1\rangle$ normal vektorları arasındakı θ bucağı üçün alırıq:

$$\cos\theta = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|} = \frac{1\cdot 2 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}3162.$$ Buradan $\theta \approx 72°$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Normalı $\vec{n}$ olan və P_0 nöqtəsindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.

a) $P_0(-2;\ 5)$, $\vec{n}\langle 4;\ 3\rangle$ b) $P_0(3;\ -4)$, $\vec{n}\langle 2;\ -3\rangle$

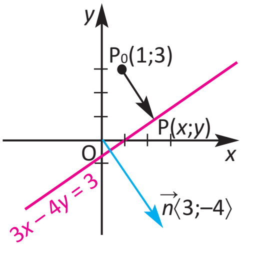
2. $2x - 4y + 5 = 0$ düz xəttinə perpendikulyar olan və $P(-1;\ 1)$ nöqtəsindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.

3. $x - 3y + 6 = 0$ və $x + 2y - 7 = 0$ düz xətləri verilmişdir.
a) Bu düz xətlərin qrafik təsvirini çəkin.
b) Onlar arasındakı iti və kor bucağı tapın.

4. Düz xətlər arasındakı bucaqları tapın.

a) $y = 0{,}5x + 6$ və $y = -0{,}75x - 1$ b) $2x - y + 3 = 0$ və $x + 2y - 1 = 0$

5. Nümunəni araşdırın.Verilmiş nöqtədən tənliyi verilmiş l düz xəttinə qədər məsafəni tapın.
a) $P_0(1;3)$ l: $3x - 4y = 3$ b) $P_0(2;1)$ l: $4x + 3y - 7 = 0$
c) $P_0(0;2)$ l: $x - y = 4$ d) $P_0(3;0)$ l: $x + 2y = 0$



Nümunə. $P_0(1;3)$ nöqtəsindən $3x - 4y = 3$ düz xəttinə qədər məsafəni tapın.
Həlli: $P_0(1;3)$ nöqtəsindən verilmiş düz xəttə çəkilmiş perpendikulyarın oturacağı $P(x;y)$ olsun.
$\overrightarrow{P_0P}\langle x-1;y-3\rangle$ və $\vec{n}\langle 3;-4\rangle$ vektorları kollinear olduğundan elə k ədədi var ki, $\overrightarrow{P_0P} = k\cdot\vec{n}$ və ya $\langle x-1;\ y-3\rangle = \langle 3k;\ -4k\rangle$ olur. Uyğun komponentlərin bərabərliyindən $x = 3k + 1$, $y = -4k + 3$ alırıq.
P nöqtəsinin x və y koordinatları $3x - 4y = 3$ tənliyini ödəməlidir:

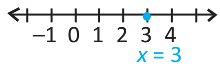
$$3(3k + 1) - 4(-4k + 3) = 3$$

Buradan $k = \frac{12}{25}$ tapılır. Onda $|\overrightarrow{P_0P}| = |k|\cdot|\vec{n}| = \frac{12}{25}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2} = \frac{12}{25}\cdot 5 = 2{,}4$

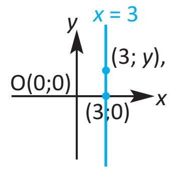
olur, yəni axtarılan məsafə 2,4 vahiddir.

Araşdırma. Eyni tənlik, məsələn $x = 3$ tənliyi, birölçülü, ikiölçülü və üçölçülü koordinat sistemində hansı nöqtələr çoxluğunu müəyyən edir?

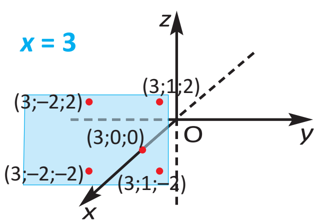
1. Birölçülü koordinat sistemində, yəni ədəd oxu üzərində, $x = 3$ tənliyinə bir nöqtə uyğundur.

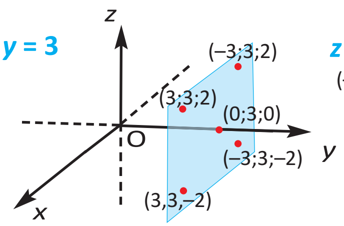


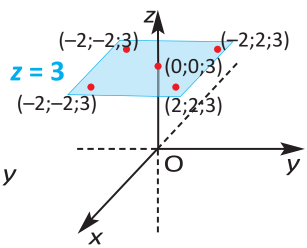
2. İkiölçülü koordinat sistemində $x = 3$, yaxud $x + 0 \cdot y = 3$ tənliyini koordinatları $(3; y)$ $(y \in R)$ kimi olan bütün nöqtələr ödəyir. Bu nöqtələr çoxluğu isə y oxuna paralel olan düz xətdir.



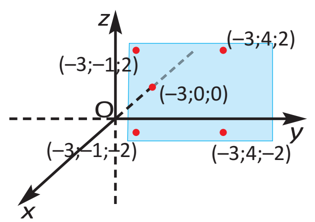
3. Üçölçülü koordinat sistemində $x = 3$, yaxud $x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 3$ tənliyini koordinatları $(3; y; z)$ $(y, z \in R)$ kimi olan bütün nöqtələr ödəyir. Bu nöqtələr çoxluğu isə Oyz müstəvisinə paralel olan müstəvidir. Analoji olaraq $y = 3$ və $z = 3$ tənlikləri uyğun olaraq Oxz və Oxy müstəvilərinə paralel müstəvilərdir.

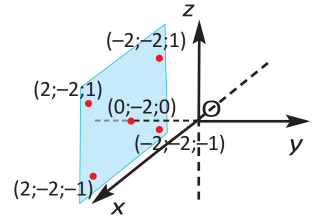


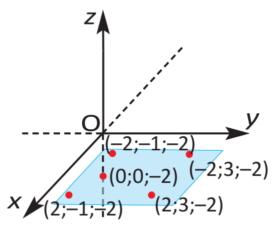




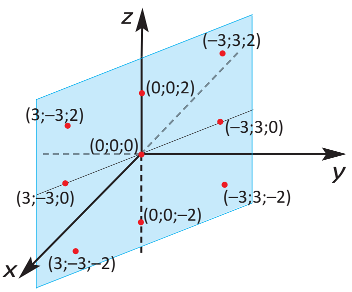
4. Üçölçülü koordinat sistemində $x = –3$, $y = –2$ və $z = –2$ tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğunu təqdim edin.

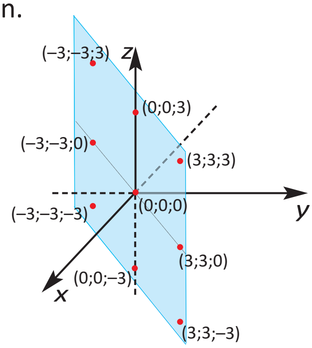






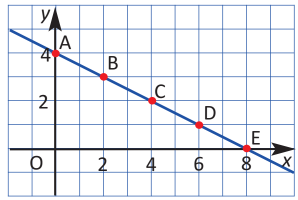
5. $x + y = 0$ və $x - y = 0$ tənlikləri ilə müstəvi üzərində qeyd edilmiş nöqtələrin koordinatlarını əlaqələndirin. Müstəviləri təqdim edin.

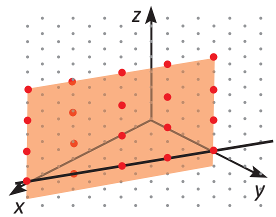




İkiölçülü koordinat sistemində düz xəttin tənliyi $ax + by + c = 0$ şəklindədir.

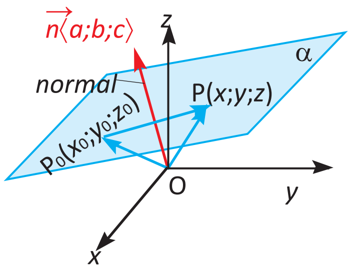
Məsələn, $x + 2y - 8 = 0$ tənliyi müstəvidə düz xətt müəyyən edir və A(0; 4), B(2; 3), C(4; 2), D(6; 1), E(8; 0) və s. nöqtələri bu düz xəttin üzərindədir. Bu tənliyi üçölçülü koordinat sistemində $x + 2y - 0 \cdot z = 8$ şəklində yazaq. Burada z-in əmsalı sıfır olduğundan, z applikatı istənilən qiyməti ala bilər. Yəni istənilən z ədədi üçün üçölçülü koordinat sistemində A(0; 4; z), B(2; 3; z), C(4; 2; z), D(6; 1; z), və E(8; 0; z) nöqtələrinin koordinatları $x + 2y - 0 \cdot z = 8$ tənliyini ödəyəcək. Üçölçülü koordinat sistemində bu cür bütün nöqtələri qursaq, z oxuna paralel müstəvi alınar. Ümumiyyətlə, üçölçülü koordinat sistemində $ax + by + cz + d = 0$ tənliyi müstəvini müəyyən edir.





Müstəvi müxtəlif üsullarla müəyyən oluna bilər.
- kollinear olmayan üç nöqtə ilə
- düz xətt və ona aid olmayan nöqtə ilə
- iki kəsişən düz xətlə
- iki paralel düz xətlə
- bir nöqtə və bu nöqtədə verilən istiqamətdə çəkilmiş perpendikulyarla

Müstəvini müəyyən etməyin yuxarıda göstərilən müxtəlif yolların sonuncusundan istifadə etməklə müstəvinin tənliyinin $ax + by + cz + d = 0$ şəklində olduğunu göstərək. Müstəviyə perpendikulyar vektora onun **normalı** deyilir. Tutaq ki, α müstəvisi və onun üzərində $P_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nöqtəsi verilmişdir və $\vec{n}\langle a; b; c\rangle$ müstəviyə çəkilmiş normal vektordur. Müstəvi üzərində $P_0(x_0; y_0; z_0)$-dan fərqli ixtiyari $P(x; y; z)$ nöqtəsi götürək. Müstəviyə perpendikulyar düz xətt müstəvi üzərindəki istənilən düz xəttə pependikulyardır. Deməli, $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$ olacaq. Buradan $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ olduğunu yaza bilərik.



$\vec{n}\langle a; b; c\rangle$ və $\overrightarrow{P_0P}\ \langle x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\rangle$ olduğunu nəzərə alsaq:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

$ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ işarə etsək, müstəvinin

$ax + by + cz = d$ şəklində tənliyini alarıq.

Diqqət edin! Müstəvinin tənliyində üç dəyişənin əmsalları müstəvinin normalının komponentləridir və $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Nümunə 1. Normal vektoru $\vec{n}\langle -1; 3; 4\rangle$ olan müstəvi A(1; 2; 3) nöqtəsindən keçir. Bu müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli: Tapşırığı iki üsulla həll etmək olar.

1-ci üsul. Müstəvi üzərində ixtiyari P(x; y; z) nöqtəsi götürək və başlanğıcı A (1; 2; 3), sonu P (x; y; z) nöqtəsində olan vektoru komponentləri ilə yazaq:

$$\overrightarrow{AP} = \langle x-1; y-2; z-3\rangle$$

Normal vektor $\vec{n}\langle -1; 3; 4\rangle$ olduğuna görə $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP} = 0$, yaxud

$\langle -1; 3; 4\rangle \cdot \langle x-1; y-2; z-3\rangle = 0$ ödənməlidir. Buradan

$-1(x-1) + 3(y-2) + 4(z-3) = 0,$

$-x + 1 + 3y - 6 + 4z - 12 = 0,$

$-x + 3y + 4z - 17 = 0.$

Bu tənliyin hər iki tərəfini (–1) -ə vursaq, müstəvinin tənliyi

$x - 3y - 4z + 17 = 0$ olar.

2-ci üsul. Müstəvinin tənliyinin $ax + by + cz + d = 0$ şəklində və onun normalının isə $\vec{n} = \langle a; b; c\rangle$ olduğunu bilirik.

Deməli, $\vec{n}\langle -1; 3; 4\rangle$ normalına görə $a = -1$, $b = 3$, $c = 4$ olduğunu nəzərə alsaq, müstəvinin tənliyi $(-1)x + 3y + 4z + d = 0$ və ya $-x + 3y + 4z + d = 0$ olar. Bu tənlikdə müstəvi üzərində olan A nöqtəsinin (1; 2; 3) koordinatlarını yerinə yazsaq, d parametrini tapa bilərik:

$-x + 3y + 4z + d = 0,$

$-1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + d = 0;\ d = -17.$

Beləliklə, müstəvinin tənliyi

$-x + 3y + 4z - 17 = 0$ və ya $x - 3y - 4z + 17 = 0$ olar.

Nümunə 2. Müstəvi $x + 2y - z - 8 = 0$ tənliyi ilə verilmişdir.

a) A(1; 3; –1), B(3; 5; 1), C(–1; 3; 1) nöqtələrinin bu müstəvinin üzərində olub-olmadığını yoxlayın.

b) Müstəvinin x, y, z oxlarını kəsdiyi nöqtələrin koordinatlarını müəyyən edin.

c) Müstəvi üzərində yerləşən başqa bir nöqtənin koordinatlarını yazın.

Həlli:

a) Yoxlama:

A(1; 3;–1)	B(1; 5; 3)	C(1;3;–1)
$x + 2y - z - 8 = 0$	$x + 2y - z - 8 = 0$	$x + 2y - z - 8 = 0$
$1 + 2\cdot 3 + 1 - 8 = 0$	$1 + 2\cdot 5 - 3 - 8 = 0$	$-1 + 2\cdot 3 - 1 - 8 = -4$
Üzərindədir	Üzərindədir	Üzərində deyil

b) Müstəvinin x, y, z oxları ilə kəsişmə nöqtələrinin koordinatları:

x oxu ilə kəsişmədə y və z koordinatları sıfıra bərabərdir.

$x = 8$

(8; 0; 0)

y oxu ilə kəsişmədə x və z koordinatları sıfıra bərabərdir.

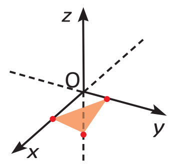
$y = 4$

(0; 4; 0)

z oxu ilə kəsişmədə x və y koordinatları sıfıra bərabərdir.

$z = -8$

(0; 0; –8)



c) Verilən müstəvi üzərində başqa bir nöqtənin koordinatlarını müəyyən etmək üçün dəyişənlərdən ikisinə ixtiyari qiymətlər verin və üçüncü dəyişəni tapın.

Məsələn, $x = 4$, $y = -5$ olduqda $4 + 2(-5) - z - 8 = 0$, $z = -14$ tapılır.
Deməli, (4; –5; –14) nöqtəsi də verilən müstəvi üzərindədir.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilən nöqtələrin $4x + 3y - 5z = 10$ müstəvisi üzərində yerləşib-yerləşmədiyini yoxlayın.

a) A(1; 2; 0) b) B(1,2; –2,4; 6,2) c) C(–7; 6; 4) d) D(–2; 1; –3)

2. Hər bir müstəvi üzərində yerləşən üç nöqtənin koordinatlarını yazın.

a) $x = 6$ b) $2x - 5y + z - 1 = 0$ c) $3x + 7y - 2z = 6$

3. Normalı $\vec{n}$ olan və P_0 nöqtəsindən keçən müstəvinin tənliyini yazın.

a) $P_0(2; 1; 3)$, $\vec{n}\langle 7; 1; 1\rangle$ b) $P_0(5; 1; 9)$, $\vec{n}\langle 1; 0; 0\rangle$
c) $P_0(0; 6; 2)$, $\vec{n}\langle 2; 0; -1\rangle$ d) $P_0(0; 0; 0)$, $\vec{n}\langle 2; 1; 4\rangle$

4. Normalı $\vec{n}\langle -12; 8; 10\rangle$ olan müstəvi koordinat başlanğıcından keçir. Bu müstəvinin tənliyini yazın.

5. Müstəvi $x - 7y - 18z = 0$ tənliyi ilə verilmişdir.
a) Müstəvinin normal vektorunu yazın.
b) Bu müstəvinin koordinat başlanğıcından keçdiyini əsaslandırın.
c) Bu müstəvi üzərində olan üç nöqtənin koordinatını yazın.

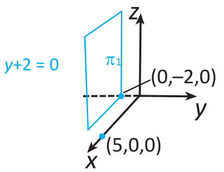
6. a) Oyz müstəvisinə paralel olub A(3;1;2) nöqtəsindən keçən müstəvinin tənliyini yazın.
b) B(2; 2; –1) nöqtəsindən və Ox oxundan keçən müstəvinin tənliyini yazın.

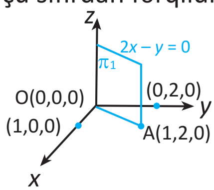
7. $M(1;\ 3;\ 1)$ və $N(2;\ –3;\ 0)$ nöqtələrini birləşdirən parçanın orta nöqtəsindən keçən və ona perpendikulyar olan müstəvinin tənliyini yazın.
$A(2;\ –1;\ 1)$ nöqtəsi bu müstəvinin üzərindədirmi?

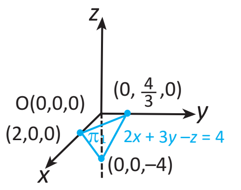
8. $B(1;\ 2;\ 3)$ nöqtəsindən keçən və normalı:
a) y oxuna paralel olan;
b) xy müstəvisinə perpendikulyar olan müstəvinin tənliyini yazın.

9. a) $A(1;\ –2;\ 3)$ nöqtəsindən keçən və $x + 2y - 3z - 6 = 0$ müstəvisinə paralel olan müstəvinin tənliyini yazın.
b) $A(1;\ 1;\ –2)$, $B(2;\ –1;\ –1)$ və $C(1;\ –2;\ 1)$ nöqtələrindən keçən müstəvinin tənliyini yazın.

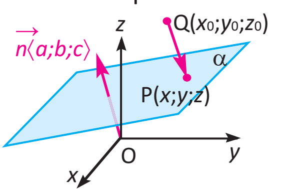
10. $Ax + By + Cz + D = 0$ tənliyində əmsalların verilən müxtəlif hallarına görə müstəvinin vəziyyəti haqqında fikirlərinizi yazın və yeni nümunələr çəkib göstərin.
a) A, B, C əmsallarının yalnız biri sıfırdan fərqlidir;
b) A, B, C əmsallarının yalnız ikisi sıfırdan fərqlidir;
c) A, B, C əmsallarının hər üçü sıfırdan fərqlidir.







11. Verilən Q nöqtəsindən verilən α müstəvisinə qədər məsafəni tapın.
a) $Q(1;\ 3;\ 3)$ α: $12x + 4y + 3z + 6 = 0$
b) $Q(2;\ –1;\ 1)$ α: $2x - 3y + 6z + 1 = 0$
c) $Q(2;\ 2;\ 2)$ α: $x + y + z = –1$
d) $Q(1;\ 2;\ 0)$ α: $3x - 4y - 5z - 2 = 0$



Nümunə. $Q(1;\ 3;\ 3)$ nöqtəsindən $12x + 4y + 3z + 6 = 0$ müstəvisinə qədər məsafəni tapın.
Həlli. $Q(1;\ 3;\ 3)$ nöqtəsindən müstəviyə çəkilmiş perpendikulyarın oturacağı $N(x;y;z)$ olsun. $\overrightarrow{QN}\langle x - 1;\ y - 3;\ z - 3\rangle$ və $\vec{n}\langle 12;\ 4;\ 3\rangle$ vektorları kollinear olduğundan elə k ədədi var ki, $\overrightarrow{QN} = k \cdot \vec{n}$ və ya
$\langle x - 1;\ y - 3;\ z - 3\rangle = \langle 12k;\ 4k;\ 3k\rangle$. Uyğun komponentlərin bərabərliyindən $x = 12k + 1$, $y = 4k + 3$, $z = 3k + 3$ olur. N nöqtəsinin x, y, z koordinatları müstəvinin tənliyini ödəyir: $12(12k + 1) + 4(4k + 3) + 3(3k + 3) + 6 = 0$.

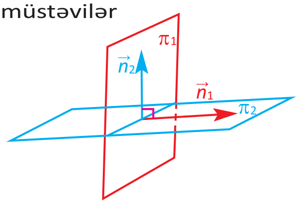
Buradan $k = -\dfrac{3}{13}$. Onda $|\overrightarrow{QN}| = |k| \cdot |\vec{n}| = \dfrac{3}{13} \cdot \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = 3$.

Bu o deməkdir ki, Q nöqtəsindən verilmiş müstəviyə qədər məsafə 3 vahiddir.

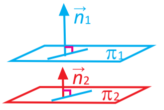
Əgər müstəvilər perpendikulyardırsa, onların normalları da perpendikulyardır və tərsinə: $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

Əgər müstəvilər paraleldirsə, onların normalları da paraleldir və tərsinə: $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

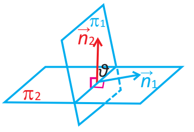
Perpendikulyar müstəvilər



Paralel müstəvilər



İki müstəvi arasındakı bucaq



Normalları $\vec{n}_1$ və $\vec{n}_2$ olan π_1 və π_2 müstəviləri arasındakı θ bucağı $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$ münasibətini ödəyir.

Nümunə. Tənliklərinə görə müstəvilərin perpendikulyar və ya paralel olmasının müəyyən edilməsi.

a) α və β müstəvilərinin tənlikləri uyğun olaraq α: $2x - 3y + z - 1 = 0$ və β: $4x - 3y - 17z = 0$ kimidir. Bu müstəvilərin perpendikulyar olduğunu əsaslandırın.

b) α və β müstəvilərin tənlikləri uyğun olaraq α: $2x - 2y - z + 3 = 0$ və β: $2x - 2y - z - 1 = 0$ kimidir. Bu müstəvilərin paralel olduğunu əsaslandırın.

Həlli: a) α və β müstəviləri perpendikulyardırsa, α müstəvisinin $\vec{n}_\alpha\langle 2;-3;1\rangle$ normalı ilə β müstəvisinin $\vec{n}_\beta\langle 4;-3;-7\rangle$ normalının skalyar hasili sıfıra bərabər olmalıdır. Yoxlayaq:

$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = \langle 2;-3;1\rangle \cdot \langle 4;-3;-7\rangle = 2 \cdot 4 - 3(-3) + 1(-17) = 8 + 9 - 17 = 0$

Deməli, α və β müstəviləri perpendikulyardır: $\alpha \perp \beta$

b) α və β müstəvilərinin normalları eynidir $\vec{n}_\alpha = \vec{n}_\beta = \langle 2;-2;-1\rangle$. Bu müstəvilər üçün D sabiti müxtəlif olduqlarından onlar üst-üstə düşməyən paralel müstəvilərdir.

Öyrənmə tapşırıqları

12. P (1; 2: –3) nöqtəsi normalı $\vec{n}\langle 3; 2; 5\rangle$ olan müstəvi üzərindədir.

a) Müstəvinin tənliyini yazın.

b) $2x + 2y - cz - 1 = 0$ tənliyində c əmsalını elə seçin ki, bu müstəvilər perpendikulyar olsun.

c) Hər hansı $\vec{a}$ vektorunun müstəviyə paralel olması üçün $\vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ olmalıdır. $\vec{a}\langle -4; 1; 2\rangle$ vektorunun bu müstəviyə paralel olub-olmadığını müəyyən edin.

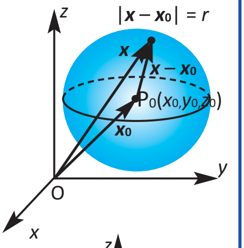
13. k-nın hansı qiymətində $4x + ky - 2z + 1 = 0$ və $2x + 4y - z + 4 = 0$ tənlikləri ilə verilən müstəvilər: a) paraleldir; b) perpendikulyardır?

14. $x - y - 2z + 3 = 0$ və $2x + y - z + 2 = 0$ müstəviləri arasındakı bucağı tapın.

Tərif. Verilmiş $P_0(x_0; y_0; z_0)$ nöqtəsindən r məsafədə olan bütün nöqtələr çoxluğuna **sfera** deyilir.
P_0 nöqtəsi **sferanın mərkəzi**, r isə **radius** adlanır.
$P(x; y; z)$ sfera üzərində hər hansı nöqtə olarsa, iki nöqtə arasındakı məsafə düsturuna görə yaza bilərik:

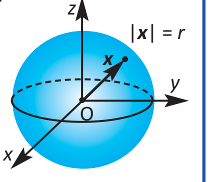
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Bu, mərkəzi P_0 və radiusu r olan sferanın tənliyidir.



Xüsusi halda, mərkəzi koordinat başlanğıcında, radiusu r olan sferanın tənliyi $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ olar.

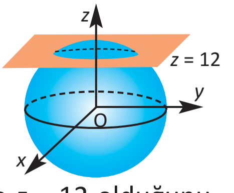
Şəkildən göründüyü kimi, bu sferanın Oxy koordinat müstəvisi ilə kəsişməsi onun böyük çevrəsidir.



Nümunə 1. Mərkəzi M(2; −1 ;1) nöqtəsində yerləşən və radiusu $r = 5$ olan sferanın tənliyini yazın.

Həlli: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 25$

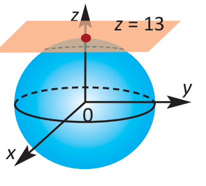
Nümunə 2. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ sferası ilə $z = 12$ müstəvisinin kəsişməsindən alınan fiquru təqdim edin.



Həlli: Sferanın radiusu $\sqrt{169} = 13$-dür. Sferanın tənliyində $z = 12$ olduğunu nəzərə alaq: $x^2 + y^2 + 12^2 = 169$; $x^2 + y^2 = 169 - 144 = 25$

Verilən sferanın $z = 12$ müstəvi ilə kəsişməsi, mərkəzi (0; 0; 12) nöqtəsində yerləşən, $r = 5$ radiuslu çevrədir.

Sfera ilə yalnız bir ortaq nöqtəsi olan müstəviyə **sferaya toxunan müstəvi** deyilir.
Məsələn, $z = 13$ müstəvisi $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ sferasına (0;0;13) nöqtəsində toxunur.
Sferaya toxunan müstəvi toxunma nöqtəsinə çəkilmiş radiusa perpendikulyardır.



Öyrənmə tapşırıqları

1. a) Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən, radiusu 4 olan sferanın tənliyini yazın.
b) Mərkəzi M(1; –2; 4) nöqtəsində yerləşən, radiusu 6 olan sferanın tənliyini yazın.

2. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 35$ tənliyi ilə verilmiş sferanın koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapın.

3. Mərkəzi (2; 3; –1) nöqtəsində olub (4; –1; 1) nöqtəsindən keçən sferanın tənliyini yazın.

4. A(1; 2; 3) nöqtəsindən $(x-9)^2 + (y+7)^2 + (z+9)^2 = 36$ tənliyi ilə verilmiş sferanın mərkəzinə qədər məsafəni tapın.

5. Aşağıda verilən tənliklərin sfera tənliyi olub-olmadığını yoxlayın. Sferadırsa, mərkəzini və radiusunu müəyyən edin.

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 10z + 37 = 0$

b) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 8z + 19 = 0$

c) $x^2 + y^2 - z^2 + 12x + 2y - 4z + 32 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4y + 4z - 44 = 0$

6. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 16y + 10z + 54 = 0$ tənliyi ilə verilmiş sferanın mərkəzini və radiusunu müəyyən edin. A(8; 0; 7) nöqtəsindən bu sferaya qədər məsafəni tapın.

7. A(3; 4; 0) nöqtəsində $z = 0$ müstəvisinə toxunub radiusu 7 olan sferanın tənliyini yazın.

8. Koordinatları aşağıdakı şərtləri ödəyən nöqtələr çoxluğunu həndəsi olaraq təsvir edin.

a) $x^2 + y^2 + z^2 > 1$ b) $x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ z \ge 0$

9. P nöqtəsinin A(−1; 5; 3) nöqtəsindən məsafəsi B(6; 2; −2) nöqtəsindən olan məsafəsindən iki dəfə böyükdür. Göstərin ki, belə nöqtələr çoxluğu sferadır.

10. Mərkəzi (2; –3; 6) nöqtəsində olan və a) xy; b) yz; c) xz müstəvisinə toxunan sferanın tənliyini yazın .

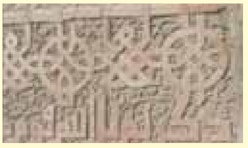
11. Diametrlərindən birinin uc nöqtələri (2;1;4) və (4;3;10) olan sferanın tənliyini yazın.

12. a) Mərkəzi (6; 8; −5) nöqtəsində yerləşən və radiusu 6 vahid olan sferanın tənliyini yazın.
b) Bu sferanın hər bir koordinat müstəvisi ilə kəsişməsini təqdim edin.

13. $\vec{r} = \langle x; y; z\rangle$, $\vec{a} = \langle 2; 1; -1\rangle$ və $\vec{b} = \langle 1; 1; 0\rangle$ olduqda $(\vec{r} - \vec{a})\cdot(\vec{r} - \vec{b}) = 0$ bərabərliyinin sferanın tənliyini ifadə etdiyini göstərin və bu sferanın mərkəzini tapın.

14. Fəzada radiusları bərabər olan dörd sfera bir-birinə toxunur. Bu sferalardan üçünün mərkəzinin $(\sqrt{2}; 0; 0)$,$(0; \sqrt{2}; 0)$, $(0; 0; \sqrt{2})$ nöqtələrində, dördüncünün mərkəzinin isə 7-ci oktantda yerləşdiyi məlumdur. Dördüncü sferanın mərkəzini və sferaların radiusunu tapın.

Nəqqaşlar, misgərlər, xalçaçı rəssamlar eyni naxışın paralel köçürmə, dönmə, əksetmə hərəkətləri və ya homotetik çevrilmələri ilə yeni naxışlar yaradırlar.




Naxçıvan. Daş üzərində nəqqaşlıq nümunələri

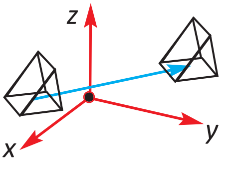
Eşer. *Çini boşqab*

Bunu bilmək maraqlıdır. Məşhur holland rəssamı Eşer riyaziyyatın simmetriya, kombinatorika, stereometriya, topologiya kimi bölmələrinin qaydalarını rənglərin çalarları ilə birləşdirərək müstəvi üzərində dinamik təsvirlər yaradıb. Xüsusi riyazi təhsil almayan Eşer əsərlərində intuisiya və vizual təsəvvürlərinə əsaslanıb. Paralel köçürmə üzərində qurulmuş bir sıra əsərlərinə o, "Müstəvinin düzgün hərəkəti" adını verib.
https://en.wikipedia.org/wiki/M._C._Escher

Çevrənin limiti IV

Fəzada F fiqurunun hər bir P nöqtəsinə müəyyən bir qayda ilə fəzanın yeganə P′ nöqtəsini qarşı qoyan uyğunluğa F fiqurunun çevrilməsi deyilir. Nöqtələr arasındakı məsafəni saxlayan çevirməyə **hərəkət** deyilir. Hərəkət müstəvini müstəviyə, düz xətti düz xəttə, parçanı konqruyent parçaya, bucağı konqruyent bucağa çevirir. Deməli, hərəkətdə fiqur özünə konqruyent fiqura çevrilir.

Paralel köçürmə. İkiölçülü koordinat sistemində hər bir $(x; y)$ nöqtəsinə $(x+a;\ y+b)$ nöqtəsini qarşı qoyan çevrilmənin $\langle a; b\rangle$ vektoru ilə icra olunan paralel köçürmə olduğunu bilirik.



Oxşar qayda ilə fəzada paralel köçürmədə hər bir nöqtənin koordinatları $(x; y; z) \to (x+a;\ y+b;\ z+c)$ kimi dəyişir. Paralel köçürmə hərəkətdir. Hər bir paralel köçürməyə bir vektor uyğundur və tərsinə.

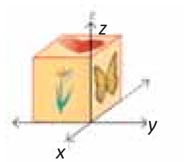
Nümunə 1. $\vec{p}\langle 2; -1; 3\rangle$ vektoru ilə icra olunan paralel köçürmədə A(–4; 5; 6) nöqtəsi hansı nöqtəyə çevrilir?
Həlli: Tərifə görə belə çevirmədə A nöqtəsinin çevrildiyi A′ nöqtəsinin koordinatları $x' = -4 + 2 = -2$; $y' = 5 - 1 = 4$; $z' = 6 + 3 = 9$ olmalıdır.
Deməli, bu paralel çevrilmədə A(–4; 5; 6) nöqtəsi A′(–2; 4; 9) nöqtəsinə çevrilir.
Simmetriya. Fəzada nöqtəyə və düz xəttə nəzərən simmetriya çevrilməsinə də müstəvidə olduğu kimi tərif verilir. Fəzada həm də müstəviyə nəzərən simmetriyaya baxılır.

Fəzada $(x; y; z)$ nöqtəsi ilə
- Koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik nöqtə: $(-x; -y; -z)$
- Ox oxuna nəzərən simmetrik nöqtə: $(x; -y; -z)$
- Oy oxuna nəzərən simmetrik nöqtə: $(-x; y; -z)$
- Oz oxuna nəzərən simmetrik nöqtə: $(-x; -y; z)$
- Oxy müstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtə: $(x; y; -z)$
- Oyz müstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtə: $(-x; y; z)$
- Oxz müstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtə: $(x; -y; z)$

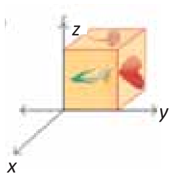
Nümunə. (1;2;3) nöqtəsi ilə $z = 5$ müstəvisinə nəzərən simmetrik nöqtəni tapın.
Həlli: $z = 5$ müstəvisinə nəzərən (1;2;3) nöqtəsinə simmetrik $(x'; y'; z')$ nöqtəsi $z = 5$ müstəvisinə, deməli, həm də Oxy müstəvisinə perpendikulyar olan düz xətt üzərindədir. Buna görə də bu nöqtələrin absisləri və ordinatları eynidir: $x' = 1$, $y' = 2$. z' koordinatı isə $(z' + 3) : 2 = 5$ münasibətindən tapılır: $z' = 7$.
Beləliklə, axtarılan nöqtə (1;2;7) olur.

Dönmə. Fəzada fiqurun l düz xətti ətrafında θ bucağı qədər dönməsi elə çevrilməyə deyilir ki, bu zaman l düz xəttinə perpendikulyar olan hər bir müstəvidə onun l düz xətti ilə kəsişmə nöqtəsi ətrafında eyni istiqamətdə eyni θ bucağı qədər dönmə baş verir. l düz xəttinə dönmə oxu, θ-ya isə dönmə bucağı deyilir.

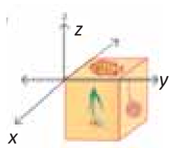
Aşağıdakı şəkildə üzərində müxtəlif təsvirlərin olduğu kubun x oxu ətrafında saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində 90°, 180°, 270° dönmələrinə uyğun nümunələr verilmişdir.



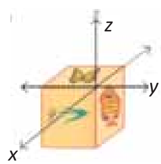
ilkin vəziyyət



90° dönmə

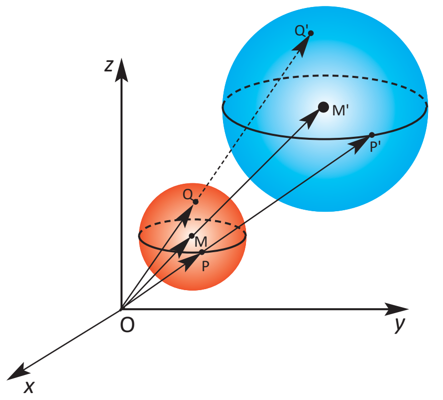


180° dönmə



270° dönmə

Homotetiya. Fəzada da müstəvidə olduğu kimi oxşarlıq çevrilməsi anlayışı daxil edilir. Fiqurun çevrilməsində istənilən iki X və Y nöqtələri arasındakı məsafə eyni $k>0$ ədədi dəfə dəyişərsə, belə çevrilməyə **oxşarlıq çevrilməsi**, k ədədinə isə **oxşarlıq əmsalı** deyilir.
F fiqurunun çevrilməsində istənilən X nöqtəsinin çevrildiyi X′ nöqtəsi üçün $\overrightarrow{OX'} = k\cdot\overrightarrow{OX}$ ödənərsə, bu çevrilməyə O mərkəzli və k əmsallı $(k\neq0)$ **homotetiya** deyilir.
Homotetiya oxşarlıq çevrilməsidir. Xüsusi halda, $k = -1$ olduqda mərkəzi simmetriya, $k=1$ olduqda eynilik çevrilməsi alınır.



Nümunə. Mərkəzi M(1;3;3) nöqtəsində, radiusu 2 olan sfera verilmişdir. Mərkəzi koordinat başlanğıcında, k=3 əmsallı homotetiyada onun çevrildiyi sferanın tənliyini yazın.

Həlli: M nöqtəsinə uyğun yer vektoru $\overrightarrow{OM}\langle 1;\, 3\,;\, 3\rangle$, M′ nöqtəsinə uyğun yer vektoru $\overrightarrow{OM'}\langle x';\, y';\, z'\rangle$ olsun. Onda tərifə görə $\overrightarrow{OM'} = k\cdot\overrightarrow{OM}$ və ya

$\langle x';\, y';\, z'\rangle = 3\cdot\langle 1;\, 3\,;\, 3\rangle = \langle 3;\, 9;\, 9\rangle$.

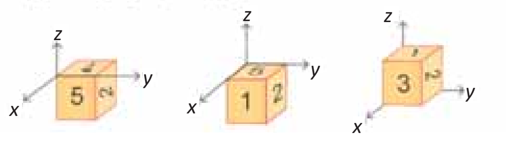
Buradan x'=3, y'=9, z'=9. Yəni alınmış sferanın mərkəzi M′(3; 9; 9) olur.

Bu sferanın radiusu R = M′P′ = 3MP = 3·2 = 6 olduğundan, onun tənliyi

$(x-3)^2 + (y-9)^2 + (z-9)^2 = 36$ olur.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Şəkildə kubun y oxuna nəzərən saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində ardıcıl olaraq 90°, 180°, 270° dönməsi göstərilmişdir. Bu şəkillərə görə kubun ilkin vəziyyətinin şəklini çəkin.



2. Paralel köçürmədə A(2; 0; -1) nöqtəsi A'(4; -3; 5) nöqtəsinə çevrilir. Bu paralel köçürmədə: a) koordinat başlanğıcı; b) B(-3; 1; 0) nöqtəsi hansı nöqtəyə çevrilər?

3. a) Oxy; b) Oyz; c) Oxz müstəvisinə nəzərən B(2;3;1) nöqtəsinə simmetrik olan nöqtənin koordinatlarını yazın.

4. A(3; 2; 5) nöqtəsi: a) $x = 4$; b) $y = 3$; c) $z = 2$ müstəvisinə nəzərən simmetriyada hansı nöqtəyə çevrilər?

5. P(1; 2; 3) mərkəzli və k = 3 əmsallı homotetiyada A(0; –3; 2) nöqtəsi hansı nöqtəyə çevrilir.

6. Təpə nöqtələrindən biri koordinat başlanğıcında, həmin təpədən çıxan tilləri isə koordinat oxlarının müsbət istiqamətində olmaqla tili vahid olan kub çəkin. Homotetiya mərkəzi koordinat başlanğıcı olan və k=2 əmsallı homotetiyada alınmış kubun təpə nöqtələrinin koordinatlarını yazın.

1. $\vec{a}\langle 1; -1; 2\rangle$ və $\vec{b}\langle 2; -3; -1\rangle$ vektorları verilmişdir.

a) Vektorların ort vektorlar üzrə ayrılışını yazın.

b) Vektorların uzunluğunu tapın.

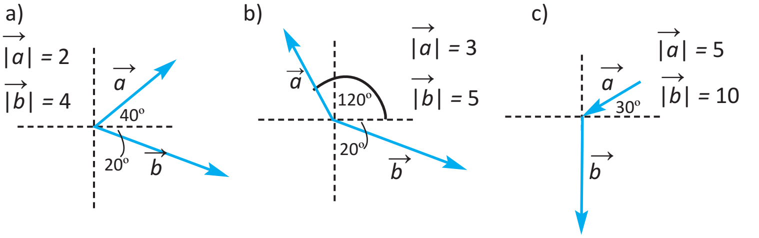
c) $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$ skalyar hasilini tapın.

2. Təpələri A(2; 3; 4), B(7; 4; 7) və C(–1; 6; 3) nöqtələri olan üçbucağın AM medianının uzunluğunu tapın.

3. P(4; 3) nöqtəsindən keçən düz xətt $\vec{m}\langle 5; -1\rangle$ radius-vektoruna paraleldir. Düz xəttin qrafik təsvirini çəkin və tənliyini yazın.

4. A(1; –2; 4), B (2; 1; –3), C (–5; 0; 2), D (3; 4; 0) nöqtələri verilmişdir. Tələb olunan vektorları komponentləri ilə yazın:
a) $\overrightarrow{AB}$
b) $\overrightarrow{CD}$
c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$
d) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

5. Verilən hər bir hal üçün $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasilini tapın.

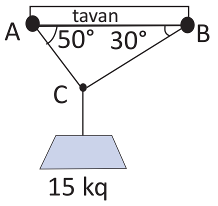


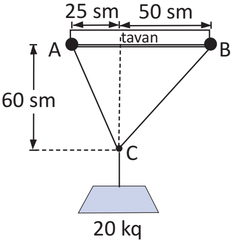
6. M$\langle 2; 2; 1\rangle$ və N $\langle 0; 1; 1\rangle$ vektorları arasındakı bucağı tapın.

7. A (2; 2; 1) və B (7; −3; 6) nöqtələri verilmişdir. AB parçasını 2 : 3 nisbətində bölən C nöqtəsinin koordinatlarını tapın. İki hala baxın.

8. $\vec{a}\langle 4; 2\rangle$ və $\vec{b}\langle 2; -4\rangle$ vektorları verilmişdir:
a) bu vektorları çəkin;
b) hansı daha böyükdür: $|\vec{a}+\vec{b}|$, yoxsa $|\vec{a}|+|\vec{b}|$?

9. Verilən yükün təsiri altında iplərdə yaranan gərilmə qüvvəsini tapın.

a) 

b) 

10. Cismə təsir edən 20 N, 55 N və 75 N qüvvələr x oxunun müsbət istiqaməti ilə uyğun olaraq 30°, 45°, 120° bucaq əmələ gətirir. Əvəzləyici qüvvənin istiqamətini və mütləq qiymətini tapın.

11. *Oyz* müstəvisi üzərində olub A(2; 0; 3), B (0; 3; 2) və C (0; 0; 1) nöqtələrindən eyni məsafədə olan nöqtəni müəyyən edin.

12. m-in hansı qiymətində verilmiş nöqtələr kollineardır:
a) A(4; 2), B (m; –7), C (6; 4);
b) A(3; –1; 0), B (m; 2; 3), C (7; 3; 4)?

13. k -nın hansı qiymətində $\vec{a}\langle 12; -20; 16\rangle$ və $\vec{b}\langle 3; k; 4\rangle$ vektorları: a) paraleldir; b) perpendikulyardır?

14. Mərkəzi (2; 3; −1) nöqtəsində olub (4; −1; 1) nöqtəsindən keçən sferanın tənliyini yazın.

15. Müstəvi $x = 0$ tənliyi ilə verilmişdir.
a) Müstəvinin normal vektorunu yazın.
b) Bu müstəvinin koordinat başlanğıcından keçdiyini əsaslandırın.
c) Bu müstəvi üzərində olan üç nöqtənin koordinatını yazın.

16. A(–2; 0; 3) və B(0; 2; –1) nöqtələrindən eyni məsafədə olan və Oz oxu üzərində yerləşən nöqtənin koordinatlarını tapın.

17. A(1; –2; 7), B(2; 3; 5) və D(–1; 3; 6) nöqtələri ABCD rombunun təpələridir. C təpəsinin koordinatlarını tapın.

18. Mərkəzi M(1; 2; –3), əmsalı k = 2 olan homotetiyada A(3; 5; 0) nöqtəsi hansı nöqtəyə çevrilər?

3

Limit

- Funksiyanın nöqtədə limiti
- Qiymətlər cədvəlinə və qrafikinə görə funksiyanın limitinin təxmin edilməsi
- Limitin varlığı
- Limitin xassələri
- Funksiyanın kəsilməzliyi
- Triqonometrik funksiyaların daxil olduğu xüsusi limitlər
- Sonsuz limitlər və sonsuzluqda limit. Şaquli və üfüqi asimptotlar
- Ədədi ardıcıllığın limiti

Riyazi lüğət

✓ limit
✓ birtərəfli limit
✓ sol limit
✓ sağ limit
✓ limitin varlığı
✓ kəsilməzlik
✓ nöqtədə kəsilməzlik
✓ intervalda kəsilməzlik
✓ parçada kəsilməzlik
✓ görkəmli limitlər
✓ sonsuzluqda limit
✓ ədədi ardıcıllığın limiti

Bunları bilmək maraqlıdır!

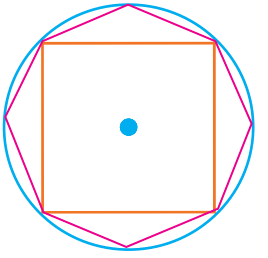
Limit latınca “limes” sözündən götürülüb sərhəd, qaya mənasını verir.

Limit anlayışı bir-birindən asılı olmayaraq ingilis riyaziyyatçısı və fiziki İsaak Nyuton (1642–1727) və alman riyaziyyatçısı Qotfrid Leybnis (1646–1716) tərəfindən verilmişdir. Lakin nə Nyuton, nə də Leybnis onun riyazi mahiyyətini sona qədər aça bilməmişdilər. Limitin dəqiq tərifini fransız riyaziyyatçısı Koşi vermişdir. Alman alimi Veyerştrasın araşdırmaları isə əslində ciddi nəzəriyyənin yaradılmasını tamamladı.

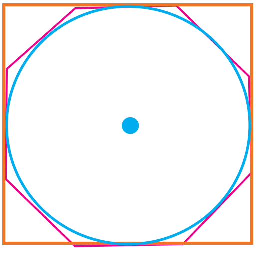
Limit anlayışı riyaziyyatın fundamental anlayışlarındandır.

Limit anlayışını təsəvvür etmək üçün aşağıdakı nümunələri nəzərdən keçirək.

1. Dairənin sahəsi.



Dahi riyaziyyatçı və filosof Arximed dairənin sahəsini tapmaq üçün onun daxilinə və xaricinə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlıların sahəsindən istifadə etmişdir. Dairənin daxilinə çəkilmiş kvadratın sahəsi dairənin sahəsindən xeyli kiçikdir, lakin daxilə çəkilmiş səkkizbucaqlının sahəsi dairənin sahəsindən daha az fərqlənir. Dairənin daxilinə düzgün 16 bucaqlı, 32 bucaqlı və.s çəkilmiş olsa, bu çoxbucaqlının sahəsi dairənin sahəsinə daha da yaxın olar. Daxilə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlının tərəflərinin sayını sonsuz artırsaq, onun sahəsi dairənin sahəsinə sonsuz yaxınlaşar.



Dairənin xaricinə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlının da tərəflərinin sayı artdıqca onun sahəsi ilə dairənin sahəsi arasındakı fərq kiçilir.

Arximedin bu yanaşması əslində limit konsepsiyasının əsasını təşkil edir.

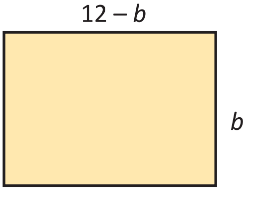
2. $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots$

ardıcıllığının n-ci həddinin düsturu $b_n = \frac{1}{10^{n-1}}$ kimidir. Məxrəcdəki ədəd böyüdükcə hər sonrakı həddin özündən əvvəlkindən daha kiçik olduğu görünür.

n sonsuz böyüdükcə b_n-in hansı qiymətə yaxınlaşdığını təxmin edin.

Araşdırma. Uzunluğu 24 m olan məftillə düzbucaqlı şəklində sahə əhatə olunmalıdır. Onun ölçülərini necə seçmək lazımdır ki, sahəsi ən böyük olsun?

Həlli: Düzbucaqlının uzunluğunu a, enini b ilə işarə etsək, perimetri $P = 2a + 2b$ olar.
Şərtə görə $2a + 2b = 24$. Buradan $a = 12 - b$.
$a = 12 - b$ olduğunu $S = ab$ sahə düsturunda nəzərə alsaq, düzbucaqlının sahəsinin enindən asılılığını
$S = (12 - b)b$ və ya $S(b) = 12b - b^2$ kimi yazmaq olar.



b-nin həm sağdan, həm də soldan 6-ya yaxınlaşan qiymətlərində sahənin qiymətlərini göstərən cədvəl tərtib edək.

b soldan 6-ya yaxınlaşdıqca → ← *b sağdan 6-ya yaxınlaşdıqca*

Eni	*b*	5,0	5,5	5,9	6,0	6,1	6,5	7,0
Sahə	*S*	35,00	35,75	35,99	36,00	35,99	35,75	35,00

S(*b*) *36-ya yaxınlaşır* → ← *S*(*b*) *36-ya yaxınlaşır*

Deməli, *b*-nin qiyməti həm soldan, həm də sağdan 6-ya yaxınlaşdıqca S(*b*)-nin qiyməti 36-ya yaxınlaşır. Həm də bu yaxınlaşma *b*-nin qiymətlərinin 6-ya necə yaxınlaşmasından asılı deyil. Bu halda 36 ədədinə *b* dəyişəni 6 ədədinə yaxınlaşdıqda S(*b*) funksiyasının limiti deyilir və aşağıdakı kimi ifadə edilir:

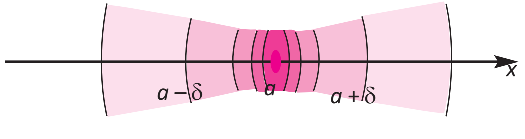
$$\lim_{b\to 6} S(b) = \lim_{b\to 6}(12b - b^2) = 36$$

***b* dəyişəni 6-ya yaxınlaşdıqda *S* funksiyasının limiti 36-ya bərabərdir.**

Burada $b\to 6$ yazılışı *b*-nin 6-ya istənilən qədər yaxın olduğunu nəzərdə tutur, lakin *b*-nin 6-ya bərabərliyi nəzərdə tutulmur. Soldan yaxınlaşmada 6-dan kiçik ədədlərlə, sağdan yaxınlaşmada isə 6-dan böyük ədədlərlə 6-ya yaxınlaşılır.

$S(b) = 36 - (b-6)^2$ şəklində yazmaqla da $|b-6|$ kəmiyyəti 0-a yaxınlaşdıqca *S*-in qiymətlərinin 36-ya yaxınlaşdığını görmək olar.

$(a-\delta; a+\delta)$ intervalına *a* nöqtəsinin δ ətrafı ($\delta > 0$) deyilir.
δ–nı seçməklə bu ətrafdan olan ixtiyari *x*-lər üçün $|x-a|$ məsafəsini istənilən müsbət ədəddən kiçik etmək olar . Deməli, $x-a$ fərqini də 0-a istənilən qədər yaxın etmək olar.

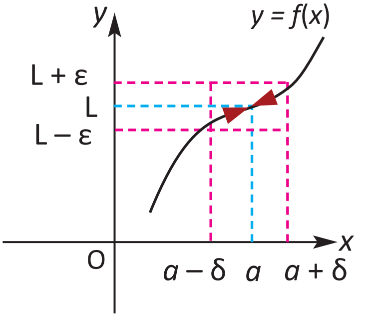


Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası *a* nöqtəsinin hər hansı ətrafında (ola bilsin ki, *a* nöqtəsindən başqa) təyin olunmuşdur. $x-a$ fərqi sıfıra yaxınlaşdıqda $f(x)-\mathrm{L}$ fərqi də sıfıra yaxınlaşarsa, L ədədinə $x=a$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının limiti deyilir və bu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{L}$ kimi yazılır.

Tərif. Tutaq ki, ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə $\delta > 0$ ədədi tapmaq olar ki, $0 < |x - a| < \delta$ şərtini ödəyən x-lər üçün $|f(x) - L| < \varepsilon$ olur. Onda L ədədinə $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində limiti deyilir və bu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ kimi yazılır.

Bunu həndəsi olaraq qısaca belə izah etmək olar.

İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi üçün ordinat oxu üzərində L nöqtəsinin $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ ətrafını götürək və $L - \varepsilon$, $L + \varepsilon$ nöqtələrindən absis oxuna paralel xətlər çəkək: eni 2ε olan zolaq alarıq. $f(x)$ funksiyasının $(a - \delta; a + \delta)$ ətrafında olan bütün x-lərə $(x \neq a)$ uyğun qiymətləri $(L - \varepsilon; L + \varepsilon)$ intervalında, qrafiki isə eni 2ε olan bu zolaqda yerləşəcək.



Nümunə 1. Limitin tərifindən istifadə etməklə $\lim\limits_{x\to 2}(3x - 2) = 4$ olduğunu göstərək.

Həlli: İxtiyari $\varepsilon > 0$ ədədi qeyd edək. $|x - 2| < \delta$ şərtini ödəyən x-lər üçün $|(3x - 2) - 4|$ kəmiyyətini qiymətləndirək:

$|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2| < 3\delta.$

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ kimi seçsək, $|x - 2| < \delta$ şərtini ödəyən x-lər üçün $|(3x - 2) - 4| < \varepsilon$ münasibəti ödənəcək. Bu isə, tərifə görə, $\lim\limits_{x\to 2}(3x - 2) = 4$ olması deməkdir.

Limiti müxtəlif üsullarla təxmin və ya müəyyən etmək olar.

- cədvələ görə
- qrafikə görə
- analitik üsulla

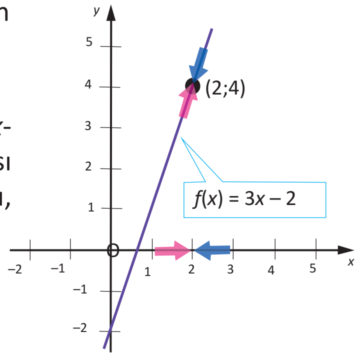
Funksiyanın qiymətlər cədvəlinə və qrafikinə görə limitin təxmin edilməsi

Nümunə 2. Qiymətlər cədvəli tərtib etməklə limiti təxmin edin: $\lim\limits_{x\to 2}(3x - 2)$

Həlli: x-in soldan və sağdan 2-yə yaxın bəzi qiymətlərində $f(x) = 3x - 2$ funksiyasının uyğun qiymətlərini cədvəldə yazaq.

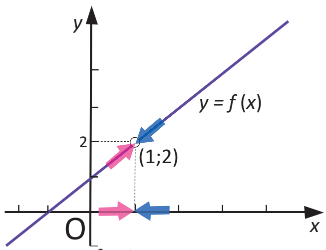
x	1,9	1,99	1,999	2,0	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	3,700	3,970	3,997	?	4,003	4,030	4,300

x-in qiyməti 2-yə həm soldan, həm də sağdan yaxınlaşdıqca $f(x)$-in qiyməti 4-ə yaxınlaşır.



$f(x) = 3x - 2$ funksiyasının qrafikini qurmaqla da x-in 2-yə həm sağdan, həm də soldan yaxınlaşması ilə bu funksiyanın qiymətinin 4-ə yaxınlaşdığını, “yığıldığını” görmək olar.
Deməli, $\lim\limits_{x\to 2}(3x-2) = 4$.

Nümunə 3. Tapın: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$



$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ funksiyasının qrafiki

Həlli: $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ funksiyası $x = 1$ nöqtəsində təyin olunmayıb və $x \neq 1$ olduqda $f(x) = x + 1$. x-in soldan və sağdan 1-ə yaxınlaşmasını göstərən qiymətlər cədvəlini quraq.

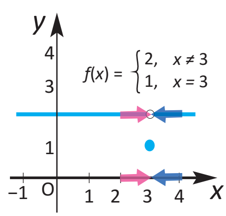
x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1

Cədvəldən göründüyü kimi, x-in qiyməti 1-ə yaxınlaşdıqca $f(x)$-in qiyməti 2-yə yaxınlaşır. Uyğun funksiyanın qrafikini qurmaqla da bu fikrin doğru olduğunu görmək olar.

Diqqət! Verilən funksiya $x = 1$ nöqtəsində təyin olunmayıb. Lakin bu nöqtədə funksiyanın limiti var və bu limit 2-yə bərabərdir: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$

Funksiyanın limiti ilə funksiyanın verilən nöqtədəki qiyməti anlayışlarının fərqinə diqqət edin!

Nümunə 4. $f(x) = \begin{cases} 2, & x \neq 3 \\ 1, & x = 3 \end{cases}$ funksiyasının qrafikinə



görə: a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ limitini; b) $f(3)$ qiymətini tapın.

Həlli: a) Funksiyanın qrafikindən görünür ki, x-in qiyməti 3-ə yaxınlaşdıqda funksiyanın qiymətləri 2-yə yaxınlaşır:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2$$

b) Funksiyanın $x = 3$ nöqtəsində qiyməti 1-ə bərabərdir: $f(3) = 1$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Limiti cədvələ görə müəyyən edin.

a) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+3)$

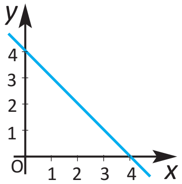
x	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1
$f(x)$				?			

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right)$

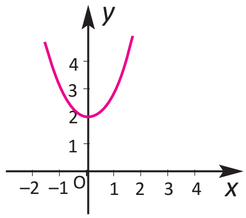
x	−0,1	−0,01	−0,001	0	0,001	0,01	0,1
$f(x)$				?			

2. Funksiyanın qrafikindən istifadə edərək tələb olunan limiti təxmin edin.

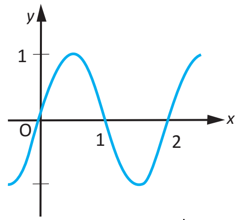
a) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)$



b) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)$

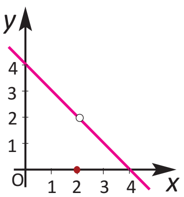


c) $\lim\limits_{x\to 1}(\sin \pi x)$



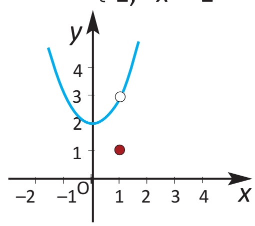
d) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

$f(x)=\begin{cases}4-x, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$

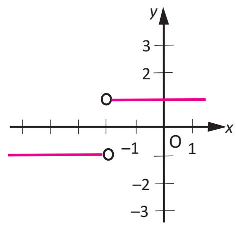


e) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

$f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$



f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{|x+2|}{x+2}$



3. Tərəfi 24 sm olan kvadratşəkilli kartonun künclərindən tərəfi x sm olan kvadratlar kəsilib çıxarılmış, sonra isə qatlanaraq ağzıaçıq qutu düzəldilmişdir.

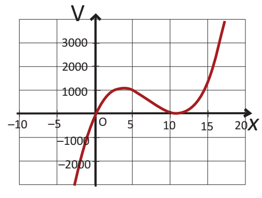
a)Verilən məlumata görə qutunun sxematik təsvirini çəkin və üzərində uyğun işarələmələr aparın.

b) Qutunun həcminin $V = 4x(12 - x)^2$ düsturu ilə hesablandığını göstərin.

c) Aşağıdakı cədvəli tamamlayın və x-in qiyməti 4-ə yaxınlaşdıqda funksiyanın qiymətinin necə dəyişdiyini araşdırın. Cədvələ görə $\lim\limits_{x\to 4}V$-ni taxmin edin.

x	3	3,5	3,9	4	4,1	4,5	5
V							

d) Qrafkalkulyatorun köməyilə V(x) funksiyasının qrafikini siz də qurun. x = 4 olduqda funksiyanın qiymətinin maksimum olduğunu qrafikə görə yoxlayın.



Limitin varlığı. Birtərəfli limitlər.
Bəzən x dəyişəninin a-ya yalnız bir tərəfdən (sağdan və ya soldan) yaxınlaşdığı hallara baxmaq lazım gəlir.

Sol limit. x-in qiymətləri a-dan kiçik qalmaqla a-ya yaxınlaşdıqda $f(x)$ – L fərqi sıfıra yaxınlaşırsa, L ədədinə $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində sol limiti deyilir və $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ kimi yazılır.

Sağ limit. x-in qiymətləri a-dan böyük qalmaqla a-ya yaxınlaşdıqda $f(x)$ – L fərqi sıfıra yaxınlaşırsa, L ədədinə $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində sağ limiti deyilir və $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ kimi yazılır.

***f*(*x*) funksiyasının sağ və sol limitləri varsa və bərabərdirsə, onda *x* = *a* nöqtəsində *f*(*x*) funksiyasının limiti var və**

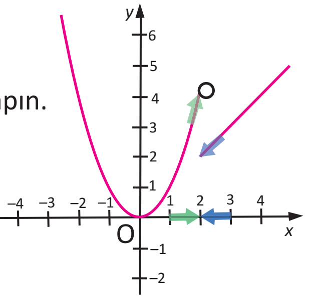
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$ **bərabərliyi doğrudur.**

Bu təklifin tərsi də doğrudur. *Tərs təklifi siz yazın!*

Hissə-hissə verilmiş funksiyalar üzərində sol və sağ limiti araşdıraq.

Nümunə 5. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$

funksiyasının $x = 2$ nöqtəsində sol və sağ limitlərini tapın.

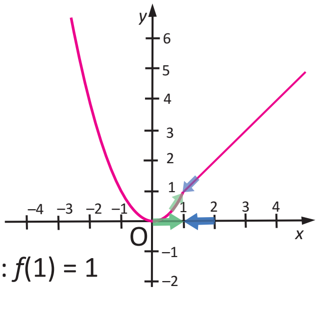


Həlli: Sol limit: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$

Sağ limit: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} x = 2$

Sağ və sol limitlər bərabər olmadığı üçün, verilən funksiyanın $x = 2$ nöqtəsində limiti yoxdur.

Nümunə 6. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$ funksiyasının $x = 1$ nöqtəsində sol və sağ limitlərini tapın.



Həlli: Sol limit: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1$

Sağ limit: $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ funksiyanın qiyməti: $f(1) = 1$

Siz araşdırın!

a) $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 3 \\ 9 - x, & x > 3 \end{cases}$

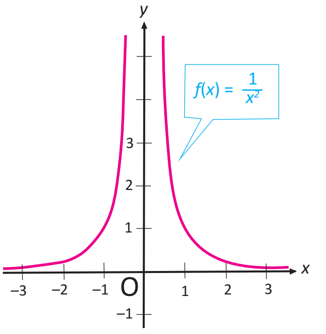
funksiyasının qrafikini qurun. $x = 3$ nöqtəsində limitinin olub-olmadığını yoxlayın.

b) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x > 1 \\ x^2 + 3, & x \leq 1 \end{cases}$

funksiyasının qrafikini qurun. $x = 1$ nöqtəsində limitinin olub-olmadığını yoxlayın.

Funksiyanın nöqtədə limitinə verilən tərifdə a və L ədədlərinin sonlu olduğunu nəzərdə tutmuşduq. Lakin a və L (biri və ya hər ikisi) sonlu olmaya bilər.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ limitini nəzərdən keçirək.



Qrafikdən də göründüyü kimi, x-in qiyməti soldan və sağdan sıfıra yaxınlaşdıqca, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ funksiyasının qiyməti sonsuz böyüyür.

Deməli, $|x|$-in qiymətini kifayət qədər kiçik götürməklə $f(x)$ funksiyasının qiymətinin istənilən ədəddən böyük olmasına nail ola bilərik.

Məsələn,

$$0 < |x| < \frac{1}{10} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > 100,$$

$$0 < |x| < \frac{1}{1000} \longrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > 1000\,000$$

$|x|$-in qiyməti kiçildikcə funksiyanın qiyməti qeyri-məhdud böyüyür. $\dfrac{1}{x^2}$ funksiyası $x\to 0$ olduqda sonsuz böyüyəndir. Bu belə yazılır: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2} = \infty$

Öyrənmə tapşırıqları

4. Verilmiş funksiyaların qrafiklərindən istifadə edərək limitlərini (əgər varsa) tapın. Limit yoxdursa, səbəbini izah edin.

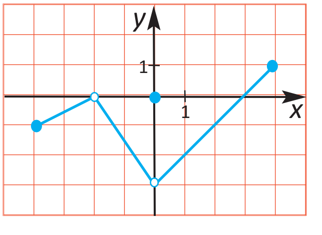
1) $f(x) = \begin{cases} x+6, & x<1 \\ 8-x, & x \geq 1 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2) $f(x) = \begin{cases} x^2+3, & x<0 \\ 1-x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

5. Funksiyanın qrafikinə görə tələb olunan limitləri tapın.



a) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)$

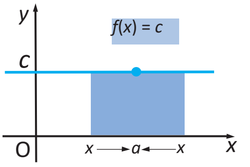
6. Verilən şərtləri ödəyən hər hansı $f(x)$ funksiyasının qrafikini çəkin.

a) $f(-1) = 3$, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$ və $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ yoxdur.

b) $f(-2) = 4$, $f(0) = 5$, $f(2) = 0$ və $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

Funksiyanın limiti haqqında aşağıdakı təkliflər doğrudur.

● **$f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində limiti varsa, yeganədir.**

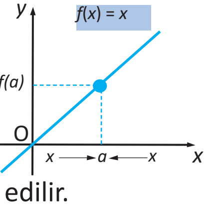


Sabitin limiti.

$f(x) = c$ sabit funksiyası üçün $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c$.

● **Sabitin limiti özünə bərabərdir.**

Nümunə. $\lim\limits_{x\to 3} 7 = 7$, $\lim\limits_{x\to 3} 5 = 5$



● **Eynilik funksiyasının limiti.**

$f(x) = x$ eynilik funksiyası üçün $\lim\limits_{x\to a} x = a$

Nümunə. $\lim\limits_{x\to -5} x = -5$

Funksiyanın limitini taparkən aşağıdakı xassələrdən istifadə edilir.
Əgər L, M, a həqiqi ədədlər və $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, olarsa, onda:

1. Cəmin limiti: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$

İki funksiyanın cəminin limiti onların limitləri cəminə bərabərdir.

Nümunə. $\lim\limits_{x\to 3} (x + 6) = \lim\limits_{x\to 3} x + \lim\limits_{x\to 3} 6 = 3 + 6 = 9$

2. Fərqin limiti: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L - M$

İki funksiyanın fərqinin limiti onların limitləri fərqinə bərabərdir.

Nümunə. $\lim\limits_{x\to -1} (11 - x) = \lim\limits_{x\to -1} 11 - \lim\limits_{x\to -1} x = 11 + 1 = 12$

3. Hasilin limiti: $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \cdot M$

İki funksiyanın hasilinin limiti onların limitləri hasilinə bərabərdir.

Xüsusi halda alırıq ki, $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Yəni, sabit vuruğu limit işarəsi xaricinə çıxarmaq olar.

Nümunə. $\lim\limits_{x\to 5} (-2x) = (-2) \cdot \lim\limits_{x\to 5} x = -2 \cdot 5 = -10$

4. Nisbətin limiti: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, $M \neq 0$

İki funksiyanın nisbətinin limiti, bölənin limiti sıfırdan fərqlidirsə, limitlərin nisbətinə bərabərdir.

Nümunə. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x + 5}{4 - x}\right) = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} (x + 5)}{\lim\limits_{x\to 2} (4 - x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 5}{\lim\limits_{x\to 2} 4 - \lim\limits_{x\to 2} x} = \dfrac{2 + 5}{4 - 2} = \dfrac{7}{2} = 3,5$

5. Qüvvətin limiti: $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n = L^n$, $n \in N$.

Xüsusi halda, $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$

Nümunə. a) $\lim\limits_{x\to 10} x^4 = 10^4 = 10000$ b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 3} 2}{\lim\limits_{x\to 3} x^3} = \dfrac{2}{27}$

Verilmiş təkliflər əsasında aşağıdakı nəticəyə gəlmək olar.

Çoxhədli və rasional funksiyanın limiti

İstənilən P(x) çoxhədlisi üçün $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$.

İstənilən P(x) və Q(x) çoxhədliləri üçün Q(a) $\neq$ 0 olduqda

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Nümunə. $\lim\limits_{x\to 2} (3x^2 + 4) = 3 \lim\limits_{x\to 2} x^2 + \lim\limits_{x\to 2} 4 = 3\cdot(2)^2 + 4 = 16$

Nümunə. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$

Göründüyü kimi, rasional funksiyanın məxrəci x = 1 olduqda sıfırdan fərqlidir, deməli, yuxarıda verilən xassəni tətbiq edə bilərik:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{2\cdot(1)^2 + 1 + 1}{1 + 1} = 2$$

Göstərmək olar ki, dəyişənin mümkün qiymətlərində $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{P(x)} = \sqrt[n]{P(a)}$

Nümunə. $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x - 1} = \sqrt{5 - 1} = 2$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Limitin xassələrini tətbiq etməklə hesablayın.

a) $\lim\limits_{x\to 2} 8$ b) $\lim\limits_{x\to 6} x$ c) $\lim\limits_{x\to 2} (3x - 4)$ d) $\lim\limits_{x\to -2} 7x^2$

2. 1) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 2$ və $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 3$ olarsa, tapın:

a) $\lim\limits_{x\to c} (5g(x))$ b) $\lim\limits_{x\to c} (f(x) + g(x))$ c) $\lim\limits_{x\to c} (f(x)g(x))$ d) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

2) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \dfrac{3}{2}$ və $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \dfrac{1}{2}$ olarsa, tapın:

a) $\lim\limits_{x\to c} (4f(x))$ b) $\lim\limits_{x\to c} (f(x) - g(x))$ c) $\lim\limits_{x\to c} (f(x)g(x))$ d) $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

3. Limitin xassələrindən istifadə etməklə hesablayın.

1) $\lim\limits_{x\to 2} (-4x^2 + 2x - 5)$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x - x^3)$ 3) $\lim\limits_{x\to -1} (x^3 - 4x + 1)$

4) $\lim\limits_{x\to -2} (5x^3 + 6x^2 - 8)$ 5) $\lim\limits_{x\to -3} (2x^2 + 4x + 1)$ 6) $\lim\limits_{x\to 1} (3x^3 - 2x^2 + 4)$

4. Limitləri hesablayın.

a) $\lim\limits_{x\to -4} x^2$ b) $\lim\limits_{x\to 2} (-x^3)$ c) $\lim\limits_{x\to 3} (x - 1)^5$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{3x + 1}$ e) $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt[3]{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 7} \sqrt[3]{x + 1}$

5. Limitləri tapın.

a) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x}{x-4}$ c) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-4}{x-2}$

d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+1}{x+1}$ f) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$

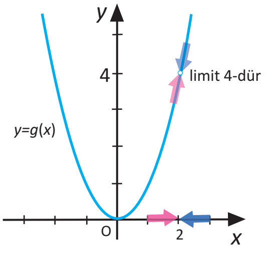
6. a) $x = 2$ nöqtəsində təyin olunmuş, lakin $x\to2$ olduqda limiti olmayan hər hansı funksiya qrafiki təsvir edin.

b) $x = 2$ nöqtəsində təyin olunmayıb, lakin $x\to2$ olduqda limiti olan hər hansı funksiya qrafiki təsvir edin.

Limiti hesablamanın bəzi üsulları

Rasional ifadənin surət və məxrəcini vuruqlara ayırıb, ixtisar aparmaqla limitin tapılması

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2}{x-2}$ limitini $x = 2$ yazmaqla hesablasaq, $\dfrac{0}{0}$ kimi qeyri-müəyyənlik alınar.



Bu halda rasional ifadənin surət və məxrəcini vuruqlarına ayırıb ixtisar etməklə sadələşdirək və uyğun ekvivalent ifadəni yazmaqla limiti tapaq:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to2}x^2=2^2=4.$$

Özünü yoxla! Rasional funksiyaların limitlərini (əgər varsa) hesablayın, yoxdursa, səbəbini izah edin.

a) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x}{x-5}$ b) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x-5}$ c) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-5x}$

Radikaldan azad etməklə limitin tapılması

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$ Surəti radikaldan azad etməklə limiti hesablayaq.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+4-4}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{\lim\limits_{x\to0}1}{\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^2+4}+\lim\limits_{x\to0}2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

Limitin xassələri tətbiq edilir

7. Rasional funksiyaların limitini (əgər varsa) hesablayın, yoxdursa, səbəbini izah edin.

a) $\lim\limits_{x\to 3}(-4x)$ b) $\lim\limits_{x\to 5}(-x^3)$ c) $\lim\limits_{x\to -2}x^2$

d) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-4x+1)$ e) $\lim\limits_{x\to 6}(-5x^2+6x+8)$ f) $\lim\limits_{t\to -2}(t+4)^2$

g) $\lim\limits_{t\to 1}(3t-1)(5t^2+2)$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+5}{3x}$ i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-6}{x^2-7x+6}$

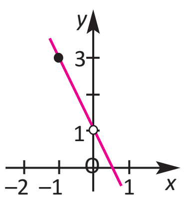
8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x-1}=100$ olduğunu bilərək:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-1}{x^2-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{50}-1}{x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^{100}-1)^2}{(x-1)^2}$

limitlərini hesablayın. Hər bir hesablama addımı üzərində limitin xasələrini göstərin.

9. Funksiyanın təyin olunmadığı nöqtələri qeyd edin. Funksiyanın qrafikinə görə tələb edilən limiti (əgər varsa) tapın.

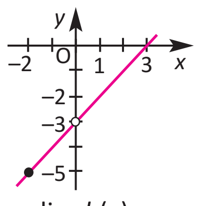
$g(x)=\dfrac{-2x^2+x}{x}$



a) $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}g(x)$

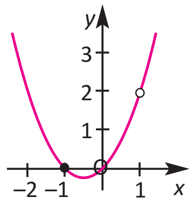
$h(x)=\dfrac{x^2-3x}{x}$



a) $\lim\limits_{x\to -2}h(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$

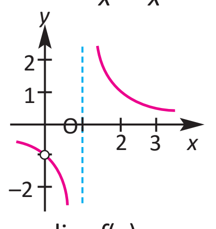
$\varphi(x)=\dfrac{x^3-x}{x-1}$



a) $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -1}\varphi(x)$

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-x}$



a) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

10. Limitləri hesablayın.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x-12}{x-3}$ b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x^3+4x}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ h) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$ i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+5x+6}$

11. Müxtəlif üsulları tətbiq edərək limitləri hesablayın.

1) $\lim\limits_{x\to 2} [(x+1)^2 (3x-1)^3]$ 2) $\lim\limits_{x\to -1} [(x+2)^3 (3x+2)]$

3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ 4) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

5) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{12}{x^3-8}\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to -3} \left(\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{6}{x^2-9}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ 8) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ 10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{16+x}-4}{x}$

11) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

12. Funksiyaların limitlərini hesablayın.

1) $f(x) = 5 - x,$ $g(x) = x^3$

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x))$

2) $f(x) = x + 7,$ $g(x) = x^2$

a) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -3} g(f(x))$

3) $f(x) = 4 - x^2,$ $g(x) = \sqrt{x+1}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1} g(f(x))$

Tətbiq tapşırıqları

Nümunə. Eynşteynin xüsusi nisbilik nəzəriyyəsinə görə sükunətdə olan müşahidəciyə nəzərən hərəkətdə olan cismin sürəti artdıqca uzunluğu kiçilir. Əgər cismin uzunluğu sükunət halında L_0, sükunətdə olan obyektə nəzərən v sürətli hərəkətdə isə L olarsa, L_0 və L arasındakı asılılıq $L = L_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ kimidir.

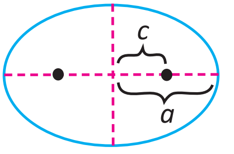
Süni peykin sürəti işıq sürətinə yaxınlaşdıqda peykin uzunluğu haqqında nə demək olar?

Həlli: Bu halda biz, $\lim\limits_{v\to c} L_0\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$-ni hesablamalıyıq:

$$\lim_{v\to c} L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = L_0\sqrt{1-\frac{c^2}{c^2}} = L_0\sqrt{0} = 0$$

Deməli, sükunətdə olan obyektə nəzərən peykin sürəti işıq sürətinə yaxınlaşdıqca uzunluğu kiçilərək sıfıra yaxınlaşır.

13. Müstəvinin fokus adlanan iki nöqtədən məsafələri cəmi sabit qalan bütün nöqtələri çoxluğuna ellips deyilir. Böyük diametri $2a$, fokusları arasında məsafə $2c$ olan ellipslə hüdudlanan sahə $\pi a\sqrt{a^2-c^2}$ düsturu ilə hesablanır. $c \to 0$ olduqda sahənin limitini hesablayın. Bu limitin mənasını izah edin.



14. Gölün suyunu çirkləndiricilərdən p% təmizləmək üçün tələb olunan pul vəsaitini (min manatla) $C = \dfrac{25000p}{100-p}$, $(0 \le p < 100)$, düsturu ilə hesablamaq olar.

a) Gölün suyunu çirkləndiricilərdən 50% təmizləmək üçün tələb olunan pulu hesablayın.

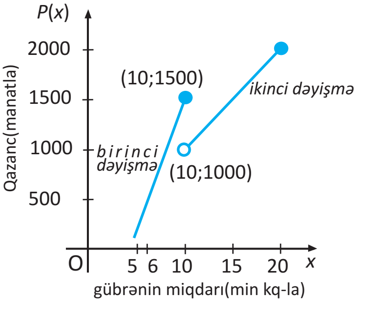
b) 100 milyon manata gölün suyunu çirkləndiricilərdən neçə faiz təmizləmək olar?

c) $\lim\limits_{p\to 100^-} C$-ni hesablayın və mənasını izah edin.

15. Qrafik gübrə (min kiloqramla) satışından əldə edilən gəliri göstərir. Qrafikdən istifadə etməklə tələb olunan limitləri hesablayın (əgər varsa).

a) $\lim\limits_{x\to 6} P(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 10^-} P(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 10^+} P(x)$ d) $\lim\limits_{x\to 10} P(x)$



16. Poçt məntəqəsi təcili gondərmək üçün kütləsi ən çoxu 0,3 kiloqram olan baratlar qəbul edir. Baratın kütləsi 0,1 kq-a qədər olduqda 20 manat, 0,1 kq-dan çox hər 25q (və 25-ə qədər) üçün isə əlavə 2 manat alınır. Kütləsi x kq olan baratın göndərilmə qiymətini $M(x)$ ilə işarə edin və tələb olunanları tapın.

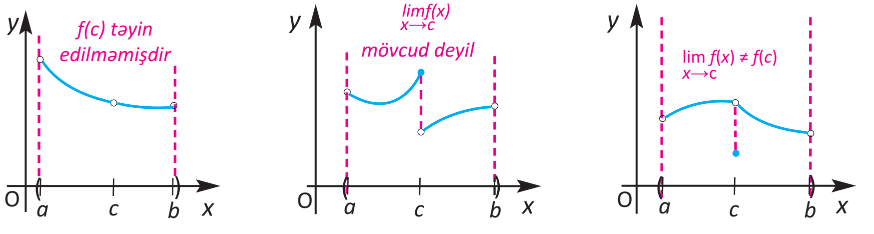
a) $\lim\limits_{x\to 0,1^-} M(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0,1^+} M(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 0,3^-} M(x)$ d) $M(0,3)$

e) $\lim\limits_{x\to 0,25^-} M(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 0,25^+} M(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 0,25} M(x)$ h) $M(0,25)$

17. x-in bütün qiymətlərində $8 - x^2 \le f(x) \le 8 + x^2$ şərti ödənirsə, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$-i tapın.

Funksiyanın kəsilməzliyini sadə formada aşağıdakı kimi də izah etmək olar. Əgər hər hansı funksiyanın qrafikini qələmi vərəqdən ayırmadan çəkmək mümkündürsə, bu funksiya kəsilməz funksiyadır. Əks halda qrafikin kəsilmə nöqtələri (sıçrayış nöqtələri) adlanan nöqtələri var və bu funksiya kəsiləndir. Kəsilən funksiyanın qrafikini qələmi vərəqdən ayırmadan bir dəfəyə çəkmək mümkün deyil.

Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi. Funksiyanın nöqtədə kəsilməz olması üçün qrafik bu nöqtədə qırılmamalı, qrafikdə sıçrayış olmamalıdır. Qrafiki aşağıda verilmiş funksiyaların $x = c$ nöqtəsində ya qırılması, ya da sıçrayışı var. Deməli, bu funksiyalar $x = c$ nöqtəsində kəsiləndir. Bu halları nəzərdən keçirək.



Qrafiklərdən göründüyü kimi, aşağıdakı hallarda funksiya $x = c$ nöqtəsində kəsilən olur.

1. Funksiya $x = c$ nöqtəsində təyin olunmayıb, lakin onun müəyyən ətrafında təyin olunub.
2. $f(x)$ funksiyasının $x = c$ nöqtəsində limiti yoxdur.
3. $f(x)$ funksiyasının $x = c$ nöqtəsində limiti var, lakin $f(c)$-yə bərabər deyil.

Funksiya qrafikinin kəsildiyi nöqtənin absisinə **kəsilmə nöqtəsi** deyilir.

Yuxarıda göstərilən şərtlərdən heç biri ödənilmədikdə funksiyanın $x = c$ nöqtəsində kəsilməz olduğunu demək olar.

Funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi. f funksiyasının c nöqtəsində kəsilməz olması üçün aşağıdakı üç şərt ödənməlidir:

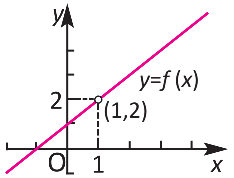
1. Funksiya $x = c$ nöqtəsində təyin olunmalıdır;
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ limiti olmalıdır;
3. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ bərabərliyi ödənməlidir.

Nümunə. Aşağıdakı funksiyaların kəsilməzliyini araşdırın.

a) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ b) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

Həlli: a) $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ funksiyasının qrafikindən görünür ki, x-n qiymətləri 1-ə yaxınlaşdıqda funksiyanın limiti var və 2-yə bərabərdir: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

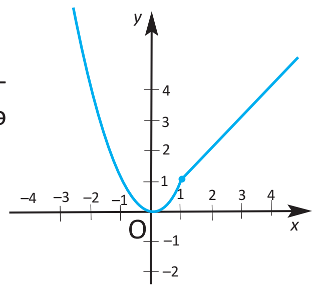
Lakin $x = 1$ qiymətində bu funksiya təyin olunmamışdır. Funksiya $x = 1$ nöqtəsində kəsiləndir.



$g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

Qeyd edək ki, funksiya $x = 1$ nöqtəsindən başqa bütün həqiqi oxda təyin edilmişdir və kəsilməzdir.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$



Qrafikdən göründüyü kimi, x-in qiymətləri 1-ə yaxınlaşdıqda funksiyanın limiti var və 1-ə bərabərdir, həm də $x = 1$ olduqda funksiyanın qiyməti də 1-ə bərabərdir.

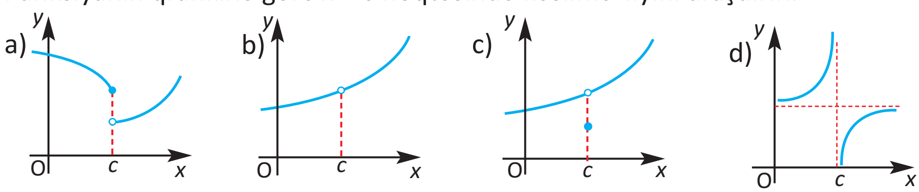
funksiyanın limiti: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

funksiyanın qiyməti: $f(1) = 1$

$x \to 1$ olduqda funksiyanın limiti, funksiyanın $x = 1$ nöqtəsindəki qiymətinə bərabərdir: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$. Deməli, funksiya $x = 1$ nöqtəsində kəsilməzdir.

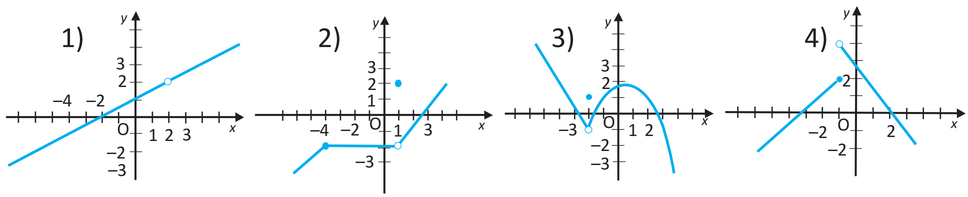
Öyrənmə tapşırıqları

1. Funksiyanın qrafikinə görə $x = c$ nöqtəsində kəsilməzliyini araşdırın.



2. Qrafikinə görə funksiyanın $x = a$ kəsilmə nöqtəsini müəyyən edin və aşağıdakıları tapın (əgər varsa).

a) $f(a)$; b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$; c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ d) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

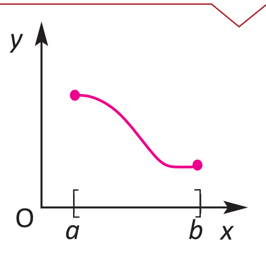


3. Funksiyaların kəsilmə nöqtələrini (əgər varsa) müəyyən edin.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ c) $f(x) = x^2 - 9x + 18$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x}$

Funksiyanın intervalda kəsilməzliyi

Tərif. (a;b) intervalının hər bir nöqtəsində kəsilməz olan funksiyaya bu intervalda kəsilməz funksiya deyilir.



Funksiyanın parçada kəsilməzliyi

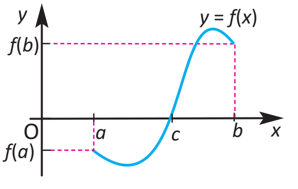
Tərif. $f(x)$ funksiyası [a; b] parçasında təyin olunub, (a;b) intervalında kəsilməzdirsə və $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ olarsa, $f(x)$-ə [a; b] parçasında kəsilməz funksiya deyilir.

İstənilən çoxhədli funksiya bütün ədəd oxunda kəsilməzdir. Rasional funksiya məxrəcin 0-dan fərqli olduğu bütün nöqtələrdə kəsilməzdir.
$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$,) funksiyaları bütün həqiqi oxda,
$y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \log_a x$ funksiyaları təyin oblastlarında kəsilməzdir.

Parçada kəsilməz funksiyalar haqqında aşağıdakı teoremlər doğrudur.

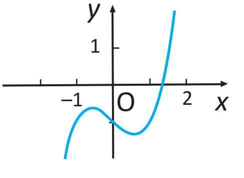
Veyerştras teoremi. Parçada kəsilməz funksiya özünün bu parçada ən böyük və ən kiçik qiymətlərini alır.

Koşi teoremi. $y = f(x)$ funksiyası [a; b] parçasında kəsilməz olub, onun uc nöqtələrində əks işarəli qiymətlər alırsa, onun (a,b) intervalında sıfırı var



Nəticə. Parçada kəsilməz funksiya ən kiçik və ən böyük qiymətləri arasındakı hər bir qiyməti alır.

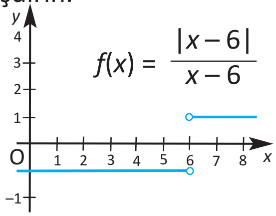
Bu teoremin tətbiqi ilə aşağıdakı tip məsələləri həll etmək olar.
Nümunə 1. Kubu özündən bir vahid böyük olan həqiqi ədəd varmı?
Həlli: Axtarılan ədəd $x = x^3 - 1$, yəni $x^3 - x - 1 = 0$ tənliyini ödəməlidir. Məsələni həll etmək üçün $f(x) = x^3 - x - 1$ funksiyasını araşdıraq. Funksiyanın qrafkalkulyatorla qurulmuş qrafikindən göründüyü kimi, x-in 1 və 2 qiymətlərində funksiyanın qiymətləri əks işarəlidir. Doğrudan da, $f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 5 > 0$. Onda Koşi teoreminə görə, elə $c \in (1;2)$ ədədi var ki, $f(c) = 0$ olur.



Bu c ədədi $x^3 - x - 1 = 0$ tənliyinin kökü olub, axtarılan ədəddir.

Funksiyanın (a; b) intervalında kəsilməzliyinə görə onun [a;b] parçasında kəsilməz olduğunu hökm etmək olmaz.

Nümunə 2. $f(x) = \dfrac{|x-6|}{x-6}$ funksiyasının kəsilməzliyini araşdırın.



Həlli: Qrafikdən göründüyü kimi, x sağdan 6-ya yaxınlaşdıqda funksiyanın limiti 1, soldan yaxınlaşdıqda isə –1-dir:

$$\lim_{x\to 6^+} f(x) = \frac{|x-6|}{x-6} = 1, \qquad \lim_{x\to 6^-} f(x) = \frac{|x-6|}{x-6} = -1$$

Yəni, $x = 6$ nöqtəsində funksiyanın limiti yoxdur.
Verilən funksiya $x = 6$ nöqtəsində kəsiləndir, $(-\infty; 6)$ və $(6;+\infty)$ intervallarının hər birində isə kəsilməzdir.

Nümunə 3. Verilən $f(x)$ funksiyasının kəsilmə nöqtələrini müəyyən edin.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \le 0 \\ 2, & 0 < x \le 1 \\ x^2+2, & x > 1 \end{cases}$$

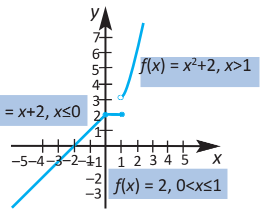
Həlli:
$y = x + 2$ xətti funksiyası, $y = 2$ sabit funksiyası, $y = x^2 + 2$ çoxhədli funksiyası x-in hər bir qiymətində kəsilməzdir. Deməli, kəsilməzlik yalnız $x = 0$ və $x = 1$ "keçid" nöqtələrində pozula bilər.
Əvvəlcə $x = 0$ nöqtəsində funksiyanın kəsilməzliyini aşağıdakı addımlarla araşdıraq.

1. Funksiyanın qiyməti. $x = 0$ nöqtəsində funksiya təyin olunmuşdur və

$$f(0) = 0 + 2 = 2$$

2. Limitin varlığı. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$-in varlığını müəyyən etmək üçün funksiyanın sağ $(x\to 0^+)$ və sol $(x\to 0^-)$ limitlərini araşdıraq. Soldan 0-a yaxınlaşdıqda x-in qiymətləri 0-dan kiçikdir və bu halda $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x+2) = 2$.
x-in qiyməti 0-a sağdan yaxınlaşdıqda sıfırdan böyük olur və bu halda $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2 = 2$. Deməli, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$

3. Verilmiş nöqtədə limitin və funksiyanın qiymətləri.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ olduğu üçün $x = 0$ nöqtəsində funksiya kəsilməzdir.

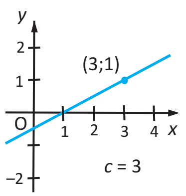


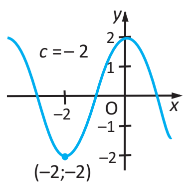
! Verilən funksiyanın $x = 1$ nöqtəsində kəsilməzliyini siz araşdırın. Nəticəni qrafiklə yoxlayın.

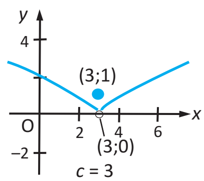
Öyrənmə tapşırıqları

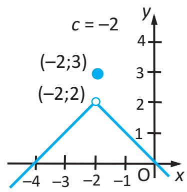
4. Hər bir limiti verilən hər bir qrafikə görə müəyyən edin. Funksiyaların kəsilməzliyini araşdırın.

a) $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$









5. Verilən funksiyaların kəsilmə nöqtələrini müəyyən edin. Bu nöqtələrdə limit varsa, tapın.

1) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2-25}{x+5}$ 3) $p(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$ 4) $f(x)=\dfrac{5+x}{x-2}$

6. Funksiyanın verilən ifadəsini sadələşdirin. Qeyd edilmiş nöqtədə funksiyanın kəsilməzliyi haqqında fikirlərinizi yazın.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x=-3$ b) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $x=1$

c) $f(x)=\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$, $x=4$ d) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2-11x+30}{x^2-4}$, $x=2$

7. Funksiyanın verilən aralıqda kəsilməz olub-olmadığını müəyyən edin.

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^3+8}$

a) $(-2;\ 2]$ b) $[-4;\ 3]$

2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

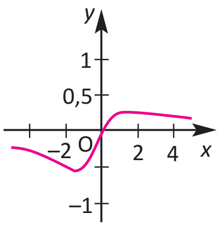
a) $(0;\ 1]$ b) $[-1;\ 1]$

8. **Açıq tipli sual.** Verilən şərtlərə uyğun hər hansı funksiyanın qrafikini çəkin. Baxılan nöqtədə funksiyanın kəsilməzliyi haqqında yazın.

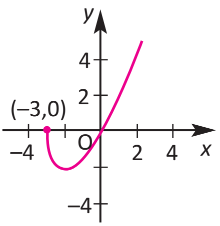
a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=1$ və $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1$ b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=2$ və $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=1$

9. Qrafikləri verilmiş funksiyaların hansı aralıqda kəsilməz olduqlarını müəyyən edin.

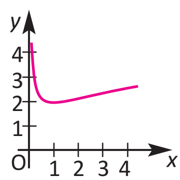
$f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+2}$



$f(x)=x\sqrt{x+3}$



$f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$



10. a) Verilmiş funksiyanın qrafikini qurun.
b) Funksiyanın kəsilmə nöqtələrini göstərin.
c) Kəsilmə nöqtələrində funksiyanın sağ və sol limitlərini tapın.

1) $f(x) = \begin{cases} 1, & x < -2 \\ x+3, & -2 \le x \le 5 \\ 7, & x > 5 \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1 \\ 0, & 1 \le x \le 4 \\ x-2, & x > 4 \end{cases}$

11. 1) Koşi teoremi və ondan çıxan nəticəni tətbiq etməklə göstərin ki, funksiya verilən aralığın müəyyən nöqtəsində verilmiş qiyməti alır.

a) $f(x) = x^2 + x - 1$, $[0; 5]$, $f(c) = 11$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 8$, $[0; 3]$, $f(c) = 0$

2) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ funksiyasının: a) $[-2; -1]$; b) $[-1;1]$; c) $[1;2]$ parçasının uc nöqtələrində qiymətlərinin işarəsini müəyyən edərək $x^3 - 3x + 1 = 0$ tənliyinin verilmiş parçada kökünün olub-olmadığını araşdırın.

12. Avtomobil kirayə verən şirkət 12 günlük kirayə haqqını aşağıdakı kimi müəyyən etmişdir:
1 gündən 5 günə qədər müddətdə gündəlik 28 manat kirayə haqqı alınır, 6 və 7-ci gün pulsuz istifadə edilir, sonrakı günlərdə yenidən gündəlik 28 manat alınır. F(t) funksiyası, t ($0 < t \le 12$) gün ərzində ödənilən məbləğdir.
1)F(t) funksiyasının aşağıdakı nöqtələrdəki qiymətlərini hesablayın.

a) $t = 4$ b) $t = 5$ c) $t = 6$ d) $t = 7$ e) $t = 8$

2) a) $\lim\limits_{x \to 5^+} F(t)$ b) $\lim\limits_{x \to 5^-} F(t)$ limitlərini tapın.

3) t-nin hansı qiymətlərində F(t) funksiyası kəsiləndir?

13. Tədqiqatçıların apardıqları araşdırmaların nəticəsinə görə broyler toyuqlarının kütlələrinin (qramla) artmasını ilk 56 gündə aşağıdakı funksiya ilə ifadə etmək olar.

$$M(t) = \begin{cases} 47{,}68 + 3{,}6t + 0{,}6t^2 + 0{,}01t^3, & \text{əgər } 1 \le t \le 28 \\ -1004 + 65{,}8t, & \text{əgər } 28 < t \le 56 \end{cases}$$

a) 20 günlük broyler toyuğunun kütləsini tapın.
b) $t \to 28$ olduqda funksiyanın sağ və sol limitlərini tapın. $t = 28$ nöqtəsində M(t) funksiyası kəsilməzdirmi?
c) Nə üçün tədqiqatçılar broyler toyuğunun kütləsinin dəyişməsini günlərin sayından asılı olaraq iki müxtəlif düsturla ifadə etməyə ehtiyac duymuşlar?

Triqonometrik funksiyaların limiti

$\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$

$\lim\limits_{x\to a} \tan x = \tan a$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to a} \cot x = \cot a$

a ədədi triqonometrik funksiyanın təyin oblastına daxildir.

Nümunələr: $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0} \tan x = 0$

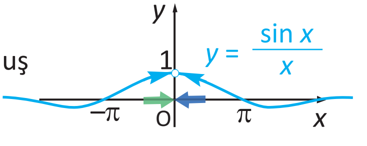
Birinci görkəmli limit

$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ funksiyasının $x = 0$ nöqtəsində limiti var və bu limit 1-ə bərabərdir: $\quad \boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1}$

x-in həqiqi ədəd və ya bucağın radian ölçüsü olduğunu nəzərə alaraq, $x\to 0^+$ şərtində tərtib edilmiş qiymətlər cədvəlinə görə $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ funksiyasının qiymətinin 1-ə yaxınlaşdığını təxmin etmək olar.

$x\to 0^+$	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	0,99833416	0,99998333	0,99999983	0,99999999

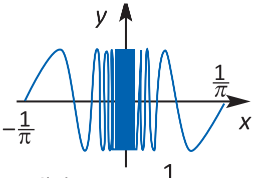
$f(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{-\sin x}{-x} = \dfrac{\sin x}{x} = f(x)$, yəni verilmiş funksiya cüt funksiya olduğundan $x\to 0^-$ şərtində də $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ olur.



$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ funksiyasının qrafkalkulyatorla qurulmuş qrafikindən də görünür ki,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Qeyd edək ki, $\lim\limits_{x\to 0} \sin(1/x)$ limiti yoxdur. Qrafkalkulyatorla qurulmuş qrafikdən göründüyü kimi, funksiya tək funksiyadır, periodik deyil. *x*-in qiyməti 0-a yaxınlaşdıqca funksiyanın qiymətləri –1 və 1 arasında dəyişir.



$f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$

Nümunə 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$ limitini tapın.

Həlli: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin 2x}{2x} = 2\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} = 2\cdot 1 = 2$

! $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin kx}{x} = k$ olduğunu göstərin. $t = kx$ işarə edin və $x = \dfrac{t}{k}$ olduğunu nəzərə alın.

Nümunə 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x-3\sin x}{x}$ limitini tapın.

Həlli: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x-3\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{10x}{x}-\dfrac{3\sin x}{x}\right]$ *İfadə iki kəsrin fərqi şəklində yazılır .*

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x}{x}-3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x}{x}$ *Fərqin limiti xassəsi tətbiq edilir.*

$=\lim\limits_{x\to 0}10-3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ *Limiti hesablanır.*

$=10-3\cdot 1=7$

Nümunə 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$ **olduğunu göstərin.**

Həlli: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}=$ *Surət və məxrəci $1+\cos x$ ifadəsinə vurulur*

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=$ *Sadələşdirilir*

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ olduğunu nəzərə alaq.

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}=$ *İfadə iki kəsrin hasili şəklində yazılır*

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)=$ *Hasilin limiti xassəsi tətbiq edilir*

$=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)=0$ *$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)=2$ qiymətləri nəzərə alınır.*

Öyrənmə tapşırıqları

1. Limitləri tapın.

1. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x$ 2. $\lim\limits_{x\to\pi}\tan x$ 3. $\lim\limits_{x\to 2}\cos\dfrac{\pi x}{3}$

4. $\lim\limits_{x\to\pi}\cos 3x$ 5. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\cos x}{\cot x}$ 6. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$

2. Limitləri tapın.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{5x}$ 2. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin 3t}{2t}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

4. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\cos\theta\tan\theta}{\theta}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$

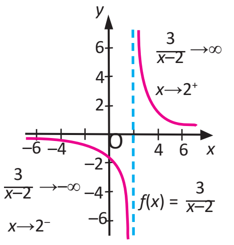
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(1-\cos x)}{x}$ 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}$

10. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin 3h-\sin h}{h}$ 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$ 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 5x-\sin 3x}$

3. Limitləri hesablayın.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{2x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2+2x-3}$

1. Sonsuz limitlər.



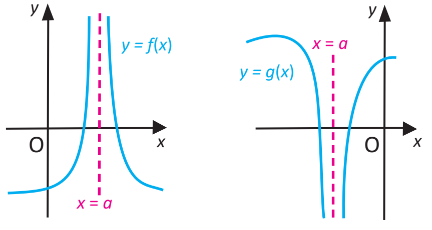
Nümunə. Şəkildə verilmiş $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ funksiyasının qrafikindən də göründüyü kimi, x-in qiyməti 2-yə sağdan yaxınlaşdıqca y-in qiyməti **sonsuz böyüyür.** Yəni

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{x-2} = +\infty$$

x-in qiyməti 2-yə soldan yaxınlaşdıqca y-in qiyməti **mənfi olmaqla modulca sonsuz böyüyür.** Yəni $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3}{x-2} = -\infty$

Sol və sağ limitlər müxtəlifdir, verilən funksiyanın $x = 2$ nöqtəsində limiti yoxdur.

Şəkildə qrafiki verilən $f(x)$ funksiyası isə həqiqi ədədlər çoxluğunun a ədədinin müəyyən ətrafında, a ədədindən başqa, bütün qiymətlərdə təyin olunmuşdur və $x\to a$ olduqda $f(x)\to\infty$. Bu, limitlə $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ kimi yazılır.



Oxşar yanaşma ilə $g(x)$ funksiyası üçün də $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ limiti funksiyanın sonsuz dəyişdiyini göstərir. Funksiyanın sonsuz dəyişməsini limitin köməyilə aşağıdakı 6 hal ilə ifadə etmək olar.

Şaquli asimptot.

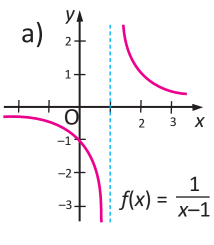
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$

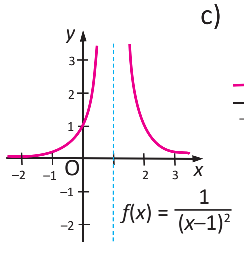
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = -\infty$

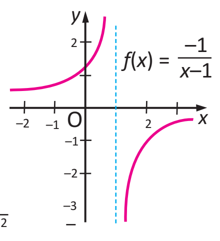
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to a^-} g(x) = -\infty$

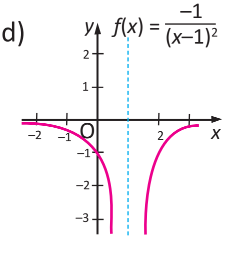
münasibətlərindən hər hansı biri ödənərsə, $x = a$ düz xətti verilən funksiyanın **şaquli asimptotudur**.

Nümunə. Verilən qrafiklərə görə funksiyanın $x = 1$ nöqtəsində sağ və sol limitləri araşdırın.

a)


b)


c)


d)


Həlli. a) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty$ və $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1}=+\infty$ *Funksiyanın limiti yoxdur, lakin sağ və sol limitlər funksiyanın necə dəyişdiyini göstərir.*

b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ *Funksiyanın həm sağ, həm də sol limiti $+\infty$ -dur*

c) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1}{x-1}=+\infty$ və $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-1}{x-1}=-\infty$ *Funksiyanın limiti yoxdur, lakin sağ və sol limitlər funksiyanın necə dəyişdiyini göstərir.*

d) $\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{(x-1)^2}=-\infty$ *Funksiyanın həm sağ, həm də sol limiti $-\infty$ -dur.*

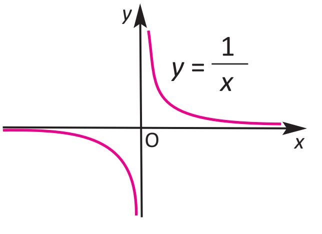
$x=1$ düz xətti bu funksiyaların şaquli asimptotudur.

f və g funksiyaları verilmiş intervalda kəsilməz funksiyalar, bu intervala daxil olan c nöqtəsində $f(c)\neq 0$, $g(c)=0$ və $x\neq c$ olduqda $g(x)\neq 0$ olarsa, $x=c$

düz xətti $r(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiyasının şaquli asimptotudur.

2. Funksiyanın sonsuzluqda limiti. Üfüqi asimptot

$y=\frac{1}{x}$ funksiyasının qrafiki üzərində x-in qiymətinin sonsuz dəyişməsi ilə (artması və ya azalması) funksiyanın dəyişməsinə bir daha nəzər salaq.



$f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyasının qrafikindən göründüyü kimi, $x\to+\infty$ olduqda $\frac{1}{x}$ sıfıra yaxınlaşır.

Bunu limitlə ifadə edək: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Həmçinin, $x\to-\infty$ olduqda da $\frac{1}{x}$ sıfıra yaxınlaşır: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$,

$y=0$ düz xətti $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyasının üfüqi asimptotudur.

Üfüqi asimptot. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ və ya $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ limitləri varsa, $y=b$ düz xətti $f(x)$ funksiyasının üfüqi asimptotudur.

Tərif. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ olarsa, $f(x)$-ə $x\to a$ olduqda sonsuz kiçilən deyilir.

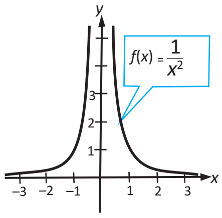
Məsələn, $\frac{1}{x}$ funksiyası $x\to\infty$ olduqda sonsuz kiçiləndir.

$x \to \infty$ olduqda f funksiyası sonsuz kiçiləndirsə, $\dfrac{1}{f}$ funksiyası sonsuz böyüyəndir. Məsələn, $x \to \infty$ olduqda $\dfrac{1}{x^2}$ sonsuz kiçilən, x^2 funksiyası isə sonsuz böyüyəndir.

> Sonlu sayda sonsuz kiçilən funksiyaların cəmi və hasili sonsuz kiçiləndir.
> Xüsusi halda, $n > 0$ olduqda $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

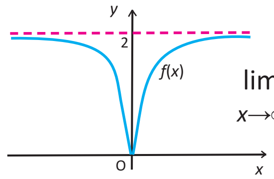
Nümunə. Qrafikə görə $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$-in tapılması.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

b) $f(x) = \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$



$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{1 + x^2} = 2$$

Limitin xassələri funksiyanın sonsuzluqda limiti üçün də doğrudur.

Nümunə. Limiti tapın. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - 5}{3x^2 - 1}$

Həlli: Kəsrin surət və məxrəcini x^2-na bölək və limitin xassələrini tətbiq edək.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x - 5}{3x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} \left(2 \cdot \frac{1}{x} - 5 \cdot \frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty} \left(3 \cdot 1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2 \cdot 0 - 5 \cdot 0}{3 - 1 \cdot 0} = 0$$

> **Teorem.** $x \to \pm\infty$ olduqda $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ funksiyası özünü çoxhədlinin baş həddi kimi aparır, başqa sözlə,
>
> $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} = 1$$
>
> Analoji olaraq, rasional funksiyanın iki çoxhədlinin nisbəti olduğunu nəzərə alsaq, rasional funksiyanın limiti üçün alarıq:
>
> $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^n + \text{daha kiçik dər. hədlər}}{bx^m + \text{daha kiçik dər. hədlər}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^n}{bx^m} = \begin{cases} \frac{a}{b}, & n = m \\ 0, & n < m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$
>
> Burada $a \neq 0$ və $b \neq 0$

Nümunə.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + 3}{3x^3 + 5x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + \frac{3}{x^3}}{3 + \frac{5}{x^2}} = \dfrac{2}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 1}{x + 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = +\infty$

Teoremə görə həll etsək:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 3}{3x^3 + 5x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{3x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Funksiyaların şaquli asimptotlarını müəyyən edin.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x + 8}$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 3}$

2. Funksiyaların üfüqi asimptotlarını (əgər varsa) $x \to \pm\infty$ olduqda limiti hesablamaqla müəyyən edin.

a) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ c) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 5}{x^2 - 1}$

3. Funksiyaların mümkün şaquli və üfüqi asimptotlarını rasional funksiyanın limiti haqqında teoremə görə müəyyən edin.

a) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 2}$ b) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 4}$ d) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 5}{x^2 - x}$

4. Limitləri tapın.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{7x - 1}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8x + 2}{4x - 5}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + 2x}{2x^2 - 2x + 1}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 2x - 5}{3x^2 + 2}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 3x}{4x^2 + 5}$ f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8 - \sqrt{x}}{1 + 4\sqrt{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{x + 2} - \dfrac{x - 1}{2x + 16}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

5. $x \to +\infty$ və $x \to -\infty$ olduqda $f(x)$ funksiyasının limitini hesablayın.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2}, & x > 1 \\ \dfrac{4x}{2x - 5}, & x \le 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 2}{x + 3}, & x > 0 \\ \dfrac{2x - 3}{x - 1}, & x \le 0 \end{cases}$

6. Verilmiş $f(x)$ və $g(x)$ çoxhədliləri üçün $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbətini yazın və $x \to \pm\infty$ olduqda bu nisbətin limitinin 1-ə bərabər olduğunu göstərin.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x - 1$, $g(x) = 3x^4$

b) $f(x) = 6x^3 - 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 6x^3$

7. $f(x)$ çoxhədlisini $g(x)$ çoxhədlisinə bölün, qalığı tapın. Rasional funksiyaların limiti haqqında teoremə görə qismət nəyi ifadə edir?

$f(x) = 6x^2 - 3x + 5$, $g(x) = 2x^2 - 3x$

$f(x) = 2x^3 - x^3 + x - 1$, $g(x) = x^3 - x^2 + 1$

Tətbiq tapşırıqları

Arqumentin qiyməti sonsuzluğa yaxınlaşdıqda funksiyanın necə dəyişməsini aşağıdakı məsələ üzərində nəzərdən keçirək.

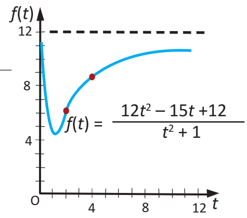
Nümunə. Göldəki suyun müəyyən miqdarında oksigenin konsentrasiyası normal vəziyyətdə 12 vahiddir. $t = 0$ zamanında müəyyən tullantıların gölə axıdılması nəticəsində oksigenin konsentrasiyası dəyişmişdir. Göl suyunda oksigen konsentrasiyasının miqdarının zamandan asılı dəyişməsinin

$$f(t) = \frac{12t^2 - 15t + 12}{t^2 + 1}$$

kimi olduğu müəyyən edimişdir. Zaman keçdikcə suda konsentrasiyanın necə dəyişdiyini izah edin? Oksigenin sudakı konsentrasiyası yenidən 12 vahid ola bilərmi?

Həlli: Verilən funksiyanın qrafikini qrafkalkulyatorla qursaq, t-nin qiymətlərinin sonsuz artması ilə funksiyanın qiymətinin 12-yə yaxınlaşdığını görmək olar. Lakin konsentrasiyanın 12-yə bərabər olması müşahidə edilmir. Bu situasiyanı limitlə riyazi olaraq $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = 12$ kimi ifadə edə bilərik.

t	$f(t)$
10	10,515
100	11,85
1000	11,985
10000	11,9985
100000	11,99985



Burada $y = 12$ düz xətti verilən funksiyanın üfüqi asimptotudur.

8. Orta qiymət. Xəstəxanada aparılan analizlərin ümümi qiymətini (manatla) $S(n) = 150 + 30n$ kimi hesablamaq olar. Burada n analizlərin sayını göstərir. Bir analizin $\overline{S}(n)$ orta qiymətini $S(n)$-i n-ə bölməklə tapmaq olar. $\lim\limits_{n \to \infty} \overline{S}(n)$-i tapın və situasiyaya uyğun izah edin.

9. Tibb. Qəbul edilmiş dərman preparatının qana sorulmasının t zamanından asılı olaraq dəyişməsini $M(t) = \dfrac{0{,}21t}{t^2 + 2}$ düsturu ilə müəyyən etmək olar.

$\lim\limits_{t \to \infty} M(t)$ -ni tapın və situasiyaya uyğun izah edin.

10. İş məhsuldarlığı. Şirkətin menecerlərinin apardığı araşdırmalara görə işçinin məhsuldarlığı işlədiyi n gün ərzində $P(n) = \dfrac{64n}{n + 8}$ dusturuna görə dəyişir. $\lim\limits_{n \to \infty} P(n)$-i tapın və situasiyaya uyğun şərh edin.

11. Pinqvinlər. Antarktidada pinqvinlərin sayının zamandan asılı dəyişməsi $N(t) = \dfrac{400\,000}{1 - 0{,}143e^{-0{,}01t}}$ düsturu ilə müəyyən edilə bilər.

a) On ildən sonrakı pinqvinlərin sayını ($t = 10$) hesablayın.

b) Pinqvinlərin sayının sonsuz artmadığı məlumdur. t zamanı sonsuzluğa yaxınlaşdıqda pinqvinlərin sayını verilən düstura görə limiti hesablamaqla tapın.

Ümumi həddi $a_n = \dfrac{2n+1}{n}$ olan ardıcıllığın ilk bir neçə həddini yazaq:

$$3; \frac{5}{2}; \frac{7}{3}; \frac{9}{4}; \frac{11}{5}; \frac{13}{6}; \ldots$$

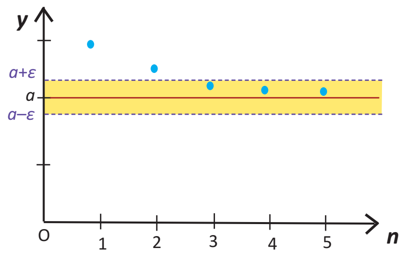
Göründüyü kimi, n artdıqca ardıcıllığın hədlərinin qiyməti azalır və 2-yə yaxınlaşır.

Doğrudan da, $|a_n - 2| = \left|\dfrac{2n+1}{n} - 2\right| = \dfrac{1}{n}$ olduğundan, n böyüdükcə $a_n - 2$ fərqinin modulu 0-a kifayət qədər yaxın olur.

Məsələn, 11-cidən başlayaraq ($n > 10$) bütün hədlər üçün $|a_n - 2| < 0{,}1$ münasibəti, 101-cidən başlayaraq ($n > 100$) sonrakı bütün hədlər üçün $|a_n - 2| < 0{,}01$ münasibəti ödənir. Ümumiyyətlə, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədinə görə elə N nömrəsi tapmaq olar ki, $n > N$ şərtini ödəyən bütün n-lər üçün $|a_n - 2| < \varepsilon$ olur. Bu halda deyilir ki, baxılan ardıcıllığın limiti 2-dir.

Tərif. Tutaq ki, a_n ardıcıllığı verilmişdir və istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə N nömrəsi var ki, bu nömrədən sonra gələn bütün n-lər ($n > N$) üçün $|a_n - a| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənir. Onda a ədədinə a_n ardıcıllığının limiti deyilir və bu $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ kimi yazılır.

Tərifdən aydındır ki, a ədədi a_n ardıcıllığının limitidirsə, verilmiş ε ədədi üçün ardıcıllığın müəyyən nömrədən sonra gələn bütün hədləri $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ ətrafında yerləşir və bu ətrafdan kənarda ardıcıllığın sonlu sayda həddi yerləşə bilər. Bu o deməkdir ki, $n > N$ olduqda koordinat sistemində $(n; a_n)$ nöqtələri $a - \varepsilon < y < a + \varepsilon$ zolağındadır.



Sonlu limiti olan ardıcıllığa **yığılan ardıcıllıq**, sonlu limiti olmayan ardıcıllığa isə **dağılan ardıcıllıq** deyilir.

Xassə. Ardıcıllığın limiti varsa, yeganədir.

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ olarsa, α_n ardıcıllığına sonsuz kiçilən deyilir. Məsələn, n-ci həddi

$\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2}; \frac{1}{n^3}; \ldots; \frac{A}{n^k}$ (A hər hansı ədəd, $k \in N$) olan ardıcıllıq sonsuz kiçiləndir.

Hər bir yığılan ardıcıllıq onun limiti ilə sonsuz kiçilənin cəminə bərabərdir və tərsinə: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n, \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

Məsələn, $a_n = \frac{2n+1}{n} = \frac{2n}{n} + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$ və $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ olduğundan,

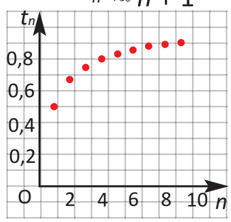
$a_n = \frac{2n+1}{n}$ ardıcıllığı yığılandır və limiti 2-yə bərabərdir: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$.

Nümunə. Ardıcıllıqların limiti varsa, tapın, yoxdursa, səbəbini izah edin.

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$ b) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \ldots, 3^{n-2}, \ldots$

Həlli: a) Göstərək ki, $t_n = \frac{n}{n+1}$ ardıcıllığı üçün $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 1$. $n \to \infty$ olduqda

$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0$ olduğundan, tərifə görə $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.



Ardıcıllığın limitinin 1-ə bərabər olmasını n-in kifayət qədər qiymətləri üçün koordinat müstəvisində $(n; t_n)$ nöqtələrini qeyd etməklə də görmək olar.

b) n sonsuz böyüdükcə $a_n = 3^{n-2}$ ardıcıllığının hədləri sonsuz böyüyür, yəni sonsuzluğa yaxınlaşır. Deməli, ardıcıllığın sonlu limiti yoxdur. Uyğun nöqtələri koordinat sistemində qeyd etməklə də bunu görə bilərik.

Dövri onluq kəsrlər sonlu limiti olan ədədi ardıcıllıqlara bir nümunədir.

$$0{,}3333(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots = \frac{1}{3}$$

Baxılan dövri onluq kəsr ümumi həddi $b_n = 3 \cdot 10^{-n}$, silsilə vuruğu $q = \frac{1}{10}$ olan sonsuz həndəsi silsilənin cəmidir. Bu sonsuz cəmə onun ilk n həddinin $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ cəmlər ardıcıllığının limiti kimi baxsaq, bu limit

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0{,}3(1-10^{-n})}{1-0{,}1} = \frac{0{,}3}{0{,}9} = \frac{1}{3}$$ olar.

Qeyd edək ki, a_n ədədi ardıcıllığı natural ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş funksiyadır. Göstərmək olar ki, hər hansı $f(x)$ funksiyası üçün $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ və $a_n = f(n)$ olarsa, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Məsələn, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+x}{3x^2+1} = \dfrac{2}{3}$ olduğundan, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n}{3n^2+1} = \dfrac{2}{3}$

Funksiyanın $x\to\infty$ olduqda limitinin məlum xassələri ardıcıllığın limiti üçün də doğrudur.

Tutaq ki, x_n və y_n ardıcıllıqları yığılandır və $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.
Onda:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a + b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a - b$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (c\cdot x_n) = c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c\cdot a$ (burada c hər hansı sabitdir)

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a\cdot b$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{a}{b}$ $(b\neq 0,\ y_n\neq 0)$

Nümunə. Hesablayın: $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+2n} - n)$

Həlli: Mötərizə daxilindəki ifadəni qoşma irrasional ifadəyə vurub-bölərək, limitlər haqqında xassələri tətbiq etsək,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2(1+\frac{2}{n})}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\cancel{n}}{\cancel{n}(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1)} = \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} = 1$$

alarıq.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Aşağıdakı ardıcıllıqların hədlərinin hansı ədədə yığıldığını təxmin edin.

a) 0,5; 0,55; 0,555; 0,5555; 0,55555; ...

b) 0,36; 0,3636; 0,363636; 0,36363636; ...

c) 3; 3,1; 3,14; 3,141;3,1415; 3,14159; 3,141592; ...

2. Ardıcıllığın limiti varsa, yazın. Yoxdursa, səbəbini izah edin.

a) 1; −1; 1; −1; 1; −1; 1; −1; ...
b) 5,9; 5,99; 5,999; 5,999 9; 5,999 99; 5,999 999; ...
c) 3,1; 3,01; 3,001; 3,000 1; 3,000 01; ...
d) 3; 2,9; 3; 2,99; 3; 2,999; 3; 2,999 9; ...

3. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ düsturu ilə verilmiş ardıcıllığın $n = 99; 999; 9999$ nömrəli hədlərini tapın və alınan qiymətləri müqayisə edin. n-in qiymətləri böyüdükcə $|a_n - 1|$ ifadəsinin qiymətinin dəyişməsi haqqında yazın. $n \to \infty$ olduqda $a_n - 1$ sonsuz kiçiləndirmi? $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$-i tapın.

4. Verilmiş ardıcıllığın limiti varsa, tapın. Yoxdursa səbəbini izah edin.

a) $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots;$ $\quad f(n) = \dfrac{n-1}{n}$

b) $\frac{1}{2}; \frac{4}{3}; \frac{9}{4}; \frac{16}{5}; \ldots;$ $\quad f(n) = \dfrac{n^2}{n+1}$

c) $2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots;$ $\quad f(n) = 2^{2-n}$

d) $4; 5\frac{1}{2}; 4\frac{2}{3}; 5\frac{1}{4}; 4\frac{4}{5}; 5\frac{1}{6}; \ldots;$ $\quad f(n) = 5 + \dfrac{(-1)^n}{\text{n}}$

5. Limitləri hesablayın.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \dfrac{2}{n}\right)$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+3}{n}$ 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6\text{n}-1}{3n+2}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^2+1}$ 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{n^3+1}$ 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3n^2}{n^2+1}$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(3^n)}{n}$ 8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{5\sqrt{4^n}}$ 9) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+2n+1}}{1-2n^3}$

10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^{10}+2}{(n^2+1)^5}$ 11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{2n} - \dfrac{2n-1}{4}\right)$ 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\cdot(2n+3)}{(n+2)\cdot(4n+1)}$ 14) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(2n+1)\cdot n}$

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$ 16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+n} - 2n\right)$

Monoton və məhdud ardıcıllığın limiti

n-in bütün qiymətlərində $a_{n+1} > a_n$ ödənərsə, a_n ardıcıllığı artan, $a_{n+1} < a_n$ ödənərsə, azalan ardıcıllıq adlanır. Məsələn, $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ ardıcıllığı artandır. Doğrudan da,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n\cdot(n+2)}{(n+2)\cdot(n+1)} = \frac{1}{(n+2)\cdot(n+1)} > 0.$$

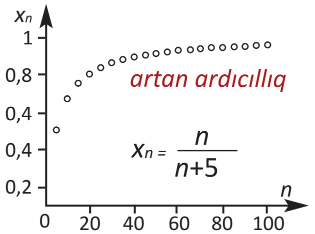
$c_n = \dfrac{n}{3^n}$ ardıcıllığı isə azalandır. Bu ardıcıllığın bütün hədləri müsbətdir və

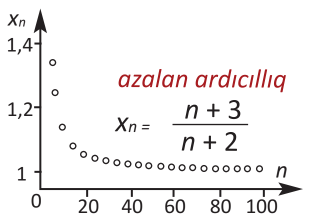
$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} : \frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{2}{3} < 1$$

olduğundan $c_{n+1} < c_n$ alarıq.

Artan və ya azalan ardıcıllıqlara **monoton ardıcıllıq** deyilir.

Monoton ardıcıllıqlara qrafiklə verilmiş nümunələr





Hər hansı m və M ədədləri üçün $m \leq a_n \leq M$ ($n \in N$) bərabərsizliyi ödənərsə, a_n ardıcıllığına məhdud ardıcıllıq deyilir.

Veyerştras teoremi. İstənilən monoton və məhdud ardıcıllığın limiti var.

İkinci görkəmli limit

Göstərmək olar ki, ümumi həddi $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ olan ardıcıllıq artan və məhdud olduğundan, limiti var və e ədədinə bərabərdir:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \text{ burada } e = 2{,}718281828459045....$$

Qeyd: e ədədi ilə bağlı bir çox limitləri hesablayarkən aşağıdakıları qəbul edəcəyik: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ isə, onda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$

Nümunə. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n$ limitini hesablayın.

Həlli: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^2$

Nümunə. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+1}\right)^{2n}$ limitini hesablayın.

Həlli: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+1}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\left(\dfrac{3}{n+1}\right)\right)^{\frac{n+1}{3}}\right)^{\frac{6n}{n+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n}{n+1}} = e^6$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ münasibətində n natural ədəddir. Göstərmək olar ki, x istənilən həqiqi ədəd olduqda da $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ münasibəti doğrudur.

Sonuncu münasibəti $\dfrac{1}{x} = t$ ilə əvəz etməklə $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ kimi də yazmaq olar.

Bu limitdən istifadə edərək $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t} = 1$ olduğunu da göstərmək mümkündür.

Nümunə. $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}}$ limitini hesablayın.

Həlli: $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}} = \lim\limits_{t\to 0}\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Öyrənmə tapşırıqları

6. Limitləri hesablayın.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{3n}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n}$

d) $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{5}{t}}$ e) $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{3+t}{t}}$ f) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{t+1}{2t+1}\right)^{\frac{1}{t}}$

7. $a_n = \dfrac{n+3}{n}$ ardıcıllığının monoton azalan və məhdud olduğunu araşdırın və limitinin 1-ə bərabər olduğunu göstərin.

8. Təsəvvür edin ki, 1 manat pul 1 illiyə banka qoyulmuşdur və il ərzində hər dəfə $\dfrac{100}{n}\%$ artımı ilə n dəfə hesablama aparılır.

1. a) illik, b) yarımillik, c) rüblük, d) aylıq, e) günlük, f) dəqiqəlik hesablamalarla alınmış məbləği tapın.

2. Aşağıdakı ardıcıllıqla bu hesablamaların hansı əlaqəsi var?

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \left(1+\frac{1}{4}\right)^4,\dots,\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\dots$$

3. e ədədi ilə bu ardıcıllığın hansı əlaqəsi var?

1. Limitləri hesablayın (əgər varsa).

1. $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-4x+1)$ 2. $\lim\limits_{x\to 4} 3(1-x)(2-x)$ 3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x+6}$

4. $\lim\limits_{t\to -4}\dfrac{t^2}{4-t}$ 5. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 6. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ 8. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$ 9. $\lim\limits_{h\to 2}\dfrac{1}{4-h^2}$

10. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3h^2+4h^3}{h^2-h^3}$ 11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$ 12. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x-2|}{x-2}$ 14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$ 15. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^2-2t+1}{t^2-1}$

2. Funksiyanın kəsilməzliyini araşdırın.

1) $f(x)=\pi$ 2) $f(x)=x^2+8x-10$ 3) $f(x)=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-4)}$

4) $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+2)(x-5)}$ 5) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 6) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$

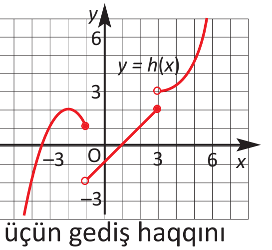
3. x-in modulca çox böyük qiymətlərində rasional funksiya özünü surət və məxrəcdəki çoxhədlilərin baş hədlərinin nisbətinin ifadə etdiyi funksiya kimi aparır. Bu funksiyaya verilən rasional funksiyanın sonsuzluqda dəyişməsini göstərən model də deyilir. Verilən funksiyaların sonsuzluqda modelini müəyyən edin. Əgər varsa, üfüqi asimptotunu tapın.

1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-2x+1}$ 2) $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-1}{x^2+2x}$ 3) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x+3}{x-3}$

4. Qrafikə görə tapın (mümkün olduqda).

a) $\lim\limits_{x\to -1^-} h(x)$ b) $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)$ c) $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$ d) $h(-1)$

e) $\lim\limits_{x\to 3^-} h(x)$ f) $\lim\limits_{x\to 3^+} h(x)$ g) $\lim\limits_{x\to 3} h(x)$ h) $h(3)$



5. Taksi xidməti göstərən şirkət qət edilən ilk üç kilometr üçün gediş haqqını 3 ₼, hər sonrakı kilometr üçün isə 0,60₼ müəyyən etmişdir.
a) Xidmət haqqının məsafədən asılılığını əks etdirən funksiyanı yazın və qrafikini qrafkalkulyatorla qurun.
b) Şirkətin xidmətindən istifadə edən müştəri 8 km yol üçün nə qədər ödəməlidir?
c) Bu situasiyaya uyğun xidmət haqqı funksiyasının kəsilməzliyini araşdırın.

6. Bir çevrə daxilinə çəkilmiş düzgün dördbucaqlı, səkkizbucaqlı, onaltıbucaqlı və s. düzgün çoxbucaqlıların perimetrləri ardıcıllığının artan və məhdud olduğunu həndəsi izah edin.

7. $f(x)=\dfrac{x+|x|}{x}$ funksiyasının $x=0$ nöqtəsində sağ və sol limitlərini tapın

4

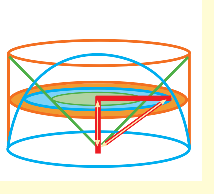
Fırlanma fiqurları. Silindr, konus, kürə

- Fırlanma fiqurları
- Silindr
- Silindrin səthinin sahəsi
- Konus
- Konusun səthinin sahəsi
- Kəsik konus və səthinin sahəsi
- Kürə və onun hissələri
- Kürə səthinin sahəsi
- Kompleks fiqurların səthinin sahəsi
- Fırlanma fiqurlarının müstəvi kəsikləri
- Oxşar fiqurların səthinin sahəsi

Riyazi lüğət

- ✓ fırlanma oxu
- ✓ fırlanma fiqurları
- ✓ silindr
- ✓ konus
- ✓ doğuran
- ✓ kürə
- ✓ böyük dairə
- ✓ kürə seqmenti
- ✓ kürə qurşağı
- ✓ kürə qatı

Bunları bilmək maraqlıdır!



Böyük yunan alimi Arximed kürənin və onu əhatə edən silindrin həm səthlərinin, həm də həcmləri nisbətinin 2:3 kimi olduğunu aşkar etdikdə çox həyəcanlanmışdı. Riyaziyyatçı, fizik, mühəndis kimi böyük kəşflərə və ixtiralara imza atmış Arximed bütün işlərindən ən dəyərlisini məhz bu faktı sayırdı. O, öləndə qəbri üzərində bu isbatı göstərən qravürün cızılmasını istəmişdi. Tarixdən məlumdur ki, Arximedin Sicilyada yerləşən doğma şəhəri Sirakuz romalıların mühasirəsinə qarşı onun ixtira etdiyi silahlarla döyüşürdü. Romalı sərkərdə şəhərə daxil olduqda Arximedi öldürməmək əmri vermişdi. Lakin üzdən Arximedi tanımayan əsgər onu qətlə yetirmişdi. Böyük filosof, yazıçı Siseron axtarışlar aparmış və Arximedin ölümündən çox sonralar (tarixi məlumatlara görə 137 il sonra) onun qəbrini tapmışdı. Siseronun bu işi bir çox rəssamların əsərlərinin mövzusu olmuşdur.

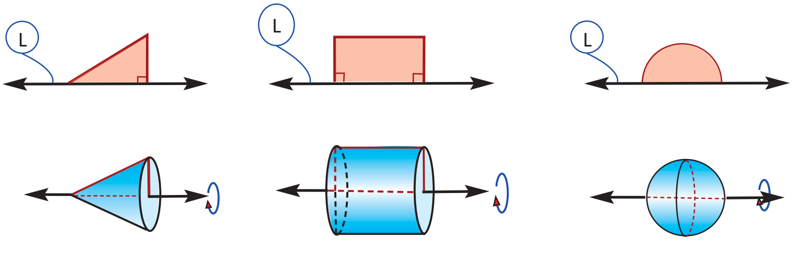
Dulusçuluq gildən hazırlanmış palçıq kündələrinin ox ətrafında fırladılaraq xüsusi formaya salınması və bişirilməsi ilə saxsı qabların hazırlanması sənətidir. Bu sənət indi də yaşamaqdadır. Azərbaycanın müxtəlif rayonlarında kuzə, qazan və s. kimi məişət qabları düzəldən sənətkarlar fəaliyyət göstərir. Gil palçığı müxtəlif formalara salan dəzgahın iş prinsipini araşdırın.

https://www.youtube.com/watch?v=4Qiu4iFeXl0

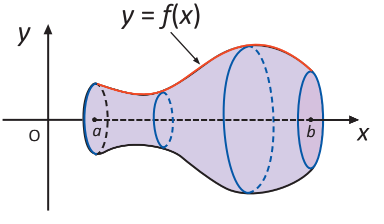
Müstəvi fiqurun müəyyən ox ətrafında fırlanmasından müxtəlif fəza fiqurları alınır. Bu oxa **fırlanma oxu** deyilir.
Silindr, konus, kürə bu cür fırlanmadan alınan sadə fəza fiqurlarıdır.

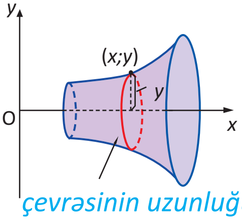
Məsələn, düzbucaqlı üçbucağın kateti ətrafında fırlanmasından konus, düzbucaqlının bir tərəfi ətrafında fırlanmasından silindr, yarımdairənin diametri ətrafında fırlanmasından isə kürə yaranır.

L fırlanma oxudur

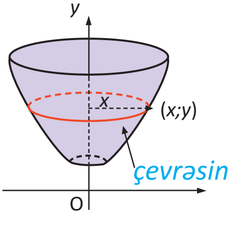


Fırlanmadan alınan fiqurlar





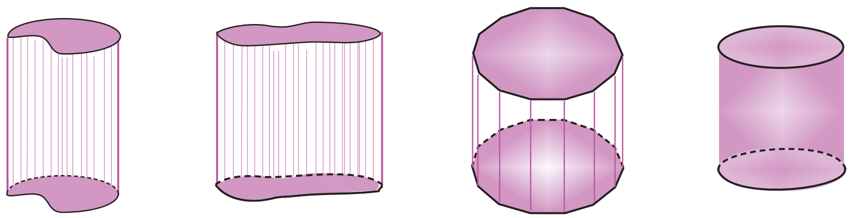
çevrəsinin uzunluğu = 2πy



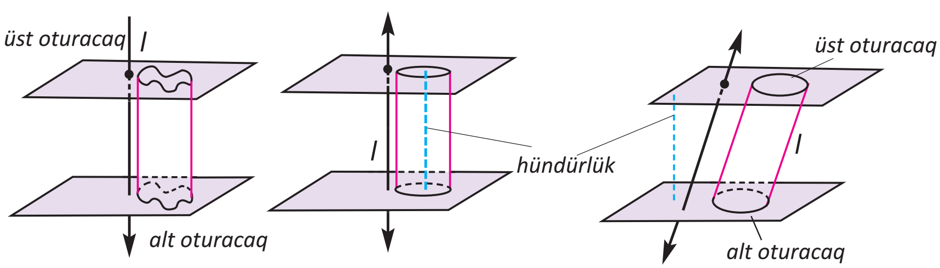
çevrəsinin uzunluğu = 2πx

İctimai binaların, otellərin, xəstəxanaların girişindəki fırlanan şüşə qapılar fırlanma fiqurlarının necə alındığını təsəvvür etmək üçün əyani nümunədir. Qapının düzbucaqlı layı tərpənməz dayaq ətrafında fırlanaraq silindr cızmış olur.

Paralel müstəvilər üzərində yerləşən və paralel köçürmədə üst-üstə düşən iki konqruyent müstəvi fiqur və onların uyğun nöqtələrini birləşdirən bütün parçaların yaratdığı fəza fiquruna **silindr** deyilir. Bu müstəvi fiqurlar silindrin **oturacaqları**, onların uyğun nöqtələrini birləşdirən parçalar isə silindrin **doğuranı** adlanır. Doğuranı oturacaq müstəvisinə perpendikulyar olan silindrə düz silindr, əks halda mail silindr deyilir. Oturacaq müstəviləri arasındakı məsafəyə silindrin **hündürlüyü** deyilir.

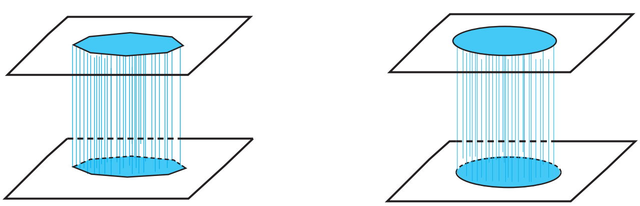


Aşağıdakı şəkildə düz və mail silindrlərin alınması əks edilmişdir.



Düz silindr **Mail silindr**

Aşağıda verilmiş şəkillərin müqayisəsindən belə nəticəyə gəlmək olar ki, prizmaya silindrin xüsusi halı kimi də baxmaq mümkündür.

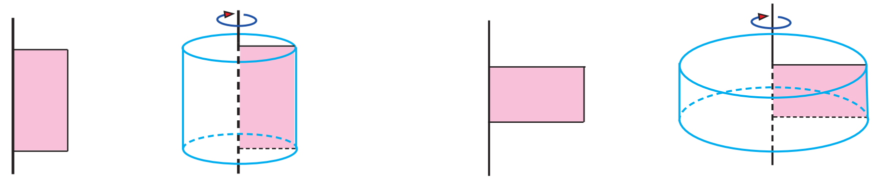


Oturacağı dairə olan düz silindrə **düz dairəvi silindr** deyilir.

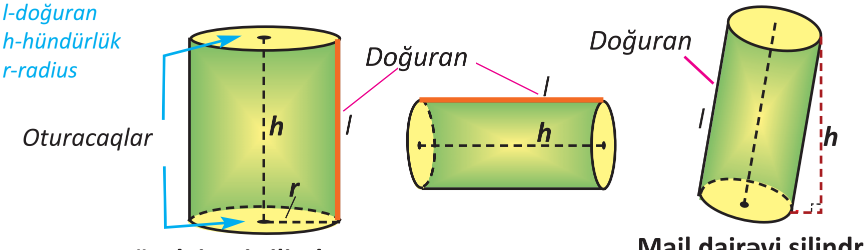
Biz bundan sonra silindr dedikdə düz dairəvi silindri nəzərdə tutacağıq. Digər hallarda silindrin əlamətləri qeyd olunacaqdır.

Düz dairəvi silindrə həm də düzbucaqlının bir tərəfi ətrafında fırlanmasından alınan fəza fiquru kimi baxmaq olar.
Düz dairəvi silindrin doğuranı hündürlüyünə bərabərdir.
Oturacağındakı dairənin radiusuna **silindrin radiusu** deyilir.

Düzbucaqlının müxtəlif tərəfləri ətrafında fırlanması ilə hündürlüyü bu tərəflər olan silindrlər almaq olar.



Düz dairəvi silindrin oturacaqlarının mərkəzlərindən keçən düz xəttə **silindrin oxu** deyilir.



Düz dairəvi silindr

Mail dairəvi silindr

Öyrənmə tapşırıqları

1. Mail silindrin doğuranı 12 sm olub, oturacaq müstəvisi ilə 60°-li bucaq əmələ gətirir. Silindrin hündürlüyünü tapın.

2. Tərəfləri 3 sm və 4 sm olan düzbucaqlının tərəflərindən biri ətrafında fırlanmasından alınan silindrin hündürlüyünü və oturacağının diametrini tapın (iki hala baxın).

3. Tərəfləri 20 sm və 30 sm olan düzbucaqlı kağız vərəqi yuvarlaq bükməklə alınan silindrin radiusunu tapın (iki hala baxın). Cavabı yüzdəbirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.

Silindrin yan səthinin və tam səthinin sahəsi.

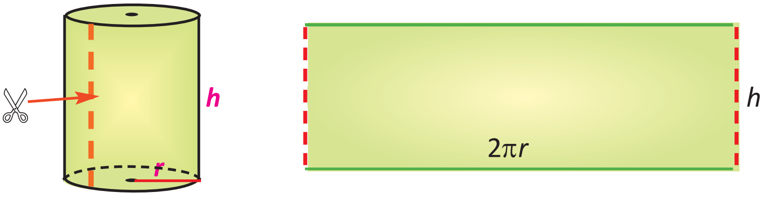
Müxtəlif ölçülü silindrləri kağız üzərində açılış şəkillərini çəkib, kəsib yapışdırmaqla quraşdırın.

Mustafa silindrşəkilli fırça ilə divarı rəngləyir. O, işə sərf olunacaq vaxtı hesablamaq üçün fırçanın bir tam dövründə nə qədər sahənin rəngləndiyini bilmək istəyir. Siz ona hansı məsləhətləri verərdiniz?

Fırça silindrik formada olduğundan bir tam dövrdə silindrin yan səthinin sahəsi qədər düzbucaqlı formalı müstəvi hissəsini rəngləmiş olacaq.

Silindrin tam səthinin sahəsi də prizmanın tam səthinin sahəsinə oxşar düsturla hesablanır. Silindrin tam səthi onun yan səthindən və iki konqruyent dairədən ibarətdir.

Hündürlüyü h, radiusu r olan silindrin yan səthinə ölçüləri $2\pi r$ və h olan düzbucaqlının r radiuslu çevrənin ətrafına bükülməsi kimi baxmaq olar.



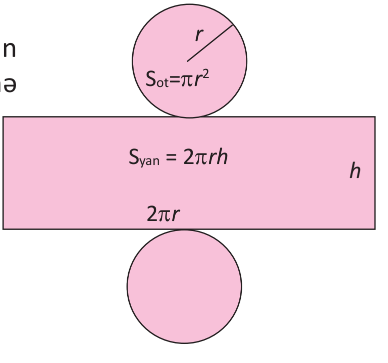
Silindrin **yan səthinin sahəsi** oturacaq çevrəsinin uzunluğu ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir:

$$\mathbf{S_{yan} = 2\pi rh}$$

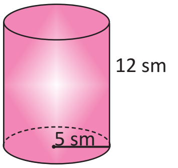
Silindrin **tam səthinin sahəsi** yan səthinin sahəsi ilə oturacaqları sahələrinin cəminə bərabərdir:

$$\mathbf{S_{tam} = S_{yan} + 2S_{ot}}$$

$$\mathbf{S_{tam} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)}$$



Nümunə. Hündürlüyü 12 sm, radiusu 5 sm olan silindrin tam səthinin sahəsini tapın.



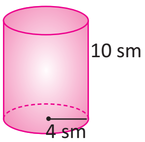
Həlli: $S_{yan} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 5 \cdot 12 = 120\pi \approx 376{,}8$ (sm^2)

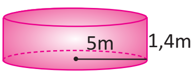
$S_{ot} = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \approx 78{,}5$ (sm^2)

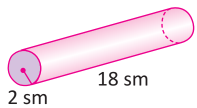
$S_{tam} = S_{yan} + 2S_{ot} = 120\pi + 2\cdot 25\pi = 170\pi \approx 533{,}8$ (sm^2)

Öyrənmə tapşırıqları

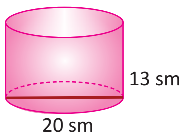
1. Verilən ölçülərinə görə silindrlərin tam səthinin sahəsini tapın.

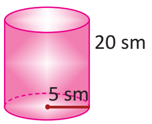
a) 

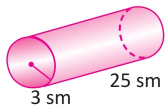
b) 

c) 

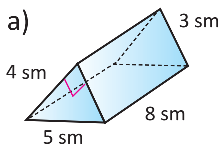
2. Ağzıaçıq silindr formalı qabın həm xarici, həm daxili səthi boyanmalıdır. Boyanmalı sahəni tapın.

a) 

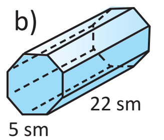
b) 

c) 

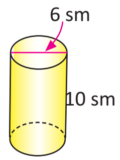
3. Prizma və silindrlərin tam səthlərinin sahəsini hesablayın.

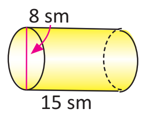
a) 

Düz üçbucaqlı prizma

b) 

Düzgün səkkizbucaqlı prizma

c) 

d) 

4. Silindrin radiusu və hündürlüyü iki dəfə artırılsa:
a) yan səthinin sahəsi necə dəyişər?
b) tam səthinin sahəsi necə dəyişər?

5. Silindrin hündürlüyü radiusundan 10 sm böyük olub, tam səthi 144π sm^2-dır. Silindrin hündürlüyünü və radiusunu tapın.

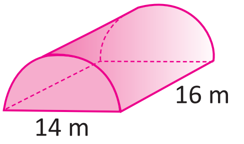
6. Silindrin yan səthinin açılışı diaqonalı 10 m, tərəflərindən biri 6 m olan düzbucaqlıdır. Bu silindrin tam səthini tapın. Mümkün halları araşdırın.

7. Hündürlüyü oturacağının diametrinə bərabər olan silindrin yan səthinin sahəsinin tam səthinin sahəsinə nisbətini tapın.

8. Qutu silindrşəkilli olmaqla radiusu 6 sm, hündürlüyü isə 14 sm-dir. Qutunun yalnız üst oturacağının hazırlanmasında kartondan istifadə edilməmişdir. Qutuya ən azı neçə kvadrat santimetr karton işlədilmişdir?

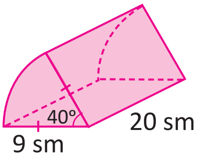
Tətbiq tapşırıqları

Nümunə 1. Oturacağı yarımdairə olan və ölçüləri şəkildə verilmiş düz silindrin yan səthinin sahəsini tapın.



Həlli: $S_{yan\ kəs} = \pi rh + 2rh = \pi \cdot 7 \cdot 16 + 14 \cdot 16 =$
$= 112\pi + 224 \approx 575{,}86\ (m^2)$

Nümunə 2. Şəkildə verilənlərə görə oturacağı 40°-li dairə sektoru olan düz silindrin tam səthinin sahəsini tapın.



Həlli: $S_{tam} = 2 \cdot S_{ot} + S_{yan}$ olduğunu bilirik.
Sektorun sahə düsturuna görə:

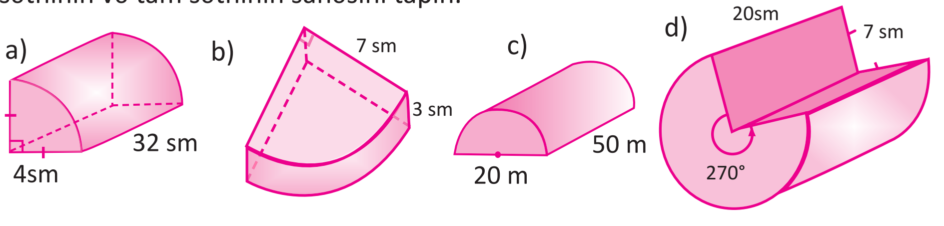
$$S_{ot} = \frac{\theta}{360}\pi r^2 = \frac{40}{360} \cdot \pi \cdot 9^2 = 9\pi\ (sm^2)$$

Fiqurun yan səthi radiusu 9 sm, hündürlüyü 20 sm olan silindrin yan səthinin $\frac{1}{9}$ hissəsi qədər üstəgəl ölçüləri 9 sm × 20 sm olan iki konqruyent düzbucaqlıdan ibarətdir:

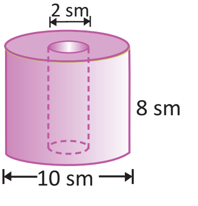
$$S_{yan} = \frac{1}{9} \cdot 2\pi \cdot 9 \cdot 20 + 2 \cdot 9 \cdot 20 = 40\pi + 360\ (sm^2)$$

Beləliklə, $S_{tam} = 2 \cdot S_{ot} + S_{yan} = 2 \cdot 9\pi + 40\pi + 360 = 58\pi + 360 \approx 542{,}21 (sm^2)$

9. Şəkildə verilən ölçülərə görə düz dairəvi silindrin hissələri olan fiqurların yan səthinin və tam səthinin sahəsini tapın.



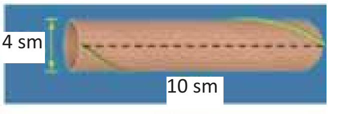
10. Maşın və mexanizmlərin bəzi detalları, borular oyuq silindr şəkillidir. Oyuq silindirn yan səthi daxili və xarici yan səthlərin cəmi kimi, oturacaqların sahəsi isə radiusların fərqinə görə hesablanır. Bunları nəzərə alaraq:
a) Şəkildəki fiqurun yan səthini və tam səthini hesablayın.
b) Oyuq silindrlərin yan səthinin və tam səthinin sahəsini hesablamaq üçün düsturlar yazın.



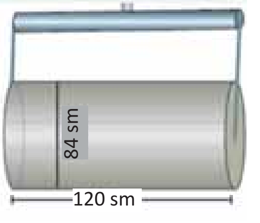
11. Silindrik formada olan tüstü borusunun diametri 70 sm, hündürlüyü 20 m-dir. Bu ölçüdə tüstü borusu hazırlamaq üçün neçə kvadrat metr dəmir təbəqə lazımdır? İşlənən dəmirin 5%-i itkiyə gedir.

12. Asfaltbərkidən maşının asfaltı bərkidib düzləyən iki silindrşəkilli hissəsi var. Böyük silindrin hündürlüyü 1,25 m, diametri isə 1,5 m-dir. Bu hissə bir tam dövrdə nə qədər yer səthini düzləyər?

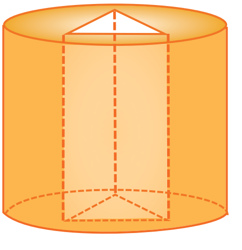
13. Silindrşəkilli hədiyyə qutusunun örtüyünü açma xətti qırıq xətlə nişanlanmışdır.
Rəngli ip açma xəttinin bir ucundan başlayaraq silindrə sarınmış (bir qat) və onun digər ucuna bərkidilmişdir. Silindrin oturacağının diametri 4 sm, hündürlüyü 10 sm olarsa, ipin uzunluğunu tapın.
Göstəriş: Silindrin açılış şəkli üzərində ipin həndəsi izahını müəyyən edin.



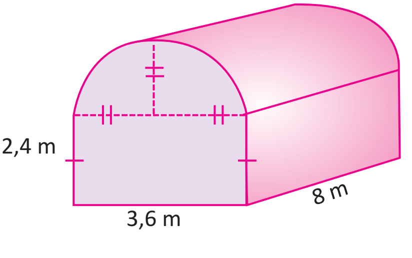
14. Oyun sahəsini düzləmək üçün diametri 84 sm, uzunluğu 120 sm olan silindrik baraban 500 dəfə tam dövr etməlidir. Oyun sahəsi neçə kvadrat metrdir?



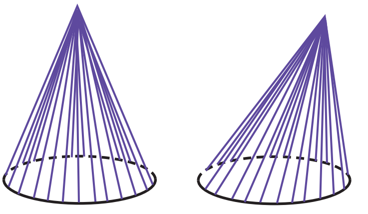
15. Radiusu 10 sm, hündürlüyü 12 sm olan silindrin içində şəkildə göstərildiyi kimi oturacağının tərəfləri 3 sm, 4 sm, 5 sm olan düz üçbucaqlı prizma şəklində oyuq açılmışdır. Alınan fiqurun tam səthi boyanmalıdır. Nə qədər sahə boyanmalıdır?



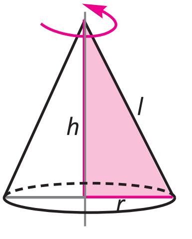
16. Ölçüləri şəkildə göstərilən istixananın üstü və yanları polietilenlə örtülməlidir. Polietilen uzunluğu 15 m, eni 2 m olmaqla rulonlarla satılır. Bu işi görmək üçün ən azı neçə rulon polietilen alınmalıdır?



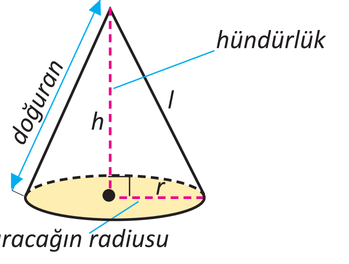
Hər hansı müstəvi fiqurun nöqtələrini onun müstəvisinə aid olmayan nöqtə ilə birləşdirən bütün parçaların yaratdığı fəza fiquruna **konus** deyilir. Müstəvi fiqura konusun oturacağı, həmin nöqtəyə isə konusun **təpə nöqtəsi** deyilir. Konusun təpəsindən oturacaq müstəvisinə endirilmiş perpendikulyara konusun **hündürlüyü** deyilir. Oturacağı dairə olan konusa **dairəvi konus**, təpəsi oturacağının mərkəzinə perpendikulyar proyeksiyalanan dairəvi konusa isə **düz dairəvi konus** deyilir. Dairəvi konusun təpə nöqtəsini oturacaq çevrəsinin hər hansı nöqtəsi ilə birləşdirən parçaya konusun **doğuranı** deyilir. Bundan sonra konus dedikdə düz dairəvi konusu nəzərdə tutacağıq.



Konusa düzbucaqlı üçbucağın katetlərindən biri ətrafında fırlanmasından alınan fəza fiquru kimi də baxmaq olar.

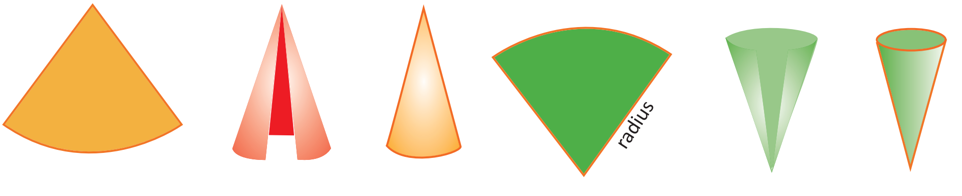


Konusun təpə nöqtəsindən və oturacağının mərkəzindən keçən düz xəttə **konusun oxu**, oturacağının radiusuna isə **konusun radiusu** deyilir. Konusun doğuranı, hündürlüyü və radiusu arasında $l^2 = h^2 + r^2$ münasibəti doğrudur (Pifaqor teoreminə görə).



Konusun quraşdırılması.

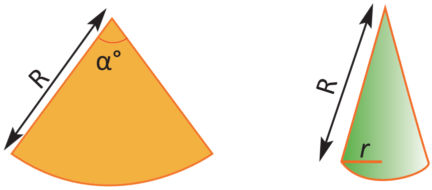
Məlumdur ki, düzbucaqlını yuvarlaq bükməklə silindr quraşdırmaq olur. Dairə sektorunu yuvarlayaraq bükməklə konus quraşdırmaq olar.



Sektorun radiusu konusun doğuranına, qövsünün uzunluğu isə oturacaq çevrəsinin uzunluğuna bərabər olur.

Kiçik layihə işi. Dairə sektoru ilə konusun doğuranı və oturacağının radiusu arasındakı əlaqəni araşdırın.

1. Tutaq ki, konus radiusu R və mərkəzi bucağı $\alpha°$ olan dairə sektorundan quraşdırılmışdır. Konusun oturacaq radiusunu hansı düsturla hesablamaq olar?

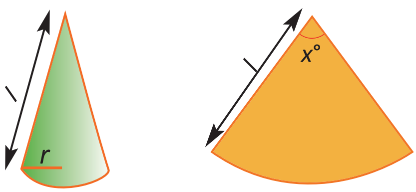


- Sektorun qövsünün uzunluğu $\frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R$ düsturu ilə hesablanır.
- Sektorun qövsünün uzunluğu həm də konusun oturacağı olan dairənin çevrəsinin uzunluğuna bərabərdir. Oturacağın radiusunu tapın.

$$2\pi r = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi R, \qquad r = \frac{\alpha}{360} R$$

✔ Radiusu 12 sm və mərkəzi bucağı 45° olan dairə sektorundan quraşdırılmış konusun doğuranının uzunluğunu və oturacağının radiusunu tapın.

2. Tutaq ki, konusun radiusu *r* və doğuranı *l*-dir. Konusun yan səthinin açılışı neçə dərəcəli mərkəzi bucağa uyğun dairə sektorudur? Ümumi düsturu yazın.



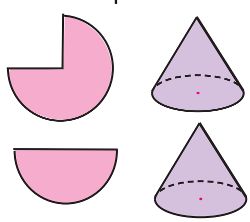
$$\frac{x}{360} \cdot 2\pi l = 2\pi r$$

✔ Mərkəzi bucağı neçə dərəcə olan dairə sektorundan oturacaq radiusu 10 sm, hündürlüyü 24 sm olan konus quraşdırmaq olar?

✔ Yarımdairədən düzəldilmiş konusun radiusunun doğuranına olan nisbətini müəyyən edin.

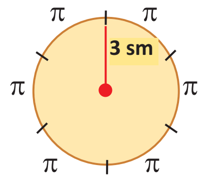
✔ Ayişə deyir ki, “mərkəzi bucağı 60°, radiusu 18 sm olan dairə sektorundan quraşdırılmış konusun radiusu 3 sm-dir. Mən 18-i 6-ya böldüm və bu cavabı aldım.” Ayişənin həlli doğrudurmu? Fikirlərinizi yazılı olaraq əsaslandırın.

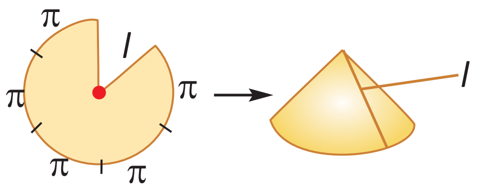
3. Hansı konus daha hündür olar: dairənin yarısından, yoxsa bu dairənin dörddə üç hissəsindən düzəldilmiş konus? Fikrinizi əsaslandırın.



Praktik məşğələ. Konus. Yan səthinin sahəsi

- Kağız üzərində radiusu 3 sm olan dairə çəkin.
- Dairəni altı bərabər hissəyə bölün
- Dairənin çevrəsinin uzunluğu $2\pi \cdot 3 = 6\pi$, bərabər qövslərin hər birinin uzunluğu π olacaq. Bu ölçünü dairə üzərində qeyd edin.
- Bir hissəni şəkildə göstərildiyi kimi kəsib çıxarın və qalan kağızı bükməklə konus düzəldin.

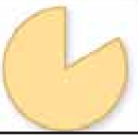
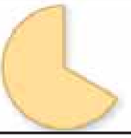
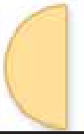




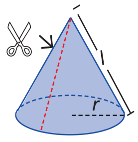
a) Konusun oturacağındakı dairənin çevrəsinin uzunluğunun 5π olduğunu göstərin.
b) Oturacağın radiusunu tapın.
c) Verilmiş dairənin sahəsini tapın.
d) Bir hissəsi kəsilib çıxarılmış dairənin sahəsini tapın.
e) Konusun yan səthini və tam səthini həndəsi olaraq izah edin.

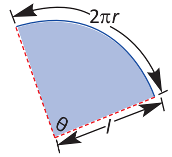
İndi isə çevrənin müxtəlif sayda bərabər hissələrini kəsib çıxarmaqla müxtəlif konuslar düzəldin.

a) Konusun oturacağının radiusunu ölçün.
b) Konusun doğuranını ölçün.

					
Oturacağın radiusu					
Doğuranı					
Səthinin sahəsi					

Konusun yan səthi, tam səthi

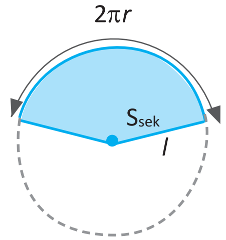




Konusun səthi onun yan səthindən və oturacaq dairəsindən ibarətdir.
Şəkildə konusun oturacaq radiusu r,

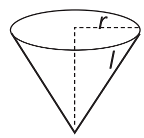
doğuranı l ilə göstərilmişdir.
Konusun yan səthinin açılışı radiusu l olan dairənin müəyyən θ mərkəzi bucağına uyğun sektordur.
Deməli, sektorun sahəsi, elə konusun yan səthinin sahəsidir.

- Sektor radiusu l (çevrəsinin uzunluğu $2\pi l$) olan dairənin müəyyən hissəsidir.



- Sektorun qövsünün uzunluğu konusun oturacaq çevrəsinin uzunluğuna, $2\pi r$-ə bərabərdir.
- Sektorun bütöv dairənin hansı hissəsinə bərabər olduğunu onun qövsünün uzunluğunu, bütöv çevrənin uzunluğuna nisbətini yazmaqla tapa bilərik.

$$\frac{\text{sektorun qövsünün uzunluğu}}{\text{bütöv çevrənin uzunluğu}} = \frac{2\pi r}{2\pi l} = \frac{r}{l}$$



Deməli, sektor dairənin $\frac{r}{l}$ hissəsini təşkil edir.

- Dairənin sahəsi πl^2 olduğundan, onun $\frac{r}{l}$ hissəsinin sahəsi $\pi l^2 \cdot \frac{r}{l}$ olar.

Deməli, $S_{yan} = \pi l^2 \cdot \frac{r}{l} = \pi l r,$

$$\boldsymbol{S_{yan} = \pi r l}$$

Konusun yan səthinin sahəsi oturacaq çevrəsinin uzunluğunun yarısı ilə doğuranı hasilinə bərabərdir.

- Konusun tam səthinin sahəsi:

$$S_{tam} = S_{yan} + S_{ot} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r)$$

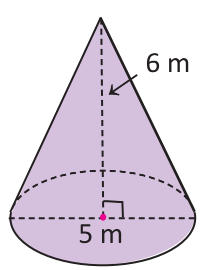
$$\boldsymbol{S_{tam} = \pi r l + \pi r^2} \text{ və ya } \boldsymbol{S_{tam} = \pi r(l + r)}$$

Nümunə. Şəkildə verilənlərə görə konusun yan səthinin və tam səthinin sahəsini tapın.

Həlli: Verilir: $d = 5$ m
$h = 6$ m

Tapmalı: S_{yan} və S_{tam}

$S_{yan} = \pi l r$ və $S_{tam} = \pi r(l + r)$



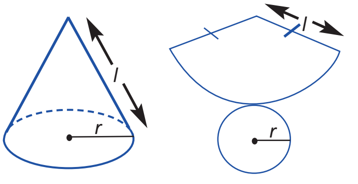
l doğuranını tapmaq üçün Pifaqor teoremini tətbiq edək.

$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{2{,}5^2 + 6^2} = 6{,}5 \text{ (m)}$$

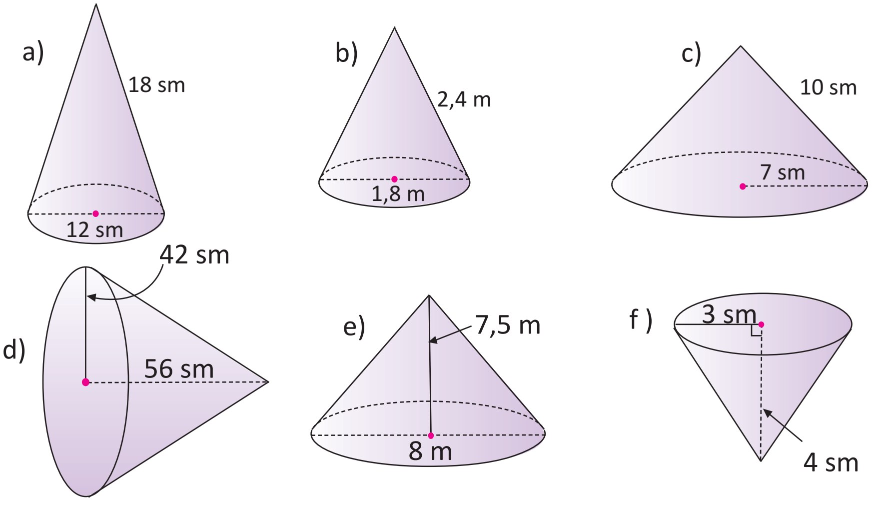
$S_{yan} = \pi \cdot 6{,}5 \cdot 2{,}5 = 16{,}25\pi$ (m²); $S_{tam} = 22{,}75\pi$ (m²)

Öyrənmə tapşırıqları

1. Radiusu 25 sm, qövsünün uzunluğu 14π sm olan dairə sektoru verilmişdir.
a) Sektorun mərkəzi bucağı neçə dərəcədir?
b) Bu sektordan düzəldilən konusun oturacağının radiusunu və yan səthini tapın.
c) Konusun hündürlüyünü tapın.
d) Konusun tam səthinin sahəsini tapın.



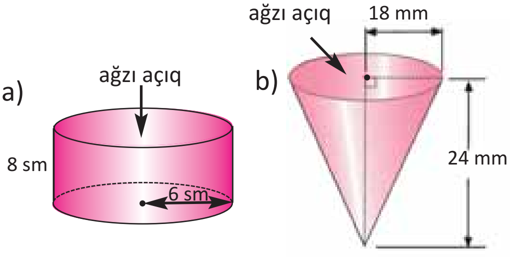
2. Şəkildə verilənlərə görə konusların tam səthinin sahəsini tapın.



3. Konusun tam səthini kalkulyatorla hesablayarkən uyğun dəyişənlərin verildiyi halda $\pi lr + \pi r^2$ ifadəsindən, yoxsa $\pi r(l + r)$ ifadəsindən istifadə əlverişlidir? Fikrinizi yazın.

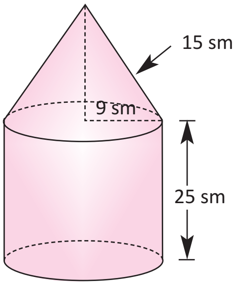
4. a) konusun doğuranının yan səthindən və radiusundan asılılğını ifadə edən;
b) konusun radiusunun yan səthindən və doğuranından asılılğını ifadə edən düsturu yazın.

5. Şəkildə verilən ölçülərə görə silindr və konus şəkilli ağzı açıq qabların daxili səthlərinin sahəsini tapın.



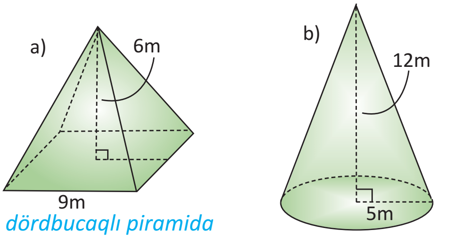
6. **Açıq tipli sual.** Konusun radiusunun doğuranına olan nisbəti $\frac{5}{14}$-dir. Bu konusun yan səthinə uyğun iki qiymət yazın.

7. Fiqur silindr və konusdan quraşdırılmışdır. Şəkildə verilən ölçülərə görə bu fiqurun səthinin sahəsini hesablayın.



8. Hündürlüyü 80 sm və diametri 120 sm olan konusun yan səthinin və tam səthinin sahəsini tapın.

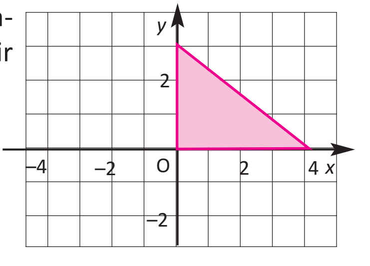
9. Şəkildə verilən ölçülərinə görə fiqurların tam səthinin sahəsini hesablayın.



10. Katetləri 3 sm və 4 sm olan düzbucaqlı üçbucağın hipetonuzu ətrafında fırlanmasından alınan cismin səthinin sahəsini tapın.

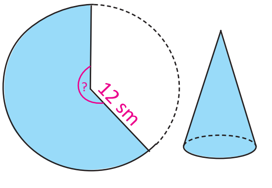
11. Şəkildəki üçbucağın aşağıda verilən oxlar ətrafında fırlanmasından alınan fəza fiqurunu təsvir edin, tam səthinin sahəsini π vahidlə tapın.

a) y oxu ətrafında
b) x oxu ətrafında
c) $x = 4$ düz xətti ətrafında
d) $y = 3$ düz xətti ətrafında



12. Konusun yan səthinin açılış şəkli sahəsi 10 sm^2 olan 36°-li dairə sektordur. Konusun tam səthini tapın.

13. Konusun yan səthinin sahəsi 96π sm^2, onun açılışı isə radiusu 12 sm olan dairə sektroudur. Bu sektorun mərkəzi bucağını tapın.

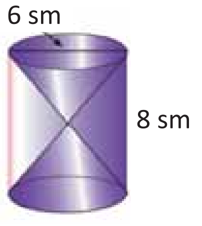


14. İsbat edin ki, yarımdairədən quraşdırılmış konusun yan səthinin sahəsi oturacağının sahəsinin iki mislinə bərabərdir.

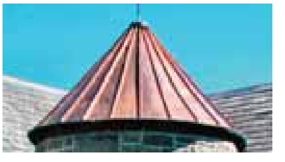
Tətbiq tapşırıqları

15. Leyla gəlinciyinə konusşəkilli papaq düzəltmək istəyir. Radiusu 8 sm, doğuranının uzunluğu 30 sm olan konusşəkilli papaq-kağızın sahəsi nə qədərdir?

16. Şüşədən hazırlanmış qum saatı şəkildəki ölçülərlə şüşə silindrin içinə yerləşdirilmişdir. Hansına daha çox şüşə işlədilmişdir, silindrə, yoxsa konusa?



17. Tikilinin damı konus formalıdır. Konus-damın hündürlüyü 3 m, oturacaq radiusu 1,5 m-dir. Damın kirəmitlə örtülü sahəsini hesablayın.



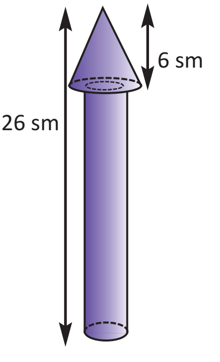
18. Tili 10 sm olan kubun daxilinə oturacağı kubun üzlərindən biri üzərində, təpəsi qarşıdakı üzdə yerləşməklə:

a) düzgün piramida (oturacağı kubun üzü olan kvadrat);

b) konus (oturacağı kubun üzü olan kvadratın daxilinə çəkilmiş dairə)

çəkilmişdir. Uyğun təsvirləri siz də çəkin. Daxilə çəkilmiş fiqurun yan səthinin və tam səthinin sahəsini tapın.

19. Şəkildə göstərilən raket modeli silindr və konusdan quraşdırılmışdır. Silindrin hündürlüyü 20 sm, konusun hündürlüyü 6 sm-dir. Silindrin diametri 3 sm, konusun diametri
5 sm-dir. Modelin silindrik hissəsi qırmızı, konik hissəsi isə narıncı rəngə boyanmalıdır. Müxtəlif rəngli hissələrin sahəsini tapın.

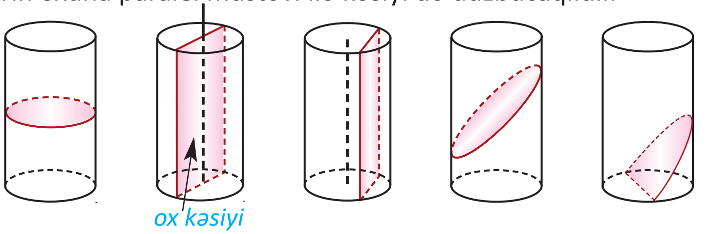


20. Hündürlükləri bir vahid, radiusları $\sqrt{3}$ vahid olan silindrin və konusun yan səthlərinin sahələrini hesablayın və müqayisə edin.

Konus səthinin müstəvi ilə kəsişmələri (konik kəsiklər nəzəriyyəsi) antik dövr həndəsəsinin zirvəsi hesab edilir . Apollonun (b.e.ə 3-cü əsr) araşdırmalarına görə doğuranları sonsuz (şüa) olan konusun müstəvi ilə kəsikləri ellips (müstəvi bütün doğuranları kəsirsə), parabola (kəsən müstəvi doğuranlardan birinə paraleldirsə), hiperbola budağı (kəsən müstəvi doğuranlardan ikisinə paraleldirsə) ola bilər.

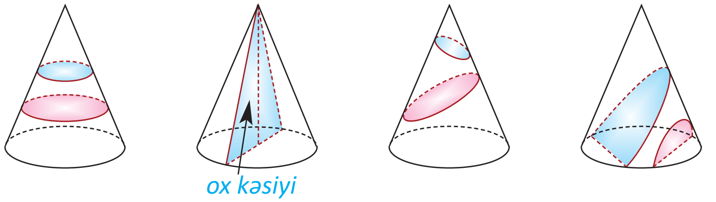
Silindrin müstəvi kəsikləri

Silindrin oturacağına paralel müstəvi ilə kəsiyi dairədir.
Silindrin oxundan keçən müstəvi ilə kəsiyinə **ox kəsiyi** deyilir. Silindrin ox kəsiyi tərəfləri *h* və 2*r* olan düzbucaqlıdır. Deməli, $S_{oxkəs} = 2rh$.
Ox kəsiyi kvadrat olan ($h = 2r$) silindrə **bərabərtərəfli silindr** deyilir.
Silindrin oxuna paralel müstəvi ilə kəsiyi də düzbucaqlıdır.

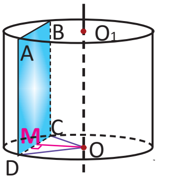


Konusun müstəvi kəsikləri

Konusun oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi kəsiyi dairədir.
Konusun oxundan keçən müstəvi ilə kəsiyinə **ox kəsiyi** deyilir. Bu kəsik yan tərəfləri doğurana, oturacağı isə diametrə bərabər olan bərabəryanlı üçbucaqdır: $\mathbf{S_{oxkəs}=rh}$
Ox kəsiyi düzgün üçbucaq ($l = 2r$) olan konusa **bərabərtərəfli konus** deyilir.
Aşağıdakı şəkildə konusun müxtəlif müstəvi kəsikləri göstərilmişdir.



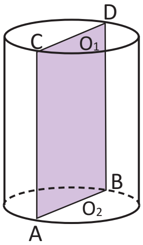
Nümunə. Silindrin oxundan 3 sm məsafədə oxa paralel keçirilmiş müstəvi kəsiyi sahəsi 64 sm^2 olan kvadratdır. Silindrin tam səthinin sahəsini tapın.



Həlli: Əvvəlcə silindrin radiusunu və hündürlüyünü tapaq.
Şərtə görə CD = AD və $S_{kəs}$ = CD·AD = 64. Buradan CD=AD=8, deməli, $h = 8$ (sm). ΔOMD-dən:
$r^2 = OD^2 = OM^2 + MD^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, buradan $r = 5$ (sm).
Beləliklə, $S_{tam} = 2\pi r(h + r) = 2\pi\cdot5\cdot(8+5) = 130\pi$ (sm^2).

Öyrənmə tapşırıqları

1. Silindrin ox kəsiyinin sahəsi 14 m^2 olarsa, silindrin yan səthinin sahəsini tapın.

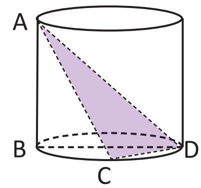


2. Hündürlüyü 6 sm, oturacağının radiusu 5 sm olan silindrin oxuna paralel və oxdan 4 sm məsafədə keçirilmiş kəsiyin sahəsini tapın.

3. Konusun oturacağının sahəsinin ox kəsiyinin sahəsinə nisbəti π-yə bərabərdir. Doğuranın oturacaq müstəvisinə meyil bucağını tapın.

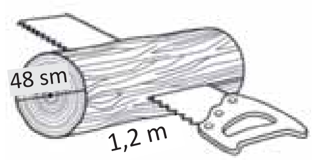
4. Bərabərtərəfli konusun radiusu R-ə bərabərdir. Aralarındakı bucaq 30° olan iki doğurandan keçirilən kəsiyin sahəsini tapın.

5. AB silindrin hündürlüyü, BD isə oturacağının diametridir. AB = 4 sm, BD = 6 sm, CD = 4 sm olduğuna görə ACD üçbucağının sahəsini tapın.
Göstəriş: Üç perpendikulyar haqqında teoremdən istifadə edərək ΔACD-nin düzbucaqlı üçbucaq olduğunu əsaslandırın.



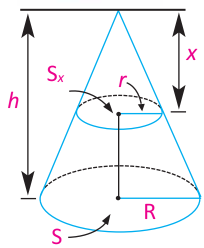
6. Konusun hündürlüyü 20 sm, radiusu 25 sm-dir. Təpədən keçirilən və oturacağın mərkəzindən məsafəsi 12 sm olan kəsiyin sahəsini tapın.

7. Silindrik şəkildə olan odun parçasının diametri 48 sm, uzunluğu 1,2 m-dir. Odun şəkildə verilən qaydada yarıya bölünmüşdür. Bir hissənin tam səthinin sahəsini hesablayın.



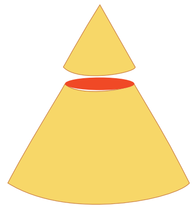
8. Qurumuş ağacdan odundoğrayan mişarla şəkildə göstərilən ölçülərdə kötük kəsilmişdir.
$d_2 = 60$ sm, $\alpha = 30°$ olarsa, kötüyün oturacağının sahəsini tapın.

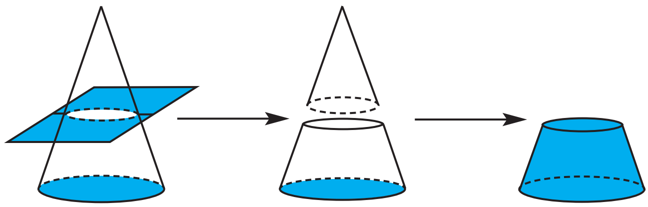
9. Hündürlüyü h, oturacağının sahəsi S olan konus təpədən x məsafədə oturacağına paralel müstəvi ilə kəsilmişdir. Kəsiyin sahəsi S_x olarsa,
$\frac{S_x}{S} = \frac{x^2}{h^2}$ olduğunu isbat edin.

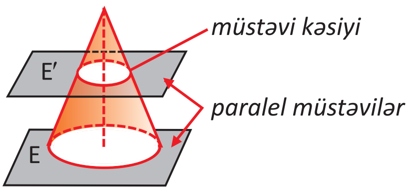


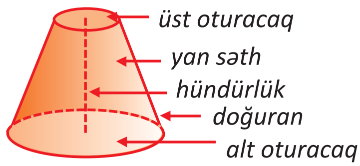
Kəsik konus

Düz dairəvi konusun oturacağına paralel müstəvi ilə kəsilməsindən kiçik konus və **kəsik konus** alınır.



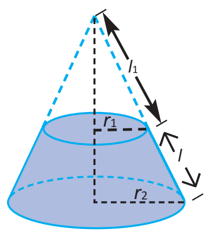






Kəsik konus oturacağa paralel müstəvi kəsiyi ilə oturacaq müstəvisi arasında qalan fiqurdur.

Kəsik konusun yan səthinin sahəsi böyük konusun yan səthinin sahəsi ilə ondan oturacağına paralel müstəvi ilə kəsilib ayrılan kiçik konusun yan səthinin sahəsi fərqinə bərabərdir. Şəkildəki işarələmələri nəzərə alsaq, bu fərq aşağıdakı kimi olacaq:



$$S_{yan} = \pi r_2(l + l_1) - \pi r_1 l_1 = \pi\,[(r_2 - r_1)l_1 + r_2 l\,]$$

Üçbucaqların oxşarlığından $\dfrac{l_1}{r_1} = \dfrac{l + l_1}{r_2}$ nisbətini yazmaq olar. Buradan,

$l_1 r_2 = r_1(l + l_1)$ və ya $(r_2 - r_1)l_1 = r_1 l$ bərabərliyini yan səthin sahəsinin yuxarıdakı ifadəsində yazsaq,

$$\mathbf{S_{yan} = \pi\,(r_1 l + r_2 l) = \pi\, l(r_1 + r_2)} \text{ alarıq.}$$

Bu düsturu kəsik konusun $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ orta radius işarələməsindən istifadə edərək,

$$\mathbf{S_{yan} = 2\pi\, r l}$$

kimi yazmaq olar.

Kəsik konusun tam səthinin sahəsi yan səthi ilə alt və üst oturacaqlarının sahələri cəminə bərabərdir:

$$\mathbf{S_{tam} = \pi\, l(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi(r_1 + r_2)l + \pi(r_1^2 + r_2^2)}$$

Nümunə. Hündürlüyü 8 sm, radiusu 6 sm olan konus oturacağına paralel müstəvi ilə kəsilmişdir. Alınan kəsik konusun hündürlüyü 4 sm-dir. Kəsik konusun yan səthinin və tam səthinin sahəsini tapın.

Həlli: Verilir: $r_2 = 6$, $h = 8$ sm, $h_{k.kon} = 4$ sm

Tapmalı: $S_{yan} = ?$

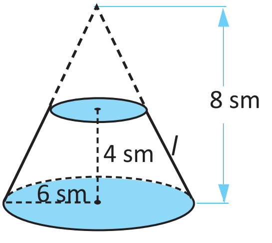
$S_{tam} = ?$

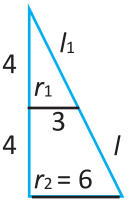
$S_{yan} = \pi\, l(r_1 + r_2)$, $r_1 = \dfrac{r_2}{2} = 3$,

$l = l_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$

$S_{yan} = 5(3 + 6)\,\pi = 45\pi$ (sm^2),

$S_{tam} = 36\pi + 9\pi + 45\pi = 90\pi$ (sm^2).





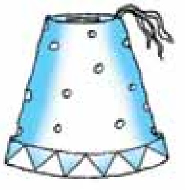
Öyrənmə tapşırıqları

1. a) Kəsik konusun doğuranı 4 sm, oturacaq çevrələrinin uzunluqları 18 sm və 6 sm-dir. Konusun yan səthinin və tam səthinin sahəsini tapın.

Hesablamalar zamanı $\pi = \dfrac{22}{7}$ qəbul edin.

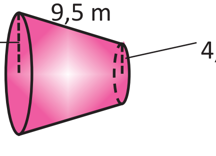
b) Kəsik konusun hündürlüyü 4 sm, oturacaqlarının radiusu uyğun olaraq 3 sm və 6 sm-dir. Konusun yan səthinin və tam səthinin sahəsini tapın.

2. Kəsik konus formalı kağız papağın açıq olan alt oturacağının radiusu 10 sm, üst oturacağın radiusu isə 4 sm-dir. Kəsik konusun doğuranı 15 sm-dir. Papağın hazırlanmasına ən azı neçə kvadrat santimetr kağız işlənmişdir?

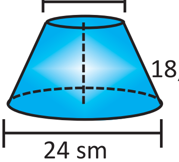


3. Şəkildə verilənlərə görə kəsik konusun yan səthinin və tam səthinin sahəsini tapın.

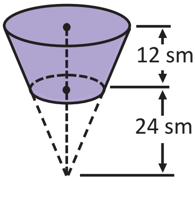
a)



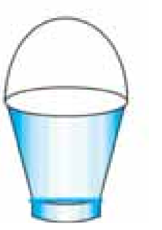
b)



4. Şəkildə verilənlərə görə kəsik konusun yan səthinin və tam səthinin sahəsini tapın.



5. Kəsik konus formalı vedrənin alt oturacağının diametri 22 sm, açıq olan üst oturacağının diametri isə 36 sm-dir. Vedrənin hündürlüyü 24 sm və vedrənin hazırlandığı metal təbəqənin $1m^2$-nin qiyməti 5 manat olarsa, bir vedrəyə təxminən neçə manatlıq material işlənər?



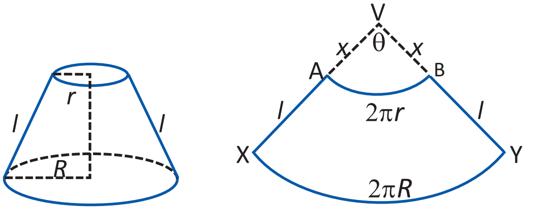
6. Kəsik konusun oturacaqlarının radiusları və doğuranının nisbəti 1:4:5 kimidir. Hündürlüyün 8 sm olduğunu bilərək yan səthinin sahəsini tapın.

7. Tam səthi 572π m^2, oturacaqlarının radiusları 6 m və 14 m olan kəsik konusun hündürlüyünü tapın.

8. Kəsik konusun yan səthi S, oturacaqlarının radiusları isə R və *r* -dir. Tam konusun yan səthini tapın.

9. Kəsik konusun doğuranı 5 sm, oturacaqlarının radiusları 1 sm və 5 sm -dir. Hündürlüyü və yan səthi bu kəsik konusun, uyğun olaraq hündürlüyünə və yan səthinə bərabər olan silindrin oturacağının radiusunu tapın.

10. ABYX fiquru kəsik konusun yan səthinin açılışıdır.

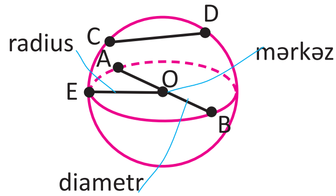


a) AB və XY qövslərinin uzunluğunun θ bucağından asılılığını yazın. Göstərin ki, radianla $\theta = \dfrac{2\pi(R-r)}{l}$ bərabərliyi doğrudur.

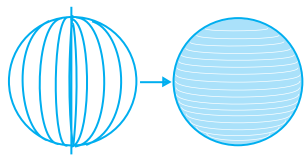
b) Yuxarıdakı bərabərikdən və üçbucaqların oxşarlığından istifadə etməklə $x = \dfrac{lr}{R-r}$ olduğunu göstərin.

c) AVB və XVY sektorlarının sahəsini tapın və onlardan istifadə etməklə ABYX -in sahəsini, başqa sözlə, kəsik konusun yan səthinin sahəsini tapın.

Fəzanın verilmiş nöqtəsindən məsafələri verilmiş məsafəni aşmayan bütün nöqtələr çoxluğuna **kürə** deyilir. Verilmiş nöqtəyə **kürənin mərkəzi**, verilmiş məsafəyə isə **kürənin radiusu** (R) deyilir. Kürənin mərkəzindən R məsafədə olan bütün nöqtələr çoxluğu kürənin səthini əmələ gətirir. Kürənin səthi sferadır.

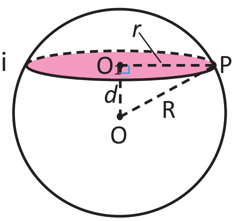


Kürə səthinin istənilən iki nöqtəsini birləşdirən düz xətt parçasına kürənin **vətəri** (CD), mərkəzdən keçən vətərə isə kürənin **diametri** (AB) deyilir.
Yarımdairənin diametri ətrafında fırlanmasından kürə alınır.



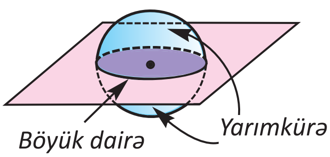
Kürənin müstəvi ilə hər hansı kəsiyi dairədir. Bu dairənin mərkəzi, kürə mərkəzindən keçən müstəviyə çəkilmiş perpendikulyarın oturacağıdır.

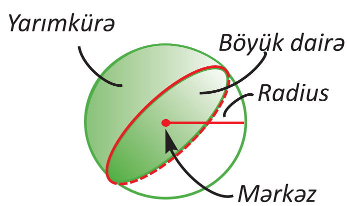
Kürənin radiusu R, kəsən müstəvinin mərkəzdən məsafəsi d, kəsikdə alınan dairənin radiusu r olarsa, $r^2 = R^2 - d^2$ alarıq.



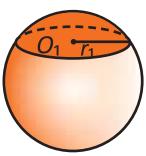
Nümunə. Radiusu 10 sm olan kürə mərkəzdən məsafəsi 8 sm olan müstəvi ilə kəsilmişdir. Kəsiyin sahəsini tapın.
Həlli: $R = 10$, $d = 8$ olduğundan kəsikdə alınan dairənin sahəsi $S_{kəs} = \pi r^2 = \pi \cdot (R^2 - d^2) = \pi \cdot (10^2 - 8^2) = 36\pi(sm^2)$ olar.

Kürənin mərkəzindən keçən müstəvi kəsiyi bu dairələr arasında ən böyüyüdür və **böyük dairə** adlanır. Böyük dairə kürə ilə eyni mərkəzə, radiusa və diametrə malikdir.

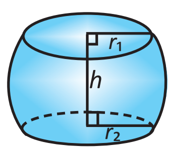




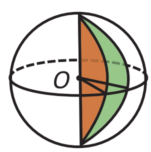
Həmçinin kürədən aşağıdakı kimi hissələri də ayırırlar.



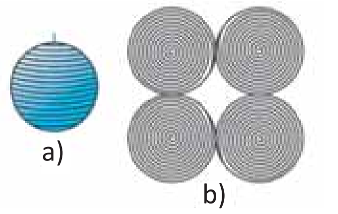
kürə seqmenti



kürə qatı-kürənin iki paralel kəsən müstəvi arasında qalan hissəsi



kürə dilimi



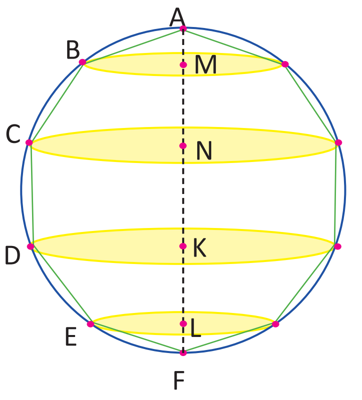
Praktik məşğələ. Qruplarla iş. Topun üzərini iplə örtmə.

Lazım olan materiallar: top, ip, vərəq kağızlar.

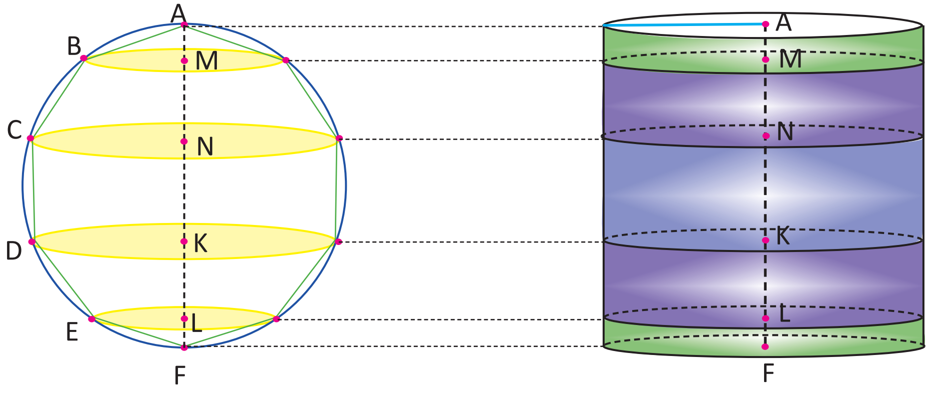
1. Hər qrupa bir top verilir. Topun üzərinə bir-birini örtməyəcək və boşluq qalmayacaq şəkildə ip dolayaraq onu örtməyə çalışın. Dəri və parça topu mismara bərkidib fırlatmaqla bu işi daha asan yerinə yetirmək olar.
2. Topun diametrini ölçmək üçün müzakirələr aparılır. Diametr müəyyən edildikdən sonra onun radiusu hesablanır.
3. Kağız vərəq üzərində radiusu topun radiusuna bərabər olan dörd dairə çəkilir.
4. Topa sarılmış ip açılır. İp dörd dairənin içini dolduracaq şəkildə dairələrə yerləşdirilir. Kürə səthinin sahəsi haqqında fikirlər yürüdülür, düstur yazılır.

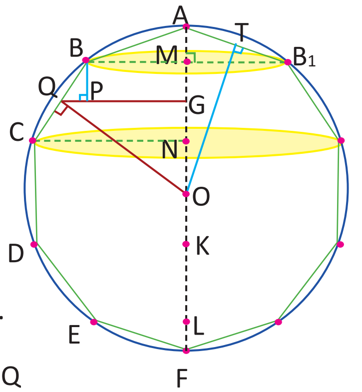
Kürə səthinin sahəsi

Radiusu r olan kürənin səthinin sahəsi $\mathbf{S = 4\pi r^2}$ düsturu ilə hesablanır.



Radiusu r olan çevrənin daxilinə düzgün çoxbucaqlı çəkək. Uyğun dairənin diametri ətrafında fırlanmasından alınan kürənin səthinə doğuranları bu çoxbucaqlının tərəfləri olan konus, kəsik konus və silindrlərin yan səthlərinin cəminin limiti kimi (çoxbucaqlının tərəflərinin sayı sonsuz artdıqda) baxmaq olar.
Göstərək ki, çoxbucaqlının tərəfinin ox ətrafında fırlanmasından alınan hər bir cismin (konus, kəsik konus, silindr) yan səthinin sahəsi hündürlüyü bu cismin hündürlüyünə, oturacağının radiusu isə çoxbucaqlının apofeminə bərabər olan silindrin yan səthinin sahəsinə bərabərdir. Çoxbucaqlının apofemini r_1 ilə işarə edək.





Doğuranı AB olan konusun yan səthinin sahəsi: $S_k = \pi \cdot AB \cdot BM$

$\Delta AMB_1 \sim \Delta ATO$ olduğundan, $\dfrac{AM}{AT} = \dfrac{B_1M}{OT}$.

$AT \cdot B_1M = AM \cdot OT$ bərabərliyinin hər iki tərəfini 2-yə vurub, $2 \cdot AT = AB$, $OT = r_1$ olduğunu nəzərə alsaq, $AB \cdot B_1M = 2r_1 \cdot AM$ olar.

Deməli, $S_k = \pi \cdot AB \cdot B_1M = 2\pi r_1 \cdot AM$

Doğuranı BC olan kəsik konusun yan səthinin sahəsi $S_{kk} = \pi(BM + CN) \cdot BC$ və

$QG = \dfrac{BM + CN}{2}$ olduğundan, $S_{kk} = 2\pi \cdot QG \cdot BC$ olar.

Digər tərəfdən $\Delta BPQ \sim \Delta QGO$ olduğundan, $\dfrac{BP}{QG} = \dfrac{BQ}{OQ}$.

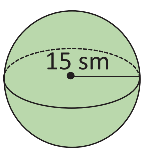
$QG \cdot BQ = BP \cdot OQ$ bərabərliyinin hər iki tərəfini 2-yə vurub,
$2 \cdot BQ = BC$, $2 \cdot BP = MN$, $OQ = r_1$ olduğunu nəzərə alsaq,
$QG \cdot BC = r_1 \cdot MN$ və $S_{kk} = 2\pi r_1 \cdot MN$ olar.

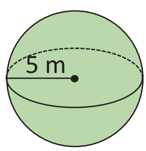
Doğuranı CD olan silindrin yan səthinin sahəsi üçün $S_{yan} = 2\pi r_1 \cdot NK$ olduğu aydındır. Oxşar qayda ilə doğuranı DE olan kəsik konus və doğuranı EF olan konusun yan səthi üçün uyğun olaraq $S_{k.k.2} = 2\pi r_1 KL$, $S_{k2} = 2\pi r_1 LF$ alarıq.

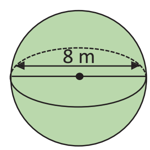
Beləliklə, AF diametri ətrafında fırlanmadan alınan cismin səthinin sahəsi
$S = 2\pi r_1 (AM + MN + MK + KL + LF) = 2\pi r_1 \cdot AF = 2\pi r_1 \cdot 2r = 4\pi r r_1$ olar.
Çoxbucaqlının tərəflərinin sayını sonsuz artırsaq, r_1 qiyməti kürənin radiusuna, alınan cismin səthinin sahəsi kürənin səthinin sahəsinə yaxınlaşacaq. Beləliklə, kürənin səthinin sahəsi üçün $S_{kürə} = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$ alarıq.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Kürələrin səthinin sahəsini hesablayın.

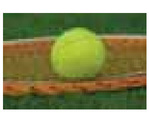
a) 

b) 

c) 

2. Oyun toplarının səthinin sahəsini hesablayın.

Futbol topu
$r = 11$ sm



Tennis topu
$r = 3{,}3$ sm

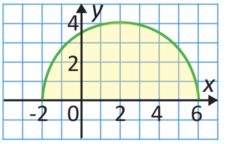
Boulinq topu
$r = 10{,}9$ sm

Qolf topu
$d = 4{,}3$ sm

Basketbol topu
$d = 24{,}3$ sm

3. Ayın diametri Yerin diametrinin dörddə biri qədərdir. Bu iki səma cisminin səthlərinin sahələri nisbətini yazın.

4. Şəkildəki yarımdairə x oxu ətrafında bir tam dövr fırlanmışdır.
a) Hansı fəza fiquru alınmışdır?
b) Bu fiqurun səthinin sahəsini şəkildə verilənlərə görə hesablayın.



5. Radiusu 5 sm olan kürənin səthinin sahəsi radiusu 4 sm olan konusun yan səthinin sahəsindən 5 dəfə çoxdur. Konusun hündürlüyünü tapın.

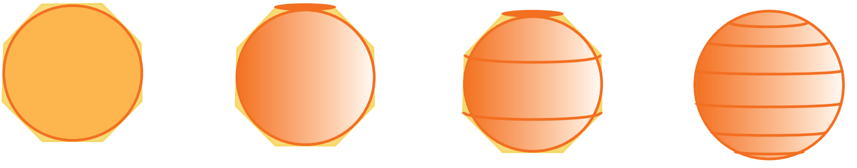
Kürənin səthinin sahəsinin Arximed izahı:

Tutaq ki, şəkildə göstərildiyi kimi, düzgün çoxbucaqlının daxilinə dairə çəkilmişdir.

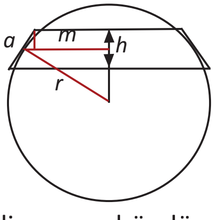
Bu fiqurun fırlanmasından kürə və onu örtən fəza cismi alınır.

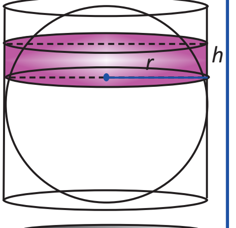
Bu fəza cismi iki kəsik konusdan və silindrdən ibarətdir.

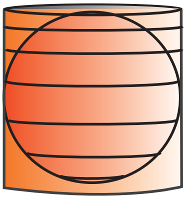
Çoxbucaqlının tərəflərinin sayını sonsuz artırsaq, fəza cismi formaca kürəyə daha çox yaxınlaşacaq.



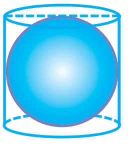
Kəsik konusların və silindrin səthlərinin cəmini tapsaq, kürənin səthinin sahəsini tapa bilərik. Kəsik konuslardan birinin ox kəsiyinə baxaq. Tutaq ki, bu konusun hündürlüyü h, orta çevrəsinin radiusu m-*dir*. Kürənin radiusunu r, böyük dairəsi xaricinə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlının tərəfini isə a qəbul edək. Kəsik konusun yan səthinin sahəsinin $2\pi ma$, həmçinin $2\pi ma = 2\pi rh$ olduğu görünür, yəni kəsik konusun yan səthi oturacağının radiusu r və hündürlüyü h olan silindrin yan səthinə bərabərdir. Deməli, kürəni əhatə edən fiquru silindr kimi qəbul etmək olar. Buradan isə kürə səthinin sahəsinin radiusu r, hündürlüyü $2r$ olan silindrin yan səthinin sahəsinə bərabər olduğu alınır. Yəni, $S = S_{\text{yan sil}} = 2\pi rh = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$





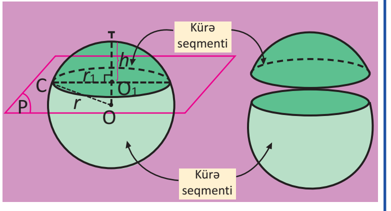


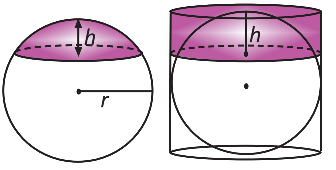
6. Arximedi heyrətləndirən silindrin tam səthinin sahəsinin kürənin səthinin sahəsinə olan nisbətinin 3:2 olması idi. Bunu siz də isbat edin.
a) Kürə səthinin sahəsini tapın
b) Silindrin tam səthinin sahəsini tapın.
c) Silindrin tam səthinin sahəsinin kürənin səthinin sahəsinə nisbətini yazın.



Kürə seqmentinin sahəsi

Kürənin kəsən müstəvi ilə ayrılmış hissələrinə **seqment** deyilir. Kürənin müstəvi ilə kəsişməsindən alınan dairəyə **seqmentin oturacağı**, kürənin bu dairəyə perpendikulyar diametrinin seqmentin daxilində qalan hissəsinə isə **seqmentin hündürlüyü** deyilir. Kürə səthinin sahəsi düsturunun çıxarılışına oxşar qayda ilə göstərmək olar ki, radiusu r olan kürədən ayrılan h hündürlüklü kürə seqmentinin sferik səthinin sahəsi $\mathbf{S = 2\pi rh}$ düsturu ilə hesablanır.



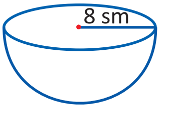


7. Radiusu 18 sm olan kürə mərkəzdən 5 sm məsafədə müstəvi ilə kəsilmişdir. Alınan kiçik kürə seqmentinin sferik səthinin sahəsini tapın.

8. Səthinin sahəsi 400π sm^2 olan kürə mərkəzdən 6 sm məsafədə müstəvi ilə kəsilmişdir. Alınan böyük kürə seqmentinin sferik səthinin sahəsini tapın.

9. Kürə mərkəzdən 3 sm məsafədə müstəvi ilə kəsilmişdir. Alınan kəsiyin çevrəsinin uzunluğu 8π sm olarsa, kürənin və hər bir seqmentinin sferik səthinin sahəsini tapın.

10. a) Yarımkürənin müstəvi səthinin sahəsini hesablayın.



b) Yarımkürənin sferik səthinin sahəsini hesablayın.

c) Yarımkürənin tam səthinin sahəsini hesablayın.

d) Yarımkürənin tam səthinin sahəsi üçün ümumiləşmiş düstur yazın.

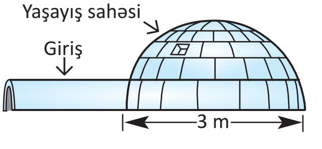
11. Tam səthinin sahəsi 147π sm^2 olan yarımkürənin radiusunu tapın.

12. Kürənin radiusu 15 sm-dir. Mərkəzdən 25 sm məsafədə olan nöqtədən bu kürə səthinin görünə bilən hissəsinin sahəsini tapın.

13. **Etnoqrafiya**. Kanada, Qrelandiya, Alyaskada yaşayan insanlar iqlu adlandırılan qar evlərdə yaşayırlar. Bu evlərin yaşayış hissəsi yarımkürə şəklindədir.

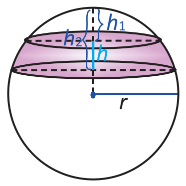
a) Şəkildə verilən ölçülərə görə iqlunun yaşayış sahəsini (döşəməsinin) tapın.

b) Evin yaşayış hissəsinin buzla örtülü səthinin sahəsini tapın.



Kürə qurşağının sahəsi

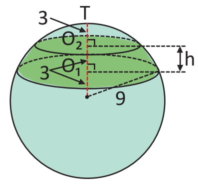
Kürə qurşağı kürə səthinin iki paralel müstəvi arasında qalan hissəsidir. Paralel müstəvilər arasındakı məsafəyə kürə qurşağının hündürlüyü deyilir.



Kürə qurşağının sahəsini müstəvilərin kürədən ayırdığı seqmentlərin sferik hissələrinin səthlərinin fərqi kimi tapmaq olar.

Radiusu *r* olan kürədən ayrılan *h* hündürlüklü kürə qurşağının sahəsi $S = 2\pi rh$ düsturu ilə hesablanır.

Nümunə. Kürənin radiusu üç bərabər hissəyə bölünmüş və bu nöqtələrdən radiusa perpndikulyar müstəvilər keçirilmişdir. Kürənin radiusu $r = 9$ olarsa, alınan kürə qurşağının sahəsini tapın.

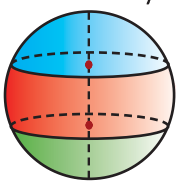


Həlli: $r = 9$, $h = 3$ olduğundan kürə qurşağının sahəsi $S = 2\pi rh = 54\pi$ olar.

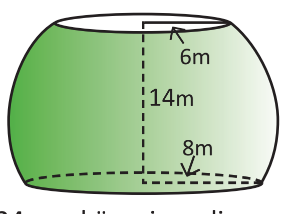
14. Radiusu 20 sm olan kürədən aralarındakı məsafə 8 sm olan iki paralel müstəvi ilə kürə qurşağı ayrılmışdır.
a) Kürə qurşağının səthinin sahəsini hesablayın.
b) Kürə qurşağının səthinin sahəsinin kürənin səthinin sahəsinə olan nisbətini tapın.

15. Kürə qurşağının sahəsi 48π sm^2, hündürlüyü isə 4 sm olarsa, kürənin radiusunu tapın.

16. Kürənin diametri 30 sm-dir və iki paralel müstəvi ilə üç bərabər hissəyə bölünmüşdür. Kürədən ayrılan hər bir hissənin sferik səthinin sahəsini tapın.



17. Şəkildə verilənlərə görə kürə qurşağının səthinin sahəsini tapın.

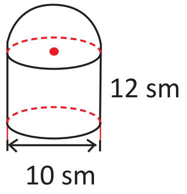


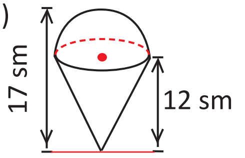
18. Kürə qurşağının oturacaqlarının radiusları 20 sm və 24 sm, kürənin radiusu isə 25 sm-dir. Kürə qurşağının səthinin sahəsini tapın. İki hala baxın.

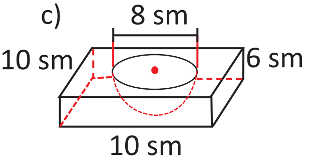
19. Hündürlüyü 7 sm, oturacaqlarının radiusları 16 sm və 33 sm olan kürə qurşağının səthinin sahəsini tapın.

20. Kürənin radiusu *R*-dir. Oturacaqlarından biri kürənin böyük dairəsi, yan səthi isə oturacaqların sahələri cəminə bərabər olan kürə qatının hündürlüyünü tapın.

1. Fiqurların tam səthlərinin sahəsini tapın.

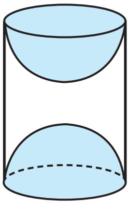
a) 

b) 

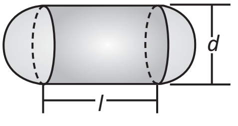
c) 

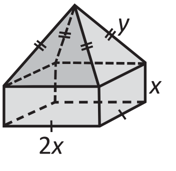
düzgün prizmadan yarımkürə oyulub

2. Silindrik formalı ağacdan şəkildə göstərildiyi kimi iki eyni yarımkürə oyulmaqla suvenir hazırlanmışdır. Silindrin hündürlüyü 10 sm, radiusu 4 sm olarsa, suvenirin tam səthinin sahəsini hesablayın.

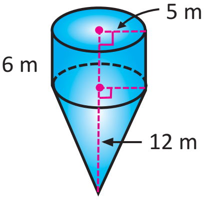


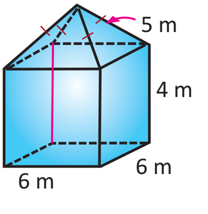
3. Fiqurun tam səthinin sahəsini hesablamaq üçün verilən dəyişənlərlə düsturlar yazın.

a) 

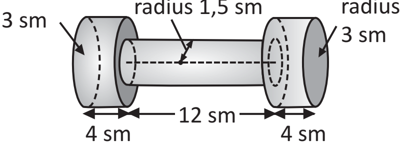
b) 

4. Fiqurların tam səthlərinin sahəsini hesablayın.

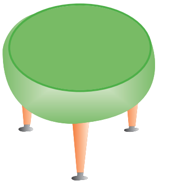
a) 

b) 

5. Şəkildəki ölçülərdə olan metal konstruksiyanın laklanması xüsusi texnologiya ilə aparılır. 1 kv.m sahəni lakla örtmək üçün 0,25*l* lak işlədilir. 1000 ədəd belə konstruksiyanı laklamaq üçün neçə litr lak işlədilər?

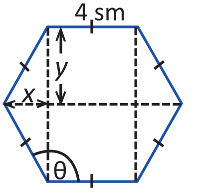


6. Rəşid şəkildə göstərildiyi formada kətil düzəltmək istəyir. Kətilin oturacaq hissəsi silindrformalı olmaqla radiusu 30 sm, hündürlüyü 20 sm-dir. Silindrin yan üzü və üstü parça ilə üzlənməlidir. Tikişlərə və kəsim formalarına işlənməsinə görə üzlük parça real səthdən 20% artıq işlədilir. Rəşidin 1 m^2 üzlük parçası var. Bu parça kətili üzləmək üçün çatarmı?



7. Futbol topunun səthi bir-birinə tikilmiş bir neçə düzgün altıbucaqlıdan (heksaqon) ibarətdir. Altıbucaqlıların ölçüləri şəkildə göstərildiyi kimidir.

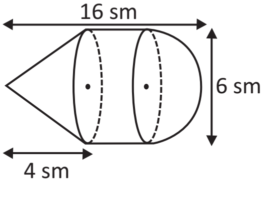
a) θ bucağını tapın
b) *x* və *y* dəyişənlərinin qiymətini tapın.
c) Şəkildə göstərilən trapesiyanın sahəsini tapın.
d) Altıbucaqlının sahəsini tapın.
e) Topun səthinin sahəsi $768\sqrt{3}$ sm^2 olarsa, topun səthində neçə altıbucaqlı olduğunu tapın.



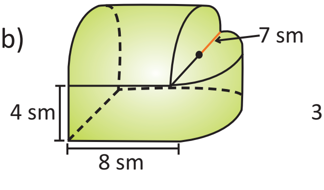
8. Hündürlüyü 2 sm olan həb, diametri 0,5 sm olan silindr və iki yarımkürədən ibarətdir. Həbin qəbulunu və sorulmasını asanlaşdırmaq üçün xüsusi təbəqə ilə örtülmüşdür. Bu təbəqənin sahəsini hesablayın.

9. Fiqurların səthinin sahəsini hesablayın.

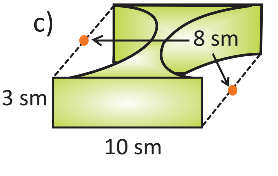
a)



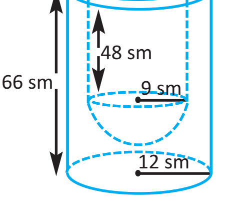
b)



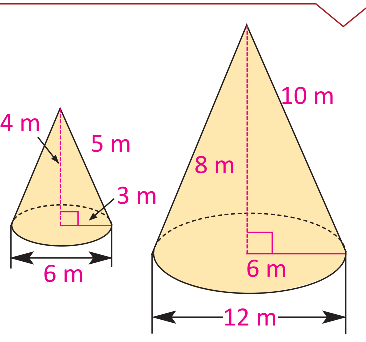
c)



10. Plastik materialdan hazırlanmış hündürlüyü 66 sm, oturacağının radiusu 12 sm olan silindrdən hündürlüyü 48 sm, radiusu 9 sm olan silindr, daha sonra şəkildə göstərildiyi kimi sferik hissə oyularaq qab düzəldilmişdir.
a) Qabın daxili səthinin sahəsini;
b) Qabın xarici səthinin sahəsini tapın.



Oxşar fəza fiqurlarının uyğun xətti ölçülərinin nisbəti sabit olub oxşarlıq əmsalına bərabərdir. Şəkildəki konusların oxşar olduqlarını yoxlamaq üçün verilən uyğun ölçülərinin nisbətini tapaq. Əgər bu konuslar oxşardırsa, radiuslarının nisbəti hündürlüklərinin nisbətinə bərabər olmalıdır.



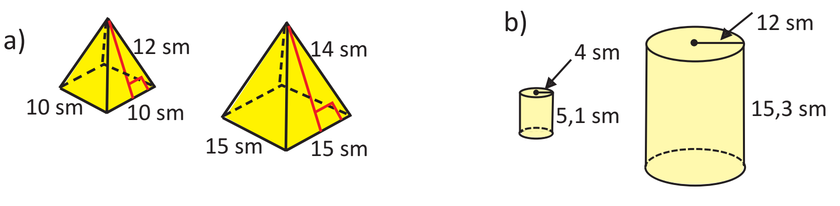
$$\frac{R}{r} = \frac{H}{h} \qquad \frac{12}{6} = \frac{8}{4} = 2$$

Deməli, bu iki konus oxşardır və oxşarlıq əmsalı 2-dir. Bu o deməkdir ki, kiçik konusun bütün ölçülərini mütənasib olaraq iki dəfə böyütsək, böyük konusla konqruyent konus alarıq. Yaxud da əksinə, böyük konusu iki dəfə kiçiltsək, kiçik konusa konqruyent konus alarıq. Hər hansı fiquru mütənasib böyütmək və kiçiltməklə onlara oxşar fiqurlar almaq mümkündür.
Oxşar fiqurların səthlərinin sahələri nisbəti onların uyğun xətti ölçülərinin nisbətinin kvadratına, yaxud oxşarlıq əmsalının kvadratına bərabərdir:

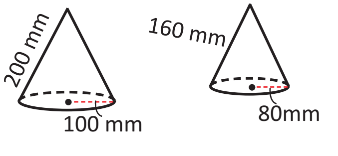
$$F_1 \overset{k}{\sim} F_2 \Rightarrow \frac{S(F_1)}{S(F_2)} = k^2$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Aşağıdakı fiqurların oxşar olub-olmadıqlarını müəyyən edin.



2. Şəkildəki konuslar oxşardır. Onların tam səthlərinin sahələrinin nisbətini tapın. Kiçik konusun hündürlüyünü böyük konusun hündürlüyü ilə ifadə edin.



3. İki kürənin radiusları nisbəti 1:3 kimidir. Böyük kürənin səthinin sahəsi kiçik kürənin səthinin sahəsindən 15π sm^2 çoxdursa, kiçik kürənin səthinin sahəsini tapın.

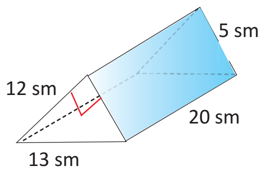
4. İki oxşar silindrin yan səthlərinin sahəsi 48π və 108π kvadrat vahiddir. Kiçik silindrin hündürlüyü böyük silindrin radiusuna bərabərdir. Silindrlərin radiuslarını və hündürlüklərini tapın.

1. Radiusu 5 sm olan konusun tam səthinin sahəsi hündürlüyü 4 sm, radiusu 5 sm olan silindrin tam səthinin sahəsinə bərabərdir. Konusun hündürlüyünü tapın.

2. Konusun yan səthinin sahəsi oturacağının sahəsindən iki dəfə çoxdur.
a) Konusun doğuranı (*l*) ilə radiusu (*r*) arasındakı asılılığı yazın.
b) Radiusu 6 sm olarsa, konusun yan səthinin sahəsini tapın.

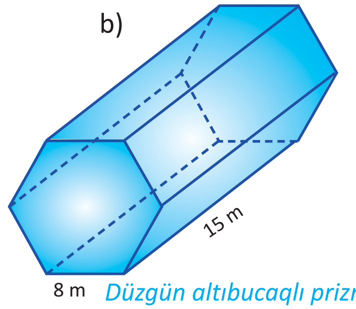
3. Prizma və silindrlərin tam səthlərinin sahəsini hesablayın.

a)



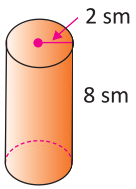
düz üçbucaqlı prizma

b)

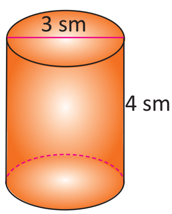


Düzgün altıbucaqlı prizma

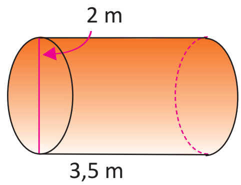
c)



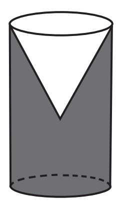
d)



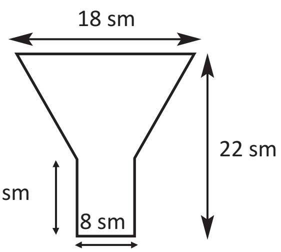
e)



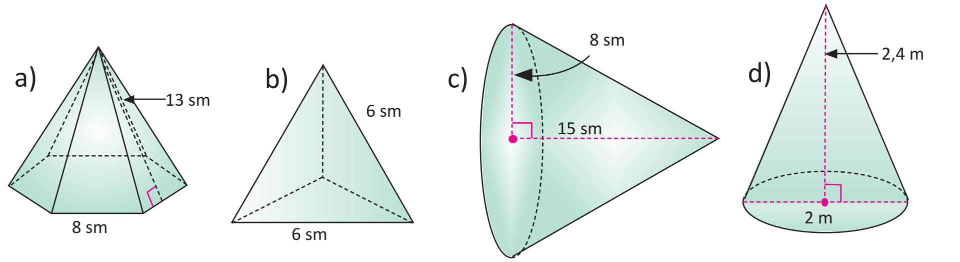
4. Hündürlüyü 8 sm, diametri 6 sm silindrşəkilli detaldan şəkildəki qaydada hündürlüyü 4 sm olan konus kəsilib çıxarıldıqdan sonra alınan detalın tam səthi rənglənməlidir. 20 *ml* boya ilə 100 sm^2 sahəni rəngləmək olarsa, 100 belə detalı rəngləmək üçün 4 *l* boya çatarmı?



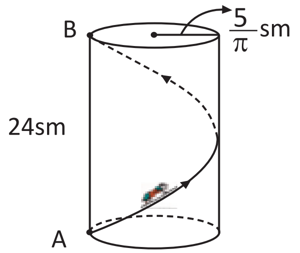
5. Şəkildə göstərilən dəmir konstruksiyadan taxıl anbarlarında taxılı boşaltmaq üçün istifadə edilir. Şəkil 1:20 miqyası ilə çəkilmişdir. Konstruksiya silindrik və kəsik konus formalı hissələrdən ibarətdir. Şəkildə verilən ölçülərə görə bu konstruksiyaya işlədilmiş metal təbəqənin sahəsini hesablayın.



6. Piramida və konusların tam səthlərinin sahəsini hesablayın.



7. Qarışqa radiusu $\frac{5}{\pi}$ sm, hündürlüyü 24 sm olan silindrin oturacaq çevrəsi üzərində yerləşən A nöqtəsindən başlayaraq vintvari yolla B nöqtəsinə gəlmişdir. Qarışqanın getdiyi yolun uzunluğunu tapın.



8. Kürəyə toxunan müstəvi üzərində götürülmüş nöqtədən toxunma nöqtəsinə qədər məsafə 9 sm, kürənin mərkəzinə qədər məsafə isə 15 sm-dir. Kürə səthinin sahəsini tapın.

9. Konusun açılışı radiusu 8 sm və bucağı 90° olan dairə sektorudur. Bu konusun ox kəsiyinin sahəsini tapın.

10. Silindrin doğuranı 10 sm-dir. Silindrin doğuranından bir-birinə perpendikulyar, sahələri 30 sm^2 və 40 sm^2 olan iki müstəvi kəsik keçirilmişdir. Silindrin yan səthinin sahəsini tapın.

11. R radiuslu kürənin mərkəzindən d_1 və d_2 məsafədə kəsən paralel müstəvilər keçirilmişdir. Alınmış kürə qurşağının səthinin sahəsini tapın. İki hala baxın.

12. Kəsik konusun ox kəsiyinin diaqonalı *d* olub oturacaqla α bucağı əmələ gətirir. Kəsik konusun tam səthini tapın.

13. Konusun ox kəsiyi təpə bucağı 2α, hündürlüyü ***h*** olan bərabəryanlı üçbucaqdır. a) Konusun tam səthinin sahəsini; b) Konusun yan səthinin açılışından alınmış sektorun mərkəzi bucağını tapın.

14. Radiusu 5 sm olan kürədən hündürlüyü 1 sm olan seqment və təpəsi kürənin mərkəzində, oturacağı seqmentin oturacağı olan konus oyulmuşdur. Qalan cismin səthinin sahəsini tapın.

5 Funksiyanın törəməsi

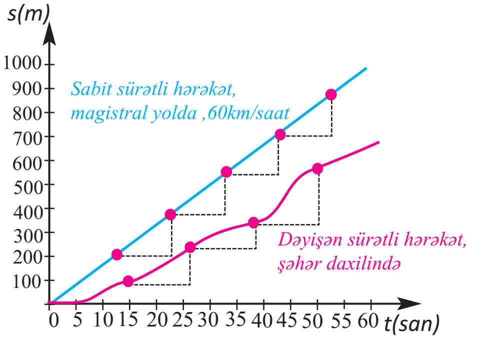
- Dəyişmənin orta sürəti, dəyişmənin ani sürəti
- Funksiyanın törəməsi
- Toxunanın tənliyi
- Diferensiallama qaydaları
- Hasilin törəməsi
- Nisbətin törəməsi
- Mürəkkəb funksiyanın törəməsi
- Törəmənin tətbiqi ilə məsələ həlli
- İkinci tərtib törəmə
- Üstlü və loqarifmik funksiyaların törəməsi
- Triqonometrik funksiyaların törəməsi

Riyazi lüğət

- ✓ dəyişmənin orta sürəti
- ✓ dəyişmənin ani sürəti
- ✓ qrafikin kəsəni
- ✓ qrafikə toxunan
- ✓ bucaq əmsalı
- ✓ törəmə funksiya
- ✓ diferensial
- ✓ diferensiallama
- ✓ ikinci tərtib törəmə
- ✓ marjinal qiymət
- ✓ marjinal gəlir
- ✓ marjinal mənfəət

Biz indiyə qədər öyrəndiyimiz cəbri qaydalarla real həyati situasiyaya uyğun statistik məlumatlar əldə edirdik. Lakin bir çox hallarda istehsalatda, tibdə, həmçinin elmin müxtəlif sahələrində daha dinamik məlumatların əldə edilməsinə, başqa sözlə bir dəyişənin təsiri ilə digərinin hansı sürətlə dəyişdiyini izləməyə ehtiyac olur. Məsələn, reklam meneceri xərclənən hər yeni məbləğə görə gəlirin necə dəyişdiyini, həkim verdiyi dərmanın dozasını artırdıqca qara ciyərin strukturundakı dəyişmə dinamikasını bilmək istəyir və s.
Dəyişmə sürətinin müəyyən edilməsinə aid nümunələrə baxaq.

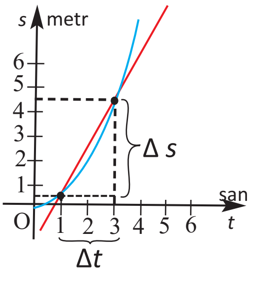
Orta sürət. Şəkildə avtomobilin magistral yolda bərabərsürətli hərəkətdə və şəhər daxilində dəyişənsürətli hərəkətdə qət etdiyi yolun zamandan asılılıq qrafikləri verilmişdir. Bərabərsürətli hərəkətdə, bərabər zaman aralıqlarında gedilən yollar eyni uzunluqdadır və hərəkəti qrafik təsvir edən düz xəttin bucaq əmsalı sürəti göstərir. Dəyişənsürətli hərəkətdə isə avtomobilin bərabər zaman intervallarında getdiyi yollar eyni uzunluqda olmaya bilər. Bu halda orta sürətin qiymətindən istifadə edilir.



Cismin müəyyən zaman müddətində getdiyi yolun bu müddətə olan nisbətinə **orta sürət** deyilir:

$$v_{or} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Nümunə 1. Zərrəcik $s(t) = 0,5\ t^2$ qanunu ilə düzxətli hərəkət edir. a) [1; 3] , b) [1; 2] zaman aralıqlarında orta sürəti tapın (s metrlə, t saniyə ilə ölçülür).

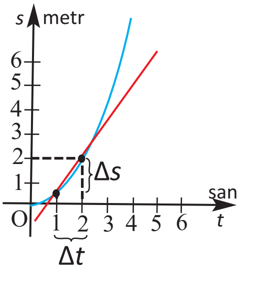


Həlli: a) $1 \le t \le 3$ zaman aralığında orta sürət:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{4,5 - 0,5}{2} = 2\ (m/san).$$

b) $1 \le t \le 2$ zaman aralığında orta sürət:

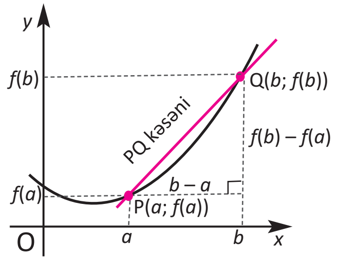
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{2 - 0,5}{1} = 1,5\ (m/san).$$



Dəyişmənin orta sürəti

$f(x)$ funksiyasının $a \le x \le b$ aralığında orta dəyişmə sürəti $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ kimi tapılır.

Bu nisbət $f(x)$ funksiyasının qrafikinin $(a;\ f(a))$ və $(b;\ f(b))$ nöqtələrindən keçən kəsənin bucaq əmsalına bərabərdir.



Ani sürət. Ani sürəti aşağıdakı nümunə üzərində araşdıraq.

Nümunə 2. Cədvəldə $s(t) = 0{,}5\ t^2$ qanunu ilə düzxətli hərəkət edən cismin Δt-nin bəzi kiçik qiymətləri üçün $[2;\ 2+\Delta t]$ zaman kəsiyindəki orta sürəti hesablanmışdır.

zaman kəsiyi	orta sürət
[2; 2,1]	$\dfrac{s(2{,}1)-s(2)}{2{,}1-2} = \dfrac{2{,}205-2}{2{,}1-2} = \dfrac{0{,}205}{0{,}1} = 2{,}05$
[2; 2,01]	$\dfrac{s(2{,}01)-s(2)}{2{,}01-2} = \dfrac{2{,}02005-2}{0{,}01} = \dfrac{0{,}02005}{0{,}01} = 2{,}005$
[2; 2,001]	$\dfrac{s(2{,}001)-s(2)}{2{,}001-2} = \dfrac{2{,}0020005-2}{0{,}001} = \dfrac{0{,}0020005}{0{,}001} = 2{,}0005$

Cədvələ görə, $t = 2$ saniyə anındakı sürətin 2 m/san olacağını təxmin edə bilərik. Ümumiyyətlə, $[2;\ 2+\Delta t]$ zaman kəsiyində orta sürət

$$\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t} = \frac{0{,}5\cdot(2+\Delta t)^2-0{,}5\cdot 2^2}{\Delta t} = \frac{2\Delta t+0{,}5(\Delta t)^2}{\Delta t} = 2+0{,}5\Delta t$$

olar. Δt-ni sıfıra yaxınlaşdırıb $[2;\ 2+\Delta t]$ zaman kəsiyini qısaltmaqla, limit vəziyyətində $t = 2$ saniyə anındakı sürəti taparıq: $v\,(2) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}(2+0{,}5\Delta t) = 2.$

Beləliklə, $s(t)$ qanunu ilə düzxətli hərəkətdə istənilən t anında sürət

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$ olar.

Oxşar qayda ilə istənilən funksiya üçün $x = a$ nöqtəsində ani dəyişmə sürətini

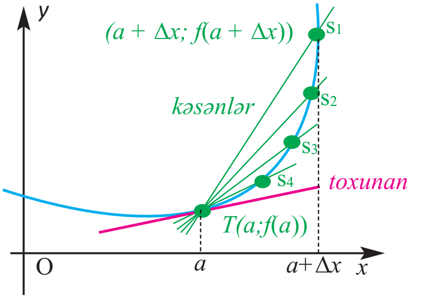
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ və ya $\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ kimi ifadə etmək olar.

Dəyişmənin ani sürəti

$\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ limiti f funksiyasının absisi a olan nöqtədə ani dəyişmə sürətini ifadə edir.

İndi isə kəsənin vəziyyətinin əyri üzərində dəyişməsini müşahidə etməklə orta sürətin ani sürətə keçməsini müşahidə edək.

Qrafikdə S_1, S_2, S_3, S_4,... nöqtələri S nöqtəsinin T nöqtəsinə doğru yerini dəyişmiş vəziyyətləridir. Burada Δx-in qiyməti kiçilərək 0-a yaxınlaşdıqca S nöqtəsi də əyri boyunca yerini dəyişərək T nöqtəsinə yaxınlaşır və nəhayət, onunla üst-üstə düşür.



S nöqtəsi əyri üzrə T nöqtəsinə yaxınlaşdıqda TS kəsəninin limit vəziyyətinə (əgər limit varsa) T nöqtəsində əyriyə çəkilən **toxunan** deyilir. $\Delta x \to 0$ olduqda kəsənin bucaq əmsalının limiti, yəni $f(x)$ funksiyasının $x = a$ nöqtəsində ani dəyişmə sürəti funksiyanın qrafikinə T $(a;\ f(a))$ nöqtəsində çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Nümunə 3. Sərbəst düşmədə $t = 2$ san anındakı sürəti tapaq.

Həlli: Sərbəst düşən cismin getdiyi yolun t zamanından asılılığı $s(t) = \dfrac{gt^2}{2}$ şəklindədir. Burada g sərbəstdüşmə təcilidir və $g \approx 10$ m/san^2 olduğundan $s = 5t^2$ yazmaq olar.

Hərəkətin başlanğıcından 2 saniyə sonrakı Δt saniyəlik zaman intervalında orta sürət $\dfrac{5\cdot(2+\Delta t)^2 - 5\cdot 2^2}{\Delta t}$ m/san olacaq.

$t = 2$ saniyə anındaki sürət aşağıdakı limitin qiymətinə bərabərdir:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{5\cdot(2+\Delta t)^2 - 5\cdot 2^2}{\Delta t} = 5\cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{[(2+\Delta t)^2 - 2^2]}{\Delta t} = 5\cdot \lim_{\Delta t \to 0} (4+\Delta t) = 20 \text{ (m/san)}$$

Nümunə 4. $y = x^2 + 3x$ funksiyası verilmişdir. a) $1 \le x \le 3$ aralığında dəyişmənin orta sürətini; b) $x = 2$ olduqda ani dəyişmə sürətini tapın.

Həlli: a) $a = 1$, $b = 3$ olduqda orta dəyişmə sürəti

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{[3^2 + 3\cdot 3] - [1^2 + 3\cdot 1]}{3-1} = \frac{14}{2} = 7 \text{ olur.}$$

b) $x = 2$ olduqda ani dəyişmə sürəti

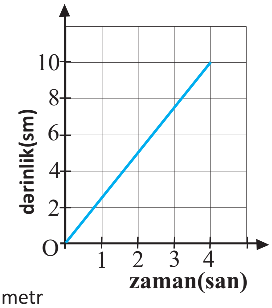
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 + 3\cdot(2+\Delta x) - (2^2 + 3\cdot 2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 2\cdot 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\cdot 2 + 3\Delta x - 2^2 - 3\cdot 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 7) = 7 \text{ olar.}$$

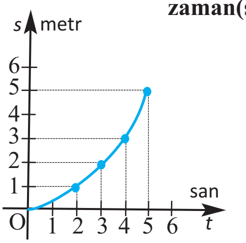
Öyrənmə tapşırıqları

1. Su avtomatında stəkan 4 saniyə ərzində dolduruldu. Qrafik, stəkandakı suyun səviyyəsinin zamandan asılı dəyişməsini əks etdirir. Suyun səviyyəsinin dəyişmə sürətini müəyyən edin. Sürət hər hansı zaman intervalında dəyişirmi?

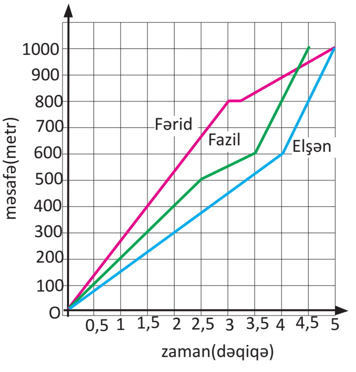


2. Şəkildə gedilən s yolunun t zamanından asılılığı təsvir olunmuşdur.
1) Verilən zaman kəsiyində orta sürəti tapın:
a) [0; 2] | b) [2; 3] | c) [4; 5] | d) [0; 5]

2) Bu tapşırıqda aldığınız nəticələrlə 1-ci tapşırığın nəticələrini müqayisə edin. Fikrinizi ümumiləşdirin.



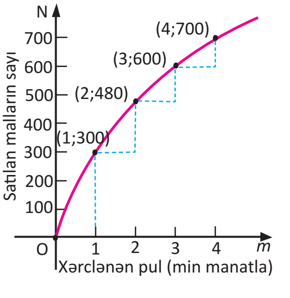
3. Qrafik 3 nəfərin 1000 m məsafəyə qaçışı haqqında məlumatı əks etdirir.
a) Bu yarışın qalibi kimdir? Əsaslandırın.
b) Hər bir idmançı üçün qaçış yolunda sürət dəyişmələrini əks etdirən məlumatı yazın.



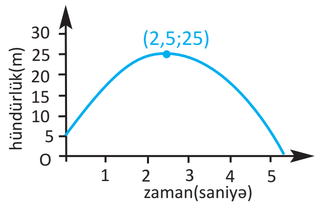
4. Cədvələ görə: a) $-3 \le x \le -1$; b) $-3 \le x \le 3$; c) $1 \le x \le 7$; d) $3 \le x \le 9$ aralıqlarında dəyişmənin orta sürətini müəyyən edin.

x	–5	–3	–1	1	3	5	7	9
y	7	–5	–3	–1	5	12	21	48

5. Qrafik malın reklamına xərclənən puldan (m, min manatla) asılı olaraq satılan malın N(m) sayının dəyişməsini əks etdirir.
a) m-in 0 və 1; 1 və 2; 2 və 3; 3 və 4 arasında dəyişməsi ilə N(m)-in dəyişməsini müəyyən edin.
b) m artdıqca dəyişmənin orta sürəti artır, yoxsa azalır? Bunu real situasiyaya uyğun izah edin.



6. Yuxarı atılmış topun yerdən hündürlüyünün zamandan asılılığı qrafiklə verilmişdir.
1) Top maksimum hansı hündürlüyə qalxmışdır?
2) Top hansı hündürlükdən havaya atılmışdır?
3) Hansı zaman aralığında topun yerdən hündürlüyü azalır?



4) Verilən zaman (saniyə ilə) intervallarında topun yerdən hündürlüyünün dəyişməsinin orta qiymətini tapın: a) 0-dan 1-ə qədər; b) 3-dən 4-ə qədər.

7. Dənizdəki platformaların birində yaranmış sızma nəticəsində neft ləkəsi hər 30 saniyədə radiusu 1 m artmaqla dairəşəkilli olaraq yayılmaqdadır.

1) 2-ci dəqiqədən 30-cu dəqiqəyə qədər neftin yayıldığı sahə haqqında məlumatı əks etdirən cədvəl qurun və qrafik çəkin.
2) Verilən zaman intervallarında yayılma sürətinin orta qiymətini tapın:
a) ilk 5 dəqiqədə; b) növbəti 10 dəqiqədə; c) ilk 30 dəqiqə ərzində
3) 5-ci dəqiqədəki ani yayılma sürəti ilə 20-ci dəqiqədəki ani yayılma sürəti arasındakı fərqi tapın. Bu məlumat nə üçün yararlı ola bilər?

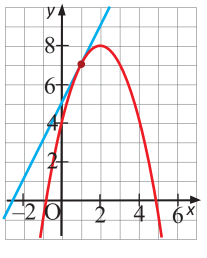
8. Hər bir funksiya üçün cədvəli doldurun.

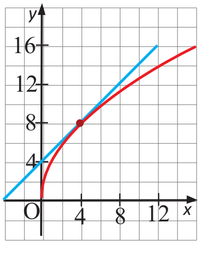
a) $f(x) = 4x^2$
b) $f(x) = -5x^2$
c) $f(x) = x^2 + x$
d) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

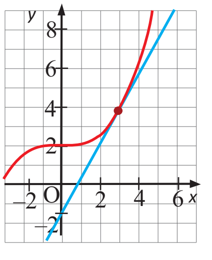
x	h	$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
5	2	
5	1	
5	0,1	
5	0,01	

9. $f(x) = 2^x$ funksiyasının qrafikini absisləri:
a) $x_1 = 0$ və $x_2 = 1$;
b) $x_1 = 1$ və $x_2 = 2$
olan nöqtələrdə kəsən düz xəttin bucaq əmsalını tapın.

10. Qrafiklərə çəkilmiş toxunanların bucaq əmsalını təxmin edin. Bu hansı sürəti göstərir: ani, yoxsa orta?

a)


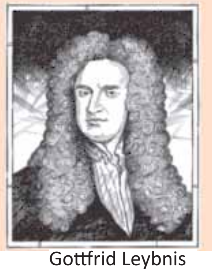
b)


c)


11. Düzxətli hərəkət edən cismin getdiyi yolun zamandan asılılığı $s(t) = t^2 + 3t + 2$ funksiyası ilə verilmişdir (s metrlə, t saniyə ilə ölçülür).
Verilən anda cismin sürətini tapın: a) $t = 1$; b) $t = 5$.

Ani dəyişmə sürətini hesablama zərurəti İsaak Nyuton (1642-1727) və Gottfrid Leybnis (1646-1716) tərəfindən hesablamanın ən təməl və güclü qaydasının–diferensial hesabının formalaşmasına gətirib çıxardı. Bu qaydanın təkmilləşdirilməsi "törəmə" anlayışını doğurdu.

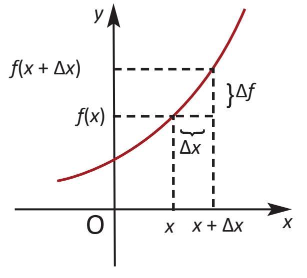
İsaak Nyuton (1642-1727)



Gottfrid Leybnis (1646-1716)

Ani sürətin və əyriyə çəkilən toxunanın bucaq əmsalının tapılması məsələləri mahiyyətcə eynidir və müəyyən funksiyanın ani dəyişməsinin tapılmasına gətirilir. İndi isə bu anlayışları ümumiləşdirək.

Funksiyanın törəməsi



Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $(a;b)$ intervalında təyin olunmuşdur. Hər hansı $x \in (a;b)$ nöqtəsini qeyd edək və arqumentə elə Δx artımı verək ki, $x + \Delta x \in (a;b)$ olsun. Onda funksiya uyğun $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ artımı alar.

Tərif: Arqument artımı sıfıra yaxınlaşdıqda funksiya artımının arqument artımına nisbətinin sonlu limiti varsa, bu limitə $f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində törəməsi deyilir və belə yazılır:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

f funksiyasının törəməsi $f'(x)$ və ya $\dfrac{df}{dx}$ (Leybnis yazılışı) kimi də işarə edilir.

Əgər x nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının $f'(x)$ törəməsi varsa, bu halda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası bu nöqtədə **diferensiallanandır**. Verilmiş intervalın hər bir nöqtəsində diferensiallanan funksiyaya həmin intervalda diferensiallanan funksiya deyilir.

Funksiyanın törəməsinin tapılmasına **diferensiallama əməli** deyilir.

Törəməni tərifə görə tapmaq üçün aşağıdakı addımlar yerinə yetirilir.

1. $f(x + \Delta x)$ tapılır.

2. $f(x + \Delta x) - f(x)$ fərqi sadələşdirilir.

3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ nisbəti tapılır.

4. $\Delta x \to 0$ olmaqla $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ limiti (varsa) tapılır.

Nümunə 1. $f(x) = kx + b$ funksiyasının $f'(x)$ törəməsini tapın.

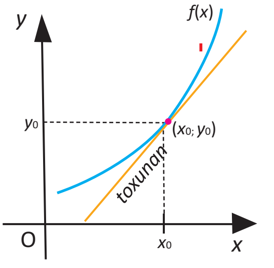
Həlli:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k(x+\Delta x) + b - (kx + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} k = k$$

Deməli, $\mathbf{(kx + b)' = k}$ olur. Xüsusi halda, $k = 1$, $b = 0$ olduqda alarıq: $\mathbf{(x)'=1}$

Törəmənin həndəsi mənası. Toxunanın tənliyi

$y = f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində diferensiallanandırsa, onun qrafikinə $(x_0; f(x_0))$ nöqtəsində toxunan çəkmək olar.



Funksiyanın törəməsinin x_0 nöqtəsindəki qiymətі absisi x_0 olan nöqtədə qrafikə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalına bərabərdir:

$$k_{tox} = f'(x_0).$$

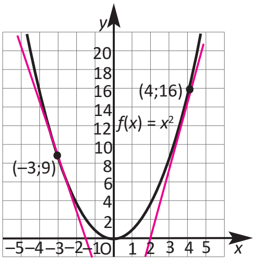
$(x_0; y_0)$ nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı k olan düz xəttin tənliyi $y - y_0 = k(x - x_0)$ şəklindədir. Absisi x_0 olan nöqtənin ordinatının $y_0 = f(x_0)$, toxunanın bucaq əmsalının $k = f'(x_0)$ olduğunu nəzərə alsaq, $f(x)$ funksiyasının qrafikinə absisi x_0 olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın tənliyi

$$\mathbf{y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)} \quad \text{olar.}$$

Nümunə 2. $f(x) = x^2$ funksiyasının: a) törəməsini; b) $f'(-3)$ və $f'(4)$ qiymətlərini; c) funksiyanın qrafikinə absisi $x = -3$ nöqtəsində çəkilən toxunanın tənliyini yazın.

Həlli:

a) Tərifə görə törəmə $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ kimi tapılır.



1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

2. $f(x + \Delta x) - f(x) = (x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

3. $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \dfrac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

4. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

$f(x) = x^2$ funksiyasının törəməsi $f'(x) = 2x$ funksiyasıdır. Göründüyü kimi, kvadrat funksiyanın törəməsi xətti funksiyadır: $\mathbf{(x^2)' = 2x}$

b) $f'(x) = 2x$ olduğundan, $f'(-3) = 2 \cdot (-3) = -6$; $f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$

c) Düz xəttin $y - y_0 = k(x - x_0)$ düsturuna görə toxunanın tənliyini yazaq. $f'(-3) = -6$ olduğundan, absisi $x_0 = -3$ olan nöqtədə toxunanın bucaq əmsalı $k = -6$-dır. Qrafik üzərində absisi $x_0 = -3$ olan nöqtənin ordinatı $y_0 = f(-3) = 9$-dur. Bu qiymətləri yerinə yazsaq, absisi $x_0 = -3$ olan nöqtədə toxunanın tənliyi. $y - 9 = -6(x + 3)$ və ya $y = -6x - 9$ kimi olar.

Aparılan hesablamalara görə funksiya haqqında deyə bilərik:
- ✓ $(-3; 9)$ nöqtəsində toxunanın bucaq əmsalı $k = -6$-dır.
- ✓ $(4; 16)$ nöqtəsində toxunanın bucaq əmsalı $k = 8$-dir.
- ✓ $x = -3$ qiymətində ani dəyişmə sürəti -6-dır.
- ✓ $x = 4$ qiymətində ani dəyişmə sürəti 8-dir.
- ✓ Absisi $x_0 = -3$ nöqtəsində toxunanın tənliyi $y = -6x - 9$ kimidir.

Nümunə 3. $f(x) = x^3$ funksiyasının: a) törəməsini;
b) $f'(-1)$ və $f'(1{,}5)$ qiymətlərini tapın.

Həlli:

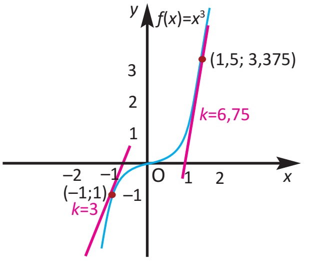
a) 1. $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

2. $f(x + \Delta x) - f(x) = (x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

3. $$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$$

4. $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

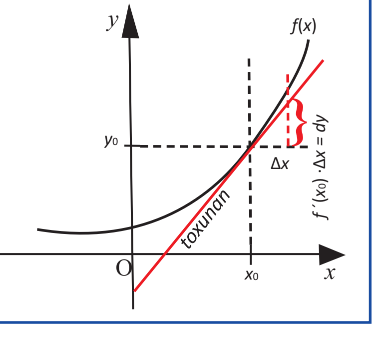
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2$$



Deməli, $f(x) = x^3$ funksiyasının törəməsi kvadrat funksiyadır: $\mathbf{(x^3)' = 3x^2}$.

b) $f'(x) = 3x^2$ olduğundan, $f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 = 3$ və $f'(1{,}5) = 3\cdot(1{,}5)^2 = 6{,}75$.

$f'(x_0)\cdot\Delta x$ ifadəsinə funksiyanın diferensialı deyilir və dy ilə işarə olunur. Göründüyü kimi, diferensial Δx-dən asılı funksiyadır. $y = x$ funksiyası üçün $x' = 1$ olduğundan $dx = \Delta x$ alarıq. Ona görə $f(x)$ funksiyasının diferensialı $df = f'(x)\, dx$ kimi işarə edilir.



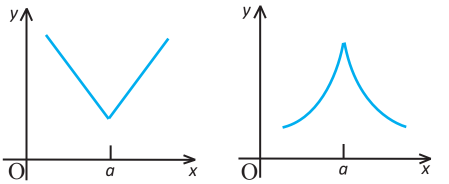
Funksiyanın törəməsinin olmadığı nöqtələr.

Funksiya x_0 nöqtəsində diferensiallanandırsa, $\Delta x \to 0$ olduqda $\Delta f \to 0$ olduğundan funksiya bu nöqtədə kəsilməzdir. Lakin bu hökmün tərsi, ümumiyyətlə, doğru deyil. Funksiyanın kəsilməz olduğu müəyyən nöqtələrdə törəməsi olmaya bilər.

Törəmə həndəsi olaraq qrafikə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalı ilə müəyyən edilir. Bütün nöqtələrində toxunanı olan əyriyə **hamar əyri** deyilir. Funksiya qrafiki üzərində elə nöqtələr ola bilər ki, ya bu nöqtədə toxunan çəkmək mümkün deyil, ya da toxunan şaqulidir. Belə nöqtələrdə funksiyanın törəməsi yoxdur.

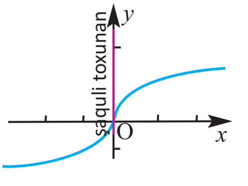
Aşağıda törəmənin olmadığı nöqtələrə aid nümunələr göstərilmişdir.

1) Qrafiki "V" şəkilli olan funksiyaların ($y = |x|$ funksiyası, bəzi hissə-hissə funksiyalar və.s) "sınma" nöqtəsində toxunanı, arqumentin uyğun qiymətində isə törəməsi yoxdur.



2) Qrafikə şaquli toxunan olduqda (y oxu ilə üst-üstə düşdükdə və ya ona paralel olduqda), toxunanın absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsində funksiyanın törəməsi yoxdur.

Məsələn, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ funksiyasının qrafikinə absisi $x_0 = 0$ nöqtəsində çəkilmiş toxunan şaquli düz xətdir və bu nöqtədə funksiyanın törəməsi yoxdur.

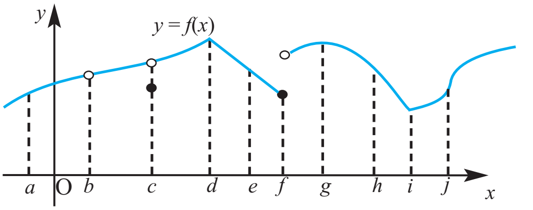


3) Kəsilmə nöqtələrində funksiyanın törəməsi yoxdur.

Nümunə 4. Şəkildə $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki verilmişdir. Arqumentin absis oxu üzərində qeyd edilmiş hansı qiymətlərində funksiyanın törəməsi yoxdur?

Həlli: $y = f(x)$ funksiyasının törəməsi yoxdur:

* b, c, f nöqtələrində - bu nöqtələrdə funksiya kəsilən olduğu üçün;



* d və i nöqtələrində - "sınma" nöqtələri olduğu üçün;

* j nöqtəsində - toxunan şaquli düz xətt olduğu üçün.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Hər bir yazılışla hansı funksiyanın törəməsinin tapılması göstərilmişdir? Limiti hesablamaqla tamamlayın.

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(x+h)^3 - 3x^3}{h}$

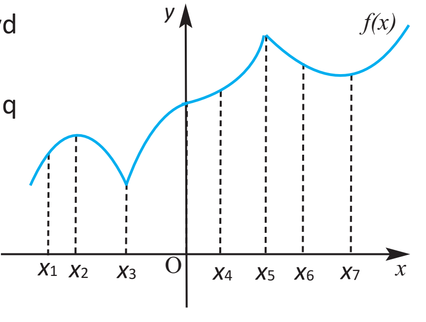
2. a) $y = x^2$ funksiyasının törəməsini tapın. Funksiyanın və törəmə funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu yazın.
b) $y = 2x^2$, $y = -3x^2$ funksiyalarının törəmələrini tapın.

3. 1) $f(x) = 3x^2$ 2) $f(x) = -2x^2$ 3) $f(x) = -2x + 5$ 4) $f(x) = x^3$

funksiyaları verilmişdir. Aşağıdakıları yerinə yetirin:

a) funksiyaların qrafiklərini sxematik çəkin.
b) absisləri –2; 0; 1 olan nöqtələrdə qrafiklərə toxunanlar çəkin və toxunanın bucaq əmsalını təxmin edin.
c) $f'(x)$ törəməsini, tərifə görə, limitin köməyilə tapın.
d) *b* bəndində verilmiş nöqtələrdə törəmənin qiymətini tapın və toxunanın bucaq əmsalı üçün etdiyiniz təxminlə müqayisə edin.

4. Arqumentin absis oxu üzərində qeyd edilmiş hansı qiymətlərində:
1) funksiyanın qrafikinə toxunanın bucaq əmsalı:
a) sıfıra bərabərdir;
b) sıfırdan böyükdür;
c) sıfırdan kiçikdir;
2) toxunan yoxdur?

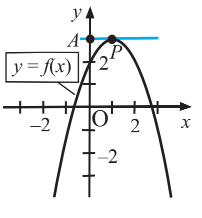


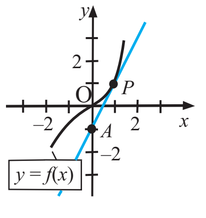
5. a) Elə qrafik çəkin ki, absisi $x = 5$ olan nöqtədə toxunanı olmasın.

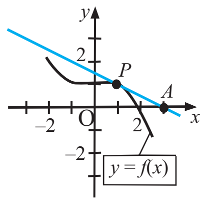
b) Elə qrafik çəkin ki, absisi $x = 2$ olan nöqtədə üfüqi toxunanı olsun.

c) Elə qrafik çəkin ki, absisi $x = 0$, $x = 3$, $x = 6$ olan nöqtələrdə üfüqi toxunanları olsun, absisi $x = 2$ olan nöqtədə isə toxunanı olmasın.

6. Şəkildə $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinə absisi $x = 1$ olan P nöqtəsində çəkilmiş toxunan göstərilmişdir. A nöqtəsi isə toxunan üzərindədir. Toxunanın bucaq əmsalına görə $f'(1)$-i tapın.

a)


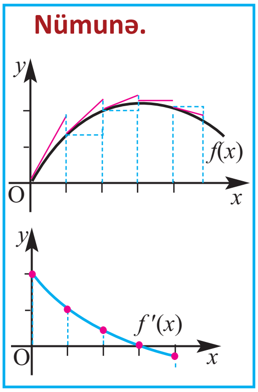
b)


c)


7. Funksiyanın törəməsini tapın. Qeyd edilən nöqtələrdəki toxunanların tənliklərini yazın.

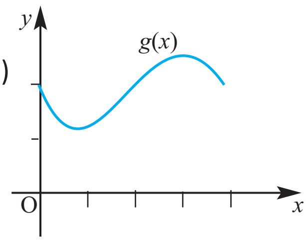
1) $f(x) = x^2$ a) (2;4) b) (0;0) c) (10;100)
2) $f(x) = x^3$ a) (–1;–1) b) (2;8) c) (–2;–8)

8.

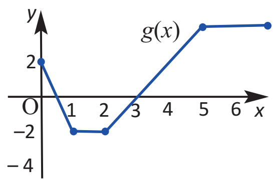


Nümunədə $f(x)$ funksiyasının qrafikinə çəkilmiş toxunanların bucaq əmsallarının qiymətinə görə $f'(x)$ törəmə funksiyasının qrafikinin qurulması göstərilmişdir. Nümunəni araşdırın, $g(x)$ funksiyasının qrafikinə görə törəmə funksiyasının qrafikini sxematik çəkin.

a)

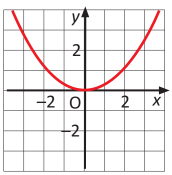


b)

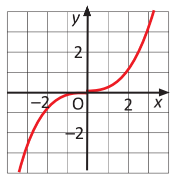


9. A, B, C funksiyaların qrafiklərini, *a*, *b*, *c* isə onların törəmə funksiyalarının qrafiklərini göstərir. Uyğunluğu müəyyən edin.

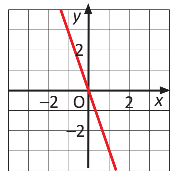
A



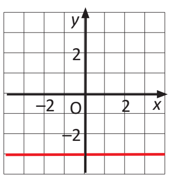
B



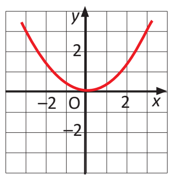
C



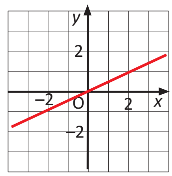
a



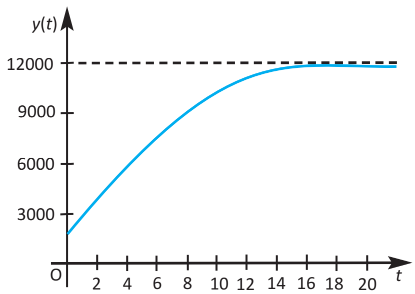
b



c



10. Bir dəniz canlısı üzərində aparılan müşahidə ilə onların artımı şəkildə verilən qrafikdə olduğu kimi müəyyən edilmişdir. Bu dəniz canlısının artım sürətini göstərən qrafiki sxematik çəkin.



11. Yeni heyvan yemini sınaqdan keçirən zootexniklər 6 həftə ərzində müşahidə apararaq bu yemlə buzovların kütləsinin həftəlik olaraq $m(t) = \sqrt{t + 40}$ funksiyası ilə dəyişdiyini aşkar etdilər. $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t}$ limtini hesablamaqla həftəlik dəyişmə sürətini müəyyən edin.

Biz törəmənin tərifindən istifadə edərək bəzi funksiyaların, məsələn, $y = x^2$, $y = x^3$ kimi qüvvət funksiyalarının törəmələrini müəyyən etdik.
Törəməni tapmaq üçün aşağıdakı qaydalardan istifadə edilir.

Sabitin törəməsi	$C' = 0$
Qüvvət funksiyasının törəməsi	$(x^n)' = n x^{n-1}$, $n \in \mathrm{N}$
Sabitlə funksiya hasilinin törəməsi	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
Cəmin (fərqin) törəməsi	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

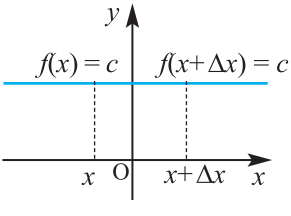
Törəmənin tərifindən istifadə edərək, bu qaydaları isbat edək.

1. $f(x) = c$ olarsa, $f'(x) = 0$, yəni sabitin törəməsi sıfıra bərabərdir.

İsbatı:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Sabit funksiyanın qrafikindən də göründüyü kimi, qrafikin bütün nöqtələrində bucaq əmsalının qiyməti sıfırdır.



2. $n \in$ N və $f(x) = x^n$ olarsa, $f'(x) = n x^{n-1}$

$f(x) = x^n$ funksiyasının $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$ qiymətinə uyğun binomial açılışları yazaq.

$$(x+\Delta x)^1 = x + \Delta x$$
$$(x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$$
$$(x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$
$$(x+\Delta x)^4 = x^4 + 4x^3\Delta x + 4x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4$$

Göründüyü kimi, hər bir açılışda birinci hədd x^n, ikinci hədd isə $n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x$ kimidir, üçbucaqşəkilli rəngli hissədəki hədlərin hər birində $(\Delta x)^2$ vuruğu vardır.
$(x+\Delta x)^n$ binomunun açılışını sadəlik üçün aşağıdakı kimi yazaq.

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\Delta x)^2 \cdot A_n$$

Funksiyanın ani dəyişmə sürətini göstərən nisbəti yazaq və sadələşdirək:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + (\Delta x)^2 \cdot A_n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta x\,(nx^{n-1} + \Delta x \cdot A_n)}{\Delta x} = nx^{n-1} + \Delta x \cdot A_n$$

Bu ifadənin $\Delta x \to 0$ şərtilə limiti $f(x)$ funksiyasının törəməsidir:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (nx^{n-1} + \Delta x \cdot A_n) = n \cdot x^{n-1}$$

Deməli, istənilən natural n ədədi üçün

$$\mathbf{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$$

Xüsusi halda, $n = 1,2,3$ olduqda $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$.
Ümumiyyətlə, istənilən həqiqi üstlü qüvvət funksiyası üçün $\mathbf{(x^p)' = p \cdot x^{p-1}}$ düsturu sağ tərəfin mənalı olduğu x-lər üçün doğrudur.

Xüsusi halda: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(x \neq 0)$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x > 0)$.

Nümunə 1. Funksiyaların törəməsini tapın.

a) $y = x^4$ b) $y = \frac{1}{x^5}$ c) $y = \sqrt[4]{x}$

Həlli: a) $y' = (x^4)' = 4x^3$

b) $y' = \left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5x^{-6} = -5 \cdot \frac{1}{x^6} = -\frac{5}{x^6}$

c) $y' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

3. $\boldsymbol{f(x)}$ **diferensiallanan funksiya olduqda, istənilən c sabiti üçün**

$$\mathbf{(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x),}$$

yəni sabit vuruğu törəmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar. Doğrudan da

$$[c \cdot f(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x)$$

4. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları diferensiallanandırsa, onların cəmi (fərqi) də diferensiallanandır və

$$\mathbf{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).}$$

İsbatı. Düsturun doğruluğunu $h(x) = f(x) + g(x)$ funksiyası üçün göstərək:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)] + [g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$$

Nümunə 2. $f(x) = x^3 - 2x + 3$ funksiyasının törəməsini tapın.
Həlli: $f'(x) = (x^3 - 2x + 3)' = (x^3)' - (2x)' + (3)' = 3x^2 - 2$

Nümunə 3. $\frac{d}{dx}\left(3\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)$ törəməsini tapın.

Həlli: $\frac{d}{dx}\left(3\sqrt{x} + \frac{2}{x}\right) = \frac{d}{dx}(3\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x}\right) = 3\frac{d}{dx}(x^{1/2}) + 2\frac{d}{dx}(x^{-1}) =$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} - 2x^{-2} = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2}$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Əvvəlcə törəməsi sıfıra bərabər olan funksiyaları seçin. Sonra isə digər funksiyaların törəməsini tapın.

$f(x) = \sqrt{11}$ | $f(x) = 2x^{-2}$ | $f(x) = 4{,}5\pi$ | $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ | $f(x) = \frac{5}{x^3}$

2. Funksiyanın törəməsini tapın.

a) $y = x$ b) $y = \frac{1}{4}x^2$ c) $y = x^5$ d) $y = -3x^4$

e) $y = 1{,}5x^3$ f) $y = \sqrt[5]{x^3}$ g) $y = \frac{5}{x}$ h) $y = \frac{4}{\sqrt{x}}$

3. Funksiyanın törəməsini tapın.

a) $f(x) = 2x^2 + x^3$ b) $y = \frac{4}{5}x^5 - 3x$ c) $h(t) = -1{,}1t^4 + 78$

d) $p(x) = \frac{x^2}{4} - 2\sqrt{x}$ e) $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ f) $g(s) = -\frac{1}{s^2} + 7s^2$

4. Törəməni tapın.

1) $\frac{d}{dx}(5x^2 - 7x + 3)$ 2) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[4]{x} - \frac{3}{x}\right)$ 3) $\frac{d}{dx}\left(-\sqrt[4]{x^3}\right)$ 4) $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

5. Funksiyanın verildiyi ifadəni sadələşdirin və törəməsini tapın.

a) $f(x) = (x-3)(x+1)$ b) $f(x) = x^2 \cdot (3 - x)$ c) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (1 - 2\sqrt{x})$

d) $y = \frac{x^3 + x + 2}{x}$ e) $y = \frac{x^5 - 2x^3 + 1}{x^2}$ f) $y = \frac{3x^4 - 6x^3}{x - 2}$

6. Verilmiş nöqtələrdə funksiyanın törəməsinin qiymətini hesablayın.

a) $f(x) = x^3 + 4x$, $x = 0$, $x = 2$ b) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 4$

7. x-in hansı qiymətlərində funksiyanın törəməsi sıfıra bərabərdir?

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2$

8. $f'(x) > 0$ bərabərsizliyini həll edin:

a) $f(x) = x + \frac{x^2}{4}$ b) $f(x) = 3x^2 - x^3$

9. $f(x) = (x+1)(x-1)^2$ funksiyasının ifadəsini əvvəlcə sadələşdirin, sonra törəməsini tapın.

10. $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 2$ funksiyası verilmişdir. $f(2) = 10$ və $f'(-1) = 14$ olarsa, a və b-ni tapın.

11. Törəməsi: a) 2; b) $2x + 3$; c) $3x + \frac{2}{\sqrt{x}}$ olan ən azı bir funksiyanı düsturla verin.

Tətbiq məsələləri. ***Toxunanın tənliyi, bucaq əmsalı.***

Nümunə. a) $f(x) = -x^3 + 6x^2$ funksiyasının qrafikinə hansı nöqtələrdə çəkilmiş toxunanlar absis oxuna paraleldir?

b) Funksiyanın qrafiki üzərində toxunanın bucaq əmsalının 9-a bərabər olduğu nöqtənin koordinatlarını müəyyən edin.

Həlli: a) Toxunan absis oxuna paraleldirsə, bucaq əmsalı 0-a bərabərdir.

Toxunanın bucaq əmsalının sıfıra bərabər olduğu nöqtələrdə $f'(x) = 0$ olur.

Funksiyanın törəməsini tapaq:

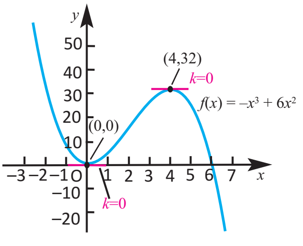
$$f'(x) = (-x^3 + 6x^2)' = -3x^2 + 12x$$

Törəmənin 0-a bərabər olduğu nöqtələri tapaq:

$-3x^2 + 12x = 0$; $-3x(x - 4) = 0$

$x_1 = 0$ $x_2 = 4$

Bu nöqtələrdə funksiyanın uyğun qiymətlərini hesablayaq:



$f(0) = -0^3 + 6\cdot0^2 = 0$; (0;0) $f(4) = -4^3 + 6\cdot4^2 = 32$; (4;32)

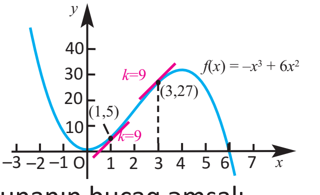
Qrafkalkulyatorla qurulmuş qrafikdən də göründüyü kimi, (0;0) və (4;32) nöqtələrində qrafikə toxunan absis oxuna paraleldir.

b) Toxunanın bucaq əmsalı 9-a bərabər olan nöqtələri tapaq:

$$-3x^2 + 12x = 9$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$x_1 = 1$; $y_1 = 5$; (1; 5)

$x_2 = 3$; $y_2 = 27$ (3; 27)



Qrafik üzərindəki (1; 5) və (3; 27) nöqtələrində toxunanın bucaq əmsalı 9-a bərabərdir.

12. Göstərin ki, $f(x) = 6x^3 + 2x^2$ funksiyasının qrafikinə bucaq əmsalı $k = -5$ olan toxunan çəkmək mümkün deyil.

13. Verilən funksiyaların üfüqi toxunanları varmı?

1) $y = x^2 - 3$ 2) $y = -x^2 + 4$ 3) $y = -x^3 + 1$

4) $y = x^3 + 2x$ 5) $y = 3x^2 - 5x + 4$ 6) $y = 5x^2 - 3x + 8$

14. $y = -3x^4 + 2x^3 + 5$ funksiyasının qrafikinə absisi $x_0 = 1$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalını tapın və bu toxunanın tənliyini yazın.

15. Verilən funksiyaların qrafikləri üzərində toxunanın bucaq əmsalının 1-ə bərabər olan nöqtələri müəyyən edin.

1) $y = 20 - x^2$ 2) $y = 5x - x^2$ 3) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 10x$

16. a) $f(x) = 3x^2$ və $g(x) = x^3$ funksiyaları üçün x-in elə qiymətlərini tapın ki, uyğun nöqtələrdə hər iki qrafikə çəkilmiş toxunanların bucaq əmsalları bərabər olsun.

b) *a* bəndində tapdığınız nöqtələrdə hər iki funksiyanın qrafikinə çəkilmiş toxunanların tənliyini yazın.

17. $y = x^2 - x + 1$ parabolası üzərində elə nöqtə tapın ki, həmin nöqtədə toxunan $y = 3x + 2$ düz xəttinə paralel olsun. Bu toxunanın tənliyini yazın.

18. $y = 4x - x^2$ parabolasının absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrində toxunanların bucaq əmsallarını tapın.

19. (1;–5) nöqtəsindən keçən və $y = x^2 - 2$ funksiyasının qrafikinə toxunan düz xəttin tənliyini yazın.

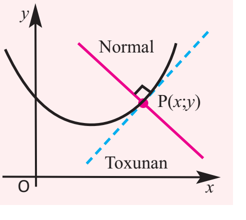
20. a) $g(x) = x^3$, $p(x) = x^3 - 3$, $q(x) = x^3 + 2$ funksiyalarının törəməsini tapın.

b) $f(x) = x^3 + c$ funksiyalarının (burada c ixtiyari sabitdir) törəməsi haqqında fikirlərinizi ümumiləşdirin.

c) Bu funksiyalar arasında eləsi varmı ki, $f'(x) = 3x^2$ olmaqla $f(0) = -2$ şərtini ödəsin. Bu hansı funksiyadır?

21. f və g çoxhədli funksiyaları üçün $f'(x) = g'(x)$ və $f(0) = 1$, $g(0) = 2$ şərtləri ödənir. Bu funksiyaların qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin olub-olmadığı haqqında fikirlərinizi əsaslandırın.

22. **Əlaqələndirmə.** *(x;y) nöqtəsində qrafikə çəkilmiş normal bu nöqtədə toxunana perpendikulyar düz xəttə deyilir.*



a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 5$ funksiyasının qrafikinə absisi $x_0 = 2$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalını müəyyən edin.

b) $f(x)$ funksiyasının qrafikinə absisi $x_0 = 2$ olan nöqtədə normalın tənliyini yazın.

23. Paraşütçü 2500 m yüksəklikdə uçan təyyarədən tullandı. Paraşütçünün t saniyədən sonra yerdən hündürlüyünü $h(t) = 2500 - 5t^2$ düsturu ilə tapmaq olar.

a) 5-ci saniyədə hündürlüyün dəyişmə sürətini tapın.

b) İdmançının paraşütü 1000 m hündürlükdə açılmışdır. Bu hansı anda baş vermişdir?

c) b bəndində müəyyən etdiyiniz anda hündürlüyün dəyişmə sürəti nə qədər olmuşdur?

Hasilin törəməsi

$f(x) = (2x-3)(x^2+4)$ şəklində verilmiş funksiyaların törəməsini tapmaq üçün funksiyanı çoxhədli şəklində yazıb, diferensiallama qaydasını tətbiq edə bilərik. Lakin hasil şəklində ifadə edilmiş funksiyaları diferensiallamanın daha effektiv qaydası vardır. Bu qayda aşağıdakı kimidir.

$f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları diferensiallanandırsa, onların hasili də diferensiallanandır və $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$.

İsbatı: $p(x) = f(x)\cdot g(x)$ olsun.

$$p'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{p(x+\Delta x) - p(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} =$$

Kəsrin surətinə $f(x+\Delta x)\cdot g(x)$ həddini əlavə edib çıxmaqla kəsri $f(x)$ və $g(x)$ hədlərinin daxil olduğu iki kəsrin cəmi şəklində yazmaq olar.

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\,g(x) + f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\,g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$$

Nümunə. $p(x) = (2x-1)(x^2-5)$ funksiyasının törəməsini tapın.

Həlli:

$f(x) = 2x-1,\ g(x) = x^2-5$ *hər bir vuruq bir funksiya kimi yazılır*

$f'(x) = 2,\ g'(x) = 2x$ *hər bir funksiyanın törəməsi tapılır*

$p'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ *hasili diferensallama qaydası tətbiq edilir*

$p'(x) = 2(x^2-5) + 2x\,(2x-1) =$ *uyğun ifadələr nəzərə alınır*

$= 2x^2 - 10 + 4x^2 - 2x =$ *sadələşdirilir*

$= 6x^2 - 2x - 10$

Həllin düzgün olduğunu funksiyanın ifadəsini sadələşdirib törəməsini almaqla yoxlayaq:

$p(x) = (2x-1)(x^2-5) = 2x^3 - 10x - x^2 + 5 = 2x^3 - x^2 - 10x + 5$

$p'(x) = (2x^3 - x^2 - 10x + 5)' = 6x^2 - 2x - 10$

Öyrənmə tapşırıqları.

1. Funksiyaların törəməsini tapın.

a) $f(x) = (x - 4)(2x + 1)$
b) $h(x) = (5x^2 + 3)(1 - 2x)$
c) $p(x) = (x^3 - 1)(3x^2 + 8)$
d) $g(x) = (2x^2 + 1)(4 + 3x^3)$

2. Funksiyaların törəməsini iki üsulla, hasili diferensiallama qaydasından istifadə etməklə və hasili sadələşdirib diferensiallamaqla tapın. Nəticələri müqayisə edin.

$m(x) = x^3 \cdot x^{-2}$ | $y = 5x^2(3x - 2)$ | $h(x) = (3x + 2)(5x^2 - 2x + 3)$

3. Verilən nöqtələrdə funksiyanın qrafikinə toxunanın tənliyini yazın.

a) $f(x) = (2x - 1)(x + 4)$, $(1;5)$
b) $g(x) = (x - 1)(x - 2)$, $(-1;6)$

4. $f(x) = kg(x)$ funksiyasının törəməsini tapmaq üçün hasili diferensiallama qaydasından istifadə edin. Alınan nəticə sabitlə funksiyanın hasilini diferensallama qaydasının tətbiqi ilə alınan nəticə ilə eynidirmi?

5. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ və $f(3) = 7$, $f'(3) = 12$, $g(3) = 8$, $g'(3) = 5$ olduğunu bilərək $h'(3)$ qiymətini tapın.

6. $p(x) = f(x)g(x)$ funksiyasının törəməsi $p'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ şəklində verilmişdir. Hər bir hal üçün $p(x)$ funksiyasını müəyyən edin.

a) $p'(x) = (6x^2 + 8)(3x^2 - 4x) + (2x^3 + 8x)(6x - 4)$
b) $p'(x) = (6x^2 - 1)(0{,}5x^2 + x) + (2x^3 - x)(x + 1)$

7. Hər bir funksiyanın qrafikinə absisi verilən nöqtədə çəkilən toxunanın tənliyini yazın.

a) $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 1)$, $x_0 = -2$
b) $g(x) = (2x^2 - 1)(-x^2 + 3)$, $x_0 = 2$
c) $h(x) = (x^4 + 4)(2x^2 - 6)$, $x_0 = -1$
d) $p(x) = (-x^3 + 2)(4x^2 - 3)$, $x_0 = 1$

8. Funksiyanın qrafikinə hansı nöqtədə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalının verilən qiymətə bərabər olduğunu müəyyən edin.

a) $y = (-4x + 3)(x + 3)$, $k = 0$
b) $y = (5x + 7)(2x - 9)$, $k = 9$
c) $y = (2x - 1)(-4 + x^2)$, $k = -4$
d) $y = (x^2 - 2)(2x + 1)$, $k = 4$

Əlaqələndirmə tapşırıqları

9. Hasili diferensiallama qaydasından istifadə etməklə funksiyaların törəməsini tapın. Nəticənin sadələşdirilməmiş vəziyyətinə uyğun hər hansı qaydanı söyləmək mümkündürmü?

a) $y = (x^2 + 2x)^2$
b) $y = (2x^3 - x)^2$
c) $y = (x^4 - 3x^2)^2$

10. Dayanacaqdakı maşının yanacaq çənindən itkinin başladığı andan t saat sonra çəndə qalan yanacağın miqdarını (litrlə)

$V(t) = 90\left(1 - \dfrac{t}{18}\right)^2$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar.

a) İtkinin baş verdiyi anda yanacaq çənində neçə litr benzin var idi?
b) 12 saatdan sonra çəndən yanacaq itkisi hansı sürətlə baş verir?
c) Çəndə 40 *l* yanacaq olduğu anda itki hansı sürətlə baş verir?

Nisbətin törəməsi

$f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları diferensiallanandırsa və $g(x) \neq 0$ olarsa, onda nisbəti də diferensiallanandır və $\frac{f(x)}{g(x)}$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

İsbatı:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{f(x+\Delta x)\,g(x) - f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} - \frac{f(x)\,g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{g(x+\Delta x)}\right] \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x - f(x)}{\Delta x}\right] - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{g(x)} f'(x) - \frac{f(x)}{[g(x)]^2} g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Xüsusi halda, $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x)$

Nümunə. $h(x) = \frac{3x-2}{4x+3}$ funksiyasının törəməsini tapın.

Həlli: $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 4x + 3$ *sürət və məxrəc ayrı-ayrı funksiya kimi yazılır*

$f'(x) = 3$, $g'(x) = 4$ *hər bir funksiyanın törəməsi tapılır.*

$h'(x) = \frac{3 \cdot (4x+3) - (3x-2) \cdot 4}{(4x+3)^2}$ *nisbəti diferensallama qaydası tətbiq edilir*

$= \frac{12x + 9 - 12x + 8}{(4x+3)^2} = \frac{17}{(4x+3)^2}$ *uyğun ifadələr nəzərə alınır* *sadələşdirilir*

Öyrənmə tapşırıqları.

1. Funksiyanın törəməsini tapın.

1) $f(x) = \frac{6x+1}{3x+10}$ 2) $f(x) = \frac{8x-11}{7x+3}$ 3) $y = \frac{5-3t}{4+t}$

4) $y = \frac{x^2-4x}{x+3}$ 5) $y = \frac{x^2+x}{x-1}$ 6) $f(t) = \frac{4t^2+11}{t^2+3}$

2. Funksiyaların törəməsini əvvəlcə nisbəti diferensiallama qaydası ilə, sonra isə sadələşdirərək çoxhədlini diferensallama qaydasından istifadə etməklə tapın. Nəticələrin eyni olduğuna diqqət edin.

a) $y = \dfrac{x^4}{x^3}$ b) $y = \dfrac{x^6}{x^4}$ c) $y = \dfrac{t^2 - 16}{t + 4}$

d) $f(x) = \dfrac{2x^5 + x^2}{x}$ e) $g(x) = \dfrac{3x^7 - x^3}{x}$ f) $h(x) = \dfrac{x^3 + 27}{x + 3}$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ və $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ funksiyaları verilmişdir.

a) $f'(x)$-i tapın b) $g'(x)$-i tapın.

c) Nəticələrə görə funksiyaların oxşar və fərqli cəhətlərini yazın.

4. 1) $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ funksiyasının qrafikinə: a) (0;2); b) (–2;1) nöqtəsində çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

2) $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 2}$ funksiyasının qrafikinə absisi: a) $x_0 = 1$; b) $x_0 = \dfrac{1}{4}$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

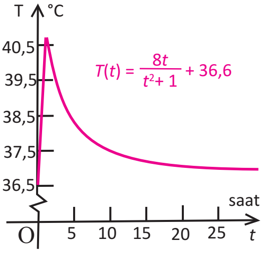
5. Aşağıda $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^3}$ funksiyasının törəməsinin tapılmasında səhvə yol verilmişdir. Bu səhvi tapın və düzgün həlli yazın.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 4}{x^3}\right)' = x^3(2x) - (x^2 - 4)(3x^2) = 2x^4 - 3x^4 + 12x^2 = -x^4 + 12x^2$$

6. Xəstənin temperaturunun zamandan asılı olaraq dəyişməsini aşağıdakı funksiya ilə modelləşdirmək olar.

$$T(t) = \frac{8t}{t^2 + 1} + 36,6$$

$t = 2$ saat anında temperaturun dəyişmə sürətini tapın.



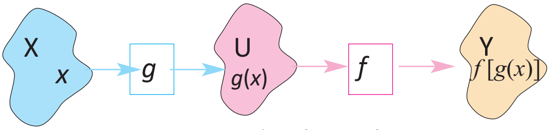
7. Şirkətdəki araşdırmalar göstərir ki, yeni işçinin yığdığı detalların sayı iş yerində keçdiyi təlim günlərinin sayından asılı olaraq aşağıdakı funksiya ilə dəyişir:

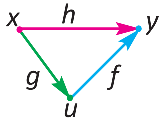
$$N(t) = \frac{100t^2}{3t^2 + 10}$$

a) İstənilən gündə işçinin detal yığma sürətini müəyyən etməyə imkan verən funksiyanı müəyyən edin.
b) N´(2) və N´(10) qiymətlərini tapın və situasiyaya uyğun izah edin.

Mürəkkəb funksiyanın törəməsi

Tutaq ki, $u = g(x)$, $x \in X$ və $y = f(u)$ $u \in U$ funksiyaları verilmişdir və $E(g) \subset D(f)$. Onda $h(x) = f(g(x))$ kimi mürəkkəb funksiya təyin etmək olar.





Bir neçə nümunəni nəzərdən keçirək. $h = f \circ g$

1) $u = g(x) = 3x + 1$, $f(u) = u^2$ olmaqla $y = f(g(x))$ mürəkkəb funksiyasını qurun və çoxhədli şəklində göstərin.

$$y = f(g(x)) = (3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

2) bu funksiyanın törəməsini tapın və onu aşağıdakı şəkildə yazın.

$$y' = 18x + 6 = 2\cdot(3x + 1)\cdot 3$$

3) $f'(u) = 2u$ və $g'(x) = 3$ olduğuna əsasən

$$y' = f'(u)\cdot g'(x)$$

bərabərliyinin doğruluğunu yoxlayın.

Mürəkkəb funksiyanın törəməsinin tapılmasının zəncirvari qaydası:

Tutaq ki, müəyyən intervalda $y = h(x) = f(g(x))$ mürəkkəb funksiyası verilmişdir və g funksiyası x_0 nöqtəsində, f funksiyası isə $u_0 = g(x_0)$ nöqtəsində diferensiallanandır. Onda h mürəkkəb funksiyası da x_0 nöqtəsində diferensiallanandır və onun törəməsi üçün

$$h'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

düsturu doğrudur.

Doğrudan da, g funksiyası verilmiş x_0 nöqtəsində diferensiallanandırsa, $\Delta x \to 0$ olduqda $\Delta u \to 0$ olur.

$$h'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u_0)\cdot g'(x_0)$$

$\Delta u \neq 0$ olduğu nəzərdə tutulur.

Beləliklə alırıq ki, $\boldsymbol{h'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)}$.

$u = g(x)$, $y = f(u)$ olduğunu nəzərə almaqla sonuncu bərabərliyin Leybnis yazılışı

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$ şəklində olar.

Xüsusi halda, $g(f(x)) = (f(x))^n$ olarsa,

$$\boldsymbol{((f(x))^n)' = n\cdot(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)}$$

$f(x) = kx + b$ olduqda, alarıq: $\boldsymbol{((kx + b)^n)' = n\cdot(kx + b)^{n-1}\cdot k}$

Nümunə 1. $h(x) = (5x^2 + 3)^4$ funksiyasının törəməsini tapın.
Həlli: $u = 5x^2 + 3$ və $f(u) = u^4$ işarə etsək, verilmiş funksiya bu funksiyaların kompozisiyası ilə qurulmuş mürəkkəb funksiya olur və

$$h'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = 4u^3 \cdot 10x = 40x \cdot (5x^2+3)^3$$

Nümunə 2. $h(x) = \sqrt{3x^2 + 2}$ funksiyasının törəməsini tapın.
Həlli: $u = 3x^2 + 2$, $f(u) = \sqrt{u}$ işarə edək.

$f'(u) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$, $u'(x) = 6x$ olduğundan $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2 + 2}}$ alırıq.

Nümunə 3. $f(x) = 3x(2x - 1)^2$ funksiyasının törəməsini tapın.
Həlli: Göründüyü kimi, burada həm hasilin, həm də mürəkkəb funksiyanın diferensiallama qaydası tətbiq edilməlidir.

$$f'(x) = (3x(2x-1)^2)' = (3x)' \cdot (2x-1)^2 + 3x \cdot ((2x-1)^2)' =$$
$$= 3 \cdot (2x-1)^2 + 3x \cdot 2 \cdot (2x-1) \cdot 2 = 3 \cdot (2x-1)^2 + 12x \cdot (2x-1) =$$
$$= 12x^2 - 12x + 3 + 24x^2 - 12x = 36x^2 - 24x + 3$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Cədvəli dəftərinizdə tamamlayın.

$h(x)=f(g(x))$	$u=g(x)$	$f(u)$	$u'(x)$	$f'(u)$	$h'(x)$
a) $(6x-1)^2$	$6x-1$	u^2	6	$2u$	$12 \cdot (6x-1)$
b) $(x^2+3)^3$					
c) $(2-x^3)^4$					
d) $(-3x+4)^{-1}$					

2. Funksiyanın törəməsini tapın.

a) $f(x) = 3 \cdot (4x+1)^5$ b) $f(x) = (3x^2 - 1)^4$ c) $f(x) = (x^2 - x)^{-3}$

3. Müsbət üstlü qüvvətlə ifadə edərək funksiyanın törəməsini tapın.

a) $y = \sqrt{5x - 1}$ b) $y = \sqrt[3]{2x + 1}$ c) $y = \sqrt{x^2 + 3}$

4. Mənfi üstlü qüvvətlə ifadə edərək funksiyanın törəməsini tapın.

a) $y = \dfrac{5}{(3-2x)^2}$ b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ c) $y = \dfrac{1}{(3x^2-2)^2}$

5. $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarına görə $h(x) = f(g(x))$ və $z(x) = g(f(x))$ mürəkkəb funksiyalarını yazın və törəməsini tapın.

a) $f(x) = x^3$; $g(x) = 6x - 1$ b) $f(x) = x^4$; $g(x) = 2x + 1$

6. Tapın:
a) $f(x) = (2x-1)^3$ olduqda $f'(2)$-ni; b) $f(x) = (4-3x)^4$ olduqda $f'(1)$-i;
c) $f(x) = \sqrt{x^2-3}$ olduqda $f'(-2)$-ni.

7. $f(x) = x^2 \cdot (5-4x)^3$ funksiyasının $x = 1$ nöqtəsində törəməsinin qiymətini hesablayın.

8. $f(x) = x \cdot (2x-1)^4$ funksiyası verilmişdir. Həll edin:
a) $f'(x) = 0$ tənliyini; b) $f'(x) < 0$ bərabərsizliyini.

9. 1) Funksiyaların törəməsini əvvəlcə nisbəti diferensallama qaydasından istifadə etməklə, sonra isə məxrəci mənfi üstlü qüvvət şəklində yazmaqla mürəkkəb funksiyanı diferensiallama qaydasından istifadə etməklə tapın.

a) $q(x) = \dfrac{1}{3x+5}$ b) $q(x) = \dfrac{3x}{x+1}$ c) $g(x) = \dfrac{6}{7x^2+1}$

2) Nisbəti diferensiallama qaydasının ümumi şəklini mürəkkəb funksiyadan istifadə etməklə yazın.

10. Absisi verilmiş nöqtədə funksiyanın qrafikinə çəkilən toxunanın tənliyini yazın.

a) $f(x) = \sqrt{x^2+16}$; $x_0 = 3$ b) $f(x) = (x^3+7)^{2/3}$; $x_0 = 1$

11. Funksiyanın qrafikinə toxunanın absis oxuna paralel olduğu nöqtələrin absislərini tapın.

a) $f(x) = \sqrt{x^2+6x+10}$ b) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+7)^4}$

Tətbiq tapşırıqları

Nümunə 1. Banka illik r faizlə 10 illik qoyulmuş 500 manat pul əmanətinin gəliri aylıq olaraq mürəkkəb faiz artımı ilə hesablanır. 10 ilin sonunda pul məbləğini aşağıdakı kimi hesablamaq olar.

$$S(r) = 500\left(1 + \frac{r}{1200}\right)^{120}$$

a) Bankda pul məbləğinin (S-in) gəlir faizinə görə artımını müəyyən etməyə imkan verən $S'(r)$ funksiyasını yazın.
b) $r = 5$ və ya $r = 7$ olduqda pul məbləğinin artımını hesablayın.

Həlli: a) $S'(r) = \left(500\left(1 + \dfrac{r}{1200}\right)^{120}\right)' =$

$= 500 \cdot 120\left(1 + \dfrac{r}{1200}\right)^{119} \cdot \dfrac{1}{1200} =$ *mürəkkəb funksiyanı diferensialla-ma qaydası tətbiq edilir*

$= 50\left(1 + \dfrac{r}{1200}\right)^{119}$ *sadələşdirilir*

b) $r = 5$ olduqda 10 ildən sonra pul artımı (aylıq)

$$S'(5) = 50\left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{119} \approx 82{,}01 \text{ manat},$$

$r = 7$ olduqda 10 ildən sonra pul artımı (aylıq)

$$S'(7) = 50\left(1 + \frac{7}{1200}\right)^{119} \approx 99{,}90 \text{ manat olar.}$$

12. Cismin hərəkət sürətinin (m/san) zamandan asılılığı $v(t) = 2t + 1$ kimidir. Kütləsi m olan cismin kinetik enerjisi $E = \frac{mv^2}{2}$ düsturu ilə hesablanır. $\frac{dE}{dt}$-ni tapın.

13. Biznes. Mağazada elektron əşyaların zamandan asılı olaraq satış sayını aşağıdakı düsturla hesablamaq olar.

$$N(t) = \frac{250\,000t^2}{(2t+1)^2}, \quad t > 0$$

a) Bu funksiyanın törəməsini tapın və törəmə funksiyanın mənasını situasiyaya uyğun izah edin.

b) Törəmə funksiyanın $N'(100)$ və $N'(500)$ qiymətlərini tapın və situasiyaya uyğun izah edin.

14. Maliyyə. Banka illlik r faizlə 5 illik qoyulmuş 1000 manat əmanətin gəliri kvartalda bir dəfə olmaqla mürəkkəb faiz artımı ilə hesablanır. 5 ilin sonunda hesabdakı pul məbləğini faiz artımından asılı olaraq aşağıdakı kimi hesablamaq olar.

$$S(r) = 1000\left(1 + \frac{r}{400}\right)^{20}$$

a) $\frac{dS}{dr}$ törəməsini tapın və situasiyaya uyğun izah edin.

b) $r = 4\%$; $r = 7\%$; $r = 12\%$ olduqda 5-ildən sonrakı kvartalda pul məbləğinin dəyişməsini müəyyən edin.

15. Neft sızmasının yayılması. Dəniz sahilinin yaxınlığında yerləşən neft quyusundan başlayan neft sızması ətrafa zamandan asılı olaraq radiusu $r(t) = t^2$ qanunu ilə dəyişməklə dairəşəkilli yayılır. $S(r) = \pi r^2$ radiusu r olan dairənin sahəsini ifadə edir. Burada t saniyə ilə, r desimetrlə ölçülür.

a) $S[r(t)]$ funksiyasını yazın və situasiyaya uyğun izah edin.

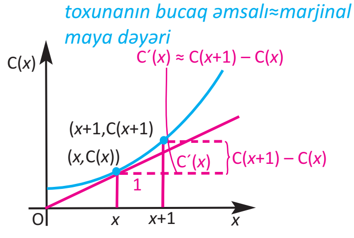
b) $S'(t)$ funksiyasını tapın və situasiyaya uyğun izah edin.

c) $S'(100)$ qiymətini tapın və izah edin.

İqtisadi məsələlərin həllində bir sıra göstəricilərin dəyişmə sürətini “marjinal“ terminindən istifadə etməklə təqdim edirlər.

İqtisadi məsələlərin həllində aşağıdakı işarələmələri qəbul edək.
x - istehsal olunmuş məhsulun sayı, $C(x)$ - istehsal olunmuş x sayda malın maya dəyəri funksiyası, $R(x)$ - x sayda malın satışından əldə olunan ümumi gəliri göstərən funksiya, $P(x)$ - x sayda malın satışından əldə olunan mənfəəti ifadə edən funksiya: $P(x) = R(x) – C(x)$.

Marjinal maya dəyəri istehsal edilən mala görə maya dəyərinin ani dəyişməsidir.



x sayda malın maya dəyərini $C(x)$ ilə işarə etsək, x +1 sayda malın maya dəyəri $C(x + 1)$ olar. $C(x+1) – C(x)$ fərqi $(x + 1)$ -ci malın maya dəyərini ifadə edir. Bu fərq maya dəyərindəki artımı göstərir və marjinal maya dəyəri adlanır. Marjinal maya dəyərini həmçinin $(x;C(x))$ nöqtəsində qrafikə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalının qiyməti ilə, başqa sözlə, funksiyanın x nöqtəsindəki törəməsini tapmaqla da müəyyən etmək olar. Yəni $C(x)$ funksiyasının $C'(x)$ törəməsinin qiyməti $(x + 1)$-ci malın maya dəyərindəki dəyişməni, marjinal maya dəyərini təxmin etmək üçün istifadə edilir.

Marjinal gəlir. $R'(x)$ satılan malın sayından asılı olaraq gəlirin ani dəyişməsidir, başqa sözlə, marjinal gəlir hər əlavə istehsal edilən maldan əldə edilən gəlirdir.
Marjinal mənfəət. $P'(x)$ satılan məhsuldan əldə olunan mənfəətin satılan malın sayına görə dəyişməsidir (sürətidir). Başqa sözlə, hər əlavə istehsal edilən maldan gələn mənfəəti göstərir.

Nümunə. Qızdırıcı cihaz istehsal edən şirkət istehsal olunan x sayda malın maya dəyərini $C(x) = x^3 – 6x^2 + 15x$ funksiyası ilə, x sayda malın satışından əldə edilən gəliri isə $R(x) = x^3 – 3x^2 + 12x$ funksiyası ilə modelləşdirmişdir.
a) 10 cihaz istehsalından sonra bir cihazın maya dəyəri şirkətə neçə manata başa gələr?
b) 10 cihaz satıldıqdan sonra satılan bir cihazdan əldə edilən gəliri tapın.

Həlli: Maya dəyərini modelləşdirən funksiya $C(x) = x^3 – 6x^2 + 15x$ kimidir.

$C(x)$ funksiyasının $C'(x)$ törəmə funksiyası istənilən anda (istehsal sayından asılı olaraq) istehsal olunan məhsulun maya dəyərini (təqribi olaraq) müəyyən etməyə imkan verir.

a) $C'(x) = (x^3 - 6x^2 + 15x)' = 3x^2 - 12x + 15$; $C'(10) = 3 \cdot 10^2 - 12 \cdot 10 + 15 = 195$₼
Yəni, 10-cu cihaz istehsal edildikdən sonra növbəti cihazın maya dəyəri təxminən 195 manat olar.
b) $R(x)$ funksiyasının $R'(x)$ törəmə funksiyası istənilən anda (istehsal sayından asılı olaraq) məhsulun satışından əldə edilən gəliri müəyyən etməyə imkan verir.
$R'(x) = (x^3 - 3x^2 + 12x)' = 3x^2 - 6x + 12$

$$R'(10) = 3 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 + 12 = 252 \text{₼}$$

16. $C(x) = 4x + 10$, $R(x) = 50x - 0{,}5x^2$ olarsa:
a) $P(x)$ mənfəət funksiyasını yazın;
b) $C(40)$, $R(40)$, $P(40)$ qiymətlərini tapın;
c) $C'(x)$, $R'(x)$, $P'(x)$ törəmə funksiyalarını yazın;
d) $C'(40)$, $R'(40)$, $P'(40)$ qiymətlərini hesablayın.

17. Marjinal maya dəyəri. Tutaq ki, şirkət x sayda paltaryuyan maşın istehsal etdikdə maya dəyəri $C(x) = 2000 + 100x - 0{,}1x^2$ funksiyası ilə hesablanır.
a) 100 maşın istehsal edildikdə bir paltaryuyan maşının orta qiyməti ($C(x)/x$) neçə manat olacaq?
b) 100 paltaryuyan maşın istehsal edildikdə bir paltaryuyan maşının marjinal qiyməti (maya dəyəri) neçə manat olacaq?
c) Göstərin ki, 100 paltaryuyan maşın istehsal edildikdə marjinal maya dəyəri (istehsal qiyməti) 101-ci paltaryuyan maşının istehsal qiymətinə təxminən bərabərdir.

18. Marjinal gəlir. Şirkətin qatlanıb yığıla bilən x sayda masanın satışından əldə etdiyi ümumi gəlirini

$$R(x) = 20x - \frac{x^2}{500} \quad \text{funksiyası ilə modelləşdirmək olar.}$$

a) 1000 masa satıldıqda marjinal gəliri müəyyən edin.
b) 1001-ci masa üçün marjinal gəliri $R(1001) - R(1000)$ ifadəsinin qiymətinə görə müəyyən edin.
c) a və b bəndindəki cavablarınızı müqayisə edin.

19. Marjinal mənfəət. Həftəlik x sayda dəzgah istehsal edib satdıqda, şirkətin əldə etdiyi mənfəəti $P(x) = -0{,}004x^3 - 0{,}3x^2 + 600x - 800$ kimi müəyyən etmək olar. Hal-hazırda şirkətin həftəlik satışı 9 dəzgahdır.
a) Şirkətin həftəlik mənfəətini hesablayın.
b) Şirkətin həftəlik satışı 8 dəzgaha enərsə, həftəlik mənfəət nə qədər azalar?
c) 9 dəzgah satışı halında marjinal mənfəəti hesablayın.
d) a və c bəndindəki nəticələrdən istifadə edərək, 10 dəzgah satıldığı halda mənfəəti təxmin edin.

İkinci tərtib törəmə. Gedilən yol, sürət, təcil

Tutaq ki,verilmiş aralıqda $y = f(x)$ funksiyasının $f'(x)$ törəməsi var. Əgər $f'(x)$ funksiyası diferensiallanandırsa, onun törəməsinə $f(x)$ funksiyasının ikinci tərtib törəməsi deyilir və $f''(x)$ kimi işarə edilir.
Məlumdur ki, törəmə dəyişmənin ani sürətidir. Gedilən yolun zamana görə ani dəyişməsi sürətdir. Buradan törəmənin fiziki mənası aydın olur.
s(t) qanunu ilə düzxətli hərəkətdə ani sürət s(t) funksiyasının törəməsinə bərabərdir:

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Sürət özü də zamandan asılı dəyişə bilər. Sürətin dəyişməsi isə təcil adlanan yeni bir kəmiyyətlə ifadə edilir. Ümumiyyətlə, gedilən yolun zamandan asılı funksiyasının törəməsini tapmaqla sürət funksiyası, yenidən sürət funksiyasının törəməsini tapmaqla təcil tapılır. Yəni, gedilən yolu göstərən funksiyanın ardıcıl olaraq iki dəfə törəməsini almaqla təcili tapmaq olar:

$$a(t) = v'(t) = (s'(t))' = s''(t)$$

İkinci tərtib törəmədən bir çox iqtisadi məsələlərin, həmçinnin real həyati situasiyalara aid məsələlərin həllində istifadə edilir. Dəyişmə sürətinin müsbət və ya mənfi olduğunun təxmin edilməsi mühüm praktik əhəmiyyət kəsb edir.

Nümunə 1. Verilən funksiyaların y'' ikinci tərtib törəməsini tapın.

a) $y = x^4 + 3x^2 - 5x$ b) $y = \frac{5}{2}(x^2 - 2x)^2$

Həlli:

a) $y' = (x^4 + 3x^2 - 5x)' = 4x^3 + 6x - 5$ *birinci tərtib törəmə tapılır*

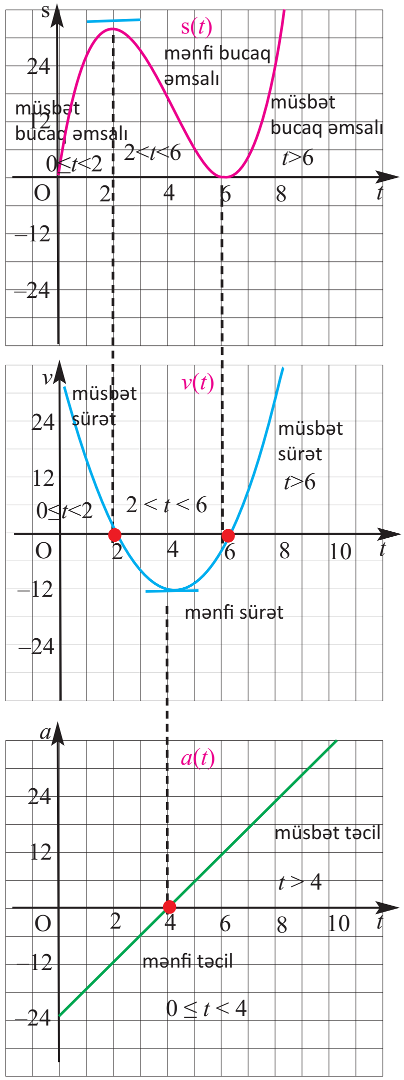
$y'' = (4x^3 + 6x - 5)' = 12x^2 + 6$ *ikinci tərtib törəmə tapılır*

b) $y = \frac{5}{2}(x^2 - 2x)^2$

$y' = (2{,}5(x^2 - 2x)^2)' = 5(x^2 - 2x)(x^2 - 2x)' =$
$= 5(x^2 - 2x)(2x - 2) = 10x^3 - 30x^2 + 20x$ *mürəkkəb funksiyanın diferensiallanma qaydası tətbiq edilməklə birinci tərtib törəmə tapılır*

$y'' = (10x^3 - 30x^2 + 20x)' = 30x^2 - 60x + 20$ *ikinci tərtib törəmə tapılır*

Nümunə 2. t zamanından asılı olaraq qət edilən yolun $s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ (t zamanı saniyə ilə, s məsafəni metrlə göstərir, $t \geq 0$) funksiyasına görə məsafə, sürət və təcil funksiyaları arasındakı əlaqəni araşdırın.



Həlli:
$s(t)$-nin qrafikindən göründüyü kimi, $t = 2$ və $t = 6$ olduqda toxunanın bucaq əmsalı sıfırdır. Yəni bu nöqtələr uyğun törəmə funksiyanın sıfırlarıdır.

(0; 2) və (6; 8) intervalında $s(t)$ funksiyasının qrafikinə çəkilmiş toxunanların bucaq əmsalları müsbətdir və $v(t)$ funksiyası da müsbətdir (t oxundan yuxarıda yerləşir). (2;6) intervalında toxunanların bucaq əmsalları mənfidir, $v(t)$ funksiyası da mənfidir (t oxundan aşağıda yerləşir).

$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 24t^2 + 36$ funksiyasının qrafikindən görünür ki, $t = 4$ olduqda toxunanın bucaq əmsalı sıfıra bərabərdir. Bu nöqtə $a(t)$ funksiyasının qrafikinin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsidir.

$v(t)$ funksiyasının qrafikinə toxunanın bucaq əmsalı [0; 4) intervalında mənfi, (4; 8) intervalında isə müsbət olduğundan

$a(t) = v'(t) = 6t - 24$ funksiyası [0; 4) aralığında mənfi; (4; 8) aralığında müsbət qiymətlər alır.

Fizikadan məlumdur ki, həm sürət, həm də təcil vektorial kəmiyyətdir. Təcil və sürət eyni işarəli olarsa, hərəkət yeyinləşən, əks işarəli olarsa, yavaşıyandır.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilən funksiyalar üçün ikinci tərtib törəməni tapın.

1) $y = 7x + 2$
2) $y = 6x - 3$
3) $y = 4x^2 + 3x - 1$
4) $y = 4x^2 - 5x + 7$
5) $y = 5x^3 + 4x$
6) $y = 2x^4 - 5x$
7) $y = x^4 - 7$
8) $y = 7x + 2$
9) $y = \dfrac{1}{x^2}$
10) $y = \dfrac{1}{x^3}$
11) $y = \sqrt{x}$
12) $y = \sqrt[4]{x}$

2. Verilən funksiyalar üçün $f''(2)$ -i tapın.

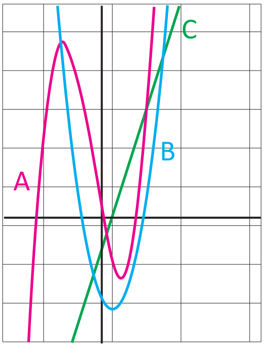
1) $f(x) = 4x^3 - 5x + 6$
2) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 + 5$
3) $f(x) = (3x^2 + 2)(1 - x)$
4) $f(x) = (6x - 5)(x^2 + 4)$

3. Verilən funksiyalar üçün y''-i tapın.

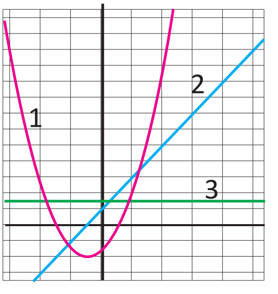
1) $y = (x^2 + 3)(4x - 1)$ 2) $y = \dfrac{3x + 1}{2x - 3}$ 3) $y = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^2}$

4. Şəklə görə məsafə $s(t)$, sürət $v(t)$ və təcil $a(t)$ funksiyalarının qrafiklərinə uyğun xətləri müəyyən edin.

a)



b)



5. Yuxarı atılmış cismin yerdən hündürlüyünün t zamanından asılılığını $h(t) = -0{,}5gt^2 + v_0t + h_0$ funksiyası ilə ifadə etmək olar. Burada $g \approx 9{,}8$m/san^2 sərbəstdüşmə təcilini, v_0 -başlanğıc sürəti m/san ilə, h_0 cismin atıldığı hündürlüyü metrlə, t zamanı saniyə ilə göstərir.

a) $h(t)$ funksiyasına görə sürət $v(t)$ və təcil $a(t)$ funksiyasını müəyyən edin.

b) Ox, hündürlüyü 3 m olan ağacdan 18 m/san başlanğıc sürəti ilə yuxarı atılmışdır. Oxun hərəkətini təsvir edən $s(t)$, $v(t)$ və $a(t)$ funksiyalarını yazın.

6. Cisim $s(t) = -8t^2 + 2t + 3$ qanunu ilə düzxətli hərəkət edir. Burada s metrlə, t saniyə ilə verilir. Gedilən yol funksiyasına görə sürət və təcil funksiyalarını müəyyən edin. $t = 2$ san anında sürəti və təcili tapın.

7. Kütləsi 2 kq olan cisim $x(t) = t^2 + t + 1$ (yerdəyişmə metrlə, t zamanı saniyə ilə ölçülür) qanunu ilə düzxətli hərəkət edir. Hərəkətə başladıqdan 3 saniyə sonra cismin kinetik enerjisini tapın.

8. Kütləsi 3 kq olan cisim $s(t) = t^2 - 4t$ (yerdəyişmə metrlə, t zamanı saniyə ilə ölçülür) qanunu ilə düzxətli hərəkət edir. Bu cismə təsir edən F qüvvəsinin qiymətini tapın.

Üstlü funksiyanın törəməsi

Biz eksponensial artma və azalma ilə modelləşdirilə bilən bir çox real həyati situasiyalara aid məsələlərlə tanışıq. Məsələn, əhalinin artımı, bank hesabındakı pulun məbləğinin artımı, radioaktiv maddənin parçalanması, canlıların, bakteriyaların çoxalması və s. Bu situasiyalarda istənilən andakı artım sürətinin müəyyən edilməsi mühümdür. Bu artım sürətini isə törəmənin tətbiqi ilə müəyyən etmək olar.

Üstlü funksiya ədəd oxunun hər bir nöqtəsində diferensiallanandır.

1. $y = e^x$ funksiyasının törəməsi: $(e^x)' = e^x$

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h-e^x}{h} =$$ *törəmənin tərifi*; *e^x vuruğu mötərizə xaricinə çıxarılır*

$$= \lim_{h\to 0} e^x\cdot\frac{e^h-1}{h} =$$ *e^x vuruğu h-dan asılı olmadığından limit işarəsinin qarşısına çıxarılır.*

$$= e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} =$$ $\lim\limits_{h\to\infty}\frac{e^h-1}{h} = 1$ *nəzərə alınır*

$$= e^x$$

2. $y = e^{u(x)}$ mürəkkəb funksiyasının törəməsi.

$u(x)$ diferensiallanan funksiya olarsa, $(e^{u(x)})' = e^{u(x)}\cdot u'(x)$

Xüsusi halda, $(e^{kx+b})' = k\cdot e^{kx+b}$

3. $y = a^x$ funksiyasının törəməsi: $(a^x)' = a^x\cdot \ln a$

$y' = (a^x)' = (e^{x\ln a})' =$ *loqarifmin əsas xassəsi*

$= e^{x\ln a}\ln a =$ *mürəkkəb funksiyanın törəməsi*

$= a^x\cdot\ln a$ *loqarifmin əsas xassəsi*

4. $y = a^{u(x)}$ mürəkkəb funksiyasının törəməsi.

$u(x)$ diferensiallanan funksiya olarsa, $(a^{u(x)})' = a^{u(x)}\cdot u'(x)\cdot\ln a$

Nümunə 1. $y = e^{x^2+2x}$ funksiyasının törəməsini tapın.

Həlli: $y' = (e^{x^2+2x})' = e^{x^2+2x}(x^2+2x)' = (2x+2)\,e^{x^2+2x}$

Nümunə 2. $y = 4\cdot 10^{1/x}$ funksiyasının törəməsini tapın.

Həlli:

$$y' = (4\cdot 10^{1/x})' = 4\cdot\ln 10\cdot 10^{1/x}(1/x)' = 4\cdot\ln 10\cdot 10^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-4\cdot\ln 10\cdot 10^{1/x}}{x^2}$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Funksiyanın törəməsini tapın.

a) $y = 3e^x + 2$ b) $y = 2x - e^{-x}$ c) $y = e^{x+2}$ d) $y = e^{3x+2}$

e) $y = 2x \cdot e^x$ f) $y = x^2 \cdot e^x$ g) $y = x^3 \cdot e^{2x}$ h) $y' = \frac{5}{e^x}$

2. Funksiyanın törəməsini tapın.

a) $y = 7^{3x+2}$ b) $y = 4^{-5x+2}$ c) $y = 3 \cdot 4^{x+2}$

d) $y = -10^{3x-4}$ e) $s = 2 \cdot 3^{\sqrt{t}}$ f) $s = 5 \cdot 2^{\sqrt{t-2}}$

3. a) $y = e^x$ funksiyasının qrafikinə (0;1) nöqtəsində çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalını tapın və bu toxunanın tənliyini yazın.

b) $y = e^{2x}$ funksiyasının qrafikinə (0;1) nöqtəsində çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

c) $y = e^{-x}$ funksiyasının qrafikinə toxunan olub, koordinat başlanğıcından keçən düz xəttin tənliyini yazın.

4. Tapın: a) $f(x) = 2e^x + 2$ olduqda $f'(0)$-ı; b) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$ olduqda $f'(1)$-i

5. $f'(x) > 0$ bərabərsizliyini həll edin.

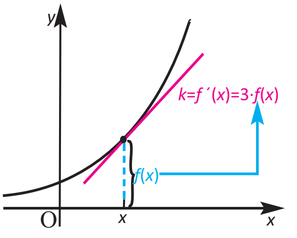
a) $f(x) = x \cdot \ln 3 - 3^x$ b) $f(x) = 2^x + 4 \cdot 2^{-x}$

Tətbiq tapşırıqları

$f(x) = 2e^{3x}$ funksiyasının törəməsi üçün

$f'(x) = (2e^{3x})' = (2e^{3x})(3x)' = 3(2e^{3x}) = 3f(x)$

olduğundan $f(x)$ funksiyasının qrafikinə absisi x olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalının qiyməti funksiyanın bu nöqtədəki qiymətindən 3 dəfə böyükdür.



Bu onu göstərir ki, eksponensial dəyişmədə artımın dəyişmə sürəti artımın miqdarı ilə mütənasibdir.

Nümunə. Mürəkkəb faizlə pul artımı. P_0 məbləğində pul illik 9% mürəkkəb faiz artımı ilə banka qoyulmuşdur.

İstənilən t ilində pul məbləği $P(t) = P_0 e^{0,09t}$ düsturu ilə hesablanır.

a) Banka 1000 manat pul qoyulmuşsa, 3-cü ilin sonunda bankdakı əmanət neçə manat olacaq?

b) Banka 1000 manat pul qoyulmuşsa, 4-cü ildə pul artımı neçə manat olacaq?

Həlli:

a) $t = 3$ olduqda, $P = 1000e^{0,09t}$-nin qiymətini hesablayaq.

$P = 1000e^{0,09 \cdot 3} \approx 1000 \cdot 1,310 = 1310$ ₼

b) $t = 3$ qiymətində $P(t)$ funksiyasının törəməsinin qiyməti əmanətin 4-cü ildəki pul artımına uyğundur. Bu artım $\Delta P \approx P'(3) \cdot \Delta t = P'(3) \cdot 1 = P'(3)$ olacaqdır. $P'(t) = 1000 \cdot 0,09 \cdot e^{0,09t}$ olduğundan,

$$\Delta P \approx P'(3) = 90 \cdot e^{0,27} \approx 117,9 \text{ ₼ olar.}$$

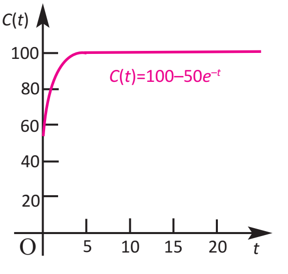
6. Qrafkalkulyatorla iş. a) $f(x) = 4^x$ funksiyasının qrafikini çəkin.
b) $f'(x)$ funksiyasının qrafikini çəkin.
c) $g(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ funksiyasının qrafikini təxmin edin və fikirlərinizi yazın.
d) Qrafkalkulyatorla $g(x)$ funksiyasının qrafikini qurun, təxminlərinizi yoxlayın.
e) $y = 4^x$ funksiyasının əvəzinə istənilən $y = a^x$ funksiyası olarsa,
$g(x)$ funksiyasının qrafikinin forması dəyişərmi? Xüsusi halda $a = e$ olarsa, qrafik haqqında fikrinizi yazın.

7. Əhali artımı. BMT-nin verdiyi məlumatlara əsasən, 1960-cı ildən başlayaraq əhalinin (milyon nəfərlə) artımını illərə görə $N(t) = 3100e^{0,0166t}$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Əhali artımının verilən ildəki artım sürətini (ani artım sürəti) müəyyən edin.
a) 1980 b) 2002 c)2015

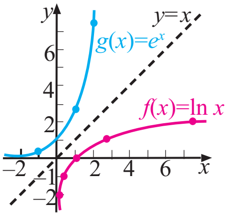
8. Satış artımı. Yeni satışa çıxarılan kompüterlərin satışını zamandan (illə) asılı olaraq $S(t) = 100 - 90e^{-0,3t}$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar.
Satışın: a) 3 ildən sonrakı; b) 5 ildən sonrakı artım sürətini müəyyən edin.

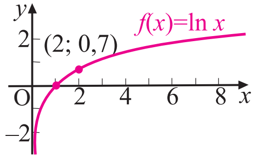
9. Radioaktiv parçalanma. Qurğuşun-214 maddəsinin t ildən sonra qalan(qramla) miqdarını $A(t) = 500e^{-0,31t}$ düsturu ilə müəyyən etmək olar.
1)Verilən ildə maddənin miqdarı neçə qram azalacaq (ani dəyişmə)?
a) 4 ildən sonra b) 7 ildən sonra c) 10 ildən sonra
2) Maddə miqdarının dəyişmə sürəti haqqında fikirlərinizi yazın.
3) Maddə nəhayət tamamilə yox olacaqmı?

10. Biznes. Polimer məhsullar istehsal edən zavodun istehsala başladığı müddətdən etibarən A məhsulunun maya dəyərini milyon manatla $C(t) = 100 - 50e^{-t}$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar.



Tələb olunanları tapın:
a) Marjinal maya dəyərini;
b) $C'(0)$ qiymətini;
c) $C'(4)$ qiymətini (yüzdə bir dəqiqliklə);
d) $\lim\limits_{t\to\infty} C(t)$ və $\lim\limits_{t\to\infty} C'(t)$ qiymətlərini tapın. Məhsulun maya dəyəri xərclərinin dəyişməsinin getdikcə 0-a yaxınlaşmasını real situasiyaya uyğun izah edin.





Loqarifmik funksiyanın törəməsi

$y = \ln x$ funksiyası $(0;+\infty)$ aralığında diferensiallanandır və $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$e^y = x$ *ekvivalent yazılışla əvəz edilir*

$(e^y)' = (x)'$ *törəməsi alınır*

$(e^y)\, y' = 1$ *mürəkkəb funksiyanın törəməsi nəzərə alınır*

$y' = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x}$ *əvəzetmə aparılır*

$y' = \dfrac{1}{x}$, yəni $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$y = \ln x$ funksiyasının törəməsini həndəsi olaraq belə təqdim etmək olar. Qrafik üzərində soldan başlayaraq hər hansı nöqtədə toxunan çəkin. Bu toxunan üzərində xətkeş yerləşdirin və xətkeşlə toxunanın sağa doğru yerdəyişməsini modelləşdirin. Hər növbəti toxunan xətkeşin bir qədər də üfüqi vəziyyətə gətirilməsini tələb edir və bucaq əmsalının qiyməti 0-a yaxınlaşır.

$u(x) > 0$ və diferensiallanan funksiyadırsa, $\quad (\ln u(x))' = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$

Xüsusi halda, $(\ln(kx + b))' = \dfrac{k}{kx + b}$

Nümunə. a) $y = \ln 5x$; b) $y = \ln(x^3 + 2)$ funksiyasının törəməsini tapın.

Həlli: a) $y' = (\ln 5x)' = (\ln 5 + \ln x)' = 0 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$

b) $y' = (\ln(x^3 + 2))' = \dfrac{1}{x^3 + 2} \cdot (x^3 + 2)' = \dfrac{3x^2}{x^3 + 2}$

$y = \log_a x$ funksiyasının törəməsi: $\quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$

Doğrudan da, $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ olduğundan

$(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a}(\ln x)' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ alınır.

törəməsi alınır

diferensiallama qaydası tətbiq edilir

$u(x) > 0$ və diferensiallanan funksiyadırsa, $\quad (\log_a u(x))' = \dfrac{1}{u(x) \cdot \ln a} \cdot u'(x)$

Nümunə. a) $y = \log_5 x$; b) $y = \log_3(x^2 + 1)$ funksiyasının törəməsini tapın.

Həlli: a) $y' = (\log_5 x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln 5}$

b) $y' = (\log_3(x^2 + 1))' = \dfrac{1}{(x^2 + 1) \cdot \ln 3} \cdot (x^2 + 1)' = \dfrac{2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln 3}$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilmiş funksiyanın törəməsini tapın.
a) $y = 4 \ln x$ b) $y = 3 \ln (2x)$ c) $y = \ln (2x + 1)$ d) $\ln (x^2 + 1)$

2. Funksiyanın törəməsini tapın.
a) $y = x^2 \cdot \ln x$ b) $y = \frac{\ln x}{x}$ c) $y = \ln^3 x$ d) $y = \sqrt{\ln x}$

3. $y = \ln x$ funksiyasının törəməsini logarifmik funksiyanı ekvivalent üstlü funksiya yazılışı ilə ifadə etməklə tapın.

4. Funksiyanın törəməsini tapın.
a) $y = \log_2 (x^2 + x + 3)$ b) $y = \log_3 \frac{x-2}{x+1}$ c) $y = \lg \sqrt{x^2 + 3}$

5. Verilmiş funksiyanın törəməsinin verilmiş nöqtədəki qiymətini hesablayın.
a) $f(x) = \log_2 (4 + 3x)$, $x_0 = -1$ b) $f(x) = x^3 \cdot \ln(3 + 2x)$, $x_0 = -1$

6. 1) $f(x) = x - \ln x$ olarsa, $f'(x) > 0$ bərabərsizliyini həll edin.
2) x-in hansı qiymətlərində verilmiş funksiyanın törəməsi sıfıra bərabərdir?
a) $f(x) = \ln(x + 2) - 2x + 2$ b) $f(x) = x^3 - 3\ln x$

7. a) $y = x \cdot \ln x$ funksiyasının qrafikinə absisi $x_0 = e$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.
b) $y = x^2 \cdot \ln \frac{2}{x}$ funksiyasının qrafikinə absisi $x_0 = 2$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

Tətbiq tapşırıqları

8. **Bakteriyaların çoxalması.** Tədqiqatlar 32°C temperaturda kolbasadakı baktareyaların t zaman anındakı $N(t)$ sayının

$$\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = 0{,}2t$$

münasibətini ödədiyini müəyyən etmişdir. Burada N_0 bakteriyaların ilkin sayıdır, t zamanı saatla ölçülür.

a) Loqarifmin xassələrindən istifadə etməklə $N(t)$ funksiyasını yazın.
$N_0 = 100$ qəbul edin.
b) $N(t)$ funksiyasının törəməsini tapın və situasiyaya uyğun izah edin.
c) $t = 12$ olduqda $N'(t)$-ni tapın

9. **Marjinal maya dəyəri.** Tutaq ki, x sayda tütək musiqi alətini düzəltmək üçün maya dəyəri(manatla) $C(x) = 5\log_2 x + 10$ funksiyası ilə modelləşdirilir.
a) 10; b) 20 tütək düzəldildiyi halda marjinal maya dəyərini tapın.

10. **Zəlzələnin amplitudu.** Zəlzələnin gücü (maqnitudası)

$$M = \lg \frac{A}{A_0} \quad \text{kimi müəyyən edilir.}$$

Burada A_0 hiss oluna bilən yeraltı təkanın ən kiçik amplitudu, A baş vermiş yeraltı təkanın amplitududur.
a) dM/dA dəyişməsini tapın.
b) dM/dA dəyişməsini situasiyaya uyğun izah edin. A-nın qiyməti böyüdükcə dM/dA necə dəyişəcək?

11. **Arıların çoxalması.** Tutaq ki, arıların çoxalmasının t zamandan asılılığını $N(t) = (t+200)\ln(t+2)$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Burada t saatla ölçülür. Çoxalmanın 5-ci; 10-cu günündəki artım sürətini müəyyən edin.

12. **Əmanətin artımı.** Gəliri mürəkkəb faiz artım düsturu ilə hesablanan pul əmanəti r% gəlirlə banka qoyulmuşdur. Bu pulun ümumi məbləğinin ilkin məbləğin ikiqatı olma vaxtını göstərən düstur aşağıdakı kimidir:

$$T = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r/100)}$$

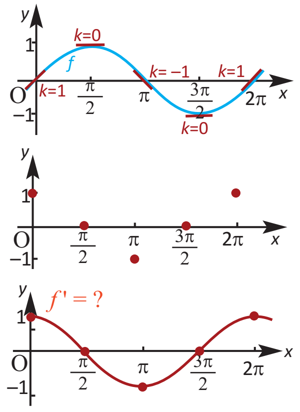
$r = 5$ olduqda dT/dr -i tapın və situasiyaya uyğun izah edin.

13. Ləman deyir ki, $y = \ln 5x$ və $y = \ln x$ funksiyalarının hər ikisinin törəməsi $\frac{1}{x}$ -dir. Deməli, bu funksiyalar eyni funksiyalardır. Siz bu fikrin səhv olduğunu necə izah edərdiniz?

14 **Farel balığının çoxalması.** Çoxaldılmaq məqsədilə gölə 400 farel balığı atıldı. Göldəki mövcud şərait farellərin ən çoxu 2500-ə qədər artmasına imkan verir. Farellərin təxmini sayının t zamanından (ayla) asılı dəyişməsini

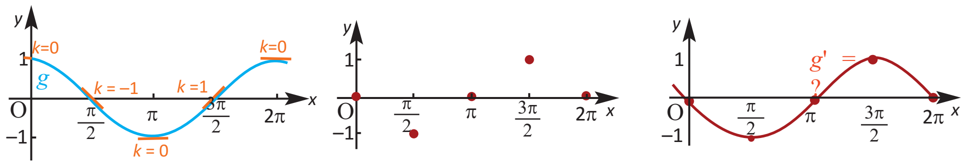
$$P(t) = \frac{2500}{1 + 5{,}25\, e^{-0{,}32t}} \quad \text{funksiyası ilə ifadə etmək olar.}$$

a) Farellərin sayı 3 aydan; 5 aydan sonra neçə olacaq.
b) $P'(t)$ funksiyasını tapın və situasiyaya uyğun mənasını izah edin.



Araşdırma. ***y = sinx funksiyasının törəməsi.***

1. *y* = sin*x* funksiyasının qrafikini dəftərinizdə çəkin. Verilən nöqtələrdə toxunanların bucaq əmsallarını qrafik üzərində qeyd edin.
2. Yeni koordinat sistemi çəkin və toxunanın qeyd edilmiş nöqtədəki bucaq əmsallarına uyğun nöqtələri qeyd edin.
3. Qeyd etdiyiniz nöqtələri birləşdirin. Bucaq əmsallarının qiymətinin həmin nöqtədəki törəmə funksiyanın qiyməti olduğunu nəzərə alaraq törəmə funksiya haqqında fikirlərinizi təqdim edin.
4. Eyni addımları *y* = cos*x* funksiyası üçün də yerinə yetirin və onun törəmə funksiyası haqqındakı fikirlərinizi təqdim edin.



Triqonometrik funksiyaların törəməsi

Triqonometrik funksiyalar təyin oblastında diferensiallanandır.

y* = sin*x* funksiyasının törəməsi: (sin*x*)′ = cos *x

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$ *Törəmənin tərifinə görə*

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos\Delta x + \cos x \sin\Delta x - \sin x}{\Delta x} =$$ *triqonometrik eynilik*

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x (\cos\Delta x - 1) + \cos x \sin\Delta x}{\Delta x} =$$ *ortaq vuruğun mötərizə xaricinə çıxarılması*

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin x (\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos x \sin\Delta x}{\Delta x}\right] =$$ *kəsrin xassəsi*

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x (\cos\Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \sin\Delta x}{\Delta x} =$$ *limitin xassəsi*

$$= \sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos\Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} =$$ *sinx və cos x, Δx-dən asılı olmadığı üçün*

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

$\lim\limits_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$ $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ *olduğu nəzərə alınır.*

$y = \sin u(x)$ mürəkkəb funksiyasının törəməsi:
$u(x)$ diferensiallanan funksiyadırsa, $(\sin u(x))' = u'(x)\cdot\cos u(x)$
Xüsusi halda, $(\sin(kx + b))' = k \cdot \cos(kx + b)$
Nümunə. $y = \sin 2x$ funksiyasının törəməsini tapın.
Həlli: Burada, $u = 2x$, $y' = (\sin 2x)' = \cos 2x\cdot(2x)' = 2\cos 2x$

$y = \cos x$ funksiyasının törəməsi: $(\cos x)' = -\sin x$

$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ eyniliyindən istifadə etməklə $y = \cos x$ funksiyasının törəməsini tapmaq olar.

$$y' = (\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}_{\sin x} \cdot \underbrace{(\frac{\pi}{2} - x)'}_{-1} = -\sin x$$

$y = \cos u(x)$ mürəkkəb funksiyasının törəməsi:
$u(x)$ diferensiallanan funksiyadırsa, $(\cos u(x))' = -u'(x)\cdot\sin u(x)$
Xüsusi halda, $(\cos(kx + b))' = -k \cdot \sin(kx + b)$
Nümunə. $y = \cos 4x$ funksiyasının törəməsini tapın.
Həlli: Burada, $u = 4x$, $y' = (\cos 4x)' = -\sin 4x \cdot(4x)' = -4\sin 4x$

$y = \tan x$ funksiyasının törəməsi: $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ eyniliyindən istifadə etməklə $y = \tan x$ funksiyasının törəməsini tapmaq olar.

$$y' = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$y = \mathrm{tg}\, u(x)$ mürəkkəb funksiyasının törəməsi:
$u(x)$ diferensiallanan funksiyadırsa, $(\tan u(x))' = \dfrac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x)$

Xüsusi halda, $(\tan(kx + b))' = \dfrac{k}{\cos^2(kx + b)}$

Oxşar qayda ilə göstərmək olar ki,

$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $(\cot u(x))' = -\dfrac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot u'(x)$,

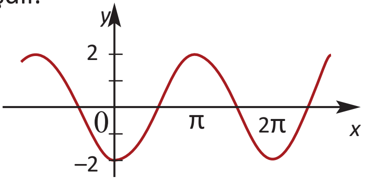
xüsusi halda, $(\cot(kx + b))' = -\dfrac{k}{\sin^2(kx + b)}$

Nümunə 1. $y = 3\sin 2x - 4\cos 3x$ funksiyasının törəməsini tapın.
Həlli: $y' = (3\sin 2x - 4\cos 3x)' = (3\sin 2x)' - (4\cos 3x)' =$
$= 3\cos 2x(2x)' + 4\sin 3x(3x)' = 6\cos 2x + 12\sin 3x$

Nümunə 2. $y = 4\sin^3 2x$ funksiyasının törəməsini tapın.
Həlli: $y' = (4\sin^3 2x)' = 4 \cdot 3 \cdot \sin^2 2x \cdot (\sin 2x)' = 12 \cdot \sin^2 2x \cdot 2 \cdot \cos 2x =$
$= 24 \sin^2 2x \cdot \cos 2x$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Şəkildə $y = -2\cos x$ funksiyasının qrafiki verilmişdir.



1) Qrafikə görə funksiyanın verilən nöqtələrdə toxunanların bucaq əmsallarını müəyyən edin:
a) funksiyanın sıfırlarında;
b) maksimum nöqtələrində;
c) minimum nöqtələrində.
2) törəmə funksiyasının qrafikini çəkin.

2. Funksiyanın törəməsini tapın.

a) $y = 2\sin x$ b) $y = 3\cos x$ c) $y = 2\cot x$
d) $y = 3\sin 2x$ e) $y = 2\cos 3x$ f) $y = 4\tan 2x$
g) $y = x^2 \cdot \sin x$ h) $y = x \cdot \sin 2x$ i) $y = x^2 \cdot \cos 2x$

3. Funksiyanın törəməsinin verilmiş nöqtədə qiymətini hesablayın.

a) $f(x) = 4x - 2\tan x$, $f'(\frac{\pi}{4})$ b) $f(x) = x \cdot \cos 2x$, $f'(\pi)$

4. Funksiyanın törəməsini tapın və $x = \frac{\pi}{3}$ nöqtəsində toxunanın bucaq əmsalını hesablayın.

a) $y = \cos x$ b) $y = 2\sin x$ c) $y = \cos x - \sin x$
d) $y = -\sin 3x$ e) $y = \cos(\pi - 2x)$ f) $y = \cos(3x + 2\pi)$

5. Funksiyanın törəməsini tapın.

a) $y = \sin x \cos x$ b) $y = \sin 3x \cdot \cos x + \cos 3x \cdot \sin x$
c) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ d) $y = \cos 3x \cdot \cos x + \sin 3x \cdot \sin x$

6. a) $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ funksiyasının törəməsinin sıfır olduğunu göstərin.

7. Funksiyanın törəməsini tapın.

1) $y = \sin^2 x$ 2) $y = \cos^2 x$ 3) $g(t) = \frac{\cos t}{t}$
4) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 5) $y = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ 6) $y = x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}$
7) $y = e^{2x} \cdot \sin 2x$ 8) $y = e^{-x} \cdot \cos \frac{1}{x}$ 9) $y = 3\sin^2 2x$

8. $f'(x) = 0$ tənliyini həll edin.

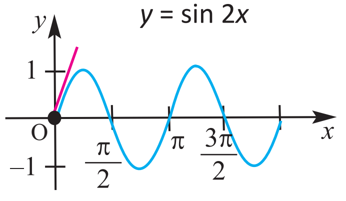
a) $f(x) = x - \cos x$ b) $f(x) = \sin x + \frac{x}{2}$ c) $f(x) = x + \cos 2x$

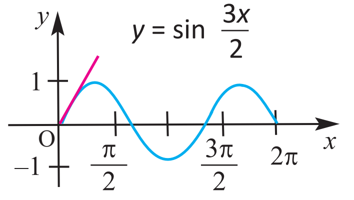
9. Törəməsi: a) $f'(x) = 2 + \sin x$; b) $f'(x) = \cos 2x$ olan heç olmasa bir $f(x)$ funksiyasını düsturla verin.

10. **Açıq tipli sual.** $y = \sin^n u(x)$ şəklində bir mürəkkəb funksiya yazın və törəməsini tapın.

11. a) $y = \sin^2 x$ funksiyasının qrafikinə toxunanın bucaq əmsalının sıfra bərabər olduğu bütün nöqtələrin absislərini müəyyən edin.
b) $f(x)=2\sin x - \sin^2 x$ funksiyasının qrafikinin hansı nöqtələrində toxunanın üfüqi olduğunu müəyyən edin.
c) $y = \sin 2x$ funksiyasının qrafikinə absisi $x_0 = \frac{\pi}{3}$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

12. Verilən funksiyanın qrafikinə koordinat başlanğıcında çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalını tapın. Bu qiyməti $x = 2\pi$ nöqtəsindəki toxunanın bucaq əmsalı ilə müqayisə edin.

a) 

b) 

13. $y = x^2 \sin 2x$ funksiyasının ikinci tərtib törəməsini tapın.

14. $P(x) = 1 - \tan^2 x + \tan^4 x - \tan^6 x + \dots$, və $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ olarsa, $P'(x)$ funksiyası hansıdır?
a) $\sin 2x$ b) $\cos 2x$ c) $-\tan 2x$ d) $-\sin 2x$ e) $-\cos 2x$

15. Dənizdə qabarmalar və çəkilmələrə görə sahilin yaxınlığında suyun dərinliyini (metrlə)
$D(t) = 1{,}5 + 0{,}5\cos\frac{\pi t}{6}$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar.

a) dD/dt funksiyasını yazın.
b) $t=5$ və $t=10$ olduqda dD/dt-nin qiymətini tapın. Bu qiymətləri situasiyaya uyğun izah edin.
c) Sahilin yaxınlığında nə zaman suyun dərinliyi ən çox olacaq?

16. $y = 2\cos x \sin 2x$ funksiyasının qrafikinə absisi $x = \frac{\pi}{2}$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalını tapın.

17. Funksiyanın θ-ya görə törəməsini tapın.

a) $f(\theta) = -3\cos\theta - 2\sin\theta$

b) $f(\theta) = \frac{\pi}{2}\sin\theta - \pi\cos\theta + 2\pi$

c) $f(\theta) = 15\cos 3\theta + \theta - 6$

d) $f(\theta) = \frac{\pi}{4}\cos 4\theta - \frac{\pi}{3}\sin 3\theta$

1. Funksiyanın törəməsini tapın.

a) $h(t) = t^3 - 2t^2 + \frac{1}{t^2}$ b) $p(n) = -n^5 + 5n^3 + \sqrt[3]{n^2}$ c) $p(r) = r^6 - \frac{2}{5\sqrt{r}} + r - 1$

2. Şara hava vurulur. Şarın həcmini $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ kimi müəyyən etmək olar, burada r şarın radiusudur (santimetrlə).
$r = 1{,}5;\ 6;\ 9$ olduğu anlardakı ani həcm dəyişmələrini müəyyən edin.

3. a) $y = \sqrt{x}$ funksiyasının qrafikini qurun. Absisi $x_0 = 1$ olan nöqtədə toxunan çəkin və bu toxunanın tənliyini yazın.
b) $y = (6x - 3)(-x^2 + 2)$ funksiyasının qrafikinə absisi $x_0 = 1$ olan nöqtədə çəkilmiş toxunanın tənliyini yazın.

4. $f(x) = (4 - x^2)(3x + 1)$ funksiyası verilmişdir. $f''(x)$-i tapın.

5. Funksiyanın törəməsinin verilmiş nöqtədəki qiymətini tapın.

a) $g(x) = \frac{2 - 7x}{(4x + 3)^3}$, $x_0 = -1$ b) $f(x) = \frac{8x^3}{\sqrt{3x - 2}}$, $x_0 = 1$ c) $m(x) = \frac{(-x + 2)^2}{(5 + 2x)^4}$, $x_0 = -2$

6. $\frac{dy}{dx}$ törəməsinin verilmiş x_0 nöqtəsində qiymətini tapın.

a) $y = u^2 + 3u$; $u = \sqrt{x - 1}$; $x_0 = 5$ b) $y = \sqrt{2u}$; $u = 6 - x$; $x_0 = -3$

7. Funksiyanın törəməsini tapın.

a) $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ b) $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ c) $f(x) = -\frac{\pi}{2}\cos^2 x$

d) $y = \sin^4\theta$ e) $y = \sin^3 4\theta$ f) $y = 3\cos^2 2\theta$

8. Funksiyanın törəməsini tapın.

a) $y = -2e^{-\frac{1}{2}x}$ b) $f(x) = -3x^2e^{-2x}$ c) $g(x) = 2xe^{\sin x}$ d) $y = x^3 \cdot \ln 2x$

9. Bu gün ən müasir sayılan kompüteri alsanız, bir qədər vaxt keçdikdən sonra qiymətinin ucuzlaşdığını görəcəksiniz. Kompüterin qiymətinin zamandan asılı dəyişməsini $A(t) = 900e^{-t/3}$ funksiyası ilə ifadə etmək olar.
a) Kompüterin ilkin qiymətini tapın
b) Bir ildən sonra kompüterin qiyməti neçə manat olacaq?
c) Neçə ildən sonra kompüterin qiyməti ilkin qiymətinin yarısı qədər olacaq? Bu zaman qiymətin ucuzlaşma sürəti nə qədər olacaq?

6

Fırlanma fiqurlarının həcmi

- **Silindrin həcmi**
- **Konusun həcmi**
- **Kəsik konusun həcmi**
- **Kürə və hissələrinin həcmi**
- **Oxşar fiqurların həcmi**

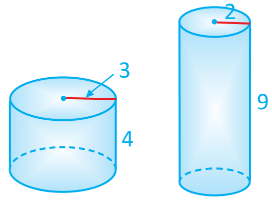
Riyazi lüğət

- ✓konusun həcmi
- ✓silindrin həcmi
- ✓kürənin həcmi
- ✓ yarımkürənin həcmi
- ✓kürə seqmentinin həcmi
- ✓ kürə qatının həcmi
- ✓ kürə sektorunun həcmi

Bunları bilmək maraqlıdır!

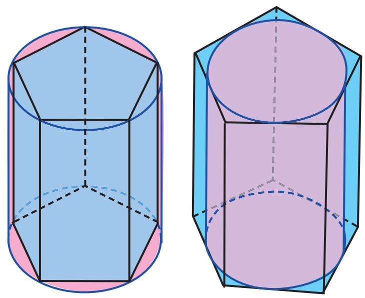
Xalça Muzeyinin binası Bakının müasir memarlıq nümunələri arasında özünəməxsus yer tutur. Bükülmüş xalça şəklində formaya malik binada xalça və xalça məmulatları, metal məmulatlar, geyim və tikmə, keramika, zərgərlik əşyaları, kitablar, fotoşəkillərdən ibarət nadir kolleksiya mühafizə olunur. Muzeyin sərgi konsepsiyası adi sərgilərdən fərqlənir. Əsas eksponatlar - xalçalar qövsşəkilli divarlardan asılır, bunların da əksi bütün yuxarı mərtəbələrin əksər yerlərindən görünür. Bunun sayəsində sərginin böyük hissəsini müxtəlif rakurslardan görmək olur.

Həcm dedikdə fəza fiqurlarının tutumu başa düşülür. Aşağıda verilən iki silindrdən hansının həcminin daha böyük olduğunu düşünürsünüz?



Silindrin həcmi

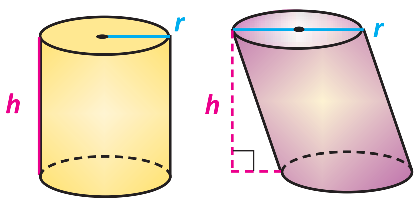
Oturacaqları silindrin oturacaqları daxilinə (xaricinə) çəkilmiş prizmaya silindrin daxilinə (xaricinə) çəkilmiş prizma deyilir. Tutaq ki, radiusu *r*, hündürlüyü *h* olan silindrin daxilinə və xaricinə düzgün *n*-bucaqlı prizmalar çəkilmişdir. *n* sonsuz böyüdükcə bu prizmaların oturacaqlarının sahələri silindrin oturacağının sahəsinə (S_{ot}) yaxınlaşdığından onların həcmləri $S_{ot} \cdot h$-a yaxınlaşacaqdır.



Silindrin həcmi oturacağının sahəsi ilə hündürlüyü hasilinə bərabərdir:

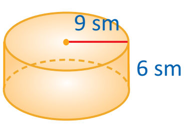
$V = S_{ot}h$, $S_{ot} = \pi r^2$

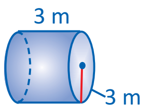
$\mathbf{V = \pi r^2 h}$

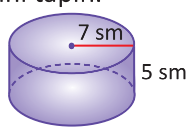


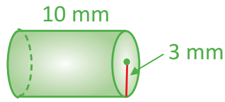
Öyrənmə tapşırıqları

1. Şəkildə verilənlərə görə silindrlərin həcmini tapın.

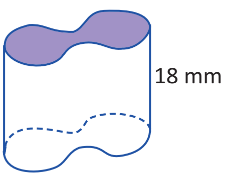
a) 

b) 

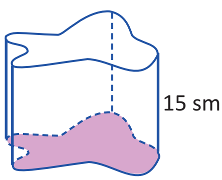
c) 

d) 

2. Verilənlərə görə fiqurların həcmini hesablayın.

a) 

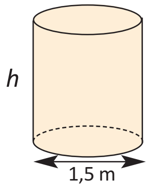
Oturacağının sahəsi: 25 mm²

b) 

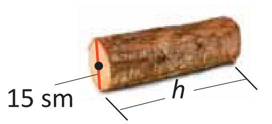
Oturacağının sahəsi: 35 sm²

3. Verilənlərə görə məchulları tapın.

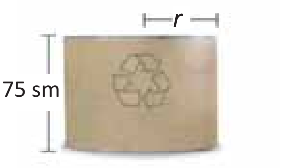
a) $V = 3{,}6\pi\ m^3$



b) $V = 1800\pi\ sm^3$



c) $V = 1{,}2\pi\ m^3$



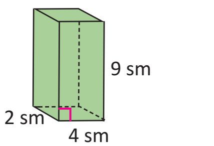
4. Yan səthinin sahəsi 20 π, hündürlüyü 10 vahid olan silindrin həcmini tapın.

5. Silindrin hündürlüyü 5 sm, tam səthinin sahəsi 72 π sm^2-dır. Silindrin həcmini tapın.

6. Silindrin hündürlüyü 25 sm, diametri 8 sm-dır. Bu silindrin hündürlüyünü 5 sm kiçildib , radiusunu 1 sm böyütsək, həcmi necə dəyişər?

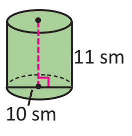
7. Fiqurların tam səthlərininin sahəsini və həcmini tapın.

a)

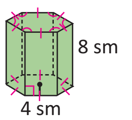


düzbucaqlı paralelepiped

b)



c)



düzgün prizma

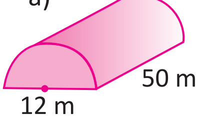
8. Silindrin yan səthi S-ə, oturacaq çevrəsinin uzunluğu C-yə bərabərdir. Silindrin həcmini tapın.

9. Silindrin ox kəsiyi diaqonalı 4 olan kvadratdır. Silindrin həcmini tapın.

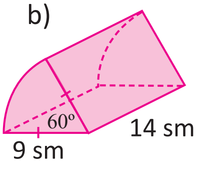
10. Silindrin daxilinə düzgün üçbucaqlı prizma və bunun da daxilinə silindr çəkilmişdir. Bu silindrlərin həcmləri nisbətini tapın.

11. Şəkildə silindrin müstəvi kəsikləri ilə ayrılan hissələri təsvir edilmişdir. Verilənlərə görə bu hissələrin həcmini hesablayın.

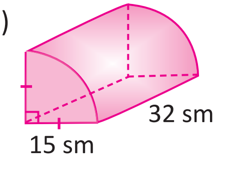
a)



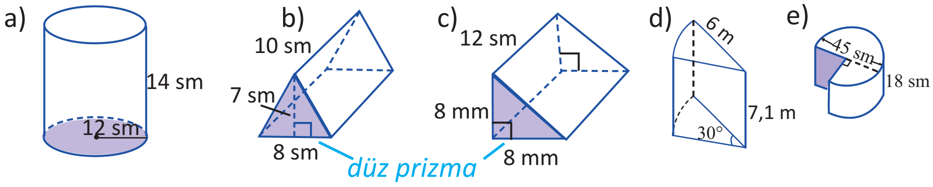
b)



c)



12. Verilənlərə görə fiqurların həcmini hesablayın.



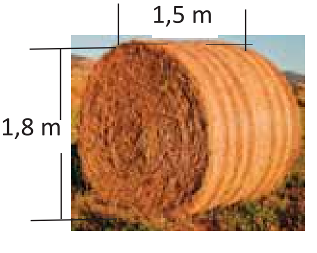
13. a) Oturacağını dəyişmədən silindrin həcmini iki dəfə artırmaq üçün hündürlüyünü neçə dəfə artırmaq lazımdır?
b) Silindrin yan səthi (kvadrat vahidlə) və həcmi (kub vahidlə) eyni ədədlə ifadə olunur. Silindrin diametrini tapın.

Tətbiq tapşırıqları

14. Şirə, oturacaq radiusu 15 sm, hündürlüyü 20 sm olan qablara doldurulmuşdur. Şirə hündürlüyü 6 sm, oturacaq radiusu 3 sm olan stəkanlarda satılır. Bir stəkan şirənin qiyməti 3 manat olarsa, qabla dolu şirənin satışından neçə manat pul əldə edilər?

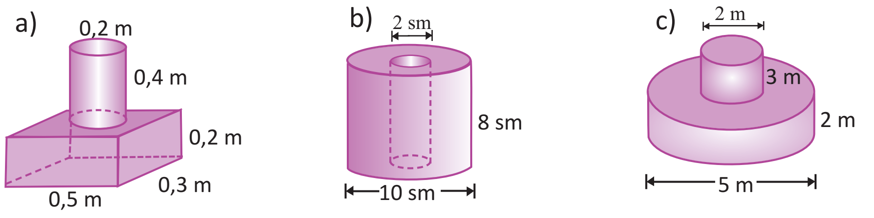
15. Borunun daxili diametri 24 sm, xarici diametri 28 sm və uzunluğu 35 sm-dir. Borunun hazırlandığı materialın sıxlığı 0,6 q/sm^3 olarsa, borunun kütləsini tapın.

16. Quru ot sıxılmaqla düzbucaqlı paralelepiped şəklinə salınır. Bu paralelepipedlərin ölçüləri adətən 40 sm × 40 sm × 90 sm kimi olur. Lakin bəzən ot silindr formasında da yığılır. Şəkildəki ölçüdə yumrulanmış ot yığınından təxminən neçə belə paralelepiped düzəltmək olar?



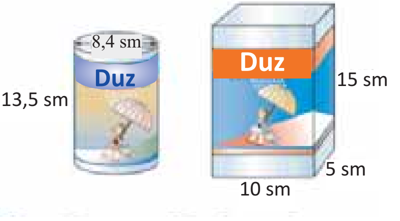
17. Karandaş radiusu 7 mm olan silindrşəkilli ağac hissədən və radiusu 1 mm olan qrafit hissədən ibarətdir. Uzunluğu 14 sm olan karandaşın ağac hissəsinin həcmini tapın.

18. Şəkildə verilənlərə görə mürəkkəb fiqurların həcmini hesablayın.



19. Gülzar deyir ki, oturacağının radiusu 0,75 m, hündürlüyü 0,50 m olan silindrik su çəninin tutumunu iki dəfə artırmaq üçün onun verilən ölçülərini də iki dəfə artırmaq lazımdır. Gülzarın fikrinə münasibətinizi uyğun hesablamalar aparmaqla bildirin.
a) Verilən ölçülərdə çən neçə litr su tutur?
b) Hansı ölçülərdə çənin tutumu hazırkından iki dəfə çox olar?

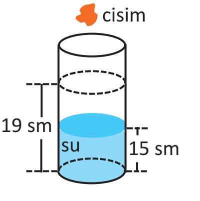
20. Şəkildə iki müxtəlif silindr və düzbucaqlı paralelepiped formalı qutularda duz qabı verilmişdir.
a) Hansı qabın tutumu daha çoxdur?
b) Sizcə hansı qablaşdırma üst-üstə yığma və daşıma baxımından daha rahatdır? Seçiminizi əsaslandırın.



21. Ölçüləri 20 sm×15 sm ×6 sm olan düzbucaqlı paralelepipedşəkilli xəmir kütləsindən radiusu 1 sm, hündürlüyü 5 sm olan silindrşəkilli kekslər hazırlanmalıdır. Neçə belə keks hazırlamaq mümkündür?

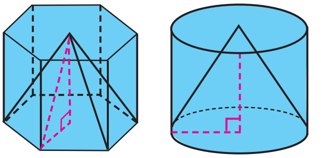
22. Hündürlüyü 10 sm olan su ilə dolu silindr formalı qabdan 25 sm^3 boşaldıqda suyun qabdakı səviyyəsi 2 sm azalır. Qab nə qədər su tutur?

23. Oturacaq radiusu 4 sm olan silindr formalı qabda suyun səviyyəsi 15 sm hündürlükdədir. Qaba suda həll olmayan cisim atıldıqda suyun səviyyəsi 19 sm-ə qədər yüksəlir. Suya atılan cismin həcmini tapın.

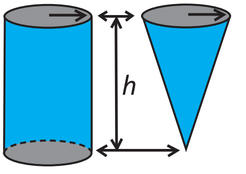


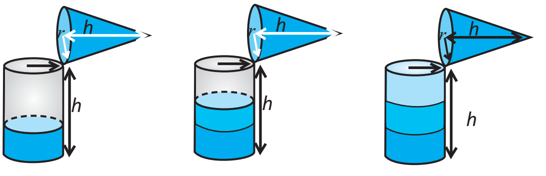
24. Suvuran nasosun silindrinin porşeninin diametri 60 mm, hərəkət məsafəsi 150 mm-dir. Porşen 1 dəqiqədə 40 dəfə hərəkət edir. Nasosun 1 saatda vura biləcəyi suyun miqdarını tapın.

Praktik məşğələ. Hündürlükləri və oturacaqları eyni olan prizma və piramidanın həcmləri arasında hansı əlaqə var? Bu əlaqəni silindr və konusun həcmi arasındakı əlaqəyə də aid etmək olarmı?



Kartondan oturacaq radiusları və hündürlükləri eyni olan silindir və konusşəkilli modellər düzəldin. Konusşəkilli qabla (qum, düyü və s) silindrik qabı doldurun. Neçə belə qab silindrik qabı doldurdu? Üç dolu konusşəkilli qabın silindrik qabı doldurduğu fikri doğrudurmu?





Prizma, silindr, piramida və konusun həcmini hesablama qaydasını rəngli xanalara uyğun məlumatı yazmaqla ümumiləşdirin.

Prizma və silindrin həcmi:

Həcm = oturacağın sahəsi × ▭

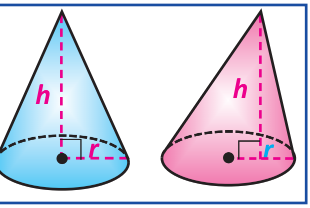
Piramida və konusun həcmi:

Həcm = ▭ × eyni oturacaqlı və hündürlüklü prizma və ya silindrin həcmi

Konusun həcmi

Konusun həcmi oturacağın sahəsi ilə hündürlüyü hasilinin üçdə birinə bərabərdir.

$V = \frac{1}{3} S_{ot} h$, $\quad S_{ot} = \pi r^2$ $\quad$ $\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$

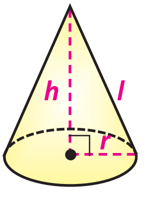


Nümunə. Konusun doğuranı 9 sm, hündürlüyü 6 sm-dir. Konusun həcmini tapın.

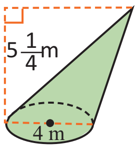
Həlli: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; $\quad l = 9$ sm; $\quad h = 6$ sm.

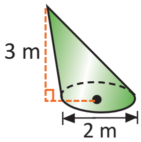
$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

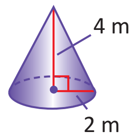
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 45 \cdot 6 = 90\pi \ (sm^3)$

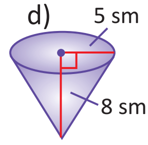


1. Konusun həcmini tapın.

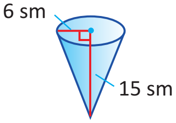
a) 

b) 

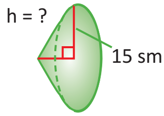
c) 

d) 

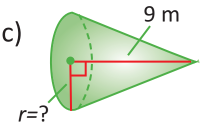
2. Verilənlərə görə tələb olunanları tapın.

a) 

V = ?

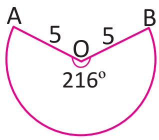
b) 

V = 2400π sm^3

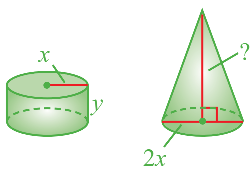
c) 

V = 48π m^3

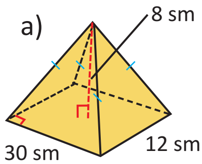
3. Şəkildə konusun yan səthinin açılışı verilmişdir. Verilənlərə görə konusun həcmini müəyyən edin.

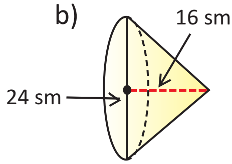


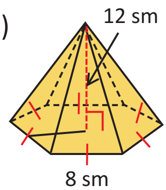
4. Silindr və konusun həcmi bərabərdir. Konusun hündürlüyünü tapın.



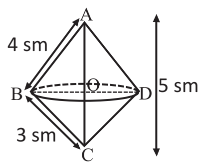
5. Fiqurların tam səthinin sahəsini və həcmini tapın.

a) 

b) 

c) 

6. Katetləri 3 sm və 4 sm olan düzbucaqlı üçbucağın hipetonuzu ətrafında fırlanmasından alınan cismin səthinin sahəsini və həcmini hesablayın.

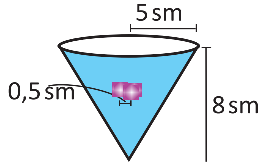


7. Həcmi 96π sm^3 olan konusun hündürlüyünün doğuranına nisbəti 4:5 kimidir. Bu konusun tam səthini tapın.

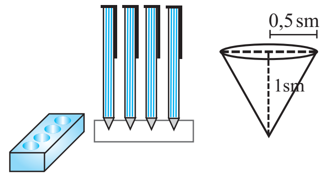
8. Konusun hündürlüyü 6 sm, yan səthi 80 π sm^2-dir. Konusun həcmini tapın.

9. Konusun uzunluğu *l* olan doğuranı oturacaq müstəvisi ilə 30°-li bucaq əmələ gətirir. Konusun həcmini tapın.

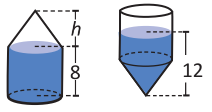
10. Radiusu 5 sm, hündürlüyü 8 sm olan su ilə dolu konus formasında qaba tili 0,5 sm olan kublar atılmışdır. Kubların atılması ilə qabdakı suyun dörddə bir hissəsi qabdan tökülmüşdür. Qaba neçə kub atılmışdır?



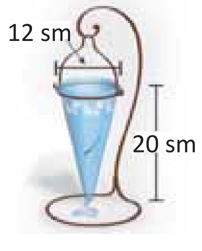
11. Qələm düzmək üçün düzbucaqlı paralelepiped şəkilli taxta qabın ölçüləri 15sm×5sm×2,5 sm-dir. Qabda qələmin konusşəkilli ucunun oturması üçün radiusu 0,5 sm, dərinliyi 1 sm olan konusəkilli 8 oyuq açılmışdır. Taxta qələmqabının həcmini tapın.



12. Hündürlüyü 8 sm olan silindr formalı qab hündürlüyü *h* olan konus formalı qabla şəkildə göstərildiyi kimi birləşdirilmişdir.Qabı tərs çevirdikdə suyun səviyyəsi 12 sm olmuşsa, konusun *h* hündürlüyü neçə santimetrdir?

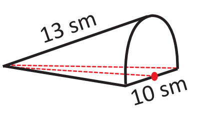


13. Ölçüləri şəkildəki kimi verilən konusşəkilli qabdan dəqiqədə 4 sm^3 su damcılayır. Dolu qabın 80%-i nə müddətə boşalar? 1 sm^3 = 0,001 *l* olmasından istifadə edərək qabın tutumunu litrlə ifadə edin.

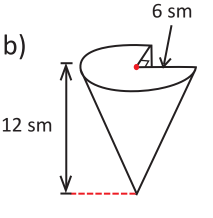


14. Şəkildəki fiqurların tam səthinin sahəsini və həcmini verilən ölçülərinə görə hesablayın.

a)



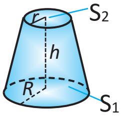
b)



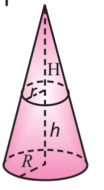
15. Diametri 12 sm, hündürlüyü 15 sm olan konus oturacaqdan 9 sm məsafədə oturacaq müstəvisinə paralel müstəvi ilə kəsilmişdir. Verilən konusla kəsilib ayrılan kiçik konusun həcmləri fərqini tapın.

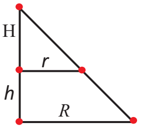
16. Həcmi 52 sm^3 olan kəsik konusun oturacaqlarının sahələri nisbəti 9-a bərabərdir. Kəsik konus tamamlandıqda alınan tam konusun həcmini tapın.

17. Kəsik konusun $V = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ həcm düsturunu aşağıdakı addımlarla isbat edin.



1. Kəsik konusu tam konusa tamamlayın. Tamamlayıcı kiçik konusun hündürlüyünü H ilə işarə edin.
2. Tamamlanmış konusun və kiçik konusun həcmini yazın.
3. Bu həcmlərin fərqini $V = \dfrac{\pi}{3}\left(R^2 h + H(R-r)(R+r)\right)$ şəklində yazın.
4. Oturacaqlarının radiuslarının və hündürlüklərin yaratdığı üçbucaqların oxşarlığından $H(R-r) = hr$ olduğunu göstərin.
5. 4-cü bənddə aldığınız bərabərliyi 3-cü bənddəki bərabərlikdə yerinə yazın. Kəsik konusun həcm düsturunun

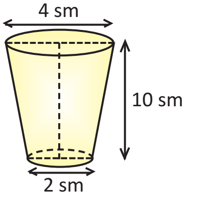




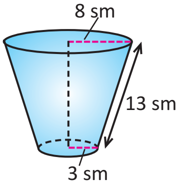
$V = \dfrac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ və ya $V = \dfrac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$ olduğunu göstərin.

Burada S_1 və S_2 oturacaqların sahələridir.

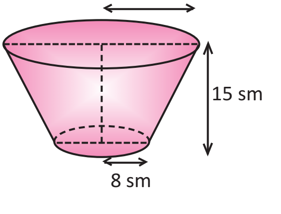
18. Kəsik konusşəkilli stəkanın ölçüləri şəkildə verilmişdir.
a) Stəkanın su tutumunu santimetr kub vahidlərlə hesablayın.
b) $1\ m^3 = 1000\ l$ olduğunu bilərək stəkanın tutumunu millilitrlə hesablayın.



19. Kəsik konusun doğuranı 13 sm, oturacaqlarının radiusları uyğun olaraq 8 sm və 3 sm olarsa, tam səthinin sahəsini və həcmini hesablayın.



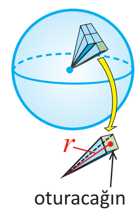
20. Dəmirdən hazırlanmış ağzıaçıq süd qabı kəsik konusşəkilli olmaqla hündürlüyü 15 sm, oturacaqlarının radiusları 8 sm və 16 sm-dir. Südün 1 litrinin qiyməti 1,35 manat olarsa, qabla dolu südün satışından nə qədər pul əldə edilər? Qaba sərf edilən metalın hər 100 sm^2-nın qiyməti 0,95 manat olarsa, bir qabın materalına nə qədər pul xərclənmişdir?



Praktik məşğələ.
1. Hər hansı top götürün. Onun diametrini təxmin edin.
2. Diametri və hündürlüyü topun diametri ilə eyni olan silindrin açılış şəklini kağız üzərində çəkin.
3. Kağızı kəsib qatlayaraq yapışqanlı bantlarla bərkitməklə ağzı açıq silindr quraşdırın. Silindri hündürlüyü boyu 3 bərabər hissəyə bölməklə üzərində işarələr qoyun.
4. Topun ətrafına folqa və ya bərk parça çəkin və sferik torba düzəldin. Torbanı qumla doldurun.
5. Qumu düzəltdiyiniz silindr qaba boşaldın. Silindrin hansı hissəsi qumla doldu?

Kürə səthini üfüqi və şaquli xətlərlə (meridian və paralellərlə) şəbəkə şəklində hissələrə ayırsaq və şəbəkəni təşkil edən hər bir kiçik “düzbucaqlı”nın təpəsini sferanın mərkəzi ilə birləşdirsək, kürənin kiçik “piramidalar”dan təşkil olunduğunu təsəvvür etmək olar.

Kürənin həcmini hər birinin hündürülüyü kürənin radiusuna bərabər olan bu “kiçik piramidalar”ın həcmləri ($\frac{1}{3}S_{ot}r$) cəmi kimi ifadə etmək olar. Oturacaqlarının ölçülərini sonsuz kiçiltməklə piramidaların sayını sonsuz artıraq. “Piramidalar”ın oturacaqlarının sahələri cəmi kürənin səthinə bərabərdir. Kürənin səthinin sahəsinin $4\pi r^2$ olduğunu nəzərə alsaq,

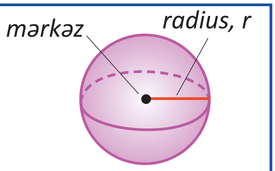


kürənin həcmi üçün $V = \frac{1}{3}S\cdot r = \frac{1}{3}4\pi r^2\cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$ düsturunu alarıq.

Kürənin həcmi

Kürənin həcmi $\frac{4}{3}$ π ilə radiusu kubunun hasilinə bərabərdir.

$$\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$



Nümunə. Tapın:

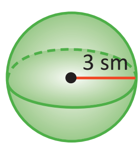
a) radiusu 3 sm olan kürənin həcmini

b) həcmi 288 sm^3 olan kürənin radiusunu

Həlli: a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$r = 3$ sm

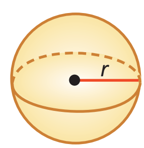
$V = \frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 = 36\pi$ (sm^3)



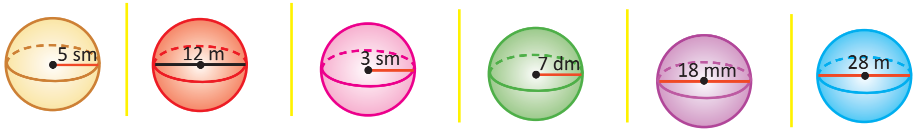
b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 288$

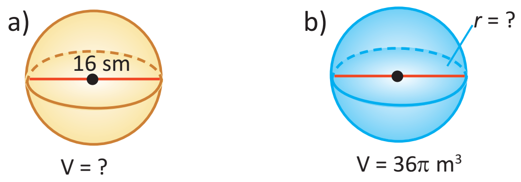
$r^3 = \frac{288\cdot 3}{4\pi} = \frac{216}{\pi}$, $r = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$ (sm).



1. Kürələrin həcmini hesablayın.



2. Verilənlərə görə tələb olunanları tapın.



3. a) Radiusu 3 sm olan kürənin kub formalı qutuda yerləşməsi üçün qutunun həcmi ən azı neçə kub santimetr olmalıdır?

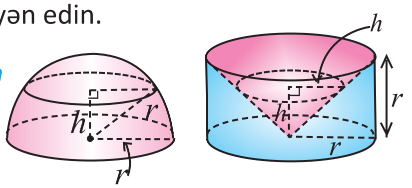
b) Radiusu 2,4 sm olan kürə əridilərək radiusu 4 sm olan silindr formasına salınmışdır. Silindrin hündürlüyünü tapın.

c) Radiusu 3 sm, 4 sm, 5 sm olan metal kürələr əridilərək bir böyük kürə alındı. Alınmış kürənin radiusunu tapın. Bu kürə əridilərək radiusu 4 sm olan silindr formasına salındı. Silindrin hündürlüyünü tapın.

d) Diametri 22 sm olan futbol topu tili 24 sm olan kubşəkilli qutuya yerləşdirilmişdir. Qutunun həcminin neçə kub santimetrinin boş qaldığını tapın.

4. Aşağıdakı addımları yerinə yetirməklə kürənin həcm düsturunu Arximedin üsulu ilə müəyyən edin.

Radiusu r olan yarımkürə



Radiusu və hündürlüyü r olan silindrdən konus oyulub.

1. Yarımkürənin h hündürlüyündəki dairəvi kəsiyinin sahəsinin $\pi(r^2 - h^2)$ olduğunu göstərin.

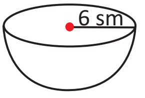
2. Konusun oyulub çıxarıldığı silindrin h hündürlüyündəki dairəvi kəsiyinin sahəsinin $\pi(r^2 - h^2)$ olduğunu göstərin.

3. Kavalyeri prinsipinə görə bu fiqurların həcmlərinin bərabər olduğunu izah edin və yarımkürənin həcm düsturunu çıxarın.

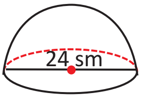
5. 1) Yarımkürənin həcm düsturunu yazın.

2) Yarımkürənin həcmini hesablayın.

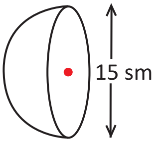
a)



b)

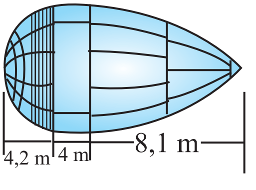


c)

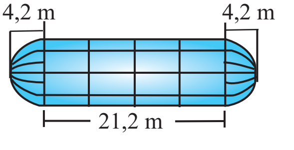


6. Kosmik gəmiləri yanacaqla təmin etmək üçün kosmik şatl adlanan orbital gəmilərdən istifadə edilir. Bu gəmilər Yerətrafı orbitdəki gəmilərə lazımi yükləri çatdırmaq üçün istifadə edilir. Şatllar digər kosmik gəmilərdən fərqli olaraq dəfələrlə orbitə gedib qayıtmaq imkanlarına malikdir. Şatlın maye oksigen və maye hidrogen çənləri var. Maye oksigen çəni formaca yarımkürə, silindr və konusun birləşməsindən düzəldilmişdir. Maye hidrogen çəni isə sonlarında yarımkürə olan silindirdir. Şəkildə verilən ölçülərə görə çənlərin həcmini hesablayın.

Maye oksigen çəni



Maye hidrogen çəni

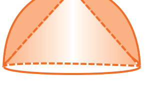


7. **A** şəklində radiusu 8 sm olan yarımkürədən konusşəkilli oyuq açılmışdır. Alınan fiqurun səthinin sahəsini və həcmini tapın.

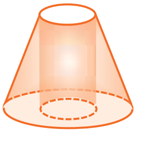
B şəklində oturacaqlarının diametrləri 10 sm və 4 sm olan kəsik konusdan hündürlüyü boyu silindr oyulmuşdur. Silindrin oturacağı konusun kiçik oturacağı ilə üst-üstə düşür. Kəsik konusun hündürlüyü 4 sm olarsa, alınan fiqurun səthinin sahəsini və həcmini tapın.

C şəklində diametri 6 sm olan yarımkürədən diametri 4 sm olan yarımkürə oyularaq çıxarılmışdır. Alınan fiqurun səthinin sahəsini və həcmini tapın.

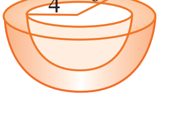
A.



B.

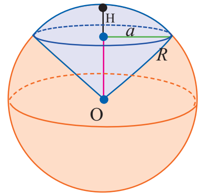


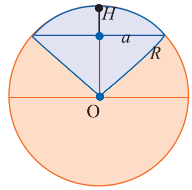
C.

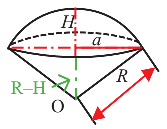


8. Tilinin uzunluğu a olan kubun daxilinə onun üzlərinə toxunan kürə yerləşdirilmişdir. Kürənin mərkəzindən kubun üzünə qədər məsafəni və kürənin həcmini tapın. Uyğun şəkli çəkin.

Kürə sektoru və Kürə seqmenti







Təpəsi kürənin mərkəzində olan konik səthin kürədən ayırdığı hissəyə **kürə sektoru** deyilir. Kürə sektoru təpəsi kürənin mərkəzində olan konusla kürə seqmentinin birləşməsidir. Kürə sektorunun həcminə təpələri kürənin mərkəzində, oturacaqları uyğun kürə seqmentinə toxunan kiçik piramidaların həcmlərinin cəminin limiti kimi baxmaq mümkün olduğundan

$$V_{sekt}=\frac{1}{3}S_{seqm}\cdot R=\frac{1}{3}\cdot 2\pi RH\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^2H \quad \text{olar.}$$

Burada R kürənin radiusu, H uyğun seqmentin hündürlüyüdür.

Digər tərəfdən,

$a^2 = R^2 - (R-H)^2 = 2RH - H^2$ və

$V_{kon} = \frac{1}{3}\pi a^2(R-H) = \frac{1}{3}\pi(2RH - H^2)(R-H)$ olduğu üçün

$$V_{seqm} = V_{sekt} - V_{kon} = \frac{2}{3}\pi R^2H - \frac{1}{3}\pi(2RH - H^2)(R-H) = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right)$$

9. Kürənin diametri 10 sm-dir. Hündürlüyü 1 sm olan kürə seqmentinin oturacağının sahəsini və uyğun kürə sektorunun həcmini tapın.

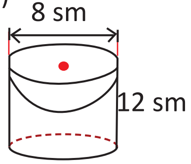
10. Kürənin diametrinə perpendikulyar olan müstəvi diametri 3 sm və 9 sm olmaqla 2 hissəyə bölür. Kürənin həcmi hansı hissələrə bölünür?

11. Kürə sektorunda uyğun seqmentin oturacaq çevrəsinin radiusu 60 sm, kürənin radiusu 75 sm-dir. Bu sektorun həcmini tapın.

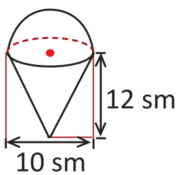
12. Kürə qatının oturacaqlarının radiusları 3 m və 4 m, kürənin radiusu 5 m-dir. Kürə qatının həcmini tapın (iki hala baxın).

13. Fiqurların həcmini hesablayın.

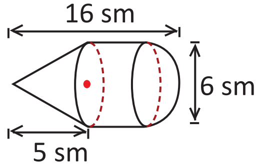
a)



b)

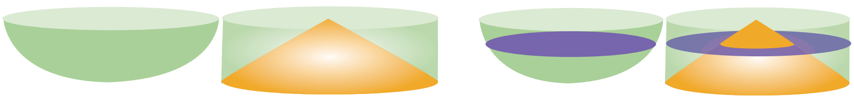


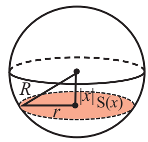
c)



Layihə işi. Silindr, konus və kürənin həcmləri arasında Arximedin müəyyən etdiyi nisbət.

Arximed radiusu r olan kürəni əhatə edən silindrin həcmi və silindrə yerləşdirilmiş konusun həcmləri arasındakı əlaqəni araşdırmış və kürənin həcm düsturunu müəyyən etmişdir. Bu işi siz də görməyə çalışın.





Radiusu R = 5 olan kürənin mərkəzdən x məsafədə olan müstəvi kəsiyinin sahəsinin x-dən asılı olaraq dəyişməsini aşağıdakı addımları yerinə yetirməklə təqdim edin.

a) $S(x)$ funksiyasının aşağıdakı qiymətlərini hesablayın.

S(0) ; S(1); S(3); S(4); S(5)

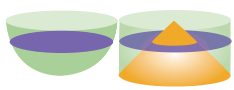
Nümunə üçün S(1) qiyməti hesablanmışdır:

$$S(1) = \pi r^2 = \pi(R^2 - 1^2) = \pi(5^2 - 1^2) = 24\pi$$

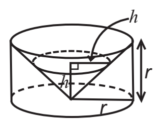
b) Müstəvi kəsiyin S(0) və S(5) qiymətləri haqqında fikrinizi təqdim edin.

c) Radiusu R olan kürənin mərkəzindən x məsafədə olan müstəvi kəsiyin sahəsini müəyyən edən ümumi düsturu yazın.

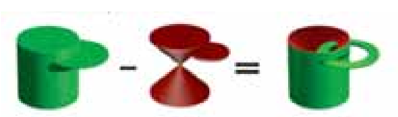
d) c bəndində yazdığınız düsturla aşağıdakı şəkli əlaqələndirin.



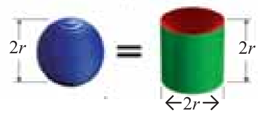
e) Arximedin fikirlərini başa düşmək üçün yenidən əvvəlki şəkilə qayıdın.



"İçindən" konus oyulub çıxarılmış silindrin oturacağına paralel müstəvilərlə kəsiyi halqalar olacaq. Eyni səviyyədə kürənin müstəvi kəsiyi dairədir. Üçbucaqların oxşarlığına görə də dilimlərin sahələrinin $\pi(r^2 - h^2)$-na bərabər olduğunu isbat etmək mümkündür. Bu müstəvi kəsiklərin sahələri bərabər olduğundan Kavalyeri prinsipinə görə bu cisimlərin həcmləri bərabərdir.



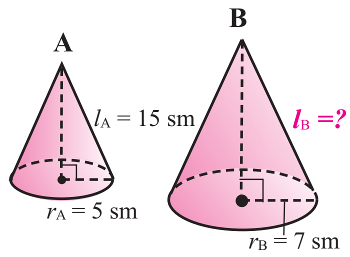
$$\pi r^2 2r - 2\cdot\frac{1}{3}\pi r^2 r = \frac{4}{3}\pi r^3$$



$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Oxşar fəza fiqurlarının uyğun xətti ölçülərinin nisbəti bərabər olmalıdır. Oxşar fəza fiqurlarının verilən uyğun ölçülərinə görə məchul ölçünü tapmaq olar.

Nümünə. A və B konusları oxşar konuslardır. Şəkildə verilənlərə görə B konusunun doğuranını tapın.



Həlli: Xətti ölçülərin nisbətini yazaq:

$$\frac{\text{Radius A}}{\text{Radius B}} = \frac{\text{Doğuran A}}{\text{Doğuran B}}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{15}{l_B}, \quad l_B = 21 \text{ sm}$$

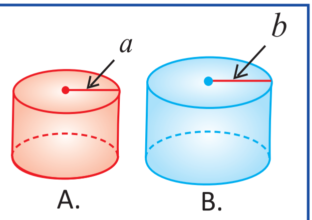
Bilirik ki, iki oxşar fəza fiqurunun səthlərinin sahələri nisbəti onların uyğun xətti ölçülərinin nisbətinin kvadratına, yaxud oxşarlıq əmsalının kvadratına bərabərdir:

$$A \overset{k}{\sim} B \Rightarrow \frac{S_A}{S_B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = k^2$$

Oxşar fəza fiqurlarının həcmləri

Oxşar A və B fəza fiqurlarının həcmlərinin nisbəti onların uyğun xətti ölçülərinin nisbətinin kubuna, yaxud oxşarlıq əmsalının kubuna bərabərdir:

$$A \overset{k}{\sim} B \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 = k^3$$



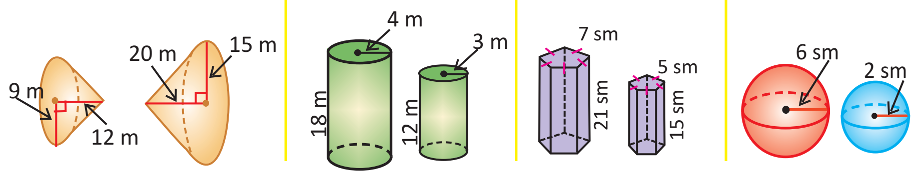
Nümünə. İki oxşar silindrin yan səthlərinin nisbəti 4 : 9 kimidir. Həcmləri fərqinin 38π kub vahid olduğunu bilərək, silindrlərin həcmlərini tapın.

Həlli: Şərtə görə $\frac{S_A}{S_B} = k^2 = \frac{4}{9}$ olduğundan $k = \frac{2}{3}$. Onda $\frac{V_A}{V_B} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

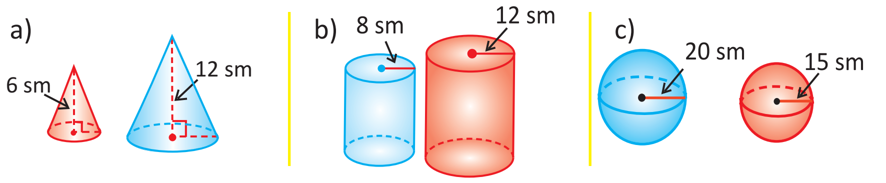
Burada $V_B - V_A = 38\pi$ olduğunu nəzərə alsaq, taparıq: $V_A = 16\pi$; $V_B = 54\pi$.

Öyrənmə tapşırıqları

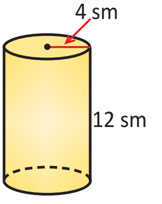
1. Verilən iki fiqurun oxşar olub-olmadığını müəyyən edin. Fiqurlar oxşardırsa, oxşarlıq əmsalını yazın.



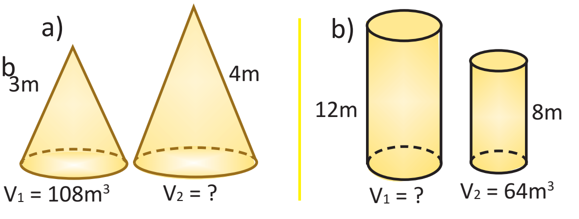
2. Verilən iki fiqur oxşardır. Bu fiqurların həcmləri nisbətini tapın.



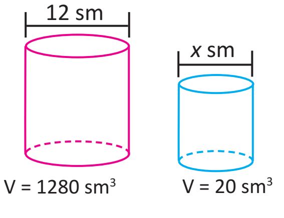
3. Radiusu 4 sm, hündürlüyü 12 sm olan silindrin ölçülərini a) 2 dəfə; b) 3 dəfə artırdıqda həcmi neçə dəfə artar? Böyüdülmüş silindrləri çəkin və üzərində yeni ölçülərini yazın. Bu silindrlər verilən silindrə oxşar olarmı?



4. Fiqurların oxşar olduğunu bilərək, verilənlərə görə tələb olunanı tapın.

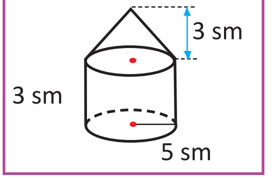


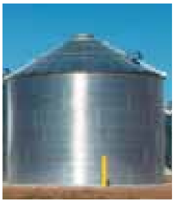
5. Verilən silindrlərin oxşar olduğunu bilərək kiçik silindrin diametrini tapın.



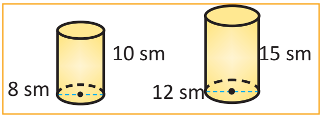
6. Konusun xətti ölçüləri iki dəfə artırılmışdır.
a) Konusun tam səthinin sahəsi neçə dəfə artmışdır?
b) Konusun həcmi neçə dəfə artmışdır?
c) Oxşar iki konusun tam səthlərinin sahələri 9:16 nisbətindədir. Bu iki konusun həcmləri nisbətini tapın.

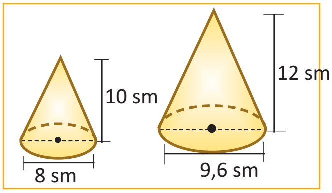
7. Şəkildə buğda anbarının 1 : 100 miqyası ilə şəkilmiş planı verilmişdir. Taxıl anbarının real həcmini hesablayın.

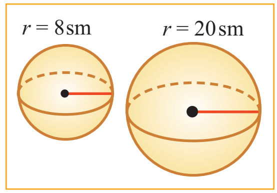




8. Kiçik fiqurun xətti ölçülərini müəyyən dəfə böyütməklə böyük fiqurların uyğun ölçülərini almaq olar. Bu fiqurların tam səthlərinin sahələrini hesablayın. Böyük fiqurun xətti ölçülərinin, tam səthinin sahəsinin və həcminin neçə dəfə artdığını müəyyən edin.

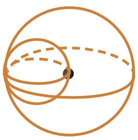






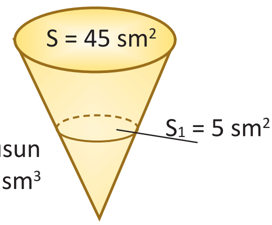
9. Fiqurların oxşarlıqlarına və şəkildə verilənlərə görə kiçik fəza fiqurunun həcmini tapın.

a)



Böyük kürənin həcmi: 10 dm^3

b)



Böyük konusun həcmi: 270 sm^3

10. İki kürədən birinin radiusu digərinin diametrinə bərabərdir. Kürələrin: a) həcmləri nisbətini; b) tam səthlərinin sahələri nisbətini yazın.

11. Maye tutumu 125 sm^3 olan silindrik konteyner hazırlamaq üçün 240 sm^2 material işlənir. Şirkət bu konteynerlərin radius və hündürlüyünü eyni dəfə böyütməklə maye tutumunu 1*l*-ə (1000 sm^3) çatdırmaq istəyir. Yeni konteynerə nə qədər material sərf olunacaq?

12. 1) İki oxşar konusun səthlərinin sahəsi və böyük konusun həcmi verilmişdir. Kiçik konusun həcmini tapın.

a) $S_1 = 24$ sm^2
$S_2 = 96$ sm^2
$V_2 = 96$ sm^3

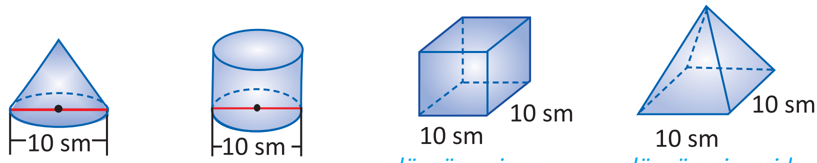
b) $S_1 = 36$ dm^2
$S_2 = 324$ dm^2
$V_2 = 432$ dm^3

2) İki oxşar silindrin həcmləri və kiçik silindrin səthinin sahəsi verilmişdir. Böyük silindrin səthinin sahəsini tapın.

a) $V_1 = 36$ sm^3
$V_2 = 288 sm^3$
$S_1 = 20$ sm^2

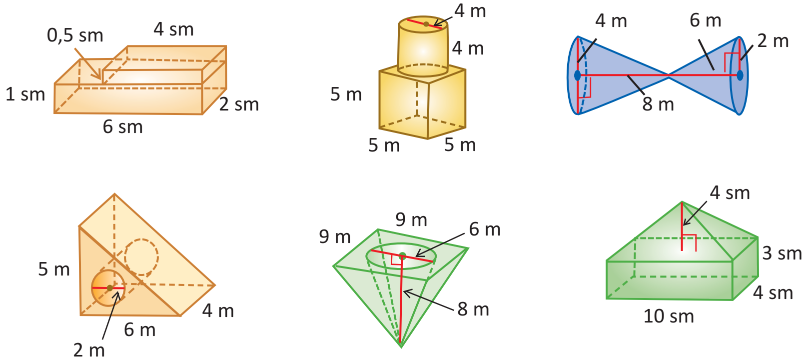
b) $V_1 = 18$ m^3
$V_2 = 488$ m^3
$S_1 = 36$ m^2

1. Aşağıdakı fiqurların hündürlükləri eynidir: 8 sm. Hansı fiqurun həcmi daha böyükdür?

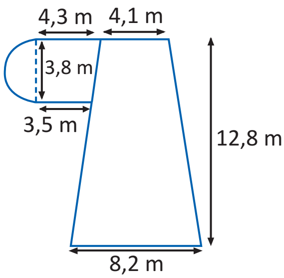


düzgün prizma *düzgün piramida*

2. Fiqurların həcmini tapın.



3. Göstərilən sahəni 10 sm qalınlığında betonla örtmək üçün neçə kub metr beton lazımdır?

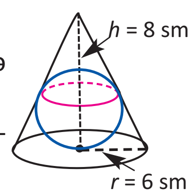


4. Asfaltbərkidici maşınların silindrşəkilli barabanının daha ağır olması üçün onu su ilə doldururlar. Hündürlüyü 1,85 m, radiusu 0,45 m olan barabanın su tutumu neçə tondur?

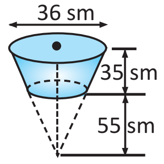
5. Dəmir borunun daxili və xarici diametri uyğun olaraq 15 sm və 17 sm, uzunluğu isə 10 m-dir. Dəmirin sıxlığının 7,8 t/m^3 olduğunu qəbul edərək borunun kütləsini tapın.

6. Həcmi 169,56 kub vahid olan silindrin ox kəsiyi kvadratdır. Silindrin radiusunu tapın.

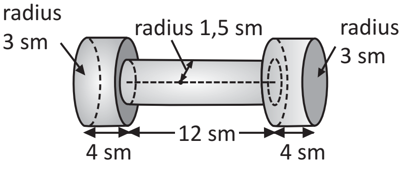
7. a) Radiusu 6 sm, hündürlüyü 8 sm olan konusun daxilində yerləşdirilmiş ən böyük radiuslu kürənin həcmini tapın.
b) Radiusu *r*, hündürlyü *h* olan konusvari qabın daxilində yerləşdirilmiş ən böyük həcmli kürənin radiusunu tapın.



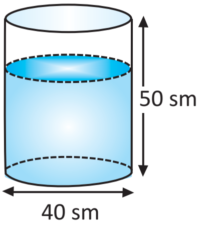
8. Şəkildə ölçüləri verilən kəsik konus formalı qaba su doldurulmuşdur. Lakin qabda deşik var və buradan saniyədə 1,2 *ml* olmaqla su tökülür. 3 saatdan sonra qabda nə qədər su qalacaq?



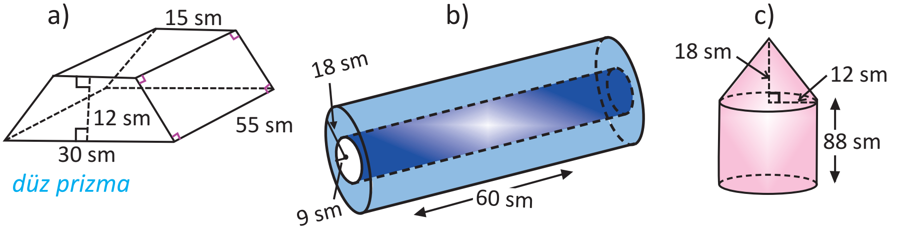
9. İdman aləti qantel, silindrik hissələrin birləşməsi ilə metaldan düzəldilmişdir. Başlıq silindrlərin radiusu 3 sm, hündürlüyü 4 sm, birləşdirici silindrin radiusu 1,5 sm, hündürlüyü 12 sm-dir. Qantelin həcmini tapın.



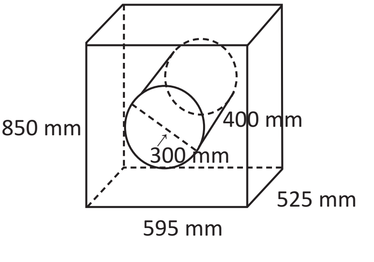
10. Ölçüləri şəkildəki kimi olan silindrik akvariuma 55 litr su tökülmüşdür.
a) Qabda suyun səviyyəsi hansı hündürlükdə olacaq?
b) Akvariuma diametri 12 mm olan rəngli kürələr atmaq istəsələr, sudakı kürələrin sayı nə qədər olsa, su qabdan daşmaz?



11. Fiqurların həcmini tapın.



12. Paltaryuyan maşının ölçüləri 850mm×595mm×525mm kimidir. Maşın paltarları içərisində paslanmayan metaldan olan baraban vasitəsilə yuyur.
a) Barabanın su tutumunu hesablayın.
b) Barabanın həcmini çıxmaqla maşının həcmini müəyyən edin.



7 Törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın araşdırılması

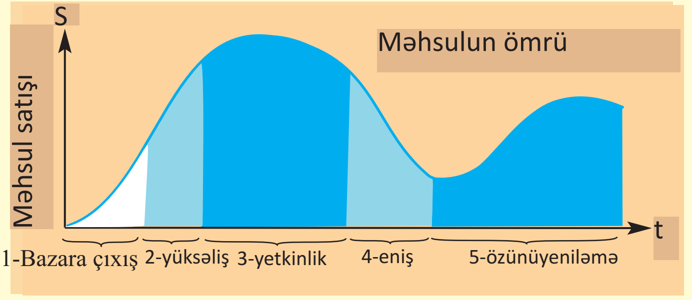
- Funksiyanın artma və azalma aralıqlarının tapılması
- Funksiyanın böhran nöqtələri və ekstremumları
- Törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın tədqiqi və qrafikinin qurulması
- Ekstremumun tapılmasına aid məsələ həlli. Optimallaşdırma

Riyazi lüğət

- ✓ artma və azalma aralıqları
- ✓ böhran nöqtələri
- ✓ stasionar nöqtələr
- ✓ ekstremum nöqtələri
- ✓ lokal maksimum
- ✓ lokal minimum
- ✓ funksiyanın ekstremumları

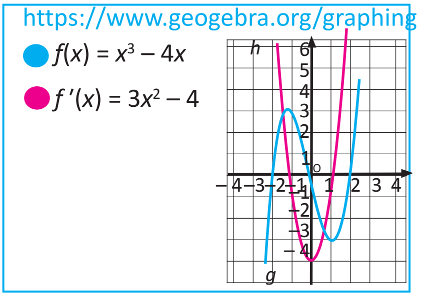
Bunları bilmək maraqlıdır!

Məhsulun marketinqi zamanı hər hansı məhsul haqqında məlumat onun "məhsulun ömrü" qrafiki ilə təqdim edilir. Mövcudluq dövrü beş fazanı: 1-bazara çıxış ; 2-yüksəliş; 3-yetkinlik; 4-eniş; 5-özünüyeniləmə fazalarını əhatə edir və aşağıdakı kimi qrafik formaya malik olur.



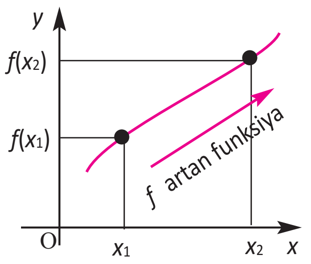
Praktik məşğələ. Funksiyanın artması və azalması
Qrafkalkulyatorun köməyilə eyni koordinat müstəvisində $f(x) = x^3 - 4x$ və $f'(x) = 3x^2 - 4$ funksiyalarının qrafiklərini siz də qurun.

- $f(x)$ funksiyası hansı intervalda artır?
- $f(x)$ funksiyası hansı intervalda azalır?
- $f(x)$ funksiyası artan intervalda toxunanın absis oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağın növünü müəyyən edin.
- $f(x)$ funksiyası azalan intervalda toxunanın absis oxu ilə əmələ gətirdiyi bucağın növünü müəyyən edin



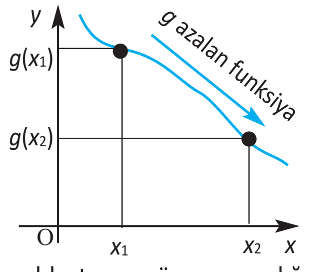
Funksiyanın artma və azalma aralıqları

Artan funksiya



Təyin oblastının müəyyən aralığından götürülmüş $x_2 > x_1$ şərtini ödəyən ixtiyari x_1, x_2 üçün $f(x_2) > f(x_1)$ olarsa, funksiya bu aralıqda artandır.

Azalan funksiya

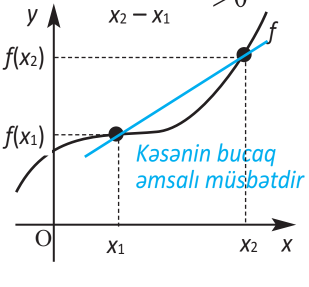


Təyin oblastının müəyyən aralığından götürülmüş $x_2 > x_1$ şərtini ödəyən ixtiyari x_1, x_2 üçün $g(x_2) < g(x_1)$ olarsa, funksiya bu aralıqda azalandır.

Funksiyanın artma və azalma aralıqlarını funksiyanın qrafikini kəsənin bucaq əmsalı ilə əlaqəli şəkildə aşağıdakı kimi də ifadə etmək olar.

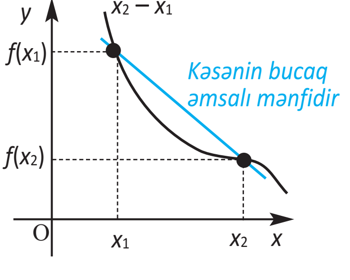
Əgər verilmiş aralıqda ixtiyari kəsənin bucaq əmsalı müsbətdirsə, *f* funksiyası bu aralıqda artandır.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$



Əgər verilmiş aralıqda ixtiyari kəsənin bucaq əmsalı mənfidirsə, *f* funksiyası bu aralıqda azalandır.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$



Funksiyanın artma və azalma aralıqları

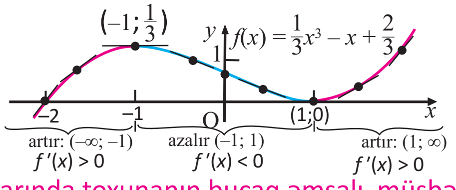
Tutaq ki, müəyyən aralıqda $y = f(x)$ funksiyasının törəməsi müsbətdir, yəni $f'(x) > 0$. $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ olduğundan, toxunanın bucaq əmsalı müsbət olur. Bu isə o deməkdir ki, toxunan absis oxunun müsbət istiqaməti ilə iti bucaq əmələ gətirir və verilən aralıqda qrafik “yuxarı qalxır”, yəni funksiya artandır. Əgər $f'(x) < 0$ olarsa, onda toxunan absis oxu ilə kor bucaq əmələ gətirir, qrafik “aşağı enir”, yəni funksiya azalır.

Teorem. Əgər f funksiyası verilmiş aralıqda diferensiallandırsa və bu aralığın hər bir nöqtəsində:

- $f'(x) > 0$ olarsa, f funksiyası bu aralıqda artandır.
- $f'(x) < 0$ olarsa, f funksiyası bu aralıqda azalandır.
- $f'(x) = 0$ olarsa, f funksiyası bu aralıqda sabitdir.

Qeyd: f funksiyası artma və ya azalma aralığının uc nöqtələrindən hər hansı birində kəsilməzdirsə, həmin nöqtə bu aralığa daxil edilir.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ funksiyasının qrafikinə görə artma və azalma aralıqlarını araşdıraq.



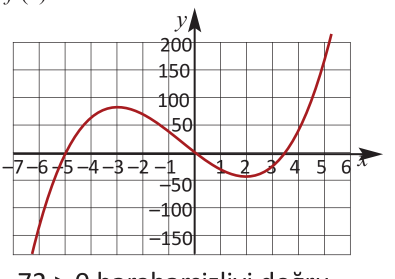
(−∞;−1) və (1;+∞) aralıqlarında toxunanın bucaq əmsalı müsbətdir, f funksiyası (−∞;−1] və [1;+∞) aralıqlarının hər birində artandır.

(−1; 1) aralığında toxunanın bucaq əmsalı mənfidir və funksiya [−1; 1] aralığında azalır.

Nümunə 1. Törəmənin köməyilə $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$ funksiyasının artma və azalma aralıqlarını müəyyən edin.

https://www.desmos.com/calculator

$f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$



Həlli: 1. Cəbri üsul. $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$ funksiyasının törəməsini tapaq.

$f'(x) = (4x^3 + 6x^2 - 72x + 1)' =$
$= 12x^2 + 12x - 72$

$f(x)$ funksiyası $f'(x) > 0$ olduqda, yəni $12x^2 + 12x - 72 > 0$ bərabərsizliyi doğru olan aralıqda artandır.

Bərabərsizliyi həll etmək üçün əvvəlcə uyğun tənliyi həll edək.

$12x^2 + 12x - 72 = 0$ $\qquad x^2 + x - 6 = 0$ $\qquad x_1 = 2,\ x_2 = -3,$

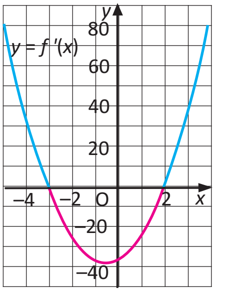
Deməli, $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ olduqda $f'(x) = 0$ olur. $x_1 = 2$ və $x_2 = -3$ qiymətləri funksiyanın təyin oblastını üç intervala ayırır: $x < -3$, $-3 < x < 2$ və $x > 2$. Bu intervalların hər birindən sınaq nöqtəsi seçməklə törəmənin işarəsini müəyyən edə bilərik.

	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
Sınaq nöqtəsi	$x = -5$	$x = -3$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 3$
$f'(x)$	$f'(-4) = 72$ *Müsbət*	0	$f'(0) = -72$ *Mənfi*	0	$f'(-4) = 72$ *Müsbət*
$f(x)$	*artır* ↗		*azalır* ↘		*artır* ↗

Cədvələ və $f(x)$ funksiyanın kəsilməzliyinə əsasən verilən funksiya $x \leq -3$ və $x \geq 2$ aralıqlarının hər birində artır, $-3 \leq x \leq 2$ aralığında isə azalır. Funksiyanın qrafikindən də görünür ki, məsələnin həlli doğrudur.

2. Törəmə funksiyanın qrafikindən istifadə etməklə də verilən funksiyanın artma, azalma intervallarını müəyyən etmək olar.

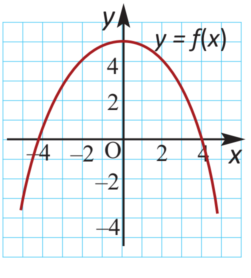
$f'(x) = 12x^2 + 12x - 72$ funksiyasının qrafiki şəkildə göstərildiyi kimidir.



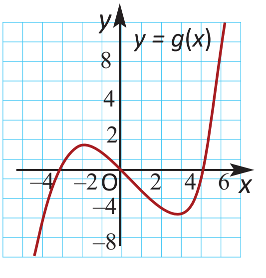
$f'(x)$ funksiyasının qrafiki $x < -3$ və $x > 2$ olduqda x oxundan yuxarıda yerləşir, deməli, $f'(x) > 0$ olur. $-3 < x < 2$ olduqda isə funksiyanın qrafiki x oxundan aşağıda yerləşir, deməli, $f'(x) < 0$ olur. $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 72x + 1$ funksiyası $x = -3$ və $x = 2$ nöqtələrində kəsilməz olduğundan, $(-\infty; -3]$ və $[2; +\infty)$ aralıqlarının hər birində artır, $[-3;2]$ aralığında isə azalır.

Nümunə 2. Verilən şərtlərə uyğun kəsilməz funksiya qrafikini sxematik qurun.
a) $x < 0$ olduqda $f'(x) > 0$, $x > 0$ olduqda $f'(x) < 0$, $f(0) = 5$
b) $x < -2$ və ya $x > 3$ olduqda $f'(x) > 0$, $-2 < x < 3$ olduqda $f'(x) < 0$, $f(0) = 0$

Həlli: a) $x < 0$ olduqda törəmənin işarəsi müsbətdir: $f'(x) > 0$, deməli, funksiya artandır. $x > 0$ olduqda törəmənin işarəsi mənfidir: $f'(x) < 0$, deməli, funksiya azalandır. $x = 0$ olduqda funksiyanın qiyməti 5-ə bərabərdir.



b) $x < -2$ və $x > 3$ olduqda törəmənin işarəsi müsbətdir: $f'(x) > 0$, deməli funksiya artandır. $-2 < x < 3$ olduqda törəmənin işarəsi mənfidir: $f'(x) < 0$ deməli, funksiya azalandır. $x = 0$ olduqda funksiyanın qiyməti 0-a bərabərdir.



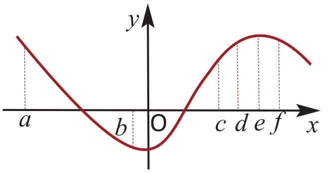
Öyrənmə tapşırıqları

1. a) Funksiya $0 < x < 12$ intervalında azalır. Hansı böyükdür: $f(3)$, yoxsa $f(10)$? Fikrinizi əsaslandırın.

b) Funksiyanın törəməsindən istifadə etməklə onun artma və azalma intervallarını necə müəyyən etmək olar?

c) "Xətti funksiya ya artandır, ya da azalandır" təklifi həmişə doğrudurmu? Fikrinizi nümunələr yazmaqla əsaslandırın.

2. Arqumentin şəkildə göstərilmiş hansı qiymətlərində qrafiki verilmiş funksiyanın törəməsi:
a) sıfıra bərabərdir; b) sıfırdan böyükdür;
c) sıfırdan kiçikdir?



3. Funksiyanın törəməsini tapıb sınaq nöqtələri seçməklə artma və azalma aralıqlarını müəyyən edin.

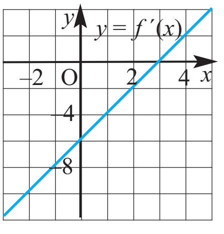
a) $f(x) = 4x + 3$ b) $f(x) = (2x - 3)^2$

c) $f(x) = 2x - x^2$ d) $f(x) = 6x^2 - x^3 + 2$

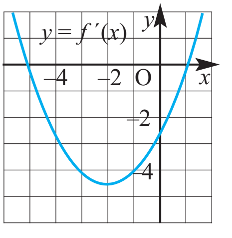
e) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ f) $f(x) = (x^2 - 4)^2$

4. $f'(x)$-in qrafikinə görə $f(x)$ funksiyasının artma və azalma aralıqlarını müəyyən edin.

a)



b)



5. Verilmiş $f(x)$ funksiyasının törəmə funksiyasının qrafikini qurun və bu qrafikə görə verilən funksiyanın artma və azalma aralıqlarını müəyyən edin.

a) $f(x) = -2x + 1$ b) $f(x) = (x - 3)^2 + 5$ c) $f(x) = (x - 4)^2$

d) $f(x) = x^2 - 4x$ e) $f(x) = x^3 - 12x + 1$ f) $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 + 6$

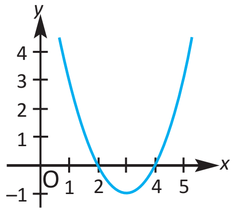
6. a) $f(x) = x^3 + x$ funksiyasının bütün həqiqi oxda artan olduğunu $f'(x)$ funksiyasının qrafikini qurmaqla əsaslandırın.
b) İsbat edin ki, $f(x) = -x - x^5$ funksiyası bütün ədəd oxunda azalandır.

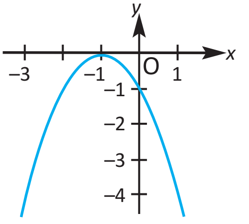
7. Cədvəldə verilmiş artma və azalma aralıqlarına görə həqiqi oxda diferensiallanan funksiyanın qrafikini sxematik təsvir edin.

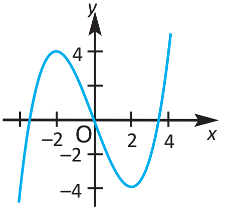
	$x < -5$	$x = -5$	$-5 < x < 5$	$x = 5$	$x > 5$
$f'(x)$	mənfi	0	müsbət	0	mənfi
$f(x)$	↘	2	↗	6	↘

8. a) Verilmiş qrafikinə görə funksiyanın artma və azalma aralıqlarını yazın.

1) $f(x) = x^2 - 6x + 8$ 2) $f(x) = -(x+1)^2$ 3) $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - 3x$







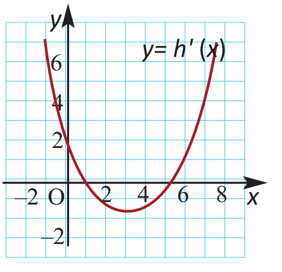
b) Artma və azalma aralıqlarını funksiyanın törəməsinə görə müəyyən edin.

9. a) Arqumentin hansı qiymətlərində funksiyanın törəməsinin sıfıra bərabər olduğunu tapın.
b) Funksiyanın artma və azalma aralıqlarını tapın.

1) $f(x) = x^2 + 6x - 3$ 2) $g(x) = 2 - 3x - 2x^2$
3) $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ 4) $g(x) = x^3 - x^2 - x + 2$
5) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$ 6) $g(x) = 8x^2 - x^4$
7) $f(x) = xe^x$ 8) $g(x) = x\ln x$

10. Şəkildə $h'(x)$ funksiyasının qrafiki verilmişdir. Qrafikə görə $h(x)$ funksiyasının verilmiş qiymətlər cütündən hansının böyük olduğunu müəyyən edin.

a) $h(3)$, $h(4)$ b) $h(-1)$, $h(0)$
c) $h(6)$, $h(8)$ d) $h(2)$, $h(4)$



11. a) a-nın elə bir qiyməti varmı ki, $f(x) = ax^2 + 2x + 5$ funksiyası bütün ədəd oxunda azalan olsun?
b) b-nin elə qiymətlərini tapın ki, $f(x) = x^3 + bx^2 + 12x + 3$ funksiyası bütün ədəd oxunda artan olsun.
Göstəriş: törəmə funksiyanın tam kvadrata ayrılış şəklini yazın.

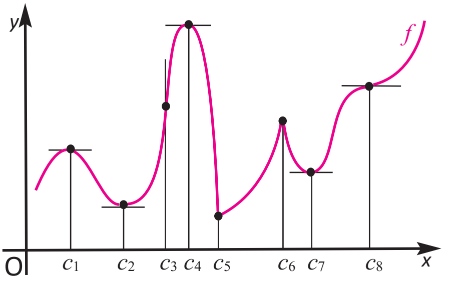
12. **Açıq tipli tapşırıq.** Verilən şərtlərə görə sxematik qrafik çəkin.

a) $f(x)$ funksiyası $(-\infty; 2]$ aralığında artır, $[2; +\infty)$ aralığında azalır.
b) $g(x)$ funksiyası $(-\infty; -3]$ aralığında azalır, $[-3; +\infty)$ aralığında artır.
c) $h(x)$ funksiyası $(-\infty; 3]$ və $[8; +\infty)$ aralıqlarında azalır, $[3; 8]$ aralığında artır.
d) kəsilməz $\phi(x)$ funksiyasının törəməsi $(-\infty; -2)$ aralığında müsbət, $(-2; +\infty)$ aralığında mənfidir.
e) $m(x)$ funksiyasının törəməsi $(-\infty; 1)$ aralığında mənfi, $(1; +\infty)$ aralığında müsbətdir.

Təyin oblastının bəzi daxili nöqtələrində funksiyanın törəməsi sıfıra bərabər ola bilər, yaxud törəməsi olmaya bilər. Təyin oblastının belə nöqtələrinə funksiyanın **böhran nöqtələri** deyilir.

Şəkildə qrafiki verilmiş funksiyanın böhran nöqtələrini göstərək.

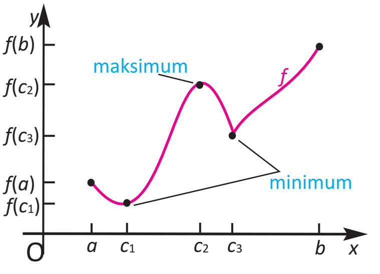
1. x-in c_1, c_2, c_4, c_7, c_8 qiymətlərində qrafikə toxunanın bucaq əmsalı 0-a bərabərdir. Yəni bu nöqtələrdə $f'(x) = 0$ olur. Bu nöqtələr verilən funksiyanın böhran nöqtələridir.



2. c_3, c_5, c_6 nöqtələrində isə funksiyanın törəməsi yoxdur. Bu nöqtələr də funksiyanın böhran nöqtələridir.

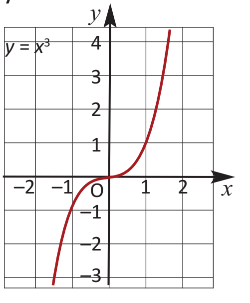
3. Nəzərdən keçirdiyimiz funksiyada onun c_1, c_2, c_4, c_5, c_6, c_7 böhran nöqtələri təyin oblastını funksiyanın artma və azalmasının növbələşdiyi intervallara bölür. c_3, c_8 nöqtələri isə azalma və artmanın (və ya tərsinə) dəyişmədiyi böhran nöqtələridir.

Qrafiklə verilmiş funksiyanın daxili ekstremumlarının onun törəməsinin sıfıra bərabər olduğu (c_1 və c_2) və törəməsinin olmadığı (c_3) nöqtələrdə olduğu görünür. Funksiyanın törəməsinin sıfıra bərabər olduğu nöqtələrə **stasionar** nöqtələr də deyilir.

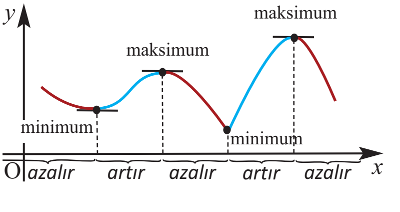


Fermat teoremi. (Ekstremumun varlığı üçün zəruri şərt). Daxili ekstremum nöqtəsində funksiyanın törəməsi ya sıfıra bərabərdir, ya da yoxdur.

Qeyd: Törəmənin sıfıra bərabər olduğu nöqtə ekstremum nöqtəsi olmaya bilər.
Məsələn, $y = x^3$ funksiyasının törəməsi $x = 0$ olduqda sıfıra bərabərdir, lakin bu nöqtə onun ekstremum nöqtəsi deyil.



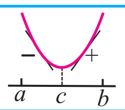
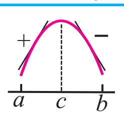
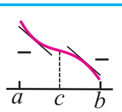
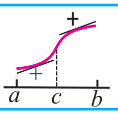
Funksiyanın kəsilməz olduğu parçada bir neçə böhran nöqtəsi, maksimumu və minimumu ola bilər. Verilən nöqtənin ekstremum nöqtəsi olması funksiyanın bu nöqtədəki və bu nöqtənin yaxın ətrafındakı qiymətlərindən asılıdır, yəni lokal mahiyyət daşıyır. Ona görə də bəzən lokal maksimum, lokal minimum terminləri işlədilir.



Ekstremumun varlığı üçün kafi şərtlər.
Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $(a;b)$ aralığında kəsilməzdir və $x_0 \in (a;b)$.
Əgər x_0 nöqtəsi böhran nöqtəsidirsə və onun hər hansı ətrafında funksiya differensiallanandırsa, onda həmin ətrafda:
1) x_0-dan solda $f'(x)$ müsbət, sağda isə mənfidirsə, x_0 nöqtəsi maksimum nöqtəsidir.
2) x_0-dan solda $f'(x)$ mənfi, sağda isə müsbətdirsə, x_0 nöqtəsi minimum nöqtəsidir.
3) x_0 nöqtəsindən keçdikdə törəmə işarəsini dəyişmirsə, x_0 ekstremum nöqtəsi deyil.

Parçada sonlu sayda böhran nöqtələri olan funksiyanın ən böyük qiymətini (mütləq maksimum) və ən kiçik qiymətini (mütləq minimum) tapmaq üçün funksiyanın bu parçanın daxilindəki bütün böhran nöqtələrində və parçanın uc nöqtələrində qiymətlərini hesablamaq, sonra isə alınan ədədlərdən ən böyüyünü və ən kiçiyini seçmək lazımdır.
$[a;b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının ən böyük və ən kiçik qiymətləri, uyğun olaraq, $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ və $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ kimi yazılır.

Aşağıda funksiyanın birinci tərtib törəməsinin işarəsinə görə maksimum və minimum nöqtələrin müəyyən edilməsinə aid nümunələr verilmişdir.

$[a; b]$ aralığında funksiyanın qrafiki	$f(c)$	$(a; c)$ intervalında $f'(x)$-in işarəsi	$(c; b)$ intervalında $f'(x)$-in işarəsi	Artması və ya azalması
	minimum	–	+	$[a; c]$-də azalır, $[c; b]$-də artır
	maksimum	+	–	$[a; c]$-də artır, $[c; b]$-də azalır
	nə minimum, nə də maksimum	–	–	$[a; c]$-də azalır, $[c; b]$-də azalır
	nə minimum, nə də maksimum	+	+	$[a; c]$-də artır, $[c; b]$-də artır

Nümunə 1. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ funksiyasının maksimum və minimumlarını müəyyən edin və qrafikini sxematik təsvir edin.

Həlli: Tapşırığı həll etmək üçün əvvəlcə funksiyanın böhran nöqtələrini tapmalıyıq. Bu nöqtələr verilmiş funksiyanın törəməsinin sıfıra bərabər olduğu (stasionar) nöqtələrdir.

1. Funksiyanın törəməsi: $f'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3$
2. Funksiyanın böhran nöqtələri: $3x^2 - 3 = 0$, $x = \pm 1$
3. $x = -1$ və $x = 1$ nöqtələri funksiyanın təyin oblastını üç aralığa bölür.

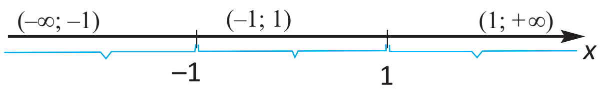
Bu aralıqlardan sınaq nöqtələri seçməklə $f'(x)$-in işarəsini yoxlayaq:

$(-\infty; -1)$ aralığından $x = -2$; $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$

$(-1; 1)$ aralığından $x = 0$; $f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3 < 0$

$(1; +\infty)$ aralığından $x = 2$; $f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 9 > 0$

İnterval



Sınaq nöqtələri $x = -2$ $x = 0$ $x = 2$

$f'(x)$-in işarəsi $f'(x) > 0$ $f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$

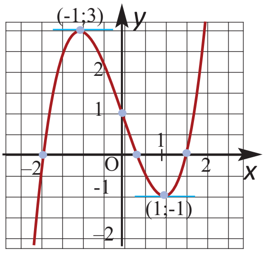
Artma-azalma $(-\infty; -1]$ aralığında artır, $[-1; 1]$ aralığında azalır, $[1; +\infty)$ aralığında artır

$x = -1$-də maksimum $x = 1$-də minimum

$x = -1$ olduqda $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$ $(-1;3)$ maksimum
$x = 1$ olduqda $f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = -1$ $(1;-1)$ minimum

4. Əldə etdiyimiz məlumatlara daha bir neçə nöqtənin koordinatlarını əlavə etməklə $f(x) = x^3 - 3x + 1$ funksiyasının qrafikini təsvir edək.

x	-1	$-0,5$	0	1	$1,5$	2
$f(x)$	3	$1,2$	1	-1	$-0,125$	3



Nümunə 2: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ funksiyasının $[-1;2]$ parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

Həlli: Əvvəlcə böhran nöqtələrini tapaq. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ olduğu üçün $3x^2 + 6x - 9 = 0$ tənliyindən $x_1 = 1$ və $x_2 = -3$ böhran nöqtələri tapılır. $x = -3$ böhran nöqtəsi verilmiş $[-1;2]$ parçasına daxil deyil. Verilmiş funksiyanın $x = 1$ böhran nöqtəsində və parçanın uclarında qiymətlərini hesablayaq:

$f(1) = 1^3 + 3\cdot1^2 - 9\cdot1 + 1 = -4$,

$f(-1) = (-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 - 9\cdot(-1) + 1 = 12$,

$f(2) = 2^3 + 3\cdot2^2 - 9\cdot2 + 1 = 3$.

Bu qiymətlərdən ən kiçiyi -4, ən böyüyü 12-dir. Beləliklə:

$\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 12$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = -4$.

Nümunə 3. $f(x) = 2x^3 - x^4$ funksiyasının ekstremumlarını tapın.

Həlli: 1. Funksiyanın törəməsi: $f'(x) = (2x^3 - x^4)' = 6x^2 - 4x^3$

2. Funksiyanın böhran nöqtələri: $6x^2 - 4x^3 = 0$,

$2x^2(3 - 2x) = 0$, $x_1 = 0$ və $x_2 = 1{,}5$

3. Böhran nöqtələrinin funksiyanın təyin oblastını böldüyü aralıqlar:

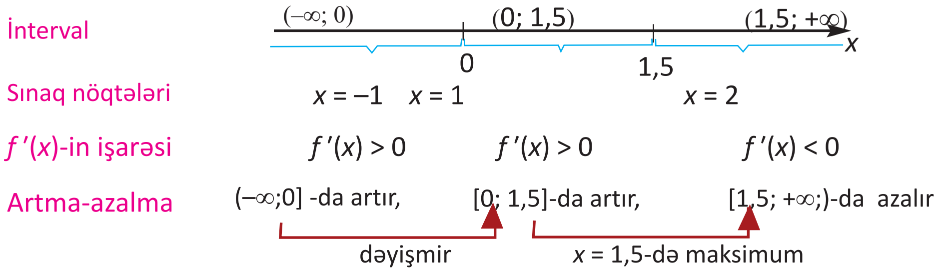
$$(-\infty; 0),\ (0; 1{,}5) \text{ və } (1{,}5; +\infty)$$

İntervallardan sınaq nöqtəsi seçilməklə $f'(x)$-in bu aralıqlardakı işarəsi:

$(-\infty; 0)$ aralığından $x = -1$: $f'(-1) = 6(-1)^2 - 4(-1)^3 = 10 > 0$

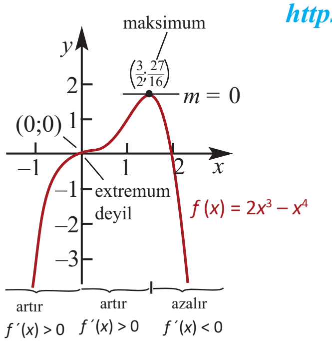
$(0; 1{,}5)$ aralığından $x = 1$: $f'(1) = 6\cdot 1^2 - 4\cdot 1^3 = 2 > 0$

$(1{,}5; \infty)$ aralığından $x = 2$: $f'(2) = 6\cdot 2^2 - 4\cdot 2^3 = -8 < 0$

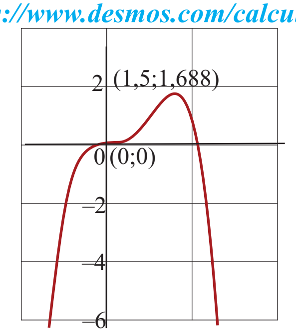


Əldə etdiyimiz məlumatlara daha bir neçə nöqtənin koordinatlarını əlavə etməklə $f(x) = 2x^3 - x^4$ funksiyasının qrafikini qura bilərik. Qrafiki çəkərkən nəzərə almaq lazımdır ki, absisi $x = 0$ və $x = 1{,}5$ olan nöqtələrdə toxunan üfüqi vəziyyətdə olmalıdır. Qrafiki doğru qurduğumuzu qrafkalkulyatorun köməyilə yoxlaya bilərik.

x	$f(x)$, təqribi
–1	–3
–0,5	–0,31
0	0
0,5	0,19
1	1
1,25	1,46
1,5	1,69
2	0



https://www.desmos.com/calculator



- f funksiyası $(-\infty; 0]$ aralığında artır.
- $x = 0$ nöqtəsi f funksiyasının böhran nöqtəsidir, lakin ekstremum nöqtəsi deyil.
- f funksiyası $[0; 1{,}5]$ aralığında artır.
- f funksiyası $[1{,}5; +\infty)$ aralığında azalır.
- $x_{max} = 1{,}5$; $f_{max} = f(1{,}5) \approx 1{,}688$

Nümunə 3. $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ funksiyasının ekstremumlarını müəyyən edin.

Həlli: 1. Funksiyanın törəməsi $f'(x) = (\sqrt[3]{(x-2)^2})' = ((x-2)^{\frac{2}{3}})' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$, $x \neq 2$

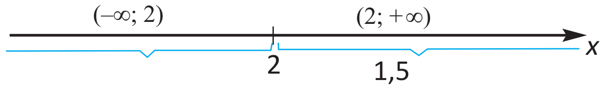
2. Böhran nöqtələri: Böhran nöqtələrini tapmaq üçün $f'(x) = 0$ tənliyini həll etməliyik və ya törəmənin olmadığı nöqtələri tapmalıyıq. $x = 2$ nöqtəsində funksiyanın sonlu törəməsi yoxdur. Lakin $x = 2$ nöqtəsi təyin oblastına daxildir. Deməli, $x = 2$ funksiyanın böhran nöqtəsidir.
3. Böhran nöqtəsinin funksiyanın təyin oblastını böldüyü aralıqlar:

$$(-\infty; 2) \text{ və } (2; +\infty)$$

İntervallardan sınaq nöqtəsi seçilməklə $f'(x)$-in bu aralıqlardakı işarəsi:

$(-\infty; 2)$ aralığından $x = 0$: $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{0-2}} < 0$

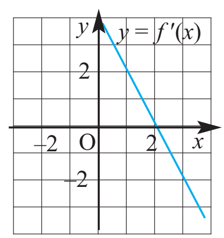
$(2; +\infty)$ aralığından $x = 3$: $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(3-2)}} > 0$



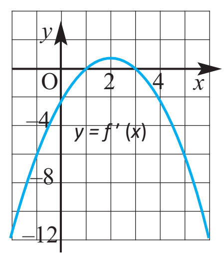
İnterval	$(-\infty; 2)$	$(2; +\infty)$
Sınaq nöqtələri	$x = 0$	$x = 3$
$f'(x)$-in işarəsi	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Artma-azalma	$(-\infty;2]$ -da azalır	$[2; +\infty)$-da artır

$x = 2$ minimum nöqtəsidir

- f funksiyası $(-\infty; 2]$ aralığında azalır.
- f funksiyası $[2; +\infty)$ aralığında artır.
- $x_{min} = 2$ və $f_{min} = f(2) = 0$



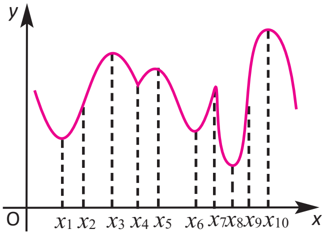
Nümunə 4. $f'(x)$ törəmə funksiyanın verilən qrafikinə görə $f(x)$ funksiyasının qrafikini sxematik təsvir edin.



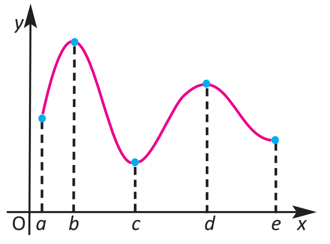
Həlli: $f'(x)$ törəməsi $x = 2$ olduqda sıfıra bərabərdir, $x > 2$ olduqda mənfidir, deməli, funksiya $[2; +\infty)$ aralığında azalır. $x < 2$ olduqda isə törəmə müsbətdir, bu isə f funksiyasının $(-\infty; 2]$ aralığında artması deməkdir. Artma azalmaya keçdiyindən $(2; f(2))$ nöqtəsi bu funksiyanın maksimumuna uyğundur. Uyğun sxematik qrafik şəkildəki kimi olar.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilən qrafikə görə funksiyanın böhran nöqtələrini müəyyən edin.



2. Verilən qrafikə görə funksiyanın artma və azalma intervallarını, bu intervallarda törəmənin işarəsini, maksimum və minimum nöqtələrini yazın.



3. a) "Əgər $f'(c) = 0$ olarsa, $x = c$ nöqtəsi ekstremum nöqtəsidir" fikri həmişə doğrudurmu?

b) f funksiyası $[-3;8]$ parçasında kəsilməz olub azalandır. Bu parçada funksiya ən böyük və ən kiçik qiymətlərini arqumentin hansı qiymətlərində alır?

4. Təsəvvür edin ki, siz enişli-yoxuşlu yolla zirvəyə doğru irəliləyirsiniz və $h(t)$ funksiyası sizin müəyyən səviyyədən hündürlüyünüzün zamandan asılılığını göstərir. Zamanın müəyyən anlarında nə üçün $h'(t) = 0$ olur? Sizin hərəkətlə lokal maksimum, lokal minimum anlayışlarını necə əlaqələndirə bilərsiniz?

5. $f(x)$ funksiyasının törəməsi verilmişdir: $f'(x) = x^3 - 2x^2$

a) x-in hansı qiymətlərində $f'(x) = 0$ olur?

b) $f(x)$ funksiyasının artma və azalma aralıqlarını tapın.

c) $f'(x)$-ə görə funksiyanın yalnız bir ekstremum nöqtəsi olduğunu necə müəyyən edirsiniz?

6. Funksiyaların böhran nöqtələrini, artma-azalma aralıqlarını müəyyən etməklə qrafiklərini sxematik təsvir edin.

a) $f(x) = -x^2 + 6x + 2$ b) $f(x) = x^3 - 3x$

c) $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ d) $y = x^4 - 4x^3 + 5$

7. Verilən funksiyaların böhran nöqtələrini, maksimum və minimum qiymətlərini müəyyən edin.

1) $f(x) = x^2 - 4x$ 2) $f(x) = x^2 + 4x + 10$

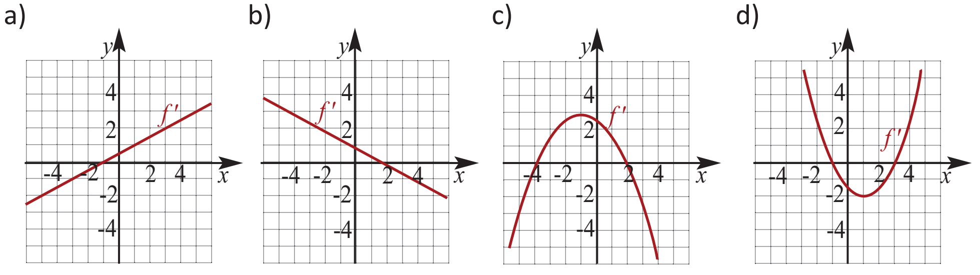
3) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ 4) $f(x) = -(x^2 + 8x + 12)$

5) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ 6) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

7) $f(x) = (x-1)^2(x+3)$ 8) $f(x) = (x+2)^2(x-1)$

9) $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x}{3}$ 10) $f(x) = x^4 - 32x + 4$

8. Törəməsinin qrafikinə görə funksiyanın artma, azalma aralıqlarını və ekstremum nöqtələrinin absislərini müəyyən edin. Funksiyanın qrafikini sxematik təsvir edin.



9. f funksiyası diferensiallanan funksiyadır. Cədvəldə x-in müəyyən qiymətlərində $f'(x)$-in qiymətləri verilmişdir.

x	–1	– 0,75	– 0,50	– 0,25	0	0,25	0,50	0,75	1
$f'(x)$	–10	– 3,2	– 0,5	0,8	5,6	3,6	– 0,2	– 6,7	– 20,1

Qiymətlər cədvəlinə görə: a) funksiyanın qrafikini sxematik təsvir edin; b) ekstremum nöqtələrinin absislərini təxmin edin.

10. Verilmiş funksiyanın böhran nöqtələrini tapın. Bu nöqtələrdən hansılarının maksimum, hansılarının minimum nöqtələri olduğunu araşdırın, funksiyanın ekstremumlarını hesablayın.

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2$
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$
3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$
4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
5) $f(x) = (x-2)^3$
6) $f(x) = x^5 - 5x$
7) $f(x) = (x^2-1)^3$
8) $f(x) = (x-2)^4$
9) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$
10) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

11. $f(x)$ funksiyasının ekstremumlarını tapın, qrafikini sxematik təsvir edin.

Qrafik təsvirə görə $f(x) = 0$ tənliyinin neçə həqiqi kökü olduğunu müəyyən edin.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$

12. Funksiyanın böhran nöqtələrini tapın.
a) $f(x) = x - \sin 2x$
b) $f(x) = \cos x - x$

13. $f(x)$ funksiyasının verilmiş parçada: a) lokal ekstremumlarını;
b) ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

1) $f(x) = 3 - 2x, \quad [-1;2]$
2) $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad [-1;3]$
3) $f(x) = 2x^3 - 3x^2, \quad [-1;1]$
4) $f(x) = \sqrt{x} - x, \quad [0;4]$
5) $f(x) = x^3 - 6x, \quad [-1;2]$
6) $f(x) = \sqrt{x} - 2x^2, \quad [0;1]$
7) $f(x) = 2^x - 2^{-x}, \quad [-1;1]$
8) $f(x) = x - \ln x, \quad [\frac{1}{e};e]$

14. a) Törəmənin köməyilə isbat edin ki, $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, funksiyasının ekstremumu absisi $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ olan nöqtədədir. Bu ekstremumu tapın.
b) $y = x^3 + px + q$ funksiyasının neçə ekstremum nöqtəsi ola bilər?

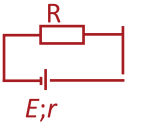
Tətbiq tapşırıqları

15. Həftəlik istehsal edilən x sayda məhsulun maya dəyərini
$C(x) = 0{,}3x^3 - 5x^2 + 28x + 200$ funksiyası ilə ifadə etmək olar.
Marjinal maya dəyərini ifadə edən $MC(x) = C'(x)$ funksiyasını yazın. Bu funksiyaların qrafiklərini eyni koordinat sistemində qrafkalkulyatorla qurun.

16. Ölçüləri x və $\dfrac{100}{x}$ olan düzbucaqlının perimetrinin onun x tərəfindən asılılığını $P(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar.
a) $P(x)$ funksiyasının ekstremumlarını tapın.
b) əvvəlki bənddə tapdığınız cavabın situasiyaya uyğun izahını yazın.

17. a) Özü ilə tərsinin cəmi ən kiçik olan müsbət ədədi tapın.
b) Özü ilə kubunun fərqi ən böyük olan müsbət ədədi tapın.
c) Özü ilə kvadratı cəmi ən kiçik olan ədədi tapın.
d) 18 ədədini elə üç müsbət ədədin cəmi şəklində göstərin ki, ikinci ədəd birincidən iki dəfə böyük olmaqla bu üç ədədin hasili ən böyük olsun.

18. Daxili müqaviməti r, elektrik hərəkət qüvvəsi E olan qapalı elektrik dövrəsində ayrılan güc $P = \dfrac{E^2 \cdot R}{(R + r)^2}$ düsturu ilə tapılır. Burada R xarici müqavimətdir. R-in hansı qiymətində dövrənin xarici hissəsində ayrılan güc maksimum olar?



19. Müşahidələrlə xəstənin T temperaturunun (Farengeytlə) t gündə
$T(t) = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 98{,}6$; $0 \leq t \leq 12$, funksiyası ilə dəyişdiyi müəyyən edilmişdir.
Bu funksiyaya görə temperaturun ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın və situasiyaya uyğun izah edin.

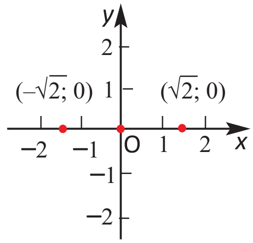
Çoxhədli funksiya bütün həqiqi oxda təyin olunub və kəsilməzdir.

Çoxhədli funksiyanın qrafikini qurmaq üçün aşağıdakı addımları yerinə yetirin.

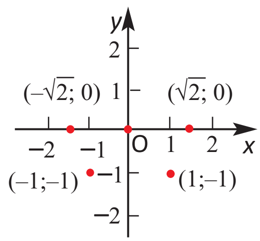
- Koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini müəyyən edin.
- Böhran nöqtələrini müəyyən edin.
- Artma və azalma intervallarını müəyyən edin.
- Maksimum və minimumlarını müəyyən edin.
- Qrafikini qurun.

Nümunə 1. $f(x) = x^4 - 2x^2$ funksiyasının qrafikini qurun.

- Koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri:
$x^4 - 2x^2 = 0$, $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$, $(-\sqrt{2}:0)$, $(0;0)$, $(\sqrt{2}:0)$

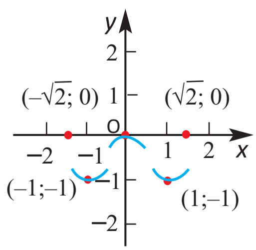


- Böhran nöqtələri (törəmənin sıfıra bərabər olduğu nöqtələr): $f'(x) = (x^4 - 2x^2)' = 4x^3 - 4x$
$4x^3 - 4x = 0$, $4x(x^2 - 1) = 0$, $x = 0$, $x = \pm 1$
$f(0) = 0$, $f(-1) = -1$, və $f(1) = -1$,
deməli, $(0; 0)$, $(-1; -1)$ və $(1; -1)$ nöqtələri funksiyanın qrafiki üzərindədir.



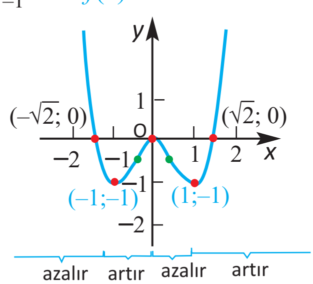
- Artma, azalma intervalları və ekstremumları:
$x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ böhran nöqtələri funksiyanın təyin oblastını dörd intervala bölür. $f'(x) = 4x^3 - 4x$ törəmə funksiyasının işarələrini yoxlayaq.

	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
Sınaq nöqtəsi	-2		$-0{,}1$		$0{,}1$		2
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗
Ekstremumları		azalmadan artmaya keçir		artmadan azalmaya keçir		azalmadan artmaya keçir	
		$x_{min}=-1$		$x_{max}=0$		$x_{min}=1$	
		$f_{min}=f(-1)=-1$		$f_{max}=f(0)=0$		$f_{min}=f(1)=-1$	
		$(-1;-1)$ lokal minimum		$(0;0)$ lokal maksimum		$(1;-1)$ lokal minimum	



- Qeyd edilən məlumatlar əsasında funksiyanın qrafikini quraq.

$f(x) = x^4 - 2x^2$



- $g(x) = x^4 - 8x^2$ funksiyasının qrafikini siz qurun.

Rasional funksiyaların qrafikini qurmaq üçün aşağıdakı addımları yerinə yetirin.
- Təyin oblastını müəyyən edin.
- Asimptotlarını (əgər varsa) müəyyən edin.
- Koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini müəyyən edin.
- Böhran nöqtələrini müəyyən edin.
- Artma və azalma intervallarını və ekstremumları müəyyən edin.
- Qrafikini qurun.

Nümunə 5. $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$ funksiyasının qrafikini qurun.

- Funksiyanın təyin oblastı: $D(f) = (-\infty; 3) \cup (3;+\infty)$
- Asimptotları: $\lim\limits_{x\to 3^-} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} x = +\infty$ olduğundan $x = 3$ düz xətti funksiyanın şaquli asimptotudur.

Sürətdəki çoxhədlinin dərəcəsi məxrəcdəki çoxhədlinin dərəcəsindən böyük olduğundan rasional funksiyanın üfüqi asimptotu yoxdur. Lakin,

$f(x) = \dfrac{x^2}{x-3} = x + 3 + \dfrac{9}{x-3}$ kimi yazsaq, $x \to \infty$ şərtində $\dfrac{9}{x-3} \to 0$

olduğundan $f(x)$ funksiyasının qrafiki $y = x + 3$ düz xəttinə sonsuz yaxınlaşacaqdır. Bu halda deyirlər ki, $y = x + 3$ düz xətti $f(x)$ funksiyasının **maili asimptotudur**. Ümumiyyətlə, $P(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsi $Q(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsindən 1 vahid böyük olduqda $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ rasional funksiyasının maili asimptotu var.

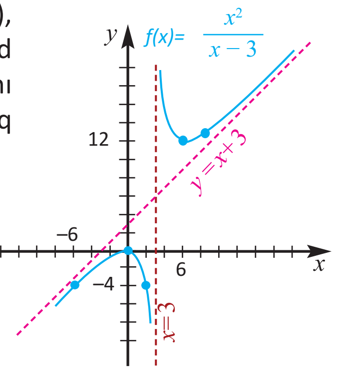
- Koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri: $\dfrac{x^2}{x-3} = 0$, $x = 0$, (0;0)
- Böhran nöqtələri: $f'(x) = \left(\dfrac{x^2}{x-3}\right)' = \dfrac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \dfrac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$, $\dfrac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = 0$

$x^2 - 6x = 0$, $x(x-6) = 0$, $x = 0, x = 6$, $f(0) = 0$, $f(6) = 12$ (0;0) və (6;12)

- Artma-azalma intervalları: $x = 3$ nöqtəsində finksiya təyin olunmayıb, $x = 0$ və $x = 6$ funksiyanın böhran nöqtələridir. Təyin oblastının bu nöqtələrlə bölündüyü intervalların hər birində törəmənin işarəsini müəyyən edək.

	$(-\infty; 0)$	$(0; 3)$	$(3; 6)$	$(6; +\infty)$
Sınaq nöqtəsi	-1	2	4	7
$f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$	$f'(-1) = 7/16 > 0$	$f'(2) = -8 < 0$	$f'(4) = -8 < 0$	$f'(7) = 7/16 > 0$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
Ekstremumları	*artmadan azalmaya keçir,* $x_{max} = 0$, $f_{max} = f(0) = 0$, *(0;0) lokal maksimumdur*		*işarə dəyişmir*	*azalmadan artmaya keçir,* $x_{min} = 6$, $f_{min} = f(6) = 12$, *(6; 12) lokal minimumdur.*

● Qrafiki quraq. Qrafikə aid olan (–6;–4), (0;0), (6;12), (9;13,5) nöqtələrini koordinat müstəvisində qeyd edək. $x = 3$ şaquli və $y = x + 3$ maili asimptotlarını çəkək. Əldə edilmiş nəticələri nəzərə alaraq funksiyanın qrafikini təsvir edək.



Diqqət edin! Funksiyanın qrafiki $x = 0$ nöqtəsinin yaxın ətrafında özünü $y = -\dfrac{x^2}{3}$ parabolası kimi aparır.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilənlərə görə çoxhədli funksiyanın qrafikini təsvir edin.

a) $f'(-1) = 0$, $f(-1) = -5$, $f'(7) = 0$, $f(7) = 10$ və $f(3) = 2$

b) $f'(-3) = 0$, $f(-1) = 8$, $f'(9) = 0$, $f(9) = -6$; $f(2) = 1$

2. Funksiya haqqında cədvəldə verilən məlumatlara görə onun qrafikini qurun.

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
Sınaq	$x = -4$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$
$f'(x)$	mənfi	0	müsbət	0	mənfi	0	müsbət
$f(x)$	azalır	min.	artır	maks.	azalır	min.	artır

3. Funksiyanın qrafikini qurun.

a) $h(x) = 2x^2 + 4x + 5$

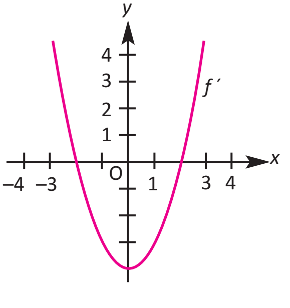
b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

c) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$

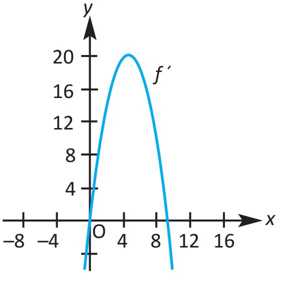
d) $g(x) = -x^4 + 2x^2$

4. Törəməsinin qrafikinə görə hər hansı funksiyanın qrafikini sxematik çəkin.

a)



b)



5. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x + 7$ funksiyası verilmişdir.

a) Bu funksiyanın ən çoxu neçə ekstremumu ola bilər?

b) Funksiyanın böhran nöqtələrini tapın, ekstremumlarını maksimum və minimum nöqtələri olaraq təsnif edin. Funksiyanın artma, azalma aralıqlarını müəyyən edin.

c) Funksiyanın qrafikini çəkin. a) və b) bəndlərindəki nəticələri qarşılaşdırın. Fikirlərinizi yazın.

6. Törəmənin tətbiqi ilə funksiyanı araşdırın və qrafikini qurun.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

b) $f(x) = x^3 - 3x + 6$

c) $g(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

d) $t(x) = 4x^5 - 5x^4$

7. Funksiyanın qrafikini qurun.

a) $f(x) = 2x^2 - x^4$

b) $f(x) = x^3 + 1{,}5x^2$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$

d) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

e) $f(x) = x^4 - 2x^3$

f) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

8. $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ funksiyasının qrafikinin $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ funksiyasının qrafikindən necə fərqləndiyini uyğun çevrilmələri yazmaqla göstərin və qrafikini qurun.

$f(x)$ funksiyasının qrafikini törəmənin köməyilə də qurun.

9. Törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın qrafikini qurun.

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$ b) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ c) $y = \dfrac{x^2}{x-2}$ d) $y = x + \dfrac{1}{x}$

10. Eyni koordinat sistemində $C(x) = 4x + 10$ maya dəyəri, $R(x) = 50x^2 - 0{,}5x$ gəlir funksiyalarının, həmçinin bu funksiyalara uyğun mənfəət funksiyasının qrafik təsvirini çəkin.

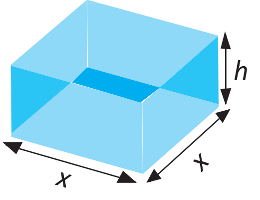
11. **Qruplarla iş.** **Açıq tipli tapşırıq.** $f(x)$ funksiyası haqqında verilən məlumatlara görə tapşırıqları yerinə yetirin:

x	0	1	2	3
f	0	2	0	–2
f'	3	0	yoxdur	–3

a) Verilən şərtləri ödəyən hər hansı funksiyanın qrafikini qurun;
b) Funksiyanın ekstremumlarını tapın.

Real həyati situasiyalarda optimal variantların seçilməsi ilə bağlı müəyyən funksiyanın ekstremumlarının tapılması zərurəti yaranır. Gündəlik həyatda tez-tez müxtəlif sahələrə aid problemlərin həlli zamanı ən böyük gəlir, ən az maya dəyəri, ən yüksək gərginlik, ən böyük həcm, ən böyük sahə və s. kimi terminlərin işlədildiyinin şahidi oluruq. Sənayedə qablaşdırma zamanı verilən daha az material sərf etməklə maksimum tutumlu qutunun ölçülərinin müəyyən edilməsini dizayn etmək və s. böyük iqtisadi əhəmiyyət kəsb edir. Bu cür məsələlərin həlli kəmiyyətin maksimum və ya minimum qiymətlərinin tapılması ilə bağlı olur. Kəmiyyətin maksimum və ya minimum qiymətlərinin tapılması məsələlərini törəmənin tətbiqi ilə həll etmək əlverişlidir.
Belə məsələlərin həlli müəyyən aralıqda kəsilməz funksiyanın ən böyük və ya ən kiçik qiymətlərinin tapılmasına gətirilir.
Qeyd 1: $(a;b)$ intervalında funksiyanın uclardakı limit qiymətləri də hesablanıb nəzərə alınmalıdır.
Qeyd 2: Baxılan intervalda funksiyanın bir stasionar nöqtəsi ola bilər: ya maksimum, ya da minimum. Belə olan halda maksimum nöqtəsində funksiya ən böyük qiymətini, minimum nöqtəsində isə ən kiçik qiymətini alır.

Nümunə 1. Maksimum həcm. Şirkət oturacağı kvadratşəkilli olmaqla səthinin sahəsi 192 sm^2 olan ağzıaçıq qutular istehsal etməyi planlaşdırır. Qutunun həcmi onun hansı ölçülərində maksimum olar?



Həlli: Qutunun oturacağı kvadrat olduğundan onun həcmi $V = x^2h$ olar. Məsələdə verilən digər məlumatlardan istifadə etməklə həcmi bir dəyişəndən, yalnız x-dən asılı ifadə edək.

Qutunun səthinin sahəsi = 4 yan üzlərinin sahəsi + oturacağının sahəsi.

$S_{səth} = 4xh + x^2 = 192$, buradan $h = \dfrac{192 - x^2}{4x}$ olduğunu $V = x^2h$ dusturunda

yerinə yazsaq, qutunun həcmini yalnız x dəyişənindən asılı

$$V(x)= x^2\left(\frac{192 - x^2}{4x}\right) = 48x - \frac{x^3}{4}$$ kimi ifadə etmək olar.

İndi isə məsələnin şərtində verilənlərə görə $V(x)$ funksiyanın təyin oblastını müəyyən edək.

Aydındır ki, uzunluq mənfi ola bilməz, yəni $x > 0$. Qutunun kvadratşəkilli oturacağının sahəsi isə 192-dən kiçik olmalıdır, yəni $x^2 < 192$, və ya $x < \sqrt{192}$. Deməli, $0 < x < \sqrt{192}$. $V(x)$ funksiyasının $(0; \sqrt{192})$ intervalında maksimum qiymətini tapmalıyıq. Bunun üçün funksiyanın törəməsini alaq:

$$V'(x) = \left(48x - \frac{x^3}{4}\right)' = 48 - \frac{3x^2}{4} = \frac{3}{4}(8 - x)(8 + x)$$

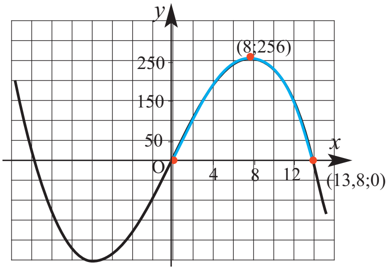
$x = 8$ və $x = -8$ olduqda $V'(x) = 0$ olur.

Lakin $-8 \notin (0;\sqrt{192})$. Deməli, baxılan intervalda böhran nöqtəsi $x = 8$ olur.
$0 < x < 8$ olduqda $V'(x) > 0$, $8 < x < \sqrt{192}$ olduqda $V'(x) < 0$ olduğundan, $V(x)$ funksiyası $x = 8$ olduqda maksimum qiymət alır.
Qutunun oturacağının tərəfləri 8 sm olarsa, onun hündürlüyü

$$h = \frac{192 - 8^2}{4 \cdot 8} = 4 \text{ sm olar.}$$

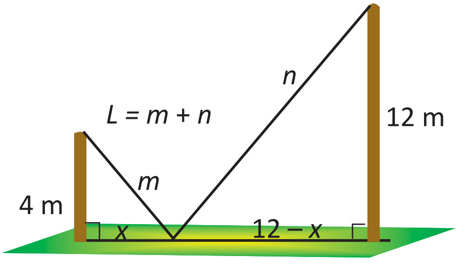
Ölçüləri 8 sm × 8 sm × 4 sm olan qutunun həcmi maksimum olur.

$V(x) = 48x - \frac{x^3}{4}$ funksiyasının qrafikini qrafkalkulyatorla qurmaqla da $x = 8$ olduqda həcmin maksimum qiymət aldığını görmək olar. Funksiyanın qrafikini törəmənin köməyilə də qurun və cavabı yoxlayın.



Nümunə 2. Minimum sərfiyyat. Hündürlüyü 4 *m* və 12 *m* olan dirəklər birbirindən 12 *m* məsafədə yerləşir. Bu dirəklərin ən hündür nöqtələri metal məftillə birləşdirilməli və məftil yerə bərkidilməlidir. Məftilin yerə bərkidilmə nöqtəsini elə seçin ki, ən az məftil işlədilsin.

Həlli: 1) Məsələnin şərtinə uyğun şəkil çəkək və məsələdə verilən məlumatları müəyyən işarələmələr qəbul etməklə şəkil üzərində qeyd edək.



2) Dəyişənlər arasındakı əlaqəni analitik şəkildə ifadə edək.

- Məftilin uzunluğunu L ilə, hər bir dirək üçün işlədilən hissələri isə m və n-lə işarə etsək, $L = m + n$ olar.
- L kəmiyyəti məftillərin yer səthində bərkidildiyi nöqtə ilə dirəklər arasındakı məsafədən asılı olaraq dəyişir. Bu məsafələrdən biri x olsa, digəri $12 - x$ olur.

m və n kəmiyyətlərini x dəyişəni ilə ifadə edək.

Pifaqor teoreminə görə: $x^2 + 4^2 = m^2$, $\quad m = \sqrt{x^2 + 16}$

$(12 - x)^2 + 12^2 = n^2 \quad n = \sqrt{x^2 - 24x + 288}$

$L = m + n = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 288}$

L(x) funksiyasının x dəyişənindən asılılığı

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 188}\ , \quad 0 \le x \le 12 \quad \text{kimidir.}$$

L(x) funksiyasının törəməsi:

$$L'(x) = (\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 24x + 288})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 288}}$$

L(x) funksiyasının böhran nöqtələrini tapaq:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 288}} = 0,$$

$$x\sqrt{x^2 - 24x + 288} = (12 - x)\sqrt{x^2 + 16},$$

$$x^2(x^2 - 24x + 288) = (12 - x)^2(x^2 + 16),$$

$$x^4 - 24x^3 + 288x^2 = (144 - 24x + x^2)(x^2 + 16),$$

$$x^4 - 24x^3 + 288x^2 = 144x^2 - 24x^3 + x^4 + 16 \cdot 144 - 16 \cdot 24x + 16x^2,$$

$$128x^2 + 16 \cdot 24x - 16 \cdot 144 = 0,$$

$$x^2 + 3x - 18 = 0, \qquad x_1 = 3, \ \ x_2 = -6.$$

L(x) funksiyasının $x = 0$, $x = 12$, $x = 3$ nöqtələrindəki qiymətlərini müqayisə etməklə (bunu özünüz yoxlayın) alırıq ki,
$x = 3$ olduqda ən az məftil işlədilmiş olar: L(3) = 20 (metr)

Optimallaşdırma məsələlərini həll edərkən aşağıdakılara diqqət edin!

1. Məsələni diqqətlə oxuyun. Uyğun şəkli çəkin.
2. Uyğun dəyişənlərin və sabitlərin, nəyin dəyişdiyinin, nəyin sabit qaldığının və hansı vahidlərdən istifadə olunduğunun siyahısını tutun. Çəkdiyiniz şəkildə ölçü vahidləri varsa, onları işarələyin.
3. Uyğun x parametri seçin və axtarılan kəmiyyəti $f(x)$ funksiyası kimi ifadə edin. Bu funksiyanın ekstremumlarını tapın.
4. Alınmış nəticənin nə kimi tətbiqi mənası olduğunu izah edin.

Öyrənmə tapşırıqları

1. 24 ədədini mənfi olmayan elə iki toplananın cəmi şəklində göstərin ki, bu ədədlərin kvadratları cəmi ən kiçik olsun.

2. 60 m uzunluqda məftildən düzbucaqlı modeli alındı. Düzbucaqlının tərəfləri hansı ölçülərdə olsa, sahəsi ən böyük olar?

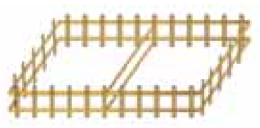
3. Düzbucaqlının sahəsi 64 sm^2-dir. Onun tərəfləri hansı ölçülərdə olsa, perimetri ən kiçik olar?

4. **Maksimum sahə.** Turistlər suda voleybol yarışı keçirməyi planlaşdırırlar. Onların dənizdə oyun sahəsini müəyyənləşdirmək üçün üzərində xüsusi plastik fanarların düzüldüyü 200 m uzunluğunda ipləri var. Bir tərəfi sahil xətti qəbul etməklə ipi yalnız düzbucaqlı şəklində sahənin üç tərəfinə işlətsələr, mümkün qədər böyük sahəni əhatə etmək üçün onlar düzbucaqlının tərəflərinin uzunluğunu hansı ölçüdə müəyyənləşdirməlidirlər?

5. Oturacağı kvadrat olan düzbucaqlı paralelepiped şəklində ağzıaçıq çən 108 *l* maye tutmalıdır. Çənin ölçüləri necə olmalıdır ki, onun hazırlanmasına ən az material sərf olunsun?

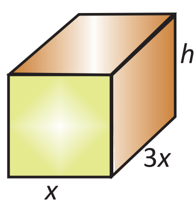
6. **Maksimum sahə.** Əkin sahəsi düzbucaqlı formasındadır. Fermer əkin sahəsini düzbucaqlı sahələrə ayırmağı planlaşdırır. O, anbarında mövcud olan hasar materialı ilə ən çoxu neçə kvadrat metr sahəni əhatə edə bilər?

a) İki eyni böyüklükdə düzbucaqlı hissəyə bölmək istəyir və 1000 m hasar materialı var

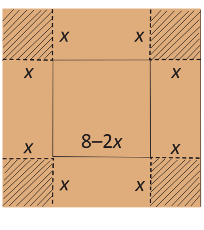


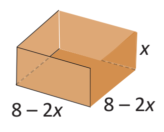
b) Üç eyni böyüklükdə düzbucaqlı hissəyə ayırmağı istəyir və 1200 m hasar materialı var;

7. **Maya dəyərinin minimuma endirilməsi.** Həcmi 60 sm^3 nəzərdə tutulmuş qutunun oturacağının uzunluğu enindən 3 dəfə böyük olmalıdır. Qutunun oturacaqlarına işlədilən materialın 1 sm^2-nın qiyməti 10 manat, yan üzlərinə işlədilən materialın 1 sm^2-nın qiyməti isə 6 manatdır. Qutunun ölçülərini necə seçsəniz, onun materialına ən az pul xərclənmiş olar?



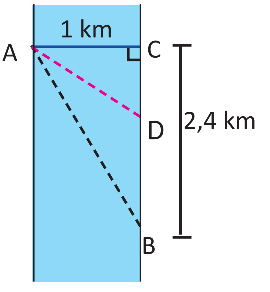
8. **Maksimum həcm.** Tərəfi 8 sm olan kvadrat şəkilli kartonun kənarlarından eyniölçülü kvadratlar kəsilib çıxarılmaqla və şəkildə göstərildiyi kimi yapışdırılmaqla ağzıaçıq qutular düzəldilir. Verilən ölçüdə kartondan hazırlanan qutunun hündürlüyü neçə santimetr olmalıdır ki, qutunun həcmi maksimum olsun?





9. **Maksimum sahə.** Pəncərə düzbucaqlı və yarımdairənin şəkildə göstərildiyi kimi konstruksiyası ilə alınır. Əgər cəmi 12 m çərçivə materialı varsa, pəncərənin ölçülərini necə seçərdiniz ki, işiqlandırma üçün maksimum sahə əldə edəsiniz?
(Pəncərənin sahəsi maksimum olsun.)

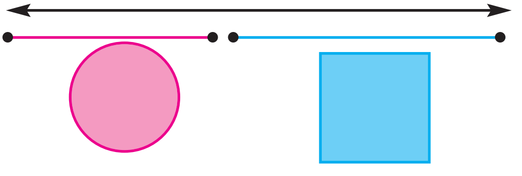
10. **Minimum zaman sərfi.** Rəsul qayıqla eni 1 km olan su hövzəsinin bir sahilindəki A nöqtəsindən digər sahilində yerləşən B nöqtəsinə çatmalıdır. Bunun üçün o aşağıdakı yollardan birini seçə bilər.



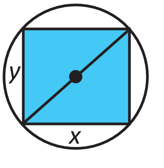
1) A nöqtəsindən C nöqtəsinə qayıqla keçdikdən sonra piyada B nöqtəsinə gələ bilər.
2) A nöqtəsindən B nöqtəsinə birbaşa qayıqla gələ bilər.
3) A nöqtəsindən B və C nöqtələri arasında yerləşən hər hansı D nöqtəsinə qayıqla gəlib, D-dən B-yə yenə piyada gələ bilər.
Rəsul qayıqla saatda 3 km və piyada saatda 5 km yol qət edərsə, hansı yolu seçsə, B nöqtəsinə daha tez çatar?

Konstruksiya məsələləri

11. Şagirdlər 32 sm olan məftildən dairə və kvadrat modelləşdirməlidirlər. Onlar məftili iki yerə hansı ölçüdə kəsməlidirlər ki, fiqurların sahələri cəmi: a) maksimum olsun; b) minimum olsun.

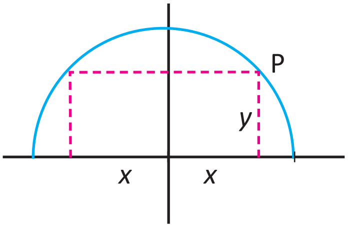


12. Verilən şəkillərdən istifadə edərək məsələləri həll edin.



a) Radiusu 4 sm olan çevrə daxilinə çəkilmiş sahəsi ən böyük olan düzbucaqlının ölçülərini müəyyən edin.

b) Radiusu 6 sm olan yarımdairənin daxilinə bir tərəfi diametrin üzərində olmaqla düzbucaqlı çəkilmişdir. Bu düzbucaqlının sahəsi ən çoxu nə qədər ola bilər?



Nümunə. Minimum material sərfi. Konservləşdirilmiş mal ətinin tutumu 250 sm^3 olan silindrşəkilli qutulara qablaşdırılması planlaşdırılır.
a) Qutu hansı ölçülərdə olmalıdır ki, ən az material işlədilsin?
b) Qutunun dairəşəkilli oturacaqlarına sərf olunan materialın 1 sm^2-nın qiyməti 0,05 ₼, yan səthi üçün işlədilən materialın 1 sm^2-nın qiyməti isə 0,12 ₼-dır. Qutu hansı ölçülərdə olsa, onun materialına ən az pul xərclənər?

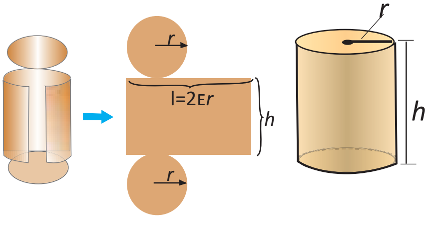
Həlli: a) Məsələdə həcmin 250 sm^3 olduğu verilmişdir. Bu məlumat bizə r və h arasındakı əlaqəni müəyyən etməyə imkan verir.

$$\pi r^2 h = 250, \quad h = \frac{250}{\pi r^2}$$

$$S_{səth} = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{oturacaqlar}} + 2\pi r h$$

düzbucaqlı şəklində açılmış yan səth

$$S_{səth} = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{500}{r}$$



Səthin sahəsini göstərən funksiyanın təyin oblastı üçün qapalı interval verilməmişdir və $r > 0$ olduqda funksiyanın r-in hansı qiymətində minimum olduğunu tapmalıyıq. $S_{səth}$ funksiyasının törəməsini tapaq.

$$S'_{səth} = \left(2\pi r^2 + \frac{500}{r}\right)' = 4\pi r - \frac{500}{r^2} = \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{125}{\pi}\right)$$

Funksiyanın böhran nöqtəsi: $r = \sqrt[3]{\dfrac{125}{\pi}} \approx 3{,}4$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $0 < r < \sqrt[3]{\dfrac{125}{\pi}}$ olduqda $S'_{səth}(r) < 0$,

$r > \sqrt[3]{\dfrac{125}{\pi}}$ olduqda isə $S'_{səth}(r) > 0$. Deməli, $r_{min} = \sqrt[3]{\dfrac{125}{\pi}}$.

$h = \dfrac{250}{\pi r^2}$ bərabərliyində $r = 3{,}4$ yazmaqla bu halda silindrin hündürlüyünün

$h \approx 6{,}9$ olduğunu alarıq.
Yəni, $r \approx 3{,}4$ sm, $h \approx 6{,}9$ sm ölçülərində silindrşəkilli qutularla qablaşdırmada ən az material sərf olunar.

b) $C(r) = 0{,}1\pi r^2 + 0{,}12 \cdot \dfrac{500}{r} = 0{,}1\pi r^2 + \dfrac{60}{r}$, $\quad r > 0$

$C'(r) = \left(0{,}1\pi r^2 - \dfrac{60}{r}\right)' = 0{,}2\pi r - \dfrac{60}{r^2}$

$0{,}2\pi r - \dfrac{60}{r^2} = 0, \qquad 0{,}2\pi r = \dfrac{60}{r^2}, \qquad 0{,}2\pi r^3 = 60,$

$r \approx 4{,}57, \qquad h = \dfrac{250}{\pi r^2} = \dfrac{250}{\pi (4{,}57)^2} \approx 3{,}8.$

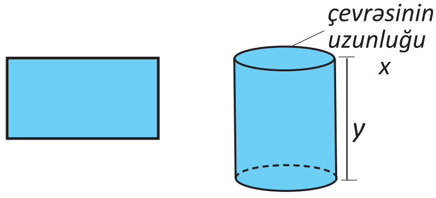
Materiala ən az pul xərclənməsi tələbi qoyulduqda ölçülər $r \approx 4{,}57$ sm, $h \approx 3{,}8$ sm olmalıdır.

Məsələnin a) bəndində alınan nəticə ilə b) bəndində alınan nəticə üst-üstə düşməlidirmi? Müzakirə edin.

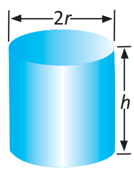
13. a) Tam səthinin sahəsi 24π sm^2 olan silindrlərdən həcmi ən böyük olanın hündürlüyünü tapın.

b) Həcmləri 54π sm^3 olan silindrlərdən tam səthinin sahəsi ən kiçik olanın radiusunu tapın.

14. a) Perimetri 36 sm olan düzbucaqlı şəklindəki metal lövhənin bükülməsi ilə alınan silindrin həcminin maksimum olması üçün lövhə hansı x və y ölçülərdə kəsilməlidir?

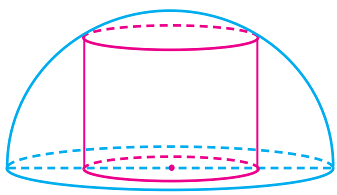


b) Həcmi 1 litr olan silindrşəkilli qapalı qaba ən az material işlədilməsinə nail olmaq üçün h və r hansı ölçülərdə seçilməlidir?

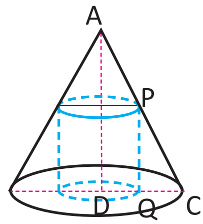


15. Doğuranı 15 sm olan konusun həcminin ən böyük qiymətini tapın.

16. Radiusu 4 sm olan yarımkürə daxilinə çəkilmiş silindrin həcminin ən böyük qiymətini tapın.



17. Hündürlüyü $AD = a$, radiusu $DC = b$ olan konusun daxilinə çəkilmiş silindrlərdən həcmi ən böyük olanının radiusu və hündürlüyünü müəyyən edin.
Göstəriş: Silindrin radiusunu $DQ = x$, hündürlüyünü $PQ = y$ qəbul edin, ΔADC və $\Delta\ PQC$-nin oxşarlığından istifadə edin.



1. Funksiyanın qrafikini qurun.

1) $f(x) = 4 - 3x - x^2$

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

3) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$

4) $f(x) = \dfrac{2}{3}x(x-2)^3$

5) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 8$

6) $f(x) = 3x^{2/3} - x$

7) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-4}$

8) $f(x) = \dfrac{-8x}{x^2+1}$

2. Verilən parçada funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

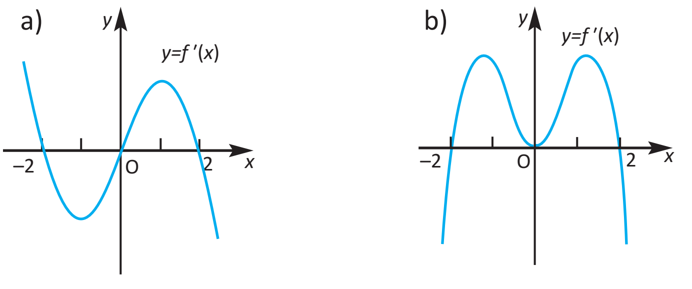
a) $y = -2x + 7, \quad -3 \le x \le 4$

b) $f(x) = 3x^2 - 12x + 7, \quad 0 \le x \le 3$

c) $f(x) = x^3 - 3x, \quad -2 \le x \le 0$

d) $y = \sqrt{x} - 0{,}5x, \quad 0 \le x \le 4$

3. $f'(x)$ funksiyasının qrafikindən istifadə etməklə $f(x)$ funksiyası üçün:
a) artma və ya azalma intervallarını; b) ekstremum nöqtələrini təxmin edin.



4. Verilən şərtləri ödəyən kəsilməz funksiya qrafikini sxematik təsvir edin:

a) $x < 2$ olduqda $f'(x) > 0$, $x > 2$ olduqda $f'(x) < 0$ və $f(2) = 5$;

b) $-1 < x < 4$ olduqda $f'(x) > 0$, $x < -1$ və ya $x > 4$ olduqda $f'(x) < 0$ və $f(-1) = 0$, $f(4) = 6$;

c) $x \ne 1$ olduqda $f'(x) > 0$ və $f(1) = 2$;

d) $x > -3$ olduqda $f'(x) = 2$, $x < -3$ olduqda $f'(x) = -2$ və $f(-3) = 1$.

5. $f(x) = x^4 + x - \sqrt{3}$ və $g(x) = 8x^2 + x + \sqrt{3}$ olduqda $f'(x) < g'(x)$ bərabərsizliyini həll edin.

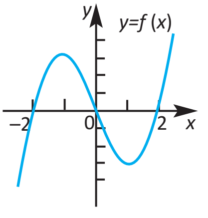
6. $f(x) = x \cdot e^{x^2-3x}$ funksiyasının törəməsinin sıfıra çevrildiyi nöqtələri tapın.

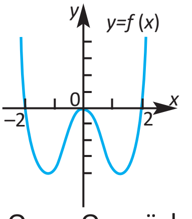
7. $f(x) = 4x^2 - 6x + 3$ funksiyasının qrafikinə toxunan $y = 2x$ düz xəttinə paralel olarsa, bu toxunanın tənliyini yazın.

8. $y = x^2$ parabolası üzərində elə nöqtə tapın ki, onun $M(2; \frac{1}{2})$ nöqtəsindən məsafəsi ən kiçik olsun.

9. Ədədi silsilədə $a_6 = 3$ olduğu məlumdur. Silsilə fərqinin hansı qiymətlərində $a_1 \cdot a_4 \cdot a_5$ hasili ən böyük qiymət alar?

10. Funksiyanın qrafikinə görə törəməsinin işarəsinin müsbət və ya mənfi olduğu intervalları təxmin edin.

a) 

b) 

11. Təpələri koordinat sisteminin başlanğıcında, Ox və Oy müsbət yarımoxları üzərində və $y = 4 - x^2$ parabolası üzərində olan düzbucaqlılar arasında sahəsi ən böyük olanı tapın.

12. Həcmi 128π sm^3 olan silindrlərdən səthinin sahəsi ən kiçik olanın hündürlüyünü tapın.

13. **Tibb. Maksimum konsentrasiya.** $C(t) = \dfrac{0{,}08t}{t^2 + 2t + 2}$ funksiyası qəbul edilmiş dərman preparatının t zamanda qandakı konsentrasiyasının dəyişməsini ifadə edir. t dərmanın qəbul edildiyi andan başlayaraq vaxtı saatla göstərir.

t zamanının hansı qiymətində dərman preparatının qandakı konsentrasiyası maksimum olar?

14. Funksiyanın böhran nöqtələrini və ekstremumlarını müəyyən edin.

1) $y = x^{2/3}(x^2 - 4)$

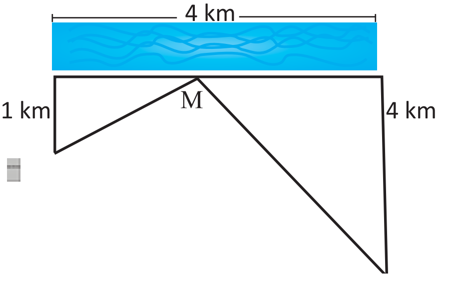
2) $y = x^2\sqrt{3 - x}$

3) $y = \begin{cases} 4 - 2x, & x \le 1 \\ x + 1, & x > 1 \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} -x^2 - 2x + 4, & x \le 1 \\ -x^2 + 6x - 4, & x > 1 \end{cases}$

5) $y = \begin{cases} 3 - x, & x < 0 \\ 3 + 2x - x^2, & x \ge 0 \end{cases}$

15. İki binanın su təchizatı üçün çayda xüsusi nasoslar quraşdırılmalıdır. Binalar arasındakı məsafə 4 km, binaların birindən çaya qədər məsafə 1 km, digərindən isə 4 km-dir. Nasos qurğuları çayboyu hansı nöqtədə yerləşdirilsə, binalara qədər su xəttinin çəkilməsinə ən az boru işlədilmiş olar?



8

İnteqral

- İbtidai funksiya və qeyri-müəyyən inteqral
- Əyrinin əhatə etdiyi sahə
- Müəyyən inteqral
- Nyuton-Leybnis düsturu
- Müəyyən inteqralın xassələri
- Müəyyən inteqral və fırlanmadan alınan fiqurların həcmi

Riyazi lüğət

- ✓ ibtidai funksiya
- ✓ qeyri-müəyyən inteqral
- ✓ inteqral işarəsi
- ✓ inteqrallama
- ✓ inteqrallama sabiti
- ✓ müəyyən inteqral
- ✓ inteqrallama sərhədləri
- ✓ inteqral hesabının əsas teoremi

Bunları bilmək maraqlıdır!

Heydər Əliyev Mərkəzi memarlıq üslubuna görə dünyada şöhrət qazanmış, qeyri-adi memarlıq əsəridir. Kompleksə gözəllik gətirən elementlərin inşası çoxlu sayda sistemli riyazi problemlərin həlli sayəsində mümkün olmuşdur. Bina dalğavarı quruluşda olduğundan, layihəsində demək olar ki, düz xətlərdən istifadə edilməmişdir. Bu quruluşla binanın dam örtüyü yerlə təmas edərək düzgün və harmonik görüntü formalaşdırır. Belə bir memarlıq quruluşu postmodernist memarlığı təmsil etməklə, həm də sonsuzluq effekti formalaşdırır. Binanın xətləri sanki keçmişlə gələcəyin birləşməsini simvolizə edir. Binanın inşası zamanı ümumi uzunluğu 90 km olan dəmir konstruksiyalar şəbəkəsindən, ümumi sahəsi 4 ha olan 12027 ədəd xüsusi tərkibli müxtəlif ölçülü üçbucaq,

düzbucaqlı, trapesiya, paraleloqram formalı panellərdən istifadə olunmuşdur. Binanın hər hansı dalğavari hissəsinin sahəsini və ya uzunluğunu hesablamaq istəsək, inteqrallama üsullarını tətbiq etməli olarıq.

Araşdırma. Sərbəst düşən cismin t zamanına qədər getdiyi yol

$s(t) = \dfrac{gt^2}{2}$ düsturu ilə tapılır. Bu düstur Qaliley tərəfindən təcrübə yolu ilə tapılmışdır. Bu düsturdan diferensiallamaqla sərbəst düşən cismin istənilən t anında sürətini və təcilini tapırıq: $v(t) = s'(t) = gt$; $a(t) = v'(t) = g$.

Bəs tərs məsələni necə həll etmək olar? Yəni təcil məlum olduqda sürətin $v(t)$ dəyişmə qanununu, həmçinin hərəkətin $s(t)$ qanununu necə tapmaq olar?

Diferensiallama verilən funksiyanın törəməsinin tapılmasıdır. Törəməsi verilən funksiyanın tapılması isə diferensiallamaya tərs əməldir. Bu zaman törəməsinə və ya diferensialına görə funksiyanın özünü tapmaq lazım gəlir, yəni müəyyən aralıqda $f(x)$ funksiyası verildikdə elə $F(x)$ funksiyasının tapılması tələb olunur ki, həmin aralıqda $F'(x) = f(x)$ və ya $dF(x) = f(x)\,dx$ ödənmiş olsun.

Tərif. Verilmiş aralığın bütün nöqtələrində $F'(x) = f(x)$ bərabərliyini ödəyən $F(x)$ funksiyasına həmin aralıqda $f(x)$ funksiyasının **ibtidai funksiyası** deyilir.

Məsələn, $F(x) = x^2$ funksiyası $(-\infty; +\infty)$ aralığında $f(x) = 2x$-in ibtidai funksiyasıdır, çünki bu aralığın bütün nöqtələrində $(x^2)' = 2x$ ödənir.

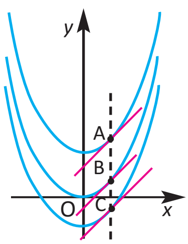
$(x^2)' = 2x \qquad d(x^2) = 2xdx$

diferensiallama

$dF(x) = f(x)\,dx$

$F(x) = x^2$ ibtidai funksiya $\qquad f(x) = 2x$

inteqrallama



Digər tərəfdən, $(x^2)' = (x^2+3)' = (x^2-2)' = 2x$ və ümumiyyətlə, ixtiyari C sabiti üçün $(x^2 + C)' = 2x$ olduğundan, x^2, x^2+3, x^2-2, x^2+C funksiyalarının hər biri də $f(x) = 2x$-in ibtidai funksiyasıdır. Yəni verilmiş funksiyanın ibtidai funksiyası yeganə deyil.

$F_1(x)$ və $F_2(x)$ funksiyaları müəyyən aralıqda $f(x)$-in ibtidai funksiyalarıdırsa, $g(x) = F_1(x) - F_2(x)$ funksiyası üçün həmin aralıqda $g'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ bərabərliyi eynilik kimi ödənər. Onda $g(x)$ funksiyasının qrafikinə hər bir nöqtədə toxunan absis oxuna paralel olar. Deməli, $g(x)$ funksiyasının qrafiki də absis oxuna paraleldir, yəni həmin aralıqda $g(x) = C$, burada C ixtiyari sabitdir. Buradan $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Beləliklə, alırıq ki, əgər $F(x)$ funksiyası verilmiş aralıqda $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdırsa, onda ixtiyari C sabiti üçün:

- $F(x) + C$ funksiyası da həmin aralıqda $f(x)$-in ibtidai funksiyasıdır.
- $f(x)$-in verilmiş aralıqdakı istənilən ibtidai funksiyası $F(x) + C$ şəklindədir.

$F(x) + C$ -yə ibtidai funksiyaların ümumi şəkli deyilir və əslində bu müəyyən funksiyalar çoxluğudur.

Qeyri-müəyyən inteqral

Tərif. Müəyyən aralıqda $f(x)$ funksiyasının bütün ibtidai funksiyaları çoxluğuna həmin aralıqda onun **qeyri- müəyyən inteqralı** deyilir və $\int f(x)dx$ kimi işarə edilir. Bu, **"inteqral ef iks de iks"** kimi oxunur.
$f(x)$-in ibtidai funksiyalarından biri $F(x)$ olarsa, tərifə görə

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Burada $\int$ **inteqral** işarəsidir, $f(x)$ inteqralaltı funksiya, x inteqrallama dəyişəni, C isə inteqrallama sabiti adlanır. İnteqrallama dəyişəni olaraq istənilən dəyişən qəbul edilə bilər.
Törəməsinə görə funksiyanın tapılmasına **inteqrallama** əməli deyilir.

Nümunə 1. Tərifə görə qeyri-müəyyən inteqralları tapın:

	a) $\int 5dx$	b) $\int 3x^2dx$	c) $\int \cos x\,dx$
Həlli:	$\int 5dx = 5x + C$	$\int 3x^2dx = x^3 + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
Çünki:	$(5x + C)' = 5$	$(x^3 + C)' = 3x^2$	$(\sin x + C)' = \cos x$

Nümunə 2. $\int x^3\,dx$ inteqralını tərifə görə tapın.
Həlli: Hansı funksiyanın törəməsinin x^3 ola biləcəyi haqqında düşünək. Məsələn, x^4 funksiyasının törəməsinin $4x^3$ olduğu məlumdur. Deməli, axtardığımız funksiyanın $\frac{1}{4}$ vuruğu olmalıdır ki, 4 əmsalı ilə ixtisar olunaraq x^3 alınsın. Bu $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ funksiyasıdır. Deməli, $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C.$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Göstərin ki, $F(x)$ funksiyası verilən aralıqda $f(x)$-in ibtidai funksiyasıdır.

a) $F(x) = \frac{1}{6}x^4,\ f(x) = \frac{2}{3}x^3,\ x \in (-\infty;+\infty)$

b) $F(x) = 2\sqrt{x},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ x \in (0;+\infty)$

c) $F(x) = (2x-1)^3,\ f(x) = 6(2x-1)^2,\ x \in (-\infty;+\infty)$

d) $F(x) = 3x - \cos x,\ f(x) = 3 + \sin x,\ x \in (-\infty;+\infty)$

2. Ədəd oxunda verilmiş funksiyanın ibtidai funksiyalarından birini tapın.
a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = 3x^2$ c) $f(x) = 8x^3$ d) $f(x) = 5x^4$

3. Verilən funksiyalardan eləsini göstərin ki, digər iki funksiya onun uyğun olaraq, törəməsi və ibtidai funksiyası olsun.
$f(x) = 2$ $g(x) = 2x + 1$ $h(x) = x^2 + x$

4. Tərifdən istifadə edərək qeyri-müəyyən inteqralı tapın.

a) $\int 4\,dx$ b) $\int 2x\,dx$ c) $\int 4x^3\,dx$ d) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$

Sabitin və qüvvət funksiyasının inteqralı

Sabitin inteqralı: $\int kdx = kx + C$

Qüvvət funksiyasının inteqralı $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

$\int kx^n dx = \dfrac{kx^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

Bu düsturların doğruluğunu tərifə görə özünüz yoxlayın! $\int (kx+b)^n dx = \dfrac{1}{k(n+1)}(kx+b)^{n+1} + C, \quad n \neq -1$

Nümunə 1. $\int 5\sqrt{x}\,dx$ qeyri-müəyyən inteqralını tapın.

Həlli: $\int 5\sqrt{x}\,dx = \int 5\,x^{\frac{1}{2}}dx = \dfrac{5}{\frac{1}{2}+1}\,x^{\frac{1}{2}+1} + C = \dfrac{5}{\frac{3}{2}}\,x^{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{10}{3}\sqrt{x^3} + C$

Nümunə 2. $f(x) = 3\cdot(2x+1)^4$ funksiyasının ibtidai funksiyalarının ümumi şəklini yazın.

Həlli: x^4-ün ibtidai funksiyalarından biri $\dfrac{x^5}{5}$ olduğundan,
$f(x) = 3\cdot(2x+1)^4$ funksiyasının ibtidai funksiyalarından biri

$3\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2x+1)^{4+1}}{4+1} = \dfrac{3}{10}(2x+1)^5$ olur. İbtidai funksiyaların ümumi şəkli isə

$F(x) = \dfrac{3}{10}(2x+1)^5 + C$ olar. Deməli, $\int 3\cdot(2x+1)^4\,dx = \dfrac{3}{10}(2x+1)^5 + C$.

5. Qeyri-müəyyən inteqralları tapın.

a) $\int(-4)\,dx$ b) $\int 6\,dx$ c) $\int(-4x)\,dx$ d) $\int \dfrac{2}{3}x\,dx$

6. Funksiyanın ibtidai funksiyalarını tapın.

a) $f(x) = 4x^2$ b) $f(x) = 7x^5$ c) $f(x) = 9x^8$ d) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^3$

7. İnteqralaltı funksiyanı x^m şəklində göstərməklə qeyri-müəyyən inteqralları tapın.

a) $\int \dfrac{1}{x^3}dx$ b) $\int \dfrac{1}{x^5}\,dx$ c) $\int \dfrac{dx}{x^2}$ d) $\int 8\sqrt{x}\,dx$

e) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$ f) $\int 5x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}dx$ g) $\int \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x}\,dx$ h) $\int\left(-\dfrac{3x}{\sqrt{x}}\right)dx$

8. a) $((2x+3)^4)' = 8(2x+3)^3$ olduğunu göstərin və $\int 8(2x+3)^3\,dx$ qeyri-müəyyən inteqralını tapın.

b) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{4x+1} = \dfrac{2}{\sqrt{4x+1}}$ olduğunu göstərin və $\int \dfrac{3}{\sqrt{4x+1}}\,dx$ qeyri-müəyyən inteqralını tapın.

9. Funksiyanın ibtidai funksiyalarını tapın.

a) $f(x) = (2x + 3)^5$ b) $f(x) = (7 - 3x)^8$ c) $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^9$

d) $f(x) = (5x + 2)^{-6}$ e) $f(x) = (9 - 4x)^{-2}$ f) $f(x) = (x + 3)^{-3}$

Qeyri-müəyyən inteqralın xassələri

1. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

2. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$

3. $\int[f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

4. $\int[f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

5. $\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx \quad (k \neq 0)$

Nümunə 1. $\int(3x^5 + 9x^2 - 5)dx$ inteqralını tapın.

Həlli: $\int(3x^5 + 9x^2 - 5)dx = \int 3x^5dx + \int 9x^2dx - \int 5dx =$

$$= 3\cdot\frac{x^{5+1}}{5+1} + 9\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} - 5x + C = \frac{1}{2}x^6 + 3x^3 - 5x + C$$

10. $f(x)$ funksiyası üçün ibtidai funksiyaların ümumi şəklini tapın.

a) $f(x) = 7 - 4x$ b) $f(x) = 5 + 6x - 9x^2$

c) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = x^2 - \frac{x}{2} + \frac{2}{3}$

11. Tapın.

a) $(\int 3x^2\,dx)'$ b) $\int(x^3)'\,dx$ c) $(\int\sqrt{x}\,dx)'$

12. Qeyri-müəyyən inteqralları hesablayın.

a) $\int\frac{3}{4}x^7dx$ b) $\int(1 - x)\,dx$ c) $\int(2 + x^2)\,dx$

d) $\int(2x - 3x^2)\,dx$ e) $\int(x^3 - 9)\,dx$ f) $\int(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\,dx$

g) $\int(3x^2 - x^{-3})dx$ h) $\int(8x^2 + 3x^{-4})dx$ i) $\int(4x^{-2} - x^{-3})dx$

j) $\int(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}x^2)\,dx$ k) $\int(\frac{3}{4}\sqrt{x} + \frac{1}{x^2})\,dx$ l) $\int(\frac{5}{2}\sqrt{x^3} + 8x)\,dx$

Törəmədən fərqli olaraq hasilin və nisbətin inteqralları üçün birbaşa düsturlar yoxdur. Ona görə də bu halda, əgər mümkündürsə, əvvəlcə verilmiş funksiya ibtidai funksiyası məlum olan funksiyaların cəmi və ya fərqi kimi yazılır, sonra ibtidai funksiyası tapılır.

Nümunə. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$ funksiyasının ibtidai funksiyasını tapın.

Həlli: $f(x) = \dfrac{3x^2}{x} - \dfrac{2\sqrt{x}}{x} = 3x - 2x^{-\frac{1}{2}}$ şəklində yazaq

Onda $F(x) = 3\cdot\dfrac{x^2}{2} - 2\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}x^2 - 4\sqrt{x} + C$ alarıq.

13. Funksiyanın verildiyi ifadəni sadələşdirin, inteqrallama qaydalarını tətbiq etməklə ibtidai funksiyalarını tapın.

a) $f(x) = (x + 2)(x - 3)$ b) $f(x) = (x^2 - 3x)(x + 1)$ c) $f(x) = (x - 3)^3$

d) $f(x) = (x + 2x^3)(x + 1)$ e) $f(x) = (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})$ f) $f(x) = (x + 1)^2 - 2$

14. Qeyri müəyyən inteqralları hesablayın.

a) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 3x}{x}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{4u^3 + 5u^2 - 1}{u^2}du$ c) $\displaystyle\int \frac{(x+2)^2}{x^4}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}dx$ e) $\displaystyle\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}dx$ f) $\displaystyle\int \frac{(t^2 + t)^2}{t}dt$

15. Sadələşdirin və ibtidai funksiyalarını tapın.

a) $f(x) = \sqrt{x}\cdot\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 5\right)$ b) $f(x) = (\sqrt[4]{x} - 2x)(\sqrt[4]{x} + 2x)$

16. Verilmiş funksiyanın ibtidai funksiyalarını tapın.

a) $f(x) = (3x + 2)^4$ b) $f(x) = (2x - 1)^3$

c) $f(x) = \dfrac{3}{(1 - 2x)^2}$ d) $f(x) = \dfrac{2}{(3x + 1)^3}$

e) $f(x) = (x - 2)(x + 1)$ f) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x}{x}$

17. İnteqralaltı funksiyanı sadələşdirib, qeyri-müəyyən inteqralı hesablayın.

a) $\int (x + \sqrt{x})\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x}}dx$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}dx$

Üstlü funksiyanın və 1/*x* funksiyasının inteqralları

Üstlü funksiyanın inteqralı:

$\int e^x dx = e^x + C$ $\qquad \int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\qquad \int a^{kx}dx = \frac{1}{k\ln a}a^{kx} + C$

1/*x* funksiyasının inteqralı:

$x > 0$ olduqda $\qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$

$x < 0$ olduqda $\qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + C$

$x \neq 0$ olan istənilən aralıqda $\qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

Ümumi halda: $\qquad \int \frac{1}{kx+b}dx = \frac{1}{k}\ln|kx+b| + C$

Bu düsturların doğruluğunu tərifə görə özünüz yoxlayın!

Nümunə . Qeyri-müəyyən inteqralları tapın: a) $\int e^{4x}dx$; b) $\int \frac{2}{3x+4}dx$

Həlli: a) $\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x} + C$

b) $\int \frac{2}{3x+4}dx = 2\int \frac{1}{3x+4}dx = \frac{2}{3}\ln|3x+4| + C$

18. Qeyri-müəyyən inteqralları tapın.

a) $\int 3e^{2x}dx$ b) $\int(-12)\, e^{3x}dx$ c) $\int \frac{2}{3}e^{-3x}dx$ d) $\int 4\cdot 2^x\, dx$

e) $\int \frac{5}{x}dx$ f) $\int \frac{5}{x\ln 3}dx$ g) $\int \frac{1}{5x+4}dx$ h) $\int \frac{-2}{2x+1}dx$

19. Verilmiş funksiyanın ibtidai funksiyalarını tapın.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $f(x) = \frac{4}{2x-3}$ c) $f(x) = 4\cdot e^{3-2x}$ d) $f(x) = 6\cdot 2^{3x+1}$

20. Qeyri-müəyyən inteqralları hesablayın.

a) $\int(e^x - ex)\, dx$ b) $\int(2^x - \frac{2}{x})\, dx$ c) $\int(e^x + 2x)dx$ d) $\int(e^{-2x} - \frac{5}{x\ln 2})dx$

Triqonometrik funksiyaların inteqralları

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$ $\qquad$ $\int \sin kx\, dx = -\frac{1}{k}\cos kx + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$ $\qquad$ $\int \cos kx\, dx = \frac{1}{k}\sin kx + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + C$ $\qquad$ $\int \frac{1}{\cos^2 kx}\, dx = \frac{1}{k}\tan kx + C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x + C$ $\qquad$ $\int \frac{1}{\sin^2 kx}\, dx = -\frac{1}{k}\cot kx + C$

Bu düsturların doğruluğunu tərifə görə özünüz yoxlayın!

Nümunə 1. $\int 2\sin\frac{x}{2}\, dx$ inteqralını tapın.

Həlli: $\int 2\sin\frac{x}{2}dx = -2\cdot\frac{\cos(x/2)}{1/2} + C = -4\cos\frac{x}{2} + C$

Triqonometrik funksiyaların inteqrallanması zamanı triqonometrik eyniliklərdən istifadə etmək əlverişlidir.

Nümunə 2. $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ funksiyasının ibtidai funksiyasını tapın.

Həlli: $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ olduğundan $F(x) = \frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2}\cos 2x) + C =$

$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C$ olur.

Nümunə 3. $\int \sin^2 x\, dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli: $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ eyniliyini nəzərə alsaq,

$$\int \sin^2 x\, dx = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Nümunə 4. $\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx$ inteqralını tapın.

Həlli: $\sin ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a-b)x + \sin(a+b)x)$ düsturuna görə:

$$\int \sin 5x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int(\sin 2x + \sin 8x)dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin 8x\, dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$$

21. Verilmiş funksiyanın ibtidai funksiyalarını tapın.

a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin x - \cos x$ $\qquad$ b) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x}$ $\qquad$ c) $f(x) = \frac{6}{\sin^2 x}$

22. Qeyri-müəyyən inteqralları hesablayın.

a) $\int(3\sin x + 2\cos x)\, dx$ $\qquad$ b) $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx$ $\qquad$ c) $\int\frac{4}{\cos^2 2x}dx$

23. Verilmiş funksiyanın ibtidai funksiyalarını tapın.

a) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ b) $f(x) = \sin^2 3x$ c) $f(x) = \sin 3x \cdot \cos x$

24. Qeyri-müəyyən inteqralları hesablayın.

a) $\int \sin^2 x\, dx$ b) $\int \cos^2 x\, dx$ c) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, dx$

d) $\int \sin 3x \sin x\, dx$ e) $\int \sin x \cos 3x\, dx$ f) $\int \cos 3x \cos 5x\, dx$

25. Triqonometrik eyniliklərdən istifadə etməklə inteqralları tapın.

a) $\int (1 + \tan^2\theta)\, d\theta$ b) $\int (1 + \cot^2 x)\, dx$ c) $\int \cot^2 x\, dx$

26. Qeyri-müəyyən inteqralları tapın.

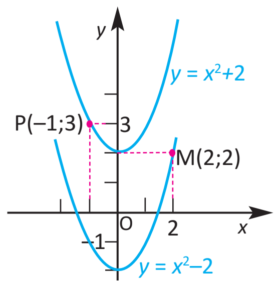
a) $\int (\sin 2x + 3x)dx$ b) $\int (\cos 3x - 2x + 1)dx$

c) $\int (e^{-x} + 2\cos x + 5x^2)dx$ d) $\int (e^{3x} - 8\sin 2x + x^{-4})dx$

Tətbiq tapşırıqları

İnteqrallama sabitinin tapılmasına aid məsələlər

Nümunə. $f(x) = 2x$ funksiyasının qrafiki: a) M(2;2); b) P(–1;3) nöqtəsindən keçən ibtidai funksiyasını tapın.



Həlli: Əvvəlcə $f(x) = 2x$ funksiyasının $(-\infty; +\infty)$ aralığında ibtidai funksiyalarının ümumi şəklini yazaq: $F(x) = x^2 + C$.
a) Şərtə görə $F(2) = 2$ olmalıdır. Onda $4 + C = 2$, buradan $C = -2$. Deməli, $f(x) = 2x$ funksiyasının qrafiki M(2;2) nöqtəsindən keçən ibtidai funksiyası $F(x) = x^2 - 2$-dir.

b) Şərtə görə $F(-1) = 3$ olmalıdır. Onda $1 + C = 3$, buradan $C = 2$. Deməli, $f(x) = 2x$ funksiyasının qrafiki P(–1; 3) nöqtəsindən keçən ibtidai funksiyası $F(x) = x^2 + 2$-dir.

27. $f(x)$ funksiyasının verilmiş şərti ödəyən ibtidai funksiyasını tapın.

a) $f(x) = x^2$, $F(3) = 0$ b) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $F(4) = -2$

28. $f(x)$ funksiyasının qrafiki verilmiş nöqtədən keçən ibtidai funksiyasını tapın.

a) $f(x) = x$, M(–1;2) b) $f(x) = 4x^3$, M(–1;3)

29. $f(x)$ funksiyasının verilmiş şərti ödəyən ibtidai funksiyasını tapın.

a) $f(x) = e^{2x}$, $F(0) = 1$ b) $f(x) = 3e^{x-2}$, $F(2) = 0$ c) $f(x) = \dfrac{4}{x}$, $F(e) = 5$

d) $f(x) = 2\sin 2x$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ e) $f(x) = 2\cos x$, $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 3$

30. $f(x)$ funksiyasının qrafiki verilmiş M nöqtəsindən keçən ibtidai funksiyasını tapın.

a) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $M(1;\dfrac{1}{6})$ b) $f(x) = (2x-1)^3$, $M(2;4)$

31. Verilən şərtləri ödəyən funksiyanı tapın.

a) $f'(x) = 2x + 1;\ f(1) = -2$ b) $f'(x) = x^2 - 4;\ f(0) = 7$

c) $f'(x) = 8x^2 + 4x - 2;\ f(0) = 6$ d) $f'(x) = 3x^2 - 5x + 1;\ f(1) = 3{,}5$

32. $F(x)$ funksiyası $f(x) = 2x + 1$ funksiyasının qrafiki $M(1;0)$ nöqtəsindən keçən ibtidai funksiyasıdır. x-in hansı qiymətlərində:

a) $F(x) > 0$; b) $F(x) < 0$ olur?

33. Absisi x olan nöqtədə toxunanının bucaq əmsalı $2x - 2$ olan və qrafiki (3;4) nöqtəsindən keçən funksiyanın analitik ifadəsini müəyyən edin və qrafikini qurun.

Real həyati situasiya məsələləri

Nümunə 1. Hərəkət. Yerdən 1 m hündürlükdən yuxarı atılmış topun sürətini t zamanından asılı $v(t) = -9{,}8t + 12$ kimi ifadə etmək olar, burada t zamanı saniyə ilə ölçülür. t saniyə anında topun yerdən hansı hündürlükdə olduğunu göstərən funksiyanı yazın. $t = 2$ saniyə anında top hansı hündürlükdə olar?

Həlli: t anında topun $h(t)$ hündürlükdə olduğunu fərz etsək, $h'(t) = v(t)$ olar. Deməli, $h(t)$ funksiyası $v(t)$-nin ibtidai funksiyasıdır:

$$h(t) = (\int(-9{,}8t + 12)dt = -4{,}9t^2 + 12t + C$$

İndi məsələnin verilənlərinə görə C sabitini tapaq.
Başlanğıcda, yəni $t = 0$ anında, top yerdən 1 m hündürlükdə olmuşdur.
$t = 0$ olduqda $h(0) = 1$ olduğundan,

$$1 = -4{,}9\cdot 0 + 12\cdot 0 + C$$

ödənməlidir, buradan $C = 1$. Deməli, t anında topun yerdən hündürlüyünü göstərən funksiya $h(t) = -4{,}9t^2 + 12t + 1$ düsturu ilə müəyyən edilir. $t = 2$ olduqda $h(2) = -4{,}9\cdot 2^2 + 12\cdot 2 + 1 = 5{,}4$ olur. Yəni, $t = 2$ saniyə anında top yerdən 5,4 m hündürlükdə olar.

34. Zərrəcik $v(t)$ sürəti ilə düzxətli hərəkət edir. t_0 başlanğıc anında onun x_0 koordinatı verilmişdir. $x(t)$ koordinatını zamanın funksiyası kimi tapın:

a) $v(t) = 4$, $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ b) $v(t) = 6$, $t_0 = 0$, $x_0 = 2$ c) $v(t) = 2t$, $t_0 = 2$, $x_0 = 3$

35. Hərəkət. Düzxətli hərəkət edən maddi nöqtənin sürəti $v(t) = 2t - 3$ düsturu ilə verilir. $t = 0$ başlanğıc anında nöqtənin koordinat başlanğıcında olduğunu bilərək, onun x koordinatını t zamanının funksiyası kimi tapın.

Nümunə 2. Əhalinin artımı. Statistik araşdırmalar şəhərdəki əhalinin sayının illik dəyişməsinin $P'(t) = 11{,}7e^{0{,}026t}$ münasibəti ilə müəyyən edilə bilindiyini aşkar etdi. Burada t 1960-cı ildən sonrakı illərin sayını, $P(t)$ verilən ildəki əhalinin sayını (min nəfərlə) göstərir. 1990-cı ildə əhalinin sayı 820 min nəfər olmuşdursa, 2020-ci ildə bu şəhərdə əhalinin sayının neçə nəfər olacağını təxmin edin.

Həlli: $P'(t) = 11{,}7e^{0{,}026t}$ funksiyasının ibtidai funksiyasını tapmaqla əhalinin sayını göstərən $P(t)$ funksiyasını müəyyən edə bilərik:

$$P(t) = \int 11{,}7e^{0{,}026t}dt = \frac{11{,}7}{0{,}026}e^{0{,}026t} + C = 450e^{0{,}026t} + C,$$

$$P(t) = 450e^{0{,}026t} + C$$

İndi isə C sabitini müəyyən edək.

Şərtə görə, $t = 30$ olduqda (1960-1990) əhalinin sayı 820 min olmuşdur:

$$820 = 450e^{0{,}026\cdot 30} + C$$

Onda $C \approx -161{,}7$ və $P(t) = 450e^{0{,}026t} - 161{,}7$.

2020-ci ildə əhalinin sayı $P(t)$ funksiyasının $t = 60$ qiymətinə uyğundur:

$$P(60) = 450e^{0{,}026\cdot 60} - 161{,}7 \approx 1979{,}8$$

Yəni, 2020-ci ildə bu şəhərdəki əhalinin sayı təxminən 1979800 nəfər olacaq.

36. Bakteriyaların çoxalması. Müşahidə ilə bakteriyaların $P(t)$ sayının artım sürətinin $\dfrac{dP}{dt} = 200e^{0{,}1t} + 150e^{-0{,}03t}$ kimi olduğu müəyyən edildi. Burada t zamanı (saatla) göstərir. Müşahidənin başlanğıcında bakteriyaların sayı 200000 olarsa, 12 saat sonra onların sayı nə qədər olacaq?

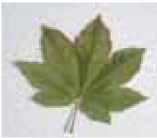
37. Ekologiya. Maralların artımı üzərində müşahidə aparan tədqiqat qrupu hesabatında maralların sayının dəyişməsini aşağıdakı tənliklə vermişlər: $\dfrac{dN}{dt} = 3t^3 + 2t, \quad 0 \le t \le 5,$

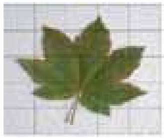
burada N maralların sayını, t zamanı (illə) göstərir.

Müşahidəyə başlayanda 200 maral var idisə, müşahidənin sonunda onların sayı təxminən neçə olmuşdur?

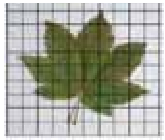
38. Maya dəyəri. x sayda məhsulun marjinal maya dəyəri $C'(x) = 50 - 0{,}05x$ funksiyası ilə verilmişdir. Məhsulun bir vahidinin maya dəyəri 40 manat olarsa, 150 məhsulun maya dəyəri neçəyə başa gələr?

Təsəvvür edin ki, siz bitkilər üzərində tədqiqat aparırsınız və bitkinin aldığı günəş enerjisini müəyyən etmək üçün yarpağın sahəsini tapmaq lazım gəlir. Yarpağı damalı vərəq üzərində yerləşdirib, damaları saymaqla onun sahəsini təqribi olaraq tapmaq olar.





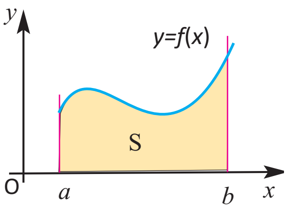
1 dama 1 kv.sm
Tam dama 1 ədəd
Tam olmayan dama 18 ədəd
1 ≤ damaların sayı ≤ 19
1 kv.sm ≤ yarpağın sahəsi ≤ 19 kv.sm

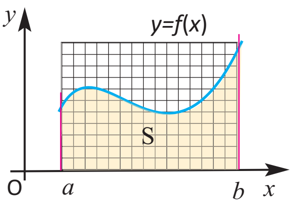


1 dama 1/4 kv.sm
Tam dama 16 ədəd
Tam olmayan dama 34 ədəd
16 ≤ damaların sayı ≤ 50
4 kv.sm ≤ yarpağın sahəsi ≤ 12,5 kv.sm

Damaları kiçiltməyə davam edib, yarpağın sahəsini daha kiçik kvadratların cəmi kimi saysaq, sahənin hesablanmasındakı təqribiliyi azaldaraq onun sahəsini həqiqi sahəsinə daha yaxın qiymətlə hesablamaq olar.
Eyni üsulu tətbiq etməklə müxtəlif formalı sahələri hesablaya bilərik.

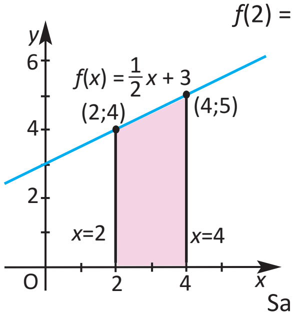
Məsələn, $[a;b]$ parçasında kəsilməz olub, mənfi olmayan qiymətlər alan $y = f(x)$ funksiyasının qrafiki, absis oxu, $x = a$ və $x = b$ düz xəttləri ilə hüdudlanan sahələri də bu üsulla hesablamaq olar.



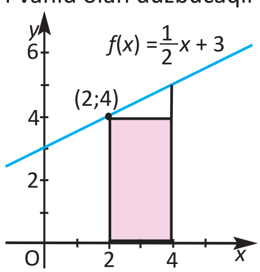


Nümunə 1. $y = \frac{1}{2}x + 3$ funksiyasının qrafiki, absis oxu, $x = 2$ və $x = 4$ düz xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsini təxmin edin.

Həlli: Şəkildə $y = \frac{1}{2}x + 3$ funksiyasının qrafiki, absis oxu, $x = 2$ və $x = 4$ düz xətləri ilə hüdudlanmış fiqur təsvir edilmişdir.
Göstərilən sahəni hündürlüyü $f(2) = 4$ və $f(4) = 5$ olan düzbucaqlılara görə təxmin etmək olar.

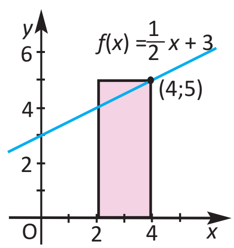


Eni 4 – 2= 2 və hündürlüyü
$f(2) = 4$ vahid olan düzbucaqlı



Sahəsi 2 · 4 = 8 kv. vahid
Bu həqiqi sahədən azdır.

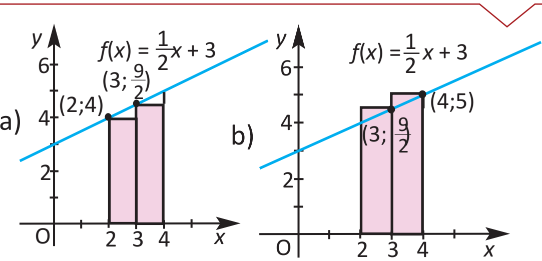
Eni 4 – 2= 2 və hündürlüyü
$f(4) = 5$ vahid olan düzbucaqlı



Sahəsi 2 · 5 = 10 kv. vahid
Bu həqiqi sahədən çoxdur.

Sahə: $8 < S < 10$

Göstərilən sahəni daha kiçik düzbucaqlıların sahələri cəmi kimi hesablasaq, təqribiliyi azaldaraq, həqiqi qiymətə daha yaxın qiymətləndirərik.



[2; 4] parçasını iki yerə ([2;3] və [3;4]) bölməklə (şəkil a və şəkil b) axtarılan sahəni iki düzbucaqlının sahələrinin cəmi kimi təxmin edə bilərik.

a) Sahənin təxmini qiyməti eni 1, hündürlüyü $f(2) = 4$ və eni 1, hündürlüyü $f(3) = 4{,}5$ olan düzbucaqlıların sahələri cəminə bərabərdir: $1 \cdot 4 + 1 \cdot 4{,}5 = 8{,}5$.

b) Sahənin təxmini qiyməti eni 1, hündürlüyü $f(3) = 4{,}5$ və eni 1, hündürlüyü $f(4) = 5$ olan iki düzbucaqlının sahələri cəminə bərabərdir: $1 \cdot 4{,}5 + 1 \cdot 5 = 9{,}5$.

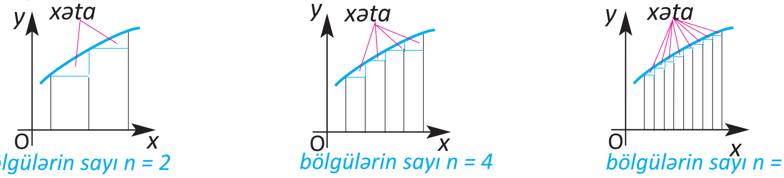
Deməli, həqiqi sahə $8{,}5 < S < 9{,}5$ münasibətini ödəyir.

Baxılan halda sahəni trapesiyanın sahə düsturuna görə dəqiq hesablayaraq aparılan hesablamaların xətasını qiymətləndirə bilərik:

$$S = \frac{(a+b)\cdot h}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2(4+5) = 9.$$

Deməli, intervalların sayı $n = 1$ olduqda hesablamalar həqiqi sahədən 1 kv vahid fərqlənir, $n = 2$ olduqda isə bu fərq azalaraq 0,5 kv vahid olmuşdur.

Verilən parçanı daha çox sayda kiçik aralıqlara bölməklə, sahəni daha kiçik düzbucaqlıların sahələrinin cəmi kimi hesablasaq, həqiqi qiymətinə daha yaxın nəticə alınar.



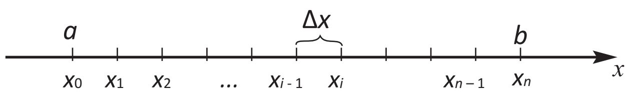
bölgülərin sayı n = 2 *bölgülərin sayı n = 4* *bölgülərin sayı n = 8*

$f(x)$ funksiyasının qrafikinin $[a; b]$ parçasında əhatə etdiyi sahə dedikdə f funksiyasının qrafiki, absis oxu, $x = a$ və $x = b$ düz xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun (buna əyrixətli trapesiya da deyilir) sahəsi nəzərdə tutulur. Tapşırıqlarda bu sahəni bəzən qısaca olaraq "əyrinin əhatə etdiyi sahə" kimi ifadə edəcəyik.

Burada f funksiyası üçün aşağıdakı şərtlər ödənməlidir:

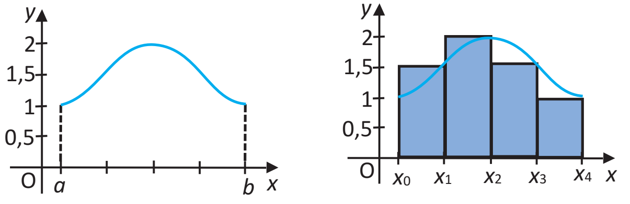
- f funksiyası verilən $[a; b]$ parçasında kəsilməzdir;
- f funksiyası $[a; b]$ parçasında mənfi olmayan qiymətlər alır.

$[a; b]$ parçası hər birinin uzunluğu $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ olan n sayda parçaya bölünür: $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \ldots, [x_{i-1}; x_i], \ldots, [x_{n-1}; x_n]$



$f(x)$ funksiyasının qrafikinin əhatə etdiyi sahə təqribi olaraq, eni Δx, hündürlüyü $f(x_i)$ olan düzbucaqlıların sahələri cəmi kimi tapılır.

Nümunə 2. Şəkildəki əyrinin əhatə etdiyi sahə verilən parçanı $n = 4$ bərabər hissəyə ayırmaqla alınan 4 düzbucaqlının sahələri cəminə təqribən bərabərdir.



$S \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + f(x_4)\,\Delta x = S_4 \qquad S \approx S_4$

Həndəsi olaraq bu cəm şəkildəki pilləvari fiqurun sahəsidir və $f(x)$ funksiyasının $[a;b]$ parçası üzrə inteqral cəmi adlanır.

Verilmiş parçanı n sayda parçalara bölməklə

$S \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + \ldots + f(x_n)\,\Delta x = S_n$ kimi yazmaq olar.
Bu yazılış $\sum$ "siqma" işarəsinin köməyilə qısa şəkildə aşağıdakı kimi yazılır:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = S_n$$

f funksiyası kəsilməz olduğundan kifayət qədər böyük n-lər üçün (yəni Δx kifayət qədər kiçik olduqda) qurduğumuz düzbucaqlıların sahələri cəmi bizi maraqlandıran sahə ilə "demək olar ki, eyni olur" , yəni $n \to \infty$ olduqda $S_n \to S$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

Qeyd edək ki, inteqral cəmində $f(x_i)$ qiymətləri əvəzinə $[x_{i-1};\, x_i]$ aralığının ixtiyari c_i nöqtəsindəki $f(c_i)$ qiymətləri götürülə bilər.

Müəyyən inteqral

Göstərmək olar ki, $[a;\, b]$ parçasında istənilən kəsilməz f funksiyası üçün $n \to \infty$ olduqda S_n inteqral cəmləri ardıcıllığı müəyyən ədədə yaxınlaşır. Bu ədədə f funksiyasının $[a;\, b]$ parçası üzrə müəyyən inteqralı deyilir və $\int_a^b f(x)\,dx$ kimi işarə edilir. Yəni

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

a və b ədədlərinə inteqrallama sərhədləri, a-ya aşağı sərhəd, b-yə yuxarı sərhəd deyilir. $\int$-inteqral işarəsidir. f funksiyasına inteqralaltı funksiya, x dəyişəninə inteqrallama dəyişəni deyilir.

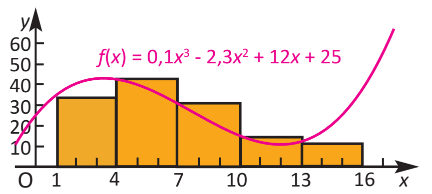
Beləliklə, $f(x) \geq 0$ olduqda funksiya qrafikinin $[a;\, b]$ parçasında əhatə etdiyi sahə $S = \int_a^b f(x)dx$ düsturu ilə ifadə olunur.

Əyrinin əhatə etdiyi sahəni hesablayarkən aşağıdakı həll addımlarına diqqət edin.

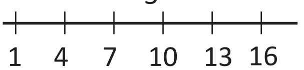
1. Funksiyanın qrafikini sxematik çəkin.
2. Verilmiş $[a;b]$ parçasını hər birinin uzunluğu $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ olan n sayda parçaya bölün.
3. Hesablamada $f(x_i)$ qiyməti olaraq bölgüdə alınmış parçaların sol və ya sağ ucundakı qiymətin seçilməsinə qərar verin.
4. Hesablamaları düzbucaqlıların əyridən aşağıda yerləşdiyi hal üçün və ya düzbucaqlıların əyrini aşdığı hal üçün apara bilərsiniz.

Nümunə 3. [1;16] parçasını 5 bərabər parçaya bölməklə $f(x) = 0{,}1x^3 - 2{,}3x^2 + 12x + 25$ funksiyasının qrafiki altındakı əyrixətli trapesiyanın sahəsinin təqribi qiymətini tapın.

Həlli: Şəkildə verilmiş funksiyanın qrafkalkulyatorla qurulmuş qrafiki göstərilmişdir.



Baxılan halda $\Delta x = \dfrac{16-1}{5} = 3$



$f(x_i)$ qiyməti olaraq bölünmüş parçaların sol ucundakı qiyməti seçək. Eni 3 vahid, hündürlüyü isə $f(x_i)$ vahid olan 5 düzbucaqlının sahələri cəmi əyrixətli trapesiyanın sahəsinin təqribi qiymətidir:

$$S \approx \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\,\Delta x = f(1)\cdot 3 + f(4)\cdot 3 + f(7)\cdot 3 + f(10)\cdot 3 + f(13)\cdot 3 =$$
$$= 34{,}8\cdot 3 + 42{,}6\cdot 3 + 30{,}6\cdot 3 + 15\cdot 3 + 12\cdot 3 = 405$$

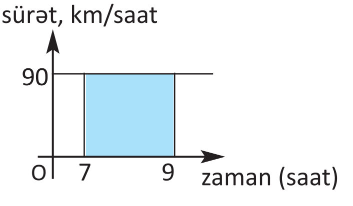
$\boxed{f(1) = 0{,}1\cdot 1^3 - 2{,}3\cdot 1^2 + 12\cdot 1 + 25 = 34{,}8}$

$S \approx 405$ (kv. vahid)

Nümunə 4. Qatar saat 07:00-dan 09:00-a qədər 90 km/saat sürətlə hərəkət etmişdir. a) Qatarın hərəkət yolunun uzunluğunu müəyyən inteqralla ifadə edin; b) Müəyyən inteqralın qiymətini uyğun sahənin qiyməti kimi tapın.

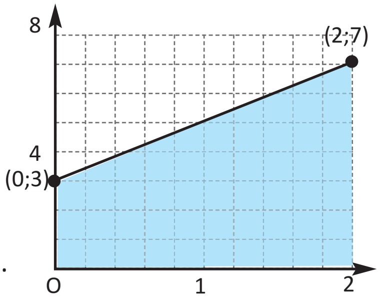
Həlli: a) Tələb olunan yolun uzunluğu ədədi qiymətcə şəkildəki rəngli sahəyə bərabərdir.

Bu sahə isə $\int_7^9 90dt$ inteqralı ilə ifadə olunur



b) Qatarın verilən zaman intervalında getdiyi yolun uzunluğu qiymətcə sabit $f(x) = 90$ funksiyasının qrafikinin [7;9] parçasında əhatə etdiyi düzbucaqlının sahəsinə bərabərdir. Bu düzbucaqlının hündürlüyü 90, eni isə $\Delta x = 9 - 7 = 2$ olduğundan sahə $90 \cdot 2 = 180$ olur, deməli $\int_7^9 90dt = 180$.

Nümunə 5. $\int_0^2 (2x+3)\,dx$ inteqralını hesablayın.

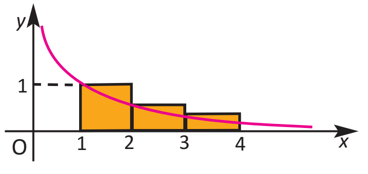


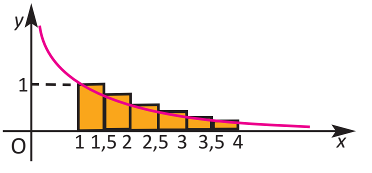
Həlli. Verilən müəyyən inteqral $f(x) = 2x + 3$ funksiyasının qrafikinin [0;2] parçasında əhatə etdiyi sahənin ədədi qiymətinə bərabərdir. Bu sahə isə baxılan halda trapesiyanın sahə düsturu ilə hesablana bilər:

$$S = \frac{3+7}{2} \cdot 2 = 10, \text{ deməli } \int_0^2 (2x+3)\,dx = 10.$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. $y = \frac{1}{x}$ hiperbolasının [1;4] parçasında əhatə etdiyi sahəni şəkildəki düzbucaqlıların sahələri cəmi kimi tapın. Hesablamaları yüzdəbir dəqiqliklə aparın. Nəticələri müqayisə edin.





2. $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ xətləri ilə hüdudlanmış trapesiyanı qurun.
a) Məlum düsturla bu trapesiyanın sahəsini tapın.
b) [1;2] parçasını 5 bərabər hissəyə bölərək, trapesiyanın daxilinə çəkilmiş pilləvari fiqurun sahəsini hesablamaqla bu trapesiyanın sahəsinin təqribi qiymətini və alınan qiymətin mütləq xətasını tapın.

3. [0; 4] parçasında $y = \frac{1}{4}x^2$ funksiyasının qrafikini təsvir edin.
1)Verilən parçanı əvvəlcə $n = 4$, sonra isə $n = 8$ sayda eyni uzunluqlu parçalara bölməklə, əyrinin verilən aralıqda əhatə etdiyi sahənin təqribi qiymətini tapın:
a) Əyridən aşağıda qalan düzbucaqlıların sahələri cəmi kimi;
b) Əyrini aşan düzbucaqlıların sahələri cəmi kimi.
2) Uyğun sahəni inteqralla ifadə edin.

4. Verilən parçada funksiyanın qrafiki ilə əhatə olunan sahəni hesablamaqla müəyyən inteqralın qiymətini tapın.

a) $\int_0^5 3dx$ b) $\int_0^4 2xdx$ c) $\int_0^5 \frac{1}{2}xdx$ d) $\int_0^3 (2x+3)dx$

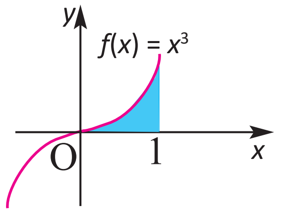
e) $\int_2^5 (10-2x)dx$ f) $\int_{-1}^2 |x|\,dx$ g) $\int_0^3 |x-1|\,dx$ h) $\int_{-2}^3 |x+1|\,dx$

5. Aşağıdakı situasiyalara uyğun həndəsi təsvirlər çəkin və tələb olunan kəmiyyəti müəyyən inteqralla ifadə edin:

a) Saat 11:00-dan 14:00-a qədər 75 km/saat sabit sürətlə hərəkət edən avtomobilin getdiyi yol;

b) Dəqiqədə 5 litr su vuran nasosun ilk bir saat ərzində vurduğu suyun miqdarı.

6. $\int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}$ olduğu məlumdur və kub parabolanın verilən parçada əhatə etdiyi sahə şəkildə sxematik təsvir edilmişdir. Uyğun sahələri sxematik təsvir etməklə inteqralın qiymətini tapın.

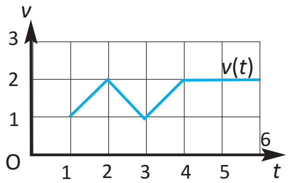


a) $\int_0^1 (x^3 + 3)\, dx$ b) $\int_1^2 (x - 1)^3\, dx$

Göstəriş: Paralel köçürmə, müəyyən inteqral və sahə haqqındakı biliklərinizdən istifadə edin.

Tətbiq tapşırıqları

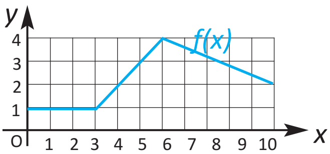
7. Qrafikdə zərrəciyin hərəkət sürəti (m/san) verilmişdir. [1;6] zaman kəsiyində zərrəciyin getdiyi yolu tapmaq üçün $\int_1^6 v(t)dt$ müəyyən inteqralının qiymətini uyğun sahənin qiyməti olaraq hesablayın. Zərrəciyin orta sürətini tapın.



8. $f(x)$ funksiyası qrafiklə verilmişdir və $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ kimi müəyyən olunan funksiyadır.

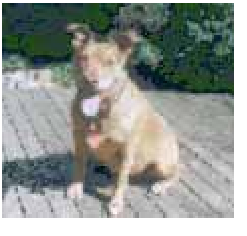
a) $f(x)$ funksiyasının qrafikinə görə $g(x)$ funksiyası üçün cədvəli tamamalayın;

b) Qiymətlər cədvəlinə görə $g(x)$ funksiyasının qrafikini qurun;



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$g(x)$											

9. **Sürət və gedilən yol.** Yusif 4 saniyə ərzində itinin hər saniyədəki qaçış sürətini cədvəldə qeyd etmişdir.



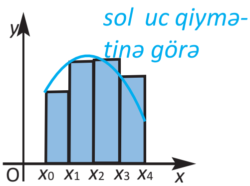
t	0	1	2	3	4
v (m/san)	0	8	12	17	18

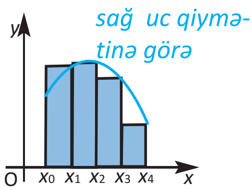
a) Cədvələ görə qrafik qurun; b)[0;4] parçasında qrafikin əhatə etdiyi sahəni hesablamaqla itin qaçdığı yolun uzunluğunu tapın. **Göstəriş:** Hesablama üçün əvvəlcə zaman aralıqlarının sol uc nöqtəsinin qiymətindən (həqiqi yoldan az), sonra isə sağ uc nöqtəsinin qiymətindən (həqiqi yoldan çox) istifadə edin.

10. **Marjinal maya dəyərinə görə ümumi maya dəyəri.** x km yola asfalt döşəndikdə marjinal maya dəyəri $MC(x) = 0{,}5x^2 - 5x + 600$ funksiyası ilə müəyyən edilir. 40 km yola çəkilən asfaltın maya dəyərini tapın.
Göstəriş: [0;40] parçasını 4 bərabər parçaya bölməklə $MC(x)$ funksiyasının qrafikinin əhatə etdiyi sahəni təqribi hesablayın.

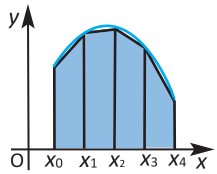
11. **Uzunmüddətli tapşırıq.** Sahəni təxmini hesablamanın müxtəlif üsulları var.

Düzbucaqlılar üsulu
Sahə kiçik düzbucaqlıların sahələri cəmi kimi ifadə edilir.

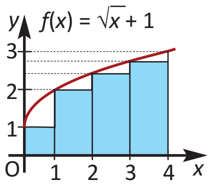


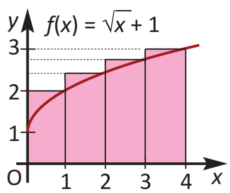


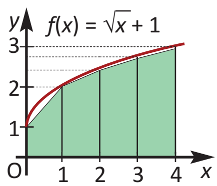
Trapesiya üsulu
Sahə kiçik trapesiyaların sahələri cəmi kimi ifadə edilir.



1. [0;4] parçasını $n = 4$ sayda bərabər hissəyə bölməklə $f(x) = \sqrt{x} + 1$ funksiyasının [0;4] parçasında əhatə etdiyi sahənin təxmini qiymətini:
a) hündürlüyü sol uc qiymətinə görə müəyyən etməklə kiçik düzbucaqlıların sahələri cəmi kimi;
b) hündürlüyü sağ uc qiymətinə görə müəyyən etməklə kiçik düzbucaqlıların sahələri cəmi kimi;
c) kiçik trapesiyaların sahələri cəmi kimi tapın.







$\int_0^4 (\sqrt{x} + 1)\, dx = 5\frac{1}{3}$ olduğu məlumdursa, hər bir üsulda alınmış nəticənin sahənin həqiqi qiymətindən necə fərqləndiyi haqda fikirlərinizi yazın. Hansı üsulla alınan nəticə həqiqi qiymətə daha yaxındır?

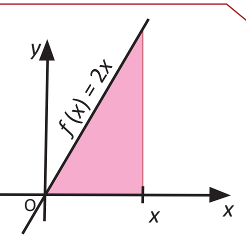
2. $f(x)$ funksiyasının $[a; b]$ parçasında qrafikini təsvir edin. $n = 6$ olmaqla uyğun əyrixətli trapesiyanın sahəsini:
a) düzbucaqlılar üsulu ilə, b) trapesiya üsulu ilə hesablamaqla müəyyən inteqralın təqribi qiymətini tapın.

1) $\int_0^6 2^x dx$ 2) $\int_1^4 \ln x\, dx$

Praktik məşğələ

1) $f(x) = 2x$ funksiyasının qrafikini dəftərinizdə qurun və şəkildə göstərilmiş rəngli sahəni x-dən asılı funksiya kimi yazın.

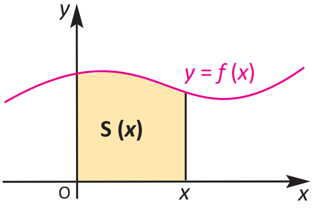
2) $S'(x) = f(x)$ olduğunu göstərin.



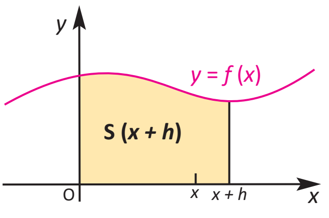
$[0; x]$ parçasında mənfi olmayan, kəsilməz $f(x)$ funksiyasının qrafikinin əhatə etdiyi sahə $S(x)$ olarsa, $S'(x) = f(x)$ olduğunu göstərək.

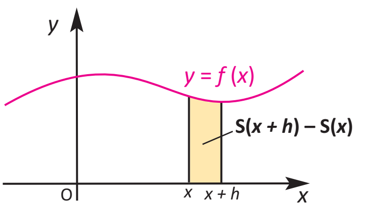
$S(x)$ funksiyasının törəməsini tapmaq üçün törəmənin tərifindən istifadə edək.

$$S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h}$$



$S(x + h)$ sahəsi f funksiyasının $[0; x + h]$ parçasında qurulmuş qrafikinin altında olan sahədirsə, $S(x + h) - S(x)$ sahəsi f funksiyasının $[x; x + h]$ parçası üzərində qurulan qrafikə uyğun sahədir.





h sıfıra yaxınlaşdıqca $S(x + h) - S(x)$ sahəsi eni h, hündürlüyü $f(x)$ olan düzbucaqlının sahəsinə yaxınlaşır.

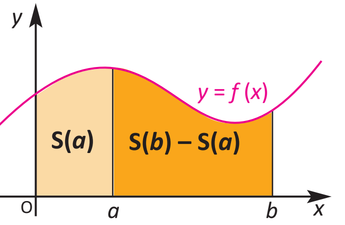
$S(x + h) - S(x) \approx h \cdot f(x)$. Buradan $\dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} \approx f(x)$ və

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x) = f(x),$$

yəni $S'(x) = f(x)$.

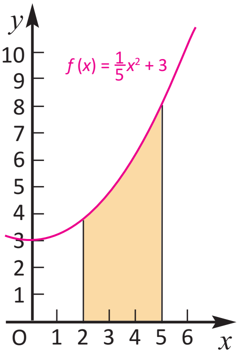
Deməli, $f(x)$-in ibtidai funksiyalarından biri $F(x)$ funksiyasıdırsa,
$S(x) = F(x) + C$ olur.

Qrafik təsvirdən göründüyü kimi, $[a; b]$ parçasına uyğun sahə bərabərdir: $[0; b]$ parçasına uyğun sahə minus $[0; a]$ parçasına uyğun sahə.



Yəni, $[a;b]$ parçasına uyğun sahə:
$S(b) - S(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$.

Nümunə 1. [2;5] parçasında $f(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3$ funksiyasının qrafikinin əhatə etdiyi sahəni tapın.



Həlli: $S'(x) = f(x)$ olduğunu bilirik. Deməli,

$S'(x) = \frac{1}{5}x^2 + 3$. $S'(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasının ümumi şəklini tapaq: $S(x) = \frac{1}{15}x^3 + 3x + C$.

Funksiyanın qiymətləri fərqində C sabitinin təsiri yox-dur. Onda tələb olunan sahə

$$S = S(5) - S(2) = \frac{125}{15} + 15 - (\frac{8}{15} + 6) = 16\frac{4}{5}$$

kvadrat vahid olar.

$S = F(b) - F(a)$ və $S = \int_a^b f(x)\,dx$ sahə düsturlarını müqayisə edərək aşağıdakı nəticəyə gəlirik: $[a; b]$ parçasında mənfi olmayan kəsilməz $f(x)$ funksiyası üçün

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Alınmış bu düstur istənilən kəsilməz $f(x)$ funksiyası üçün də doğrudur.

Nyuton-Leybnis düsturu

İnteqral hesabının əsas teoremi. f funksiyası $[a; b]$ parçasında kəsilməzdirsə və F funksiyası f-in ibtidai funksiyalarından biridirsə, onda

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}.$$

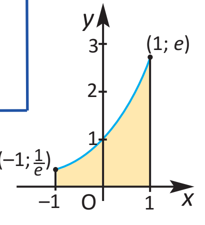
Bu düstura Nyuton - Leybnis düsturu deyilir və

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$ kimi də yazılır.

Beləliklə, $f(x)$ funksiyasının $[a;b]$ parçası üzrə müəyyən interqalı onun hər hansı ibtidai funksiyasının $[a;b]$ parçasında artımına bərabərdir.
Xüsusi halda, müəyyən inteqralın aşağı və yuxarı sərhədlərinin qiyməti bərabər olarsa, müəyyən inteqralın qiyməti sıfıra bərabərdir: $\boldsymbol{\int_a^a f(x)dx = 0}$

$\int_a^b f(x)dx$ müəyyən inteqralını hesablamaq üçün:
1. $f(x)$-in hər hansı $F(x)$ ibtidai funksiyası tapılır.
2. $F(x)$-in $x = a$ və $x = b$ nöqtələrində qiymətləri hesablanır.
3. $F(b) - F(a)$ fərqi tapılır.

Nümunə 2. [−1;1] parçasında $y = e^x$ funksiyasının qrafikinin əhatə etdiyi sahəni tapın.



Həlli: $S = \int_{-1}^{-1} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} = e^1 - \frac{1}{e} \approx 2,35$(kv.vahid)

Nümunə 3. Müəyyən inteqralları hesablayın: a) $\int_{-2}^{1} x^2\,dx$ b) $\int_{0}^{\pi/3} \cos x\,dx$

Həlli: a) $\int_{-2}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3$

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

Nümunə 4. Müəyyən inteqralın mənasını situasiyaya uyğun izah edin.

P = P(t) funksiyası əhalinin (milyonlarla) sayının t ildən asılılığını göstərir.

$\int_{0}^{8} P(t)dt = 2$ inteqralının qiyməti hansı məlumatı ifadə edir?

Həlli: $\int_{0}^{8} P(t)dt = 2$ inteqralının qiyməti göstərir ki, əhalinin sayı 8 il ərzində 2 milyon nəfər artmışdır.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Müəyyən inteqralları hesablayın.

1) $\int_{-1}^{3} dx$ 2) $\int_{0}^{2} 2\,dx$ 3) $\int_{-2}^{4} x\,dx$ 4) $\int_{0}^{1} x^2\,dx$

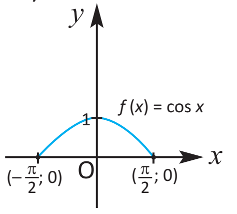
5) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^3}dx$ 6) $\int_{2}^{5} \frac{1}{x^2}\,dx$ 7) $\int_{2}^{8} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 8) $\int_{0}^{1} \sqrt[3]{x^2}\,dx$

9) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ 10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$ 11) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ 12) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}dx$

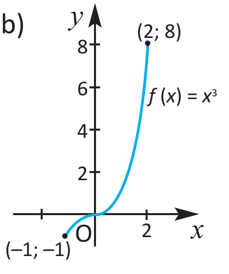
13) $\int_{0}^{2} e^x\,dx$ 14) $\int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx$ 15) $\int_{1}^{e} \frac{1}{x}\,dx$ 16) $\int_{-1}^{8} x^{\frac{2}{3}}dx$

2. $[a;b]$ parçasında qrafiki verilmiş $f(x)$ funksiyası üçün $\int_{a}^{b} f(x)dx$ inteqralını hesablayın.

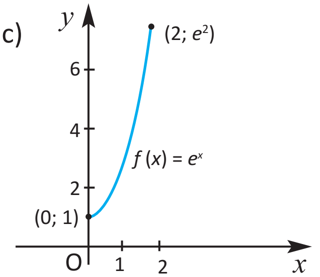
a)



b)



c)



3. Müəyyən inteqralları hesablayın.

a) $\int_1^3 (1-2x)\,dx$ b) $\int_0^2 (2+3x)\,dx$ c) $\int_{-1}^2 (3x^2-2x+1)\,dx$

d) $\int_{-2}^1 (x-x^3)dx$ e) $\int_0^1 x^3(x+1)dx$ f) $\int_1^3 (x^2-\frac{3}{x^4})dx$

g) $\int_1^2 (x-\frac{1}{x})^2dx$ h) $\int_1^2 \frac{6x^3+2x}{x}dx$ i) $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

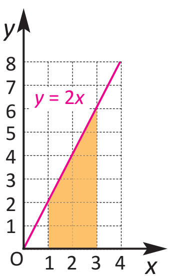
j) $\int_0^4 (\sqrt{x}-1)^2dx$ k) $\int_{-1}^1 (x+1)(x^2-1)dx$ l) $\int_0^1 (2x-1)^3dx$

m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$ n) $\int_0^{\ln 3} e^{2x}dx$ p) $\int_0^1 \frac{1}{3x+1}\,dx$

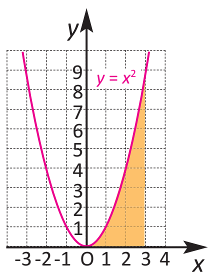
4. Tapın:
a) $y = x^2 + 2x$ əyrisinin [0; 2] parçasında əhatə etdiyi sahəni;
b) $y = x^3 - 1$ əyrisinin [1; 3] parçasında əhatə etdiyi sahəni.

5. Funksiya qrafikinin verilmiş parçada əhatə etdiyi rəngli sahəni müəyyən inteqralın tətbiqi ilə hesablayın.

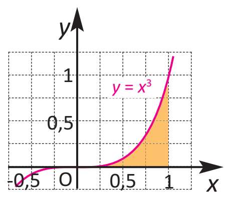
$y = 2x$; [1; 3]



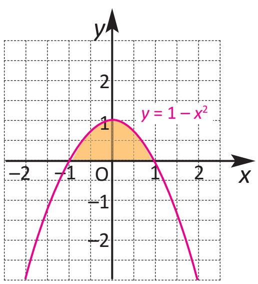
$y = x^2$; [0; 3]



$y = x^3$; [0; 1]



$y = 1 - x^2$; [–1; 1]



6. Verilən xətlərlə hüdudlanmış sahələri müəyyən inteqralın köməyilə hesablayın.
a) $y = x^2 + 1,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 3$ b) $y = 9 - x^2,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 3$

c) $y = \sin 2x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}$ d) $y = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

Tətbiq tapşırıqları

Dəyişən qüvvənin işi. F qüvvəsi sabit olub düz xətt boyunca yönəlmişsə, bu hərəkətdə s yolunda görülən iş A = F · s düsturu ilə hesablanır. Dəyişən qüvvənin $[x; x+dx]$ parçasında sabit qaldığını və F(x)-ə bərabər olduğunu qəbul etsək, uzunluğu dx olan parçada görülən iş dA = F(x) dx olar.

Onda $[a;b]$ yolunda(parçasında) F(x) qüvvəsinin işi $A = \int_a^b F(x)\,dx$ düsturu ilə hesablanar.

Nümunə. Huk qanununa görə yayı x qədər dartan F qüvvəsi F = kx düsturu ilə hesablanır. Burada k mütənasiblik əmsalıdır. 5 sm dartılmış yayın elastiklik qüvvəsi 3 N-a bərabərdir. Bu yayı 5 sm dartmaq üçün nə qədər iş görmək lazımdır?

Həlli: Şərtə görə $3 = k \cdot 0{,}05$. Beləliklə, $k = 60$, F= 60 x və

$$A = \int_0^{0,05} 60x\,dx = 30x^2\Big|_0^{0,05} = 30\cdot 0{,}05^2 = 0{,}075 \text{ (Coul)}$$

7. Müəyyən inteqralın hansı məlumatı ifadə etdiyini yazın. .

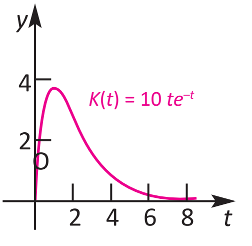
a) R(t) funksiyası satış həcminin (yüz min manatla) zamandan (illə) asılı dəyişməsini ifadə edir. $\int_0^2 R(t)dt = 12$ müəyyən inteqralı nəyi ifadə edir?

b) $v(t)$ funksiyası t saniyə anındakı sürəti (m/san ilə) göstərir. $\int_0^{10} v(t)dt = 4{,}5$ müəyyən inteqralı nəyi ifadə edir?

8. **Fizika.** Təcrübə zamanı zərrəciyin sürətinin (m/san ilə) zamandan asılılığının $v(t) = -0{,}3t^2 + 9t$ kimi olduğu müəyyən edildi.
a) İlk 5 saniyə ərzində zərrəcik nə qədər yol gedər?
b) Zərrəcik növbəti 5 saniyə ərzində nə qədər yol gedər?

9. Elektrik enerjisindən istifadə. Kiçik müəssisənin gün ərzində istehlak etdiyi elektrik enerjisinin gücünün (kilovatt) t zamanından asılılığı $K(t) = 10\,te^{-t}$ funksiyası ilə modelləşdirilə bilər. Burada t, saatla vaxtı göstərir və [0;24] aralığındadır.

a) Günün ilk T saatında ($0 \le t \le T$) müəssisə neçə kilovat-saat elektrik enerjisi istifadə edir?
b) Günün ilk 4 saatında neçə kilovat-saat elektrik enerjisi istifadə edilmişdir?
Göstəriş: $K(t) = 10\,te^{-t}$ funksiyasının ibtidai funksiyalarından birinin $-10(t+1)e^{-t}$ olduğunu nəzərə alın.



10. Satış həcmi. Şirkətin marketinq proqnozlarına görə məhsullarının satış həcmi mütəmadi olaraq $S'(t) = 20e^{0,2t}$ funksiyası ilə dəyişməlidir.
$S'(t)$, t-ci gündə satış həcminin artımını (min manatla) göstərir.
a) İlk 5 gündəki satış həcmi təxminən nə qədər olacaq?
b) 2-ci gündən 5-ci gününə qədərki satış həcmini müəyyən edin.
Göstəriş: Bu halda müəyyən inteqralın sərhədləri 1-dən 5-ə qədər olacaq.

11. a) Zərrəcik $v(t) = 4 - 2t$ (m/san) sürəti ilə düzxətli hərəkət edir, burada $0 \le t \le 2$. Zərrəciyin 2 saniyə müddətində getdiyi yolu tapın.
b) Zərrəcik $v(t) = t^2 + 2t$ (m/san) sürəti ilə düzxətli hərəkət edir. İlk 3 saniyə ərzində gedilən yolu tapın.
c) Zərrəcik $v(t) = |2t - 6|$ (m/san) sürəti ilə düzxətli hərəkət edir, burada $0 \le t \le 6$. İlk 6 saniyə ərzində gedilən yolu tapın.

12. Zərrəcik $v(t) = 100 - 10t$ (m/san) sürəti ilə düzxətli hərəkət edir. Zərrəciyin ilk 15 saniyə ərzində getdiyi yolu hesablayın.
Göstəriş: Gedilən yolu 0-dan 10 saniyəyə və 10 saniyə anından 15 saniyəyə qədər gedilən yolların cəmi kimi yazın.

13. Həcmin dəyişməsi. Çənə $r(t) = 200 - 10t$ (l/dəq) sürəti ilə su doldurulur. İlk 10 dəqiqə müddətində çəndəki suyun həcminin artımını müəyyən inteqralla ifadə edin və hesablayın.

14. Sayın dəyişməsi. Ödəmə avtomatının xidmətindən istifadə edən müştərilərin sayının zamandan asılı dəyişmə sürətini $F(t) = 12 + 6\cdot\cos\left(\frac{t}{\pi}\right)$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar. Burada t zamanı (dəqiqələrlə) göstərir.
60 dəqiqə ərzində avtomatın xidmət göstərdiyi adamların sayını (tam ədədə yuvarlaqlaşdırmaqla) tapın.

15. Gölün təmizlənməsi. $y = 20e^{-0,5t}$ funksiyası ilə göldən çıxarılan tullantıların həcminin dəyişməsini (ton/il) modelləşdirmək olar. Burada t, 2000-ci ildən başlayaraq illərin sayını göstərir. 2000-ci ildən 2010-cu ilə qədər göldən təmizlənən tullantıların həcmini müəyyən edin.

16. Fizika. Hük qanunu. a) 2N qüvvə yayı 1 sm sıxırsa, bu yayı 2 sm sıxmaq üçün nə qədər iş görmək lazımdır?
b) 3N qüvvə yayı 1sm dartır. Yayı 4 sm dartmaq üçün görülən işi hesablayın.

Müəyyən inteqralın bəzi xassələrini qeyd edək.

Xassə 1. Müəyyən inteqralın qiyməti inteqrallama dəyişənindən asılı deyil:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\theta)d\theta$$

Xassə 2. İstənilən k ədədi üçün $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ bərabərliyi doğrudur.

Nümunə. $\int_1^2 3x^3dx = 3\int_1^2 x^3dx = \frac{3}{4}x^4\Big|_1^2 = \frac{3}{4}(2^4 - 1^4) = \frac{45}{4}$

Xassə 3. f və g funksiyaları $[a; b]$ parçasında kəsilməzdirsə,

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b (f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

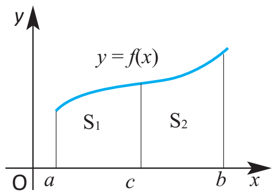
bərabərliyi doğrudur.

Nümunə. $\int_0^1 (e^x + x^2)\,dx = \int_0^1 e^xdx + \int_0^1 x^2dx = e^x\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = (e^1 - e^0) + \frac{1}{3} = e - \frac{2}{3}$

Xassə 4. $a \le c \le b$ və $f(x)$ funksiyası $[a; b]$ parçasında kəsilməzdirsə,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

bərabərliyi doğrudur.

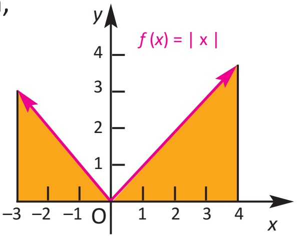


f(x) funksiyasının [a; b] parçasında əhatə etdiyi sahə iki sahənin cəminə bərabərdir. $S = S_1 + S_2$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Nümunə. $\int_{-3}^4 |x|\,dx$ müəyyən inteqralını hesablayın.

Həlli: $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ olduğundan,



$$\int_{-3}^4 |x|\,dx = \int_{-3}^0 (-x)dx + \int_0^4 x\,dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^0 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 =$$

$$= -\frac{1}{2}(0^2-(-3)^2) + \frac{1}{2}(4^2-0^2) = \frac{9}{2} + 8 = 12{,}5$$

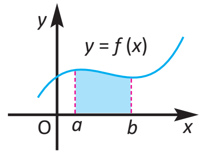
Xassə 5. Müəyyən inteqralın sərhədlərinin yerini dəyişdikdə inteqralın işarəsi əksinə dəyişir.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Doğrudan da, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$

Biz indiyə qədər funksiyanın qrafikinin əhatə etdiyi sahə dedikdə funksiyanın mənfi olmadığı şərtini qeyd edirdik. Bəs, funksiyanın qrafikinin verilən aralıqda əhatə etdiyi sahə həm *x* oxundan aşağıda, həm də yuxarıda yerləşirsə, ümumi sahə müəyyən inteqralın köməyilə necə hesablanmalıdır? Bu halda müəyyən inteqralın yuxarıda qeyd olunan xassəsindən istifadə etmək olar.

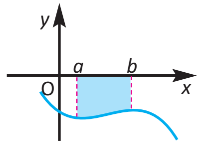
Sahə *x* oxundan yuxarıda yerləşir!



$b > a$ şərtilə $a \le x \le b$ aralığında $f(x) \ge 0$ olarsa, *f* funksiyasının qrafiki *x* oxundan yuxarıda yerləşir və sahəni ifadə edən inteqralın qiyməti müsbət olur.

$$S = \int_a^b f(x)dx > 0$$

Sahə *x* oxundan aşağıda yerləşir!

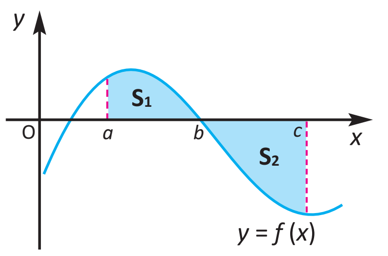


$b > a$ şərtilə $a \le x \le b$ aralığında $f(x) \le 0$ olarsa, *f* funksiyasının qrafiki *x* oxundan aşağıda yerləşir və uyğun inteqralın qiyməti mənfi olur.

$$\int_a^b f(x)dx < 0$$

Aydındır ki, sahənin ədədi qiyməti mənfi ola bilməz, ona görə də bu halda ümumi sahəni hesablayarkən müəyyən inteqralın mütləq qiymətindən istifadə edilir.

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx$$



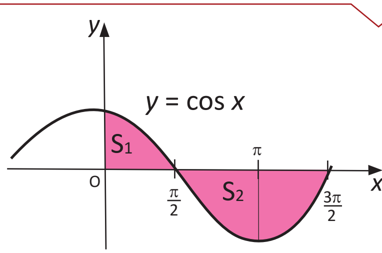
Tutaq ki, $[a;c]$ aralığında $f(x)$ funksiyasının qrafikinin əhatə etdiyi sahə iki hissədən: $[a;b]$ parçasında əhatə etdiyi S_1 və $[b;c]$ parçasında əhatə etdiyi S_2 sahələrindən ibarətdir.

$[a;b]$ parçasında $\int_a^b f(x)dx > 0$,

$[b;c]$ parçasında $\int_b^c f(x)dx < 0$ olduğuna görə

ümumi sahə: $S = S_1 + S_2 = \int_a^b f(x)dx + \left|\int_b^c f(x)dx\right|$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ olar.}$$



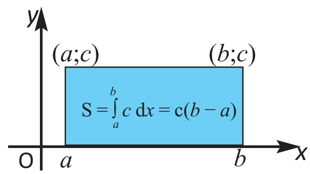
Nümunə. Rənglənmiş sahəni tapın.

Həlli: $[0;\frac{\pi}{2}]$ parçasında $\cos x \geq 0$, $[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ parçasında $\cos x \leq 0$ olduğundan alarıq:

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx =$$

$$= \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = (\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) - (\sin\frac{3\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}) =$$

$= (1 - 0) - (-1 - 1) = 3$ (kv.vahid)



Xassə 5. $[a;b]$ parçasında $f(x) = c$ olarsa, aşağıdakı bərabərlik doğrudur.

$$\int_a^b c\, dx = c(b - a)$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Müəyyən inteqralın xassələrini tətbiq edərək hesablayın.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3x \cos x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \sin x\, dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 3x \sin x\, dx$

c) $\int_1^2 (\ln x - 2x)dx - \int_2^1 (3t^2 - \ln t)\, dt$ d) $\int_1^e (xe^x - \frac{1}{x})\, dx + \int_e^1 (1 + te^t)\, dt$

2. Hesablayın.

a) $\int_0^5 |2x-5|\, dx$ b) $\int_1^4 (3-|x-3|)\, dx$ c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} |\sin x|\, dx$

3. Verilmiş xətlərlə hüdudlanmış sahəni tapın.

a) $y = x^2 - 5x + 4$ və $y = 0$ b) $y = 4x - x^2$ və $y = 0$

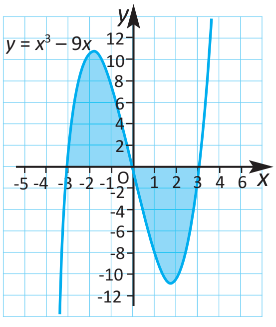
4. Verilmiş funksiyanın qrafiki ilə absis oxunun hüdudlandırdığı sahəni hesablayın.

a) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 3 \\ 8 - x, & x > 3 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \leq 0 \\ 1 - x, & x > 0 \end{cases}$

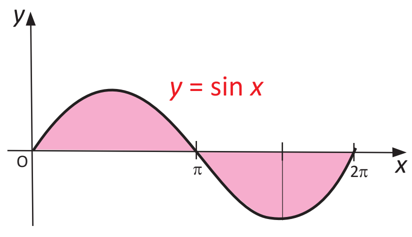
5. Müəyyən inteqralın xassələrindən istifadə etməklə aşağıdakı bərabərliklərin doğru olduğunu göstərin.

a) $\int\limits_{3}^{11} f(x)\,dx - \int\limits_{7}^{11} f(x)\,dx = \int\limits_{3}^{7} f(x)\,dx$ b) $\int\limits_{-1}^{3} f(x)\,dx - \int\limits_{5}^{3} f(x)\,dx = \int\limits_{-1}^{5} f(x)\,dx$

6. a) $y = x^3 - 9x$ funksiyasının qrafiki ilə absis oxunun hüdudlandırdığı rəngli hissənin sahəsini tapın.

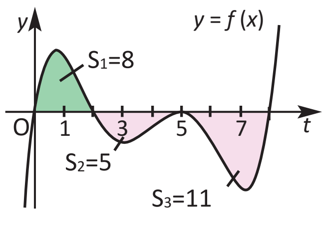


b) $y = \sin x$ funksiyasının qrafiki ilə absis oxunun hüdudlandırdığı rəngli hissənin sahəsini tapın.

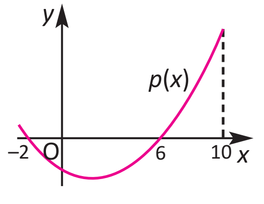


7. $F(x) = \int\limits_{0}^{x} f(t)dt$ olarsa, rəngli hissələrin verilmiş sahələrinə görə tapın:

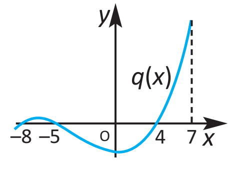
a) F(2); b) F(5); c) F(8).



8. a) Şəkildə $p(x)$ funksiyasının qrafiki verilmişdir. $\int\limits_{-2}^{6} p(x)dx = -10$ və $\int\limits_{-2}^{10} p(x)dx = 2$ olduğuna görə $\int\limits_{6}^{10} p(x)dx$ inteqralını tapın.



b) Şəkildə $q(x)$ funksiyasının qrafiki verimişdir. $\int\limits_{-8}^{7} q(x)dx = -3$, $\int\limits_{4}^{7} q(x)dx = 5$ və $\int\limits_{-5}^{7} q(x)dx = -11$ olduğuna görə $\int\limits_{-8}^{-5} q(x)dx$ müəyyən inteqralının qiymətini tapın.



9. c-nin hansı müsbət qiymətlərində:

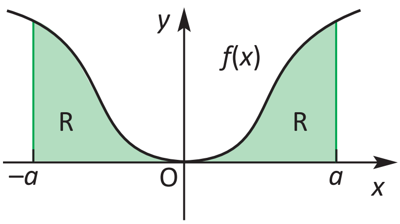
a) $y = 2x$, $y = 0$ və $x = c$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsi 4-ə bərabərdir?

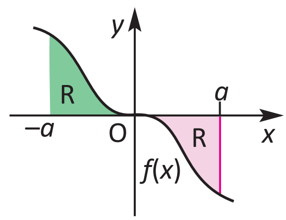
b) $y = x^2 + c$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$ xətləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsi 15-ə bərabərdir?

10. Uzunmüddətli tapşırıq. Cüt və tək funksiyanın simmetrik parçada müəyyən inteqralı.

Cüt funksiyanın $f(-x) = f(x)$ bərabərliyini ödədiyi və qrafikinin ordinat oxuna nəzərən simmetrik olduğu məlumdur. Məsələn, $f(x) = |x|$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^n$ $(n = 2k,\ k \in Z)$funksiyaları cütdür.
Tək funksiyanın isə $f(x) = -f(x)$ bərabərliyini ödədiyi və qrafikinin koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olduğu məlumdur. Məsələn, $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^n$, $(n = 2k + 1,\ k \in Z)$ funksiyaları təkdir.
İnteqrallama sərhədləri koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrik olduqda cüt və tək funksiyanın müəyyən inteqralı üçün aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

Cüt funksiya: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$ **Tək funksiya:** $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$





Cüt və ya tək funksiyanın xassəsindən istifadə etməklə hesablayın:

a) $\int\limits_{-2}^{2}(x^4 - 2x^3)dx$ b) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x - 4\sin^3 x)dx$

a) $$\int\limits_{-2}^{2}(x^4 - 2x^3)dx = \int\limits_{-2}^{2} x^4\,dx - 2\int\limits_{-2}^{2}x^3dx = 2\int\limits_{0}^{2}x^4dx - 2\underbrace{\int\limits_{-2}^{2}x^3dx}_{0} = 2\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{64}{5}.$$

b) $$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x - 4\sin^3 x)dx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx - 4\underbrace{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^3 x\,dx}_{0} = 2\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos x\,dx =$$
$$= 2\sin x\Big|_0^{\pi/2} = 2(1-0) = 2.$$

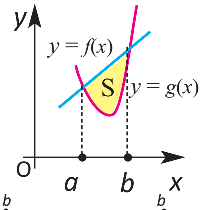
Aşağıdakı tapşırıqları yerinə yetirin.

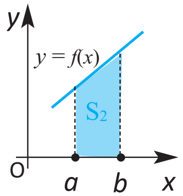
1. Tək və cüt funksiyaların törəməsinin tək və ya cüt olması haqqında yazın.

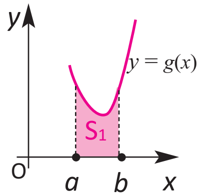
2. İnteqralaltı funksiyanın tək və ya cüt olmasına görə müəyyən inteqralı hesablayın.

a) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx$ b) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx$ c) $\int\limits_{-2}^{2}x^3\,dx$ d) $\int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)\,dx$

Tutaq ki, f və g funksiyalarının qrafikləri ilə hüdudlanmış fiqurun sahəsinin tapılması tələb olunur. Şəkildə göstərilmiş S_2 sahəsindən S_1 sahəsini çıxmaqla tələb olunan S sahəsini tapa bilərik. Hər bir sahəni isə uyğun funksiyanın verilən aralıqdakı müəyyən inteqralı kimi hesablamaq olar.





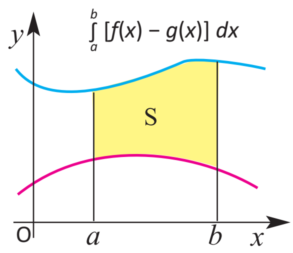


$$S = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{S_2} - \underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{S_1}$$

$$S_2 = \int_a^b f(x)\,dx \qquad S_1 = \int_a^b g(x)\,dx$$

Bu fikirləri aşağıdakı kimi ümumiləşdirmək olar.
$[a;b]$ parçasında kəsilməz f və g funksiyaları üçün bu parçada $f(x) \geq g(x)$ şərti ödənərsə (yəni, $f(x)$-in qrafiki bütünlüklə $g(x)$-in qrafikindən yuxarıda yerləşərsə), $f(x)$, $g(x)$ funksiyalarının qrafikləri və $x = a$, $x = b$ düz xətləri ilə hüdudlanmış sahəni müəyyən inteqralla

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$ kimi ifadə etmək olar.

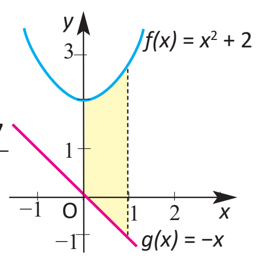


Funksiyaların qrafiklərinin ortaq nöqtəsi yoxdur.

Nümunə 1. $f(x) = x^2 + 2$ və $g(x) = -x$ funksiyalarının qrafikləri və $x = 0$, $x = 1$ düz xətləri ilə hüdudlanmış sahəni tapın.

Həlli: $S = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)]dx =$

$= \int_0^1 (x^2 + x + 2)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left.2x\right|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}$



Funksiyaların qrafikləri iki nöqtədə kəsişir.

Nümunə 2. $y = 2x - 1$ və $y = x^2 - 4$ funksiyalarının qrafikləri ilə hüdudlanmış sahəni hesablayın.

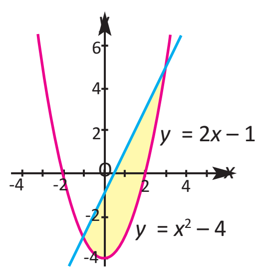
Həlli: Funksiyaların qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapaq.

$$2x - 1 = x^2 - 4,\ x^2 - 2x - 3 = 0,\ x = -1 \text{ və } x = 3.$$

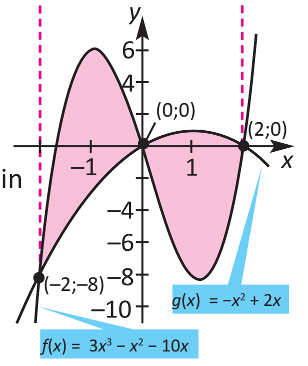
x-in bu qiymətləri müəyyən inteqralın sərhədlərini göstərir.
Onda axtarılan sahə

$$S = \int_{-1}^{3} [(2x - 1) - (x^2 - 4)]\,dx = \int_{-1}^{3} (2x - x^2 + 3)\,dx =$$

$$= \left.x^2\right|_{-1}^{3} - \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{3} + \left.3x\right|_{-1}^{3} = 10\frac{2}{3}$$ kv. vahid olar.



Funksiyaların qrafiklərinin ikidən çox sayda kəsişmə nöqtəsi var.



Nümunə 3. $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ və $g(x) = -x^2 + 2x$ funksiyalarının qrafikləri ilə hüdudlanmış sahəni hesablayın.

Həlli: Funksiyaların qrafiklərinin kəsişmə nöqtələrinin absislərini tapaq.

$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$
$3x^3 - 12x = 0$
$3x(x^2 - 4) = 0$
$x = 0,\ x = 2,\ x = -2.$
Deməli, qrafiklər absisləri −2; 0; 2 olan nöqtələrdə kəsişirlər.

Funksiyaların qrafiklərindən də göründüyü kimi, axtarılan sahə [−2;0] parçasında və [0;2] parçasında qrafiklərlə hüdudlanan sahələrin cəminə bərabərdir.
[−2;0] aralığında $f(x) \ge g(x)$, [0;2] aralığında isə $g(x) \ge f(x)$ olduğundan (funksiyaların fərqinin inteqralını yazarkən bunlar nəzərə alınır):

$$S = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)\,dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right)\Bigg|_{0}^{2} = -(12 - 24) + (-12 + 24) = 24$$

! Tələb olunan sahəni $\int_{-2}^{2} |f(x) - g(x)|\,dx$ inteqralına görə də hesablayın. Hansı nəticəni aldınız?

Nümunə 4. Məktəbin gənc konstruktorlar klubunun üzvləri avtomobilin mühərrikini təkmilləşdirərək atmosferə daha az tullantı buraxan yeni mühərrik düzəltdiklərini düşünürlər. Yeni mühərrikin t-ci ildə atmosferə buraxdığı çirkli zərrəciklərin sayının dəyişməsini (milyardlarla) $E(t) = 2t^2$ kimi, əvvəlki mühərrikin buraxdığı çirkli zərrəciklərin sayını isə $C(t) = 9 + t^2$ kimi ifadə etmək olar.
a) Neçənci ildə bu mühərriklər atmosferə eyni miqdarda çirkli zərrəciklər atacaq?
b) Bu müddətdə onların atmosferə buraxdığı çirkli zərrəciklərin ümumi sayı arasındakı fərq nə qədər olacaq?

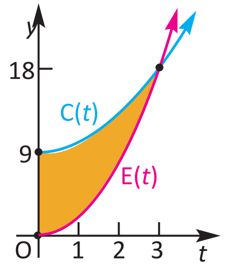
Həlli: a) E(t) = C(t) ödəndiyi ildə tullantı zərrəciklərin sayı bərabər olacaqdır:

$2t^2 = 9 + t^2$,

$t^2 = 9$, $t = 3$, $t = -3$.

$t = -3$ məsələnin məzmununa uyğun deyil. Deməli, istifadənin 3-cü ilində yeni mühərrik də əvvəlki mühərrik qədər çirkli tullantı verəcək.

b) Tullantıların ümumi miqdarındakı fərq bu funksiyaların [0;3] aralığında əhatə etdikləri sahələrin fərqinə bərabərdir.



$$\int_0^3 [C(t) - E(t)]\,dx = \int_0^3 [(9 + t^2) - 2t^2]\,dx =$$

$$= \int_0^3 (9 - t^2)\,dx = \left(9t - \frac{t^2}{3}\right)\Big|_0^3 = 27 - 9 = 18 \text{ (milyard zərrəcik)}$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Verilmiş xətlərlə hüdudlanmış sahəni hesablayın. Qrafik təsvir edin.

a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x$, $x = -1$, $x = 2$

b) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = x + 2$, $x = -2$, $x = 2$

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$, $x = 2$, $x = 3$

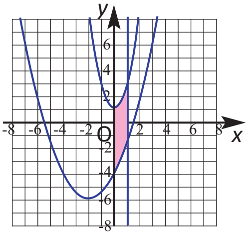
d) $f(x) = 4$, $g(x) = \sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 4$

2. Rəngli sahəni hesablayın.

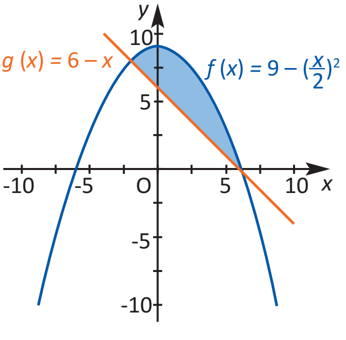
a)

$y = 2x^2 + 1$, $y = \frac{x^2}{2} + 2x - 4$

$x = 0$, $x = 1$

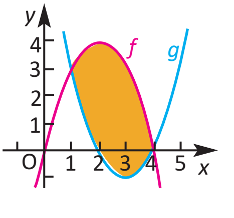


b)



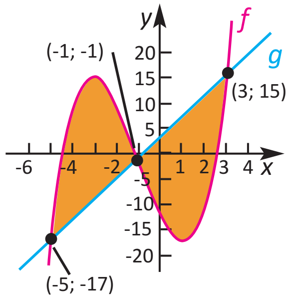
c)

$f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = x^2 - 6x + 8$

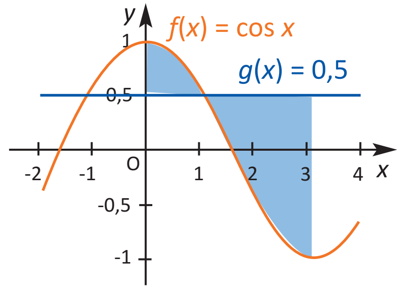


3. Rənglənmiş sahəni hesablayın.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 12$
$g(x) = 4x + 3$



b) $f(x) = \cos x$ və $y = 0{,}5$, $0 \le x \le \pi$



4. Verilmiş xətlərlə hüdudlanmış sahəni qrafik təsvir edin və hesablayın.

a) $y = x^2 + 1$, $y = 2x$, $x = -1$
b) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$
c) $y = x^3$, $y = -x$, $x = 2$
d) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$

5. Funksiyaların qrafikləri ilə hüdudlanmış sahəni hesablayın.

a) $y = x^2 - 2$ və $y = 2$
b) $y = 2x - x^2$ və $y = -3$
c) $y = 2x - x^2$ və $y = x$
d) $y = -x^3 + 6x$ və $y = -x^2$

6. Funksiyaların qrafiklərini verilmiş parçada qurun, hüdudlandırdıqları sahəni hesablayın.

a) $y = x^3$ və $y = x^2 - 2x$, $x \in [-1; 1]$
b) $y = x^2 + 1$ və $y = x + 3$, $x \in [-1; 3]$
c) $y = \sqrt{x}$ və $y = 1$ $x \in [0; 4]$
d) $y = \sin x$ və $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$

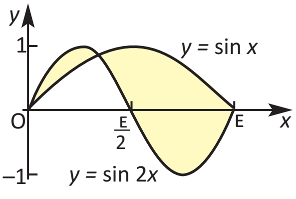
7. Funksiyaların qrafikləri ilə hüdudlanmış sahəni hesablayın.

a) $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$
b) $y = x^3$, $y = 2 - x$, $y = 0$
c) $y = e$, $y = e^x$, $y = e^{-x}$
d) $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = e$

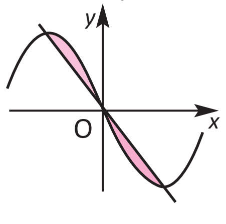
8. Təpələri (2;–3), (4; 6), (6; 1) nöqtələrində olan üçbucağın sahəsini müəyyən inteqralın köməyilə tapın.

9. Rənglənmiş sahəni hesablayın.

a)



b) $y = x^3 - 3x$ və $y + 2x = 0$



10. İki cisim eyni anda eyni nöqtədən eyni istiqamətdə düzxətli hərəkətə başladı. Cisimlərdən biri $v_1(t) = 9t^2 + 2t$ (m/san) sürəti ilə, digəri isə $v_2(t) = 2t$ (m/san) sürəti ilə hərəkət edir.
a) Hərəkətə başladıqdan 4 saniyə sonra cisimlər arasındakı məsafəni tapın.
b) Hərəkətə başladıqdan neçə saniyə sonra cisimlər arasındakı məsafə 81m olar?

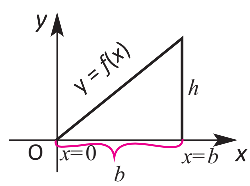
11. Şirkətin x sayda telefon istehsalına sərf etdiyi xərclər $C(x) = 0{,}01x^2 - 3x + 229$, gəliri isə $R(x) = 429 - 2x$ funksiyaları ilə modelləşdirilir. Bu funksiyaların qrafikləri və $x = 0$ düz xətti arasında qalan sahəni hesablayın. Bu sahənin qiymətini real situasiyaya uyğun izah edin.

12. Layihə işi. Müəyyən inteqral və müstəvi fiqurların sahəsi

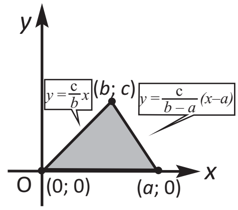
- Məsələləri müəyyən inteqralın köməyilə həll edin.
- İsbatları həndəsi üsulların köməyilə də yazıb göstərin.
- İnteqrallamanın köməyilə isbat edilə bilən daha iki məsələ fikirləşin.

1) Verilən üçbucaqlara görə üçbucağın sahəsinin oturacağı ilə hündürlüyü hasilinin yarısına bərabər olduğunu xətlərlə hüdudlanmış sahəni müəyyənetmə qaydasından istifadə etməklə isbat edin.

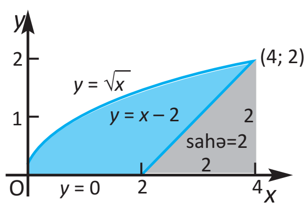
a) Düzbucaqlı üçbucaq. Göstəriş: $y = f(x)$ funksiyasının $y = kx + b$ düz xəttin tənliyi ilə ifadə olunduğunu nəzərə alaraq f funksiyasını müəyyən edin.



b) İxtiyari üçbucaq. Üçbucağın tərəflərini üzərində saxlayan düz xətlərin tənliklərinin necə alındığını yazıb izah edin.

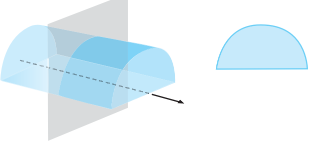


2) Göy rəngli hissənin sahəsini $y = \sqrt{x}$ funksiyasının verilən parçada əhatə etdiyi sahədən üçbucağın sahəsini çıxmaqla tapın.

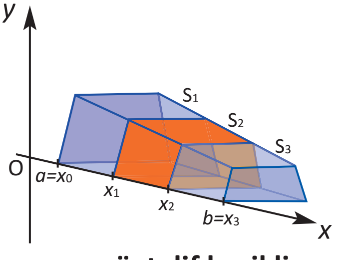


Bildiyimiz kimi sahə müstəvi fiqurların ədədi ölçüsüdür. Həcm isə fəza cisimlərinin ədədi ölçüsüdür. Bir sıra fiqurların həcmini hesablamaq üçün həndəsi düsturlar müəyyən edilmişdir. Məsələn, düzbucaqlı paralelepipedin həcminin $V=abc$, piramidanın həcminin $V=\frac{1}{3}S_{ot}h$, silin-drin həcminin $V=\pi r^2 h$, kürənin həcminin $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, konusun həcminin $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ olduğunu bilirik.

Cisimlərin həcminin hesablanmasının müxtəlif üsulları vardır. Onlardan biri dilimləmə üsuludur (kəsikləri toplama). Bu üsulla Kavalyeri prinsipindən tanışıq. Bu üsulla həm kəsikləri dəyişməyən, məsələn, silindr kimi, həm də kəsikləri dəyişən, məsələn, piramida kimi fiqurların həcmlərini tapmaq olar.



eyni kəsikli



müxtəlif kəsikli

Hər bir dilimin həcmini hesablayıb onları toplamaqla fiqurun həcmini tapmaq olar. Tutaq ki, x_i nöqtəsindən keçən kəsiyin sahəsi $S(x_i)$ -dir. Deməli, əgər fiqur $i=1,2,3,\ldots$ sayda diliмə bölünərsə və hər bir dilimin hündürlüyü Δx, oturacağının sahəsi $S(x_i)$ olarsa, fiqurun həcmini bu dilimlərin həcmləri (V_i) cəmi kimi ifadə etmək olar:

$$V \approx \sum S(x_i)\Delta x$$

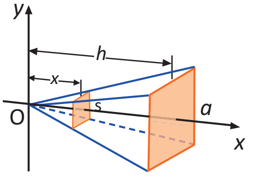
İnteqralın tərifinə görə fəza fiqurunun həcmi aşağıdakı kimi hesablanar:

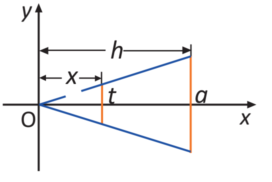
$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\Delta x=\int_a^b S(x)dx,$$

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

Dilimləmə üsulu ilə fiqurların həcmini hesablamaq üçün aşağıdakı addımları yerinə yetirmək lazımdır.
1. Uyğun şəkil çəkilir, en kəsiyininin (dilimin) forması müəyyən edilir
2. En kəsiyin sahəsi müəyyən dəyişənin funksiyası kimi yazılır.
3. Bu funksiyanın verilən parçada müəyyən inteqralı yazılır və həcm hesablanır.

Nümunə 1. Oturacağının tərəfi *a*, hündürlüyü *h* olan düzgün dördbucaqlı piramidanın həcm düsturunu dilimləmə üsulu ilə müəyyən edin.





1) Verilən piramidanın oturacağa paralel istənilən müstəvi ilə kəsiyi də kvadratdır.
2) Təpədən *x* məsafədə keçirilən müstəvi ilə kəsiyin sahəsini S(*x*) ilə işarə edək.

Alınmış piramidaların oxşarlığından

$$\frac{S(x)}{a^2} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \quad \text{münasibətini alırıq.}$$

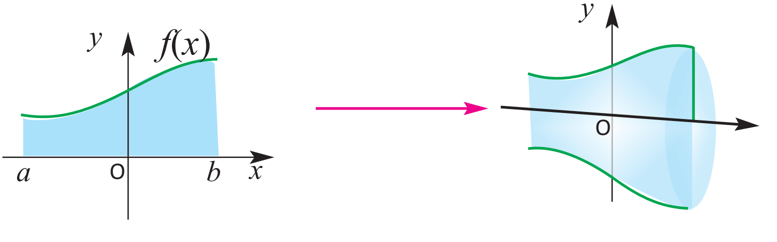
Buradan: $S(x) = \left(\frac{ax}{h}\right)^2$

3) Piramidanın həcmi:

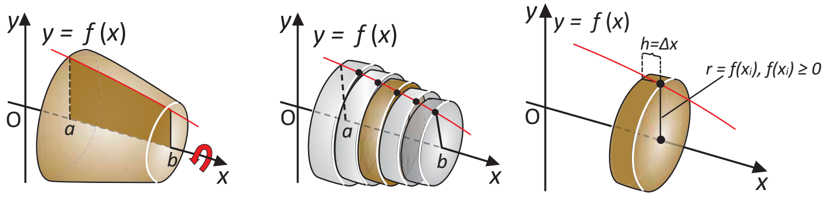
$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \left(\frac{a}{h}\right)^2 \int_0^h x^2 dx = \frac{a^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h = \frac{a^2}{3}h$$

Fırlanmadan alınan dairəvi en kəsikli fəza fiqurları və onların həcmi

Şəkildəki fiqur [*a*; *b*] parçasında kəsilməz *f*(*x*) funksyasının qrafikinin əhatə etdiyi müstəvi hissəsinin *x* oxu ətrafında fırlanmasından alınmışdır.



Fırlanmadan alınan cismin həcmini müəyyən etmək üçün başqa bir nümunəyə baxaq.

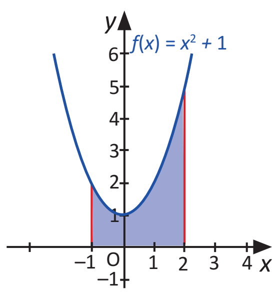


Şəkildəki fırlanma cismi $f(x)$ funksiyası qrafikinin $[a; b]$ parçasında hüdudlandırdığı müstəvi hissənin x oxu ətrafında fırlanmasından alınmışdır.
$[a; b]$ parçasını eyniuzunluqlu kiçik Δx parçalarına bölsək, fiqurun həcmini sonsuz kiçik silindrlərin həcmləri cəmi kimi təxmin etmək olar. Hər bir kiçik silindrin həcmini $\pi[(f(x)]^2\Delta x$ kimi ifadə etmək mümkün olduğundan fırlanmadan alınan fiqurun həcmi

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$$

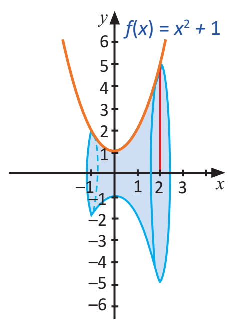
düsturu ilə hesablanar.

Nümunə 2. $f(x) = x^2 + 1$ funksiyasının $[-1; 2]$ parçasında əhatə etdiyi fiqurun x oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcminini hesablayın.



Fırlanma fiqurunun həcm düsturuna görə axtarılan fiqurun həcmi

$$V = \pi\int_{-1}^{2}(x^2+1)^2dx = \pi\cdot\int_{-1}^{2}(x^4+2x^2+1)dx =$$

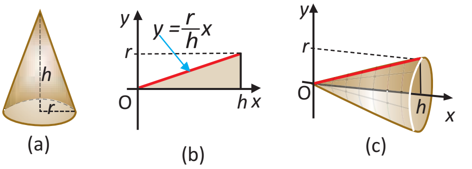


$$= \pi\cdot\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{2} = \pi\cdot\left(\frac{32}{5}+\frac{16}{3}+2\right) - \pi\left(-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-1\right) =$$

$$= \pi\cdot\left(\frac{33}{5}+\frac{18}{3}+3\right) = \frac{234\pi}{15} = \frac{78\pi}{5}$$ kub vahid olar.

Nümunə 3. Oturacağının radiusu r, hündürlüyü h olan konusun həcmini tapın.

$f(x) = \frac{r}{h}x$ olduğundan,



$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2x^2}{h^2}\, dx =$$

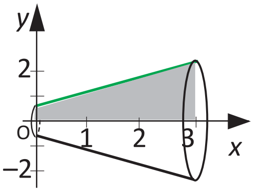
$$= \pi \left.\frac{r^2x^3}{3h^2}\right|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3} \text{ olar.}$$

Konusun həcmi: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

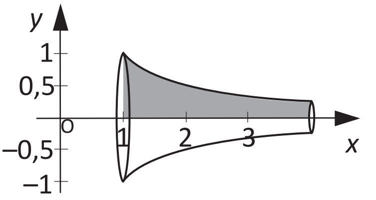
Öyrənmə tapşırıqları

1. Funksiya qrafikinin verilən parçada əhatə etdiyi müstəvi hissəsinin x oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini hesablayın.

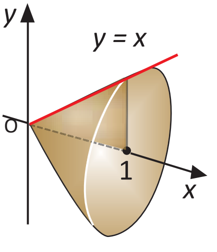
a) $f(x) = x + 1$, $[0;3]$



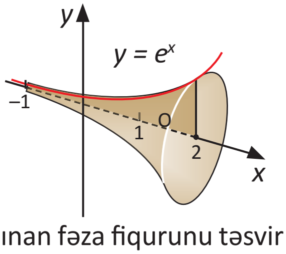
b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $[1;4]$



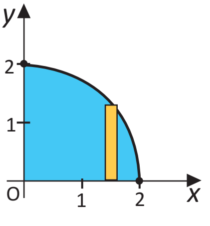
c) $f(x) = x$, $[0;1]$

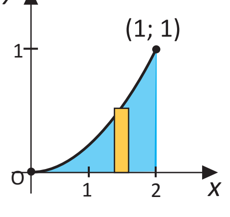


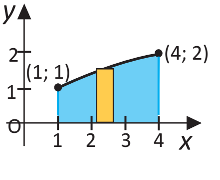
d) $f(x) = e^x$, $[-1; 2]$

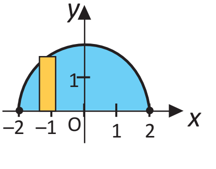


2. Rəngli hissənin x oxu ətrafında fırlanmasından alınan fəza fiqurunu təsvir edin və həcmini hesablayın.









3. Verilən xətlərlə hüdudlanmış fiqurun absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini hesablayın.

1) $y = 5$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

2) $y = x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

3) $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$

4) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$

5) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$

6) $y = e^x$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 5$

7) $y = \sqrt{x}$, $y = x$

8) $y = 2 - x^2$, $y = 1$

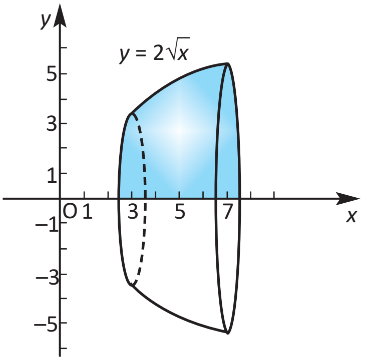
9) $y = x^2$, $y = x$

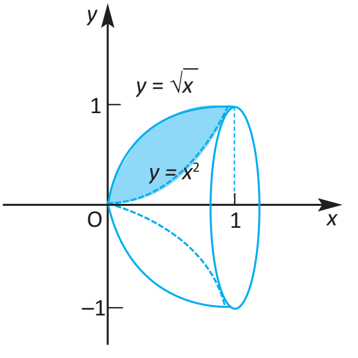
10) $y = x + 3$, $y = 2$, $x = 0$, $x = 4$

4. Verilmiş xətlərlə hüdudlanmış müstəvi fiqurun x oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini tapın.

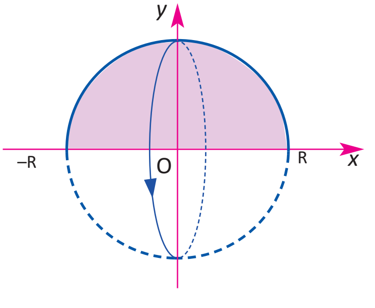
a) $y = 2\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 7$

b) $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$

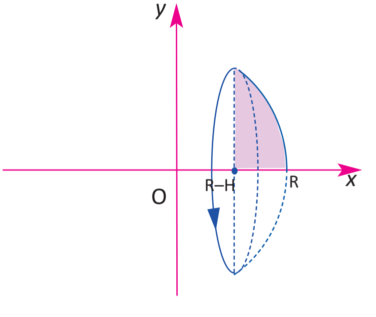




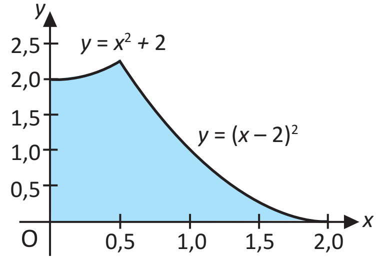
5. a) $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \le x \le R)$ və $y = 0$ xətləri ilə hüdudlanmış müstəvi fiqurun x oxu ətrafında fırlanmasından alınan kürənin həcm düsturunu çıxarın.



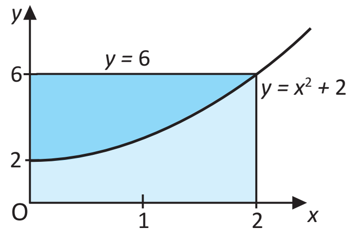
b) $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $R-H \le x \le R$, $y = 0$ və $x=R-H$ $(0<H<R)$ xətləri ilə hüdudlanmış müstəvi fiqurun x oxu ətrafında fırlanmasından alınan kürə seqmentinin həcm düsturunu çıxarın.



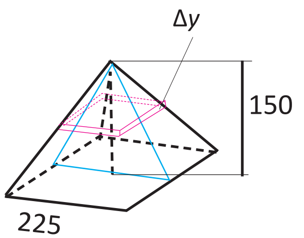
6. a) $y = x^2 + 2$, $y = (x - 2)^2$ funksiyalarının qrafikləri və koordinat oxları ilə əhatə edilmiş rəngli hissənin x oxu ətrafında fırlanmasından alınan fəza fiqurunun həcmini tapın. **Göstəriş**. Həcmi [0;0,5] və [0,5;2] aralıqları üzrə olmaqla iki inteqralın cəmi kimi hesablayın.

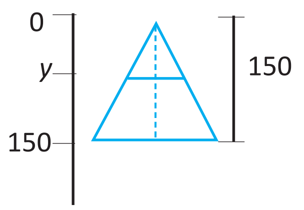


b) $y = 6$ və $y = x^2 + 2$ funksiyalarının qrafikləri və ordinat oxu ilə əhatə edilmiş müstəvi hissəsinin x oxu ətrafında fırlanmasından alınan fəza fiqurunun həcmini tapın. **Göstəriş**. Həcmi iki inteqralın fərqi kimi hesablayın.



7. **Uzunmüddətli tapşırıq.** 1) Misirdə yerləşən Böyük Giza Piramidasının ölçüləri fitlə (feet) şəkildə verildiyi kimidir. Bu verilənlərə görə piramidanın həcmini müəyyən inteqralın köməyilə hesablayın.





Tapşırığı yerinə yetirməyə səhifə 253-dəki Nümunə 1 tapşırığını yenidən yazıb həll etməklə başlayın.

2) Düzgün piramidanın oturacağının tərəfi 5 m, hündürlüyü 3 m-dir. Ölçüləri bu ölçülərin yarısı qədər olan piramidanın həcmi bu piramidadan necə fərqlənəcək?

3) Evin damının yer səthinə paralel kəsikləri düzbucaqlı şəklində, evin uzunu boyu yer səthinə perpendikulyar kəsikləri isə üçbuçaq şəklindədir. Damın oturacağındakı düzbucaqlının ölçüləri 1m × 2m, üçbucağın oturacağı 1 m, hündürlüyü isə 0,5 m-dir. Damın həcmini hesablayın.

1. İnteqrallama qaydalarını tətbiq etməklə ibtidai funksiyanı tapın.

a) $f(x) = (\frac{1}{2}x - 2)^9$ b) $f(x) = (9 - 4x)^{-2}$ c) $f(x) = \dfrac{9}{3 - 6x}$

2. İnteqralları tapın.

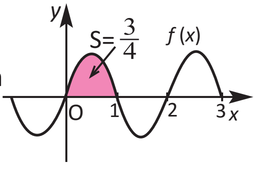
a) $\int (x + \sqrt{x})^2\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{x - 5}{\sqrt[4]{x}}\, dx$ c) $\int (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta$

3. $\int_1^3 f(x)dx = 5,\ \int_1^3 g(x)dx = -2,\ \int_3^5 f(x)dx = 2,\ \int_3^5 g(x)dx = 1$ olduğu məlumdur.

Verilənlərə görə tələb olunan inteqralları tapın.

a) $\int_1^3 [\,f(x) + g(x)]dx$ b) $\int_1^3 [5f(x) - 3g(x)]dx$ c) $\int_1^5 [2f(x) - 3g(x)]dx$

4. $f(x)$ əsas dövrü 2-yə bərabər olan tək funksiya və $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{3}{4}$ olduğuna görə aşağıdakıları müəyyən edin.



a) $\int_0^{-1} f(x)dx$ b) $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ c) $\int_0^3 f(x)dx$ d) $\int_0^{21} f(x)dx$

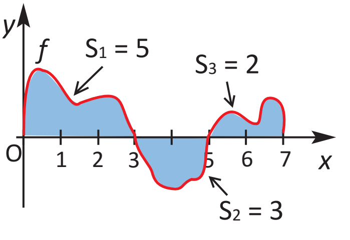
5. Müəyyən inteqralları hesablayın.

a) $\int_{-1}^{2} (x^3 - x^2 + 4x)\, dx$ b) $\int_0^1 (x^{99} + 1)\, dx$ c) $\int_1^4 (x - \sqrt{x})\, dx$

6. Verilən xətlərlə hüdudlanmış fiqurun absis oxu ətrafında fırlanmasından alınan cismin həcmini hesablayın.

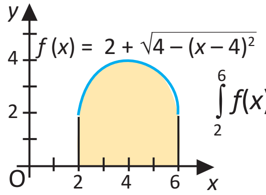
a) $y = \sin x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ b) $y = 3 - |x|,\ y = 0$

7. Rəngli hissələrin verilmiş sahələrinə görə inteqralı hesablayın:

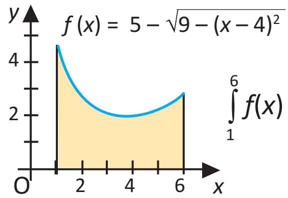


a) $\int_0^3 f(x)\, dx$ b) $\int_0^5 f(x)\, dx$ c) $\int_3^7 f(x)\, dx$

8. Həndəsi mənasına əsaslanaraq verilmiş inteqralı hesablayın.

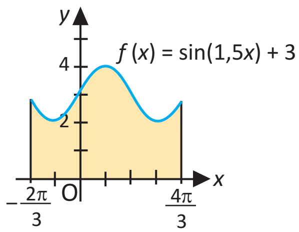
a) 

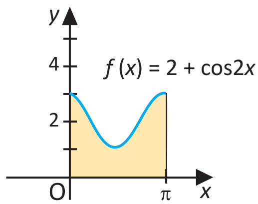
$\int_2^6 f(x)\,dx$

b) 

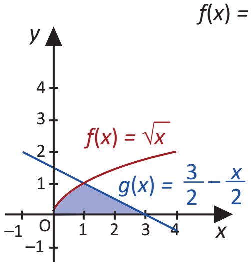
$\int_1^6 f(x)\,dx$

9. Rəngli sahəni müəyyən inteqralın köməyilə hesablayın.

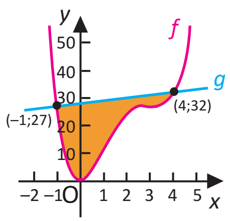
a) 

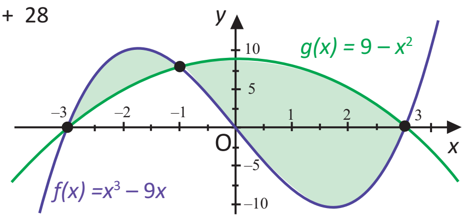
b) 

10. Qrafiklər arasında qalan rəngli sahəni hesablayın.

a) 

b) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$, $g(x) = x + 28$

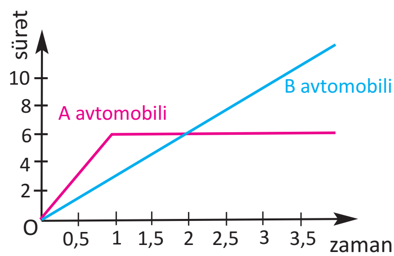


c) 

11. Avtomobillərin hərəkəti. Qrafikdə işıqforun işarəsi ilə hərəkətə başlayan avtomobillərin sürətlərinin (m/san) zamandan asılılıqları verilmişdir. A avtomobili hərəkətə daha böyük sürətlə başlayır.

a) A avtomobili ilk 2 saniyədə nə qədər yol qət etmişdir? **Göstəriş:** Həndəsi düsturlardan istifadə edin.

b) B avtomobili təxminən nə vaxt A avtomobilinə çatar?



12. Kütləsi m olan cisim Ox oxu boyunca bu ox istiqamətində yönəlmiş qüvvənin təsiri altında $x(t)$ qanunu ilə hərəkət edir. $t = t_0$ anında sürətin v_0-a, koordinatın x_0-a bərabər olduğunu bilərək, $x(t)$-nin düsturunu yazın. Burada F(t) nyutonla, t saniyə ilə, v sürəti $\frac{m}{san}$ ilə, m isə kiloqramla ölçülür.

a) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $v_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$

b) $F(t) = 14\sin t$, $t_0 = \pi$, $v_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$

9

Statistika və ehtimal

- **Statistik göstəricilər**
- **Məlumatın paylanma formaları**
- **Normal paylanma**
- **Qutu-qulp diaqramı**
- **Təsadüfi hadisələr və ehtimal**
- **Şərti ehtimal**

Riyazi lüğət

- ✓ Külliyyat
- ✓ Seçim
- ✓ Ədədi orta
- ✓ Moda
- ✓ Median
- ✓ Ən böyük fərq
- ✓ Meyil
- ✓ Orta kvadratik meyil
- ✓ Dispersiya
- ✓ Qutu-qulp diaqramı
- ✓ Hadisə
- ✓ Təsadüfi hadisə
- ✓ Sınaq
- ✓ Elementar hadisə
- ✓ Elementar hadisələr fəzası
- ✓ Asılı olmayan hadisələr
- ✓ Asılı hadisələr
- ✓ Şərti ehtimal

Dispersiya. Standart meyil

Statistik məlumatı analiz etmək üçün ədədi orta, moda, median kimi göstəricilərdən istifadə edilir.

● Ədədi orta.

- Kənaraçıxmalar onun qiymətinə təsir göstərdiyindən külliyyat haqqında yanlış nəticələrə gətirə bilər.

● Median.

- Median məlumatı iki yarımhissəyə - aşağı və yuxarı yarımhissələrə ayırır.
- Kənaraçıxmaların mövcud olduğu çoxluqda daha etibarlı statistik göstəricidir.
- Məhdud sayda məlumatın analizi üçün yararlıdır.

● Moda.

- Ədədi orta haqqında fikir yürütməyə imkan verir
- Kateqorial məlumatın (gender, rəng və s.) analizi üçün daha əlverişlidir.
- Məlumatın birdən çox modası ola bilər və ya modası olmaya bilər.

Statistik məlumatlara görə daha düzgün nəticələr çıxarmaq üçün onları xarakterizə edən ***meyil, dispersiya, standart meyil*** kimi göstəricilərdən istifadə edilir.

Meyil məlumatın qiyməti ilə ədədi ortanın fərqinə deyilir: $\boldsymbol{x_{meyil} = x - \bar{x}}$, burada x məlumatın verilən ədədi qiyməti, $\bar{x}$ ədədi ortadır.

Dispersiya meyillərin kvadratları cəminin məlumatın qiymətləri sayına nisbətinə deyilir və σ^2 ilə işarə olunur.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$, burada n məlumatın qiymətlərinin sayıdır.

Standart meyil dispersiyanın kvadrat kökünə deyilir və adətən **σ** - “siqma” hərfi ilə işarə edilir:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Standart meyil məlumatın paylanmasını xarakterizə edən mühüm statistik göstəricidir.

✔ Standart meyil məlumatın verilən qiymətlərinin ədədi ortaya görə paylanmasını göstərir.

✔ Məlumatın qiymətləri bir-birindən nə qədər aralı (uzaq) olarsa, standart meyil bir o qədər böyük olar.

✔ Məlumatın qiymətləri bir-birinə nə qədər yaxın olarsa, standart meyil bir o qədər kiçik olar. Başqa sözlə, məlumat ədədi ortanın ətrafında sıxlaşmış olarsa, standart meyil kiçik olur.

Nümunə. Şirkətdə təsadüfi seçilən 10 işçinin həftəlik maaşı aşağıdakı kimidir: 120₼, 160₼, 90₼, 175₼, 110₼, 80₼, 220₼, 150₼, 300₼, 95₼. Bu məlumat üçün meyil, dispersiya və standart meyli hesablayın və situasiyaya uyğun izah edin.

Həlli: 1. Maaşlara uyğun cədvəl quraq.

2. Ədədi ortanı hesablayaq: $\bar{x}$ = 1500 : 10 =150

3. Hər maaş məbləğindən ədədi orta çıxılmaqla onun ədədi ortadan **meyli** tapılır.
Məsələn, 120 –150 = –30, bu şəxsin maaşı orta həftəlik maaşdan 30 ₼ azdır. Cədvələ hər maaş üçün $(x_i - \bar{x})$ meylini göstərən sütun əlavə edək. Ayrı-ayrı məlumatların meyilləri cəmi sıfıra bərabərdir. Bu həmişə belədir və yeni məlumat vermir. Ona görə meyillərin kvadratları cəmindən istifadə edilir.

4. Hər bir $(x_i - \bar{x})^2$-nı hesablayıb cədvəldə yeni sütunda qeyd edək və $\sum (x_i - \bar{x})^2$ cəmini tapaq:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 42150.$$

Maaş x_i	Meyil: $(x_i - \bar{x})$	Kvadratı: $(x_i - \bar{x})^2$
Ədədi orta	$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 150$	
120	–30	900
160	10	100
90	–60	3600
175	25	625
110	–40	1600
80	–70	4900
220	70	4900
150	0	0
300	150	22500
95	–55	3025
Cəm: $\sum x_i = 1500$	Cəm: $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$	Cəm: $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 42150$

Dispersiyanı hesablamaq üçün tapdığımız cəmi, məlumatın n sayına (n = 10) bölək:

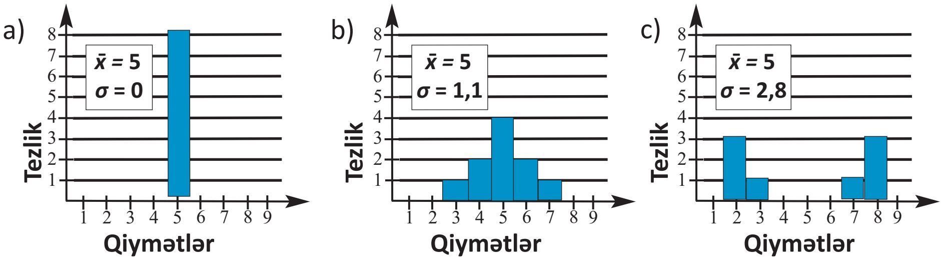
$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{42150}{10} = 4215$$

5. Maaşların **standart meylini** tapmaq üçün dispersiyanın kvadrat kökünü alaq:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4215} \approx 64{,}92$$

İzah: Standart meylə görə maaşların dəyişməsini qiymətləndirmək olar. Məsələn, 300 manat maaş alan şəxs həftəlik orta maaşdan (150 manat) 2 standart meyildən (2×65) də çox artıq maaş alır. 90 manat həftəlik maaş alan şəxs isə həftəlik orta maaşdan təqribən bir standart meyil (65) qədər az maaş alır.

Məlumatın histoqram, tezlik poliqonu ilə təqdim formalarına görə standart meyil haqqında fikir yürütmək olar.
Aşağıdakı nümunələri nəzərdən keçirək.



Hər üç diaqramda ədədi ortanın bərabər olmasına baxmayaraq, standart meyil müxtəlifdir. 1-ci qrafikdə standart meyil 0-dır. Bütün 8 məlumatın qiyməti 5-dir. 2-ci qrafikdəki məlumata görə standart meyil 3-cü qrafikdəkinə nəzərən daha kiçikdir, çünki məlumatlar ədədi ortanın ətrafında sıxlaşmışdır.

Nümunə. Qruplaşmış məlumatın standart meylinin tapılması. Cədvəldə 50 gün ərzində bir sinifdə gündəlik dərs buraxan şagirdlərin sayı verilmişdir. Standart meyli hesablayın.

50 gün ərzində bir sinifdə gündəlik dərs buraxan şagirdlərin sayı

1	3	1	1	1	1
5	0	1	2	2	1
0	1	1	0	0	0
3	6	2	3	0	1
1	3	0	3	1	1
1	1	6	0	1	3
4	1	1	6	6	1
2	2	2	0	3	0
2	4				

Həlli:

1. Əvvəlcə məlumatı gündəlik dərs buraxan şagirdlərin sayına görə qruplaşdıraq və tezlik cədvəlində qeyd edək. Məsələn, heç kəsin dərs buraxmadığı günlərin sayı 10, 1 şagirdin dərs buraxdığı günlərin sayı 19 və s.

2. Cədvəldən aldığımız məlumata görə ədədi ortanı tapaq.

$$\bar{x} = \frac{\sum x{\cdot}f}{n} = \frac{91}{50} \approx 1{,}8$$

x_i	f_i	$x_i f_i$
0	10	0
1	19	19
2	7	14
3	7	21
4	2	8
5	1	5
6	4	24
	$\sum = 50$	$\sum = 91$

3. Hər bir məlumatın :

a) ədədi orta qiymətdən meyli tapılır: $(x_i - \bar{x})$

b) kvadrata yüksəldilir: $(x_i - \bar{x})^2$

c) alınan nəticə saya vurulur, cəmlənir və n -ə bölünərək kvadrat kökü alınır.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n}} = \sqrt{\frac{145{,}4}{50}} \approx 1{,}71$$

$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
–1,8	3,24	32,40
–0,8	0,64	12,16
0,2	0,04	0,28
1,2	1,44	10,08
2,2	4,84	9.68
3,2	10,24	10,24
4,2	17,64	70,56
		$\sum = 145{,}40$

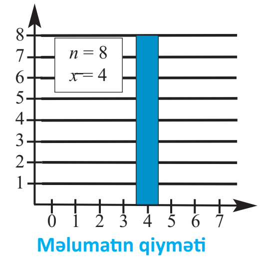
Göründüyü kimi, gündəlik dərsə gəlməyən uşaqların sayı standart meyillə 1,71, orta hesabla 1,8-dir.

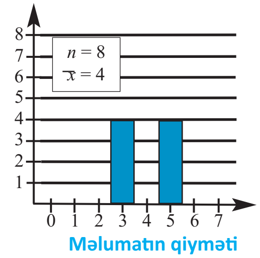
Kalkulyatordan istifadə. Statistik göstəriciləri hesablamaq üçün kalkulyatoru statistik iş rejiminə keçirmək lazımdır. Statistik kalkulyatorların ədədi ortanı ($\bar{x}$) , dispersiyanı (σ^2), standart meyli (σ) hesablamaq üçün uyğun klavişləri vardır. Məsələ həlli zamanı bu kalkulyatorların göstərilən

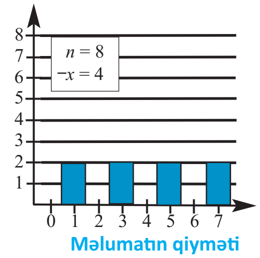
$\boxed{\bar{x}}$ $\boxed{\bar{x}^2}$ $\boxed{\sum x}$ $\boxed{\sum x^2}$ $\boxed{\sigma_n}$ $\boxed{\sigma_{n-1}}$ klavişlərindən istifadə edin.

Öyrənmə tapşırıqları

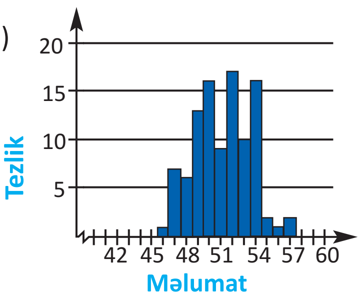
1. Əvvəlcə yazılı hesablama aparmadan qrafiklərə görə standart meyli təxmin edin. Sonra hesablamalarla təxminlərinizi yoxlayın. n külliyyata daxil olan məlumatların sayını, $\bar{x}$ ədədi ortanı göstərir.

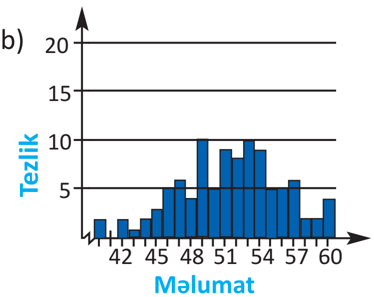
1.


2.


3.


2. Hər iki qrafiklə verilmiş məlumatın ədədi ortası 50-dir. Lakin birinin standart meyli 2,2, digərininki isə 6,8-dir. Hansı standart meyil hansı qrafikə aiddir?

a)


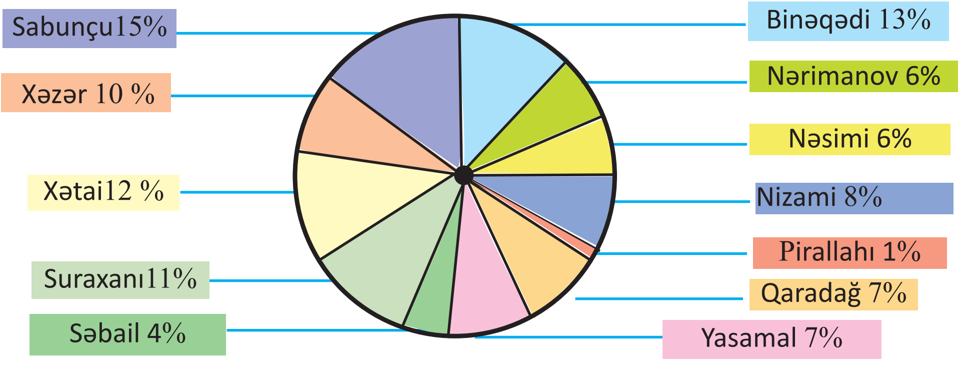
b)


3. Verilən məlumata görə tapşırıqları yerinə yetirin.
100; 200; 300; 400; 500; 600; 700; 800; 900; 1000;
a) Ədədi orta ($\bar{x}$) və standart meyli (σ) tapın.
b) Hər bir məlumatın qiymətini 10-a vurun. Yeni məlumatlar üçün ədədi orta ($\bar{x}$) və standart meyli (σ) tapın.
c) Hər bir məlumatın qiymətini 10-a bölün. $\bar{x}$ və σ-nı tapın
d) Nəticələr haqqında fikirlərinizi müzakirə edin. Standart meylin qiymətinə görə ədədi ortanın vəziyyəti qiymətləndirmək üçün düzgün göstərici olub-olmadığını izah edin.

4. SAT (Scholastic Aptitude Test) sistemi üzrə imtahan verənlər arasından təsadüfi seçilmiş 8 qız və 8 oğlanın nəticələri aşağıdakı kimidir
Oğlanların SAT balları: 1059; 1328; 1175; 1123; 923; 1017; 1214; 1042
Qızların SAT balları: 1226; 965; 841; 1053; 1056; 1393; 1312; 1222
a) Hər bir məlumat qrupu üçün ən böyük fərqi, düspersiyanı və standart meyli tapın.
b) Nəticəni real situasiyaya uyğun izah edin.

5. On məlumatın daxil olduğu elə ədədi çoxluq yazın ki, ədədi orta 10, standart meyil təxminən 3 olsun.

6. Şəkildəki dairəvi diaqramda 2016-cı ildə Bakı şəhəri üzrə orta məktəb şagirdlərinin rayonlar üzrə paylanması göstərilmişdir.



Mənbə*. Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi.*
İllik hesabat - 2016

a) Bu məlumata görə ədədi ortanı, ən böyük fərqi, dispersiyanı və standart meyli tapın.
b) Ən böyük meyil hansı rayona məxsusdur?
c) Məlumatı histoqramla təqdim edin.
d) Məlumata görə Sabunçu rayonunda təhsil alanların sayı 59088 nəfərdir. Bakı şəhərində təhsil alanların ümumi sayını tapın.

7. Məlumatlara uyğun ən böyük fərqi, ədədi ortanı, dispersiyanı və standart meyli tapın.

a) 11 10 11 7 8 11 6 4 6 7

b) 13 15 13 17 18 13 15 14 13 20 20 18 23 20

8. Verilən məlumat iki şirkətdən təsadüfi seçilmiş işçilərin maaşını əks etdirir.

A şirkəti: 220 265 290 320 350 230 280 310 180
B şirkəti : 210 180 200 210 260 270 240 250 220

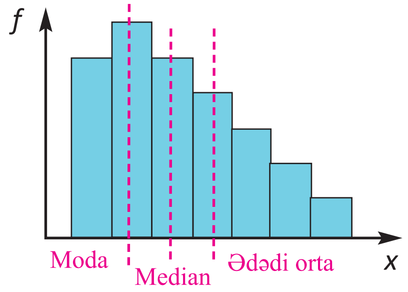
a) Ən böyük fərqi, ədədi ortanı, dispersiyanı, standart meyli tapın.
b) Nəticələri real həyati situasiyaya uyğun şərh edin.

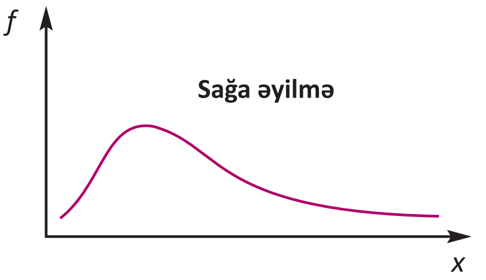
9. Ardıcıl beş il ölkə birinciliyinin bütün oyunlarında iştirak edən iki futbolçunun vurduqları qolların sayı cədvəldə göstərilmişdir. Hansı futbolçunun nəticəsi daha stabildir?

İllər	1	2	3	4	5
1-ci futbolçu	23	19	17	23	18
2-ci futbolçu	20	16	23	19	22

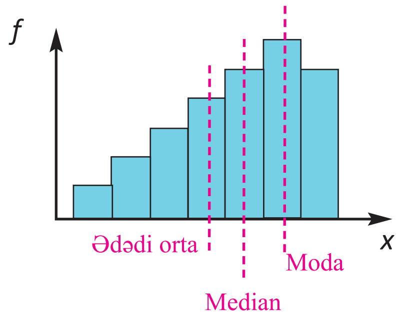
Məlumata uyğun tezliyin paylanmasına görə tezlik poliqonu müxtəlif formalarda, məsələn, sağa sürüşmüş, sola sürüşmüş, qarışıq, simmetrik formada ola bilər.

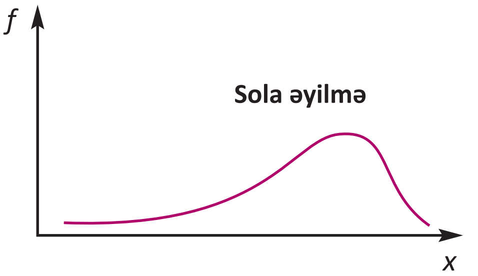
Asimmetrik paylanma



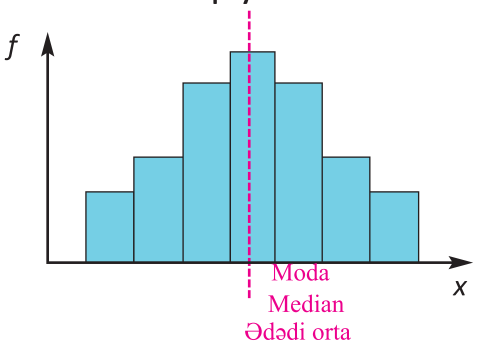


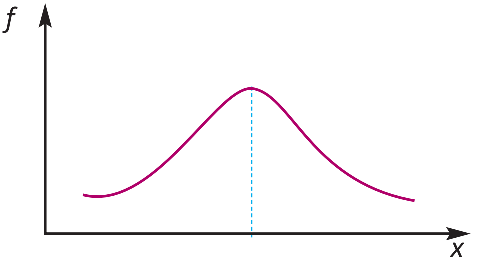
Asimmetrik paylanma





Simmetrik paylanma



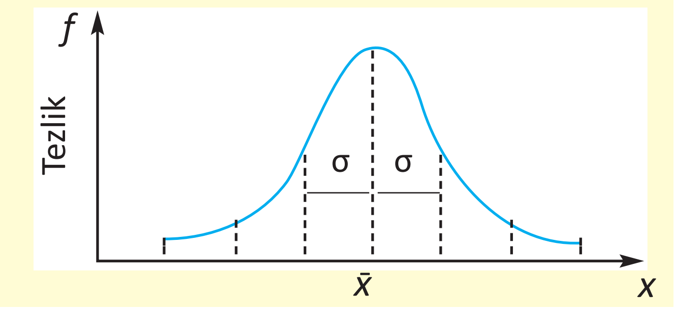


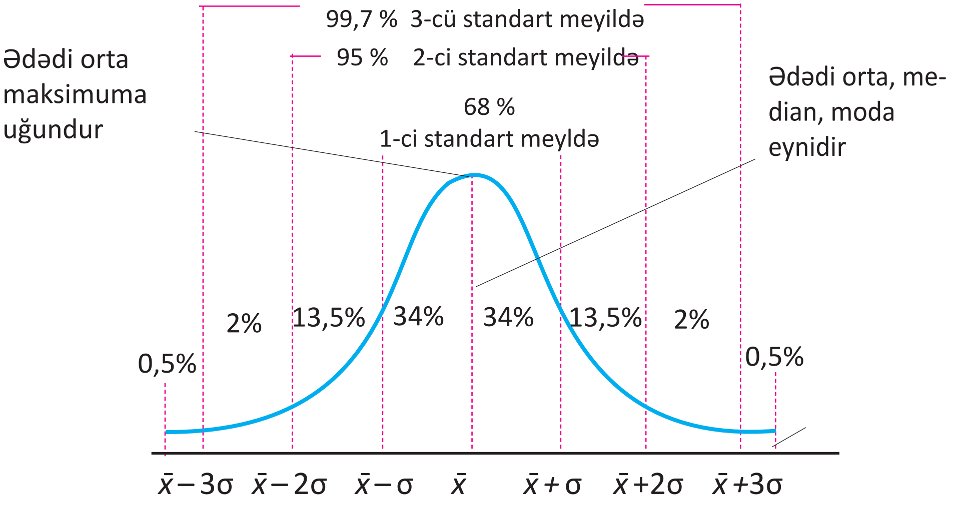
Yeni doğulan körpələrin boyu və ya kütləsi, insanın boyu, qan təzyiqinin ölçüsü, böyük şirkətlərdə maaşlar və s. normal paylanmaya nümunə ola bilər. Normal paylanmada tezlik poliqonu ədədi ortanın qiymətinə görə simmetrik olur.

Normal paylanmanı bir qədər ətraflı nəzərdən keçirək.

Normal paylanma

✓Normal paylanma əyrisi ədədi ortaya nəzərən simmetrik olur
✓Normal paylanmada ədədi orta, median, moda bərabər olur
✓Normal paylanmanın qrafiki ədədi orta ($\bar{x}$) və standart meylə (σ)görə qurulur.
✓ Normal paylanma əsasən üç standart meyil ətrafındakı məlumatları əks etdirir.

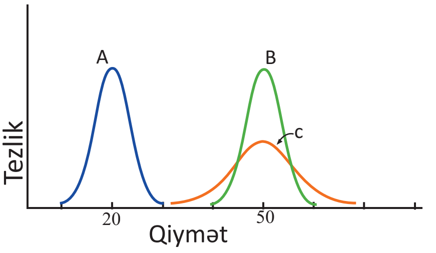




Normal paylanmada:
- Məlumatın 68%-i ədədi ortadan bir standart meyil qədər uzaqlıqda paylanır
- Məlumatın 95%-i ədədi ortadan iki standart meyl qədər uzaqlıqda paylanır
- Məlumatın 99-i ədədi ortadan üç standart meyil qədər uzaqlıqda paylanır

Normal paylanmaya 68–95–99 qaydası ilə paylanma da deyilir.

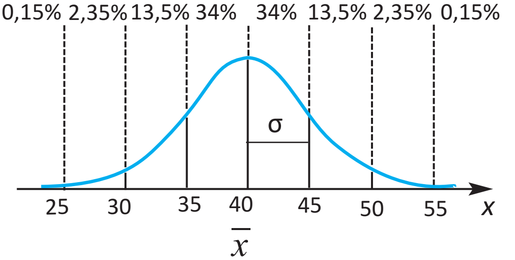
Normal paylanmanın qrafiki ədədi ortanın qiymətindən asılı olaraq sağa və ya sola yer dəyişir. Ədədi ortanın eyni qiymətində standart meylin dəyişməsi ilə qrafik sıxılır və ya dartılır. Məsələn, şəkildə göstərilən B qrafikinə uyğun ədədi orta A qrafikinə uyğun ədədi ortadan böyükdür, standart meyillər isə eynidir. B və C qrafiklərinə görə hər ikisində ədədi orta eynidir, standart meyil isə C-də daha böyükdür.



Nümunə. Hər hansı X külliyyatına uyğun normal paylanmada ədədi orta 40, standart meyil 5-dir. Bu külliyyata daxil olan qiymətlərin neçə faizi:

a) 45-dən kiçikdir; b) 30 ilə 45 arasındadır?

Həlli: Şərtə görə $\overline{x} = 40$, $\sigma = 5$. Ədədi orta və standart meylə görə məlumatları x oxu üzərində qeyd edək və normal paylanma əyrisini çəkək. Hər intervala uyğun faizləri qeyd edək.



Artıq normal paylanmanın qrafikinə görə suallara cavab verə bilərik.

a) Bu külliyyata daxil olan qiymətlərin 45-dən kiçik olanları təxminən

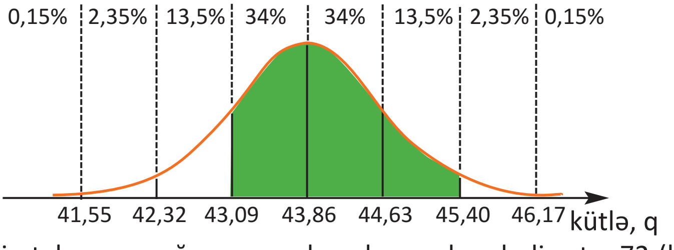
34% + 34% +13,5%+2,35% + 0,15% = 84% təşkil edir.

b) 30 qiyməti ədədi ortadan 2σ qədər solda, 45 isə σ qədər sağdadır.

30 və 45 arasında yerləşən ədədlər 34% + 34% + 13,5% = 81,5% təşkil edir.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Şəkildə ornitoloqların eyni növ quşların yumurtalarının kütlələrini ölçmə nəticələrinin normal paylanma qrafiki göstərilmişdir. Yumurtaların orta kütləsi $\bar{x} = 43{,}86$ (qram), standart meyli $\sigma = 0{,}77$(qram) kimidir. Qrafikdə rənglənmiş hissəyə aid məlumatı təqdim edin.



2. Sınaq imtahanına uyğun normal paylanmada ədədi orta 72 (bal), standart meylin 6 (bal) olduğu məlumdur. 1) Aşağıdakı məlumatları yazın:

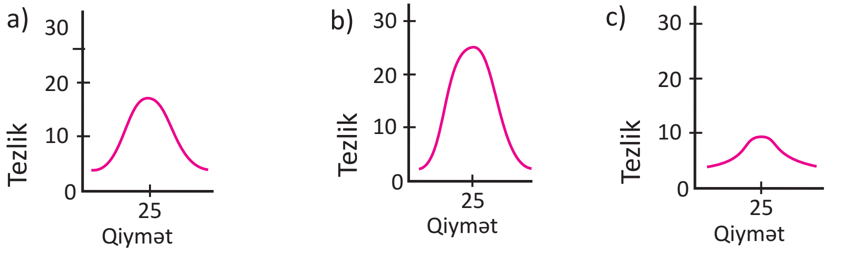
a) ədədi ortadan 1 standart meyil ətrafında yerləşənlər;

b) ədədi ortadan 2 standart meyil ətrafında yerləşənlər;

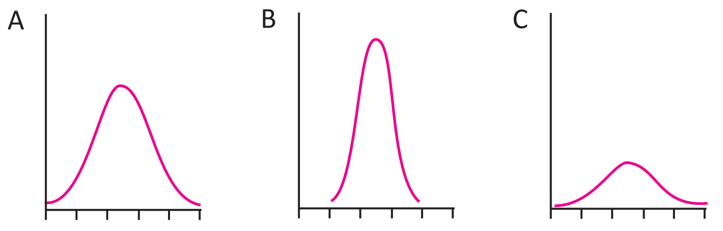
c) ədədi ortadan 3 standart meyil ətrafında yerləşənlər.

2) Normal paylanmaya uyğun əyrini çəkin. Hər intervalı faizlə göstərin.

3. 1) Hansı normal paylanmada standart meyil ən böyük, hansında ən kiçikdir?



2) Hər situasiyaya bir qrafik uyğundur. Uyğunluğu müəyyən edin:
a) Bir qutu çayın həqiqi kütləsi
b) Azərbaycanda 16 yaşlı gənclərin illik gəliri
c) Summativ qiymətləndirmədə şagirdlərin nəticələri

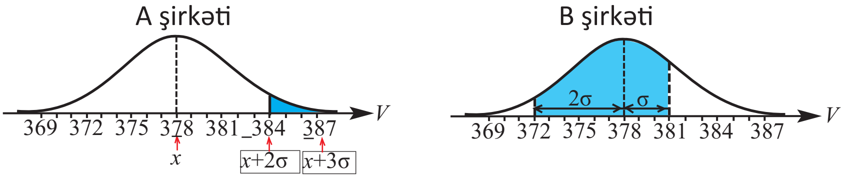


4. Normal paylanma əyrilərini eyni koordinat sistemində qurun. Bu qrafiklərin oxşar və fərqli cəhətlərini izah edin.

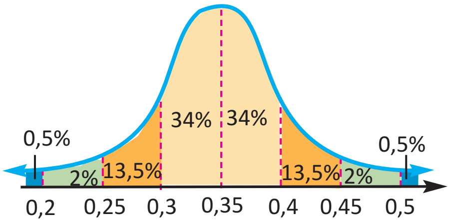
a) ədədi orta 50, standart meyil 10
ədədi orta 50, standart meyil 20

b) ədədi orta 50, standart meyil 5
ədədi orta 40, standart meyil 5

5. Bir qutu şirənin həcminin dəyişməsi normal paylanmaya uyğundur. Yoxlamalar göstərmişdir ki, A şirkətinin istehsal etdiyi məhsulda orta həcm 378 ml, standart meyil 1 ml, B şirkətinə aid məhsulda isə orta həcm yenə 378 ml olmaqla, standart meyil 3 ml-dir. Hər iki məhsulun üzərində həcmi 375 ml yazılmışdır
a) Hər bir şirkətdə məhsulun neçə faizi 375 ml və ondan az tutuma uyğundur?
b) Hər bir şirkətdə məhsulun neçə faizi 372 ml-dən çox, 382 ml-dən az tutuma uyğundur?
c) Aşağıdakı şəkildə A və B şirkətinə aid normal paylanma qrafikləri verilmişdir. Rəngli sahənin əks etdirdiyi məlumatı təqdim edin.



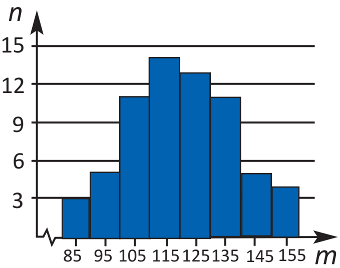
6. Şəkildə göstərilən normal paylanma 1800 gəncin əl-göz reaksiya vaxtını göstərir. Ümumi nəticələrə görə tərtib edilmiş normal paylanmada ədədi orta 0,35 saniyə, standart meyil 0,05 saniyədir.



a) Test edilən təxminən neçə nəfərin reaksiya vaxtı 0,25-lə 0,45 saniyə arasındadır?
b) Təsadüfi bir gənc seçilsə, onun əl-göz reksiya vaxtının 0,4 saniyədən çox olanlar arasından olma ehtimalı nə qədərdir?

7. İmtahan nəticələri normal paylanma ilə təqdim edilmişdir. Nəticələrə görə ədədi orta 70, standart meyil 4,5-dir. İmtahanda 360 nəfər iştirak etmişdir.
1) Təsadüfi bir nəfər seçilsə, onun:
a) 65-80 intervalında bal toplayanlar arasından olması ehtimalını;
b) 75-dən az olmayan bal toplayanlar arasından olması ehtimalını;
c) 62-dən az bal toplayanlar arasından olması ehtimalını tapın.
2) İmtahan verənlərin 90%-nin hansı intervalda bal topladıqlarını hesablayın.

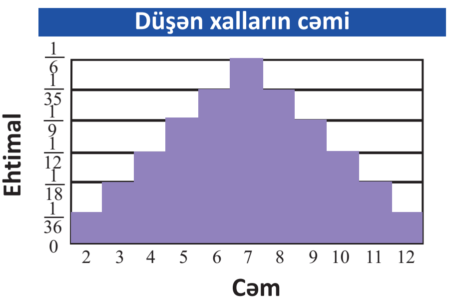
8. Verilən histoqram fermerin ətlik üçün saxladığı inəklərin sayı (n) və kütləsi (m) haqqında məlumatı əks etdirir.
a) Histoqrama görə ədədi orta və standart meyli tapın.
b) Normal paylanma əyrisini qurun.
c) Normal paylanma əyrisinə görə ehtimalın hesablanmasına aid iki məsələ yazın.



9. İki zər atılmışdır. Düşən xallar cəminin ehtimallarının paylanması cədvəl və histoqramla verilmişdir. Histoqram ehtimalın paylanmasının normal paylanma olduğunu göstərir.

Xallar Cəmi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ehtimal	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

a) Hansı cəmin düşmə ehtimalı daha yüksəkdir və neçəyə bərabərdir?
b) Cəmi 10-dan böyük olan xalların düşmə ehtimalı nə qədərdir?
c) İki zər atıldıqda "ən çox düşən xallar cəmi 8-dən kiçikdir", fikri doğrudurmu?



Qutu-qulp diaqramının qurulmasını aşağıdakı nümunə üzərində araşdıraq.

Nümunə 1. Təhlükəsizlik normalarından imtahan zamanı şirkətdəki 15 işçinin yığdığı ballar: 13 9 18 15 14 21 7 10 11 20 5 18 37 16 17 kimi olmuşdur. Bu məlumatı qutu-qulp diaqramı ilə təqdim edin.

Həlli: 1. Məlumatı artan sıra ilə düzməklə medianı müəyyən edək və Q_2 ilə işarələyək.

5 7 9 10 11 13 14	15	16 17 18 18 20 21 37
Aşağı yarımhissə	Q_2 Median	Yuxarı yarımhissə

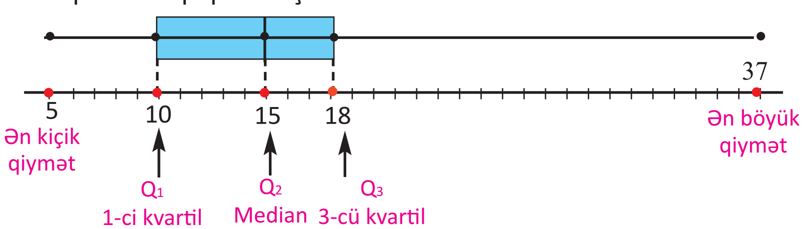
2. Mediandan sol tərəfdəki məlumatlar aşağı yarımhissəni, sağ tərəfdəki məlumatlar isə yuxarı yarımhissəni təşkil edir. Yəni median məlumatı iki yarımhissəyə ayırır.

3. Yarımhissələrin kvartil adlanan medianları (burada $Q_1 = 10$, $Q_3 = 18$) məlumatı 4 hissəyə ayırır.

5 7 9 10 11 13 14	15	16 17 18 18 20 21 37
Q_1 1-ci kvartil	Q_2 Median	Q_3 3-cü kvartil

4. Kvartillər arası dəyişmə müəyyən edilir: $Q_3 - Q_1 = 18 - 10 = 8$

5. Ədəd oxu üzərində verilən məlumatın ən kiçik, ən böyük qiymətlərini, kvartillərin və medianın qiymətlərini-5 mühüm nöqtəni - qeyd edək. Uzunluğu kvartillərarası dəyişməyə bərabər olan düzbucaqlı çəkək. Bu düzbucaqlı medianla iki hissəyə ayrılır. İndi isə ən böyük və ən kiçik qiymətlərlə uyğun kvartilləri birləşdirərək qutunun qulplarını çəkək.



Biz verilən məlumatlara uyğun qutu-qulp diaqramını qurduq. İndi isə diaqrama görə məlumatları təqdim edək.

Diaqramdan görünür ki, 15 nəfərin təxminən yarısı, 50%-i 10-18 arası bal toplamışdır. 25%-i 10-dan az, 25%-i 10-dan çox bal toplamışdır.

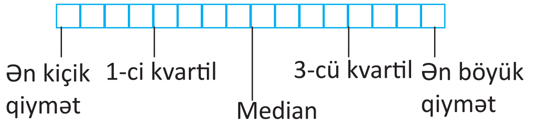
Sol və sağ qulpun uzunluqlarının müxtəlif olması uyğun hissədəki məlumatın qiymətləri fərqindən asılıdır.

Qutu-qulp diaqramını qurduqda verilən külliyyata görə 5 məlumat müəyyən edilir:

Median-Q_2, mediandan qiymətcə kiçik olan məlumatın toplandığı aşağı yarımhissənin medianı – kvartil Q_1, mediandan qiymətcə böyük olan məlumatın toplandığı yuxarı yarımhissənin medianı-kvartil Q_3, ən kiçik qiymət və ən böyük qiymət.

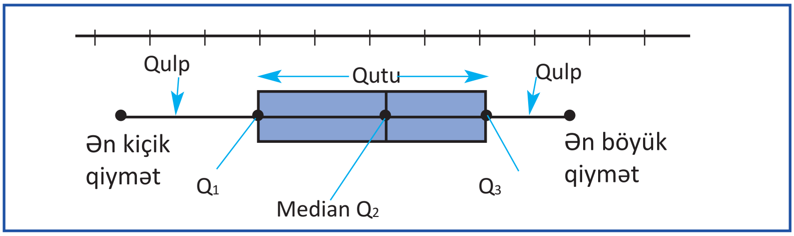
5 məlumat
- Ən kiçik qiymət
- 1-ci kvartil: Q_1
- Median: Q_2
- 3-cü kvartil: Q_3
- Ən böyük qiymət

Qutu–qulp diaqramında məlumatın sxematik təsviri



Qutu-qulp diaqramını qurma addımları

1. Üfüqi düz xətt çəkilir.
2. Məlumatın dəyişmə diapazonuna görə müəyyən miqyasla bölgülər qoyulur.
3. Müəyyən edilmiş 5 məlumat – Q_1,Q_2,Q_3, ən kiçik qiymət, ən böyük qiymət – düz xətt üzərində qeyd edilir.
4. Q_1-dən Q_3-ə qədər qutu çəkilir.
5. Ən kiçik qiymətdən Q_1-ə və Q_3-dən ən böyük qiymətə qədər isə qulplar çəkilir.



Nümunə 2. Paralimpiya qadın voleybol komandasının üzvlərinin yaşı aşağıdakı kimidir.

24, 30, 30, 22, 25, 22, 18, 25, 28, 30, 25, 27

Məlumatı qutu-qulp diaqramı ilə təqdim edin.

Həlli: **1.** Məlumatı düzək, medianı və kvartilləri müəyyən edək.

Ən kiçik qiymət → 18 22 22 24 25 25 25 27 28 30 30 30 ← Ən böyük qiymət

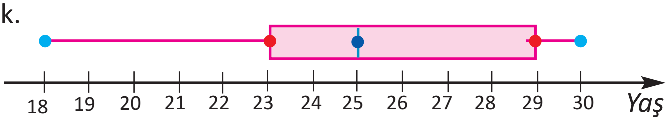
Birinci kvartil **Q_1= 23**

Median **Q_2 = 25**

Üçüncü kvartil **Q_3= 29**

2. Ədəd oxu çəkək və üzərində məlumatları qeyd edək.

3. Kvartillərin $Q_3 – Q_1$ = 29 –23 = 6 fərqinə görə qutunu çəkək və mediana görə düz xətlə onu iki yerə bölək. Qutunu ən böyük və ən kiçik qiymətlərlə birləşdirək.



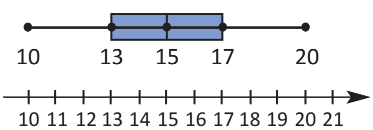
4. Diaqramın təqdimi. Basketbolçuların 50%-i 23-29 yaş arasındadır. 25%-i 23- yaşdan kiçik, 25%-i 29 yaşdan böyükdür. Qutunun qulpunun uzun və ya qısa olması 25%-lik bu hissələrdə qiymətlərin bir-birinə yaxın və ya uzaq olmasını göstərir. Məsələn, nümunədə sol qulp uzundur, sağ qulp qısadır. Çünki 25%-lik sol qulpda qiymətlər 18-23 arasında dəyişdiyi halda, sağ qulpa aid hissədə yalnız iki qiymətə–29-30-a rast gəlinir.

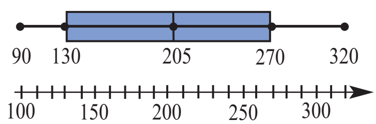
Məlumata daxil olan qiymətlərdən böyük fərqlə ayrılan qiymətlər kənaraçıxma adlanır. Kənaraçıxma aşağı və yuxarı kvartillərə görə də müəyyən edilir. Bu halda kvartillərin $Q_3 – Q_1$ fərqindən 1,5 dəfə çox və ya az olan qiymət kənaraçıxma kimi qəbul edilir.
Məsələn, nəzərdən keçirdiyimiz nümunədə aşağı kvartil 23, yuxarı kvartil 29-dur, kvartillərin fərqi 6-dır. $23 – 1{,}5 \cdot 6 = 14$ və $29 + 1{,}5 \cdot 6 = 38$ qiymətləri sərhəd qiymətlər hesab edilir. 38-dən böyük, eləcə də 14-dən kiçik qiymətlər bu məlumat üçün kənaraçıxma sayılır.

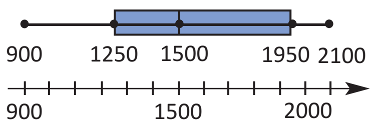
Öyrənmə tapşırıqları

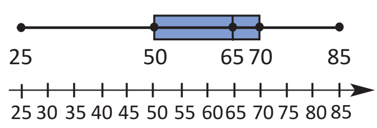
1. Hər bir qutu-qulp diaqramına görə məlumatları müəyyən edin.

a) ən kiçik qiyməti
b) ən böyük qiyməti
c) birinci kvartili, Q_1
d) medianı
e) üçüncü kvartili Q_3
f) kvartillər fərqini $Q_3 – Q_1$.

1)


2)


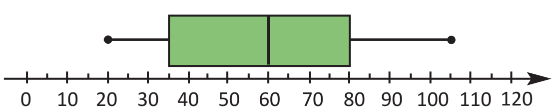
3)


4)


2. Məlumatı qutu-qulp diaqramı ilə göstərin və situasiyaya uyğun təqdim edin.

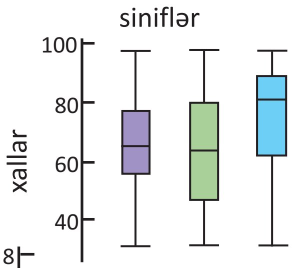
206, 173, 198, 241, 179, 236, 181, 231, 215, 222, 228

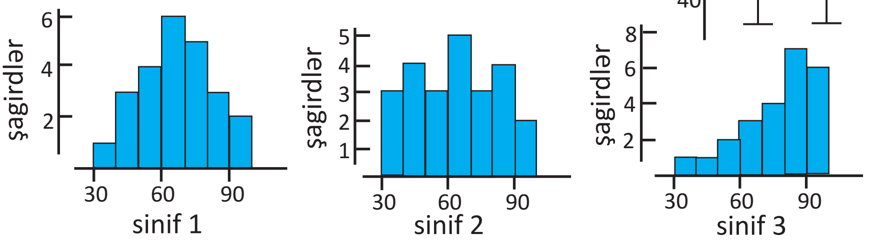
3. Qutu-qulp diaqramı bir sinfin qiymətləndirmə nəticələrini göstərir. Maksimum bal 120-dir.



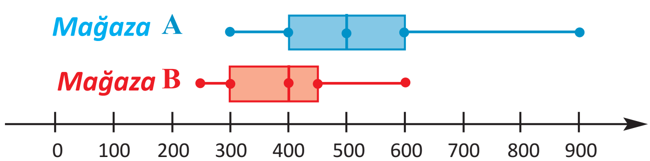
a) Nəticələrin medianı neçə bala uyğundur?
b) Ən yüksək nəticə ilə ən aşağı nəticə arasındakı fərqi tapın.
c) Sinifin neçə faizi 35-dən çox bal toplamışdır?
d) Kvartillərin fərqi($Q_3 - Q_1$) neçə baldır?
e) Ən çox bal toplayan şagirdlərin 25%-nin balı hansı intervalda dəyişir?
f) 63 bal toplayan şagird ən çox bal toplayan 25%-lik saya daxildirmi?
g) Sağ qulpun sol qulpdan uzun olmasını situasiyaya uyğun izah edin.

4. Qutu-qulp diaqramları histoqramlarla verilmiş məlumatları əks etdirir. Hansı histoqram hansı qutu-qulp diaqramına uyğundur?





5. Diaqram iki mağazada televizorların qiymətini göstərir. Bu mağazalardakı televizorların qiymətləri haqqında təqdimat hazırlayın.



6. Medianı 32, birinci kvartili 24, üçüncü kvartili 43 olan məlumatın kənaraçıxma sərhədini müəyyən edin.
63, 20, 12, 53 qiymətlərinin kənaraçıxma olub-olmadığını yoxlayın.

7. Amerika Birləşmiş Ştatlarının 45 prezidentinin yaşını göstərən gövdə-budaq diaqramını qutu-qulp diaqramı ilə təqdim edin.

4	2 3 6 6 7 7 8 9 9
5	0 0 1 1 1 1 2 2 4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 7 7 7 7 8
6	1 1 1 1 2 4 4 5 8 9
7	0

70 yaşında prezident seçilən Donald Tramp ən yaşlı, 42 yaşlı Teodor Ruzvelt isə ən gənc prezident hesab edilir. Onların yaşı kənaraçıxma hesab edilə bilərmi?

Gündəlik həyatda müxtəlif hadisələri müşahidə edir, çoxsaylı təcrübə, sınaq və müşahidələrin nəticələri ilə rastlaşırıq.
Sınaq, təcrübə və ya müşahidənin hər bir ayrılmayan nəticəsinə **elementar hadisə** deyilir. Bütün elementar hadisələr çoxluğuna isə elementar hadisələr fəzası (EHF) və ya sınaq fəzası deyilir. EHF adətən U hərfi ilə işarə edilir. Məsələn, bir zərin atılma sınağında E_k ilə yuxarı üzdə k xal düşməsi hadisəsini işarə etsək, $U = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ olur.
Elementar hadisələr fəzasının ixtiyari alt çoxluğuna hadisə deyilir. Məsələn, zərin atılmasında A "cüt xalın düşməsi" hadisəsi olarsa, $A = \{E_2, E_4, E_6\}$.
EHF-nın elementləri sayı n olarsa, alt çoxluqlarının sayı 2^n olduğundan, mümkün hadisələrin sayı da 2^n olur. Hər bir hadisə elementar hadisələr fəzasının alt çoxluğu olduğundan, çoxluqlar üçün təyin edilən əməllər hadisələr üçün də eyni qayda ilə təyin edilir. Bu zaman $\varnothing$ boş çoxluq mümkün olmayan hadisə, U isə yəqin hadisə olacaqdır.
Bütün nəticələri A və ya B hadisələrindən heç olmasa birinə daxil olan hadisəyə A və B **hadisələrinin birləşməsi** deyilir və $A \cup B$ kimi işarə edilir.
Nəticələri həm A, həm də B hadisəsinə daxil olan hadisəyə A və B **hadisələrinin kəsişməsi** deyilir və $A \cap B$ kimi işarə edilir.
Ortaq nəticələri olmayan hadisələrə **uyuşmayan hadisələr** deyilir.
A və B hadisələri uyuşmayandırsa, $A \cap B = \varnothing$.

A hadisəsinə daxil olmayan bütün nəticələr çoxluğuna A hadisəsinə **əks**, yaxud **tamamlayıcı hadisə** deyilir və $\overline{A}$ kimi işarə edilir.

Sınağın B hadisəsinin baş verməsi A hadisəsini doğurursa, B-yə A hadisəsi üçün **əlverişli hadisə** deyilir.

Eyniimkanlı elementar nəticələri olan sınaqda ixtiyari A hadisənin ehtimalı bu hadisə üçün əlverişli nəticələr sayının bütün elementar nəticələrin sayına olan nisbətinə bərabərdir.

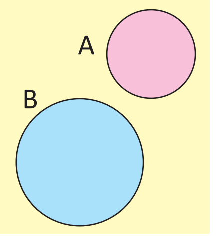
$$P(A) = \frac{\text{əlverişli nəticələr sayı}}{\text{mümkün nəticələr sayı}}$$

Ehtimal məsələlərini həll edərkən aşağıdakılara diqqət edin:
1. Hər hansı təsadüfi A hadisəsi üçün $0 \le P(A) \le 1$ doğrudur.
2. Sınağın mümkün elementar hadisələrinin ehtimalları cəmi 1-ə bərabərdir: $\sum P(E_i) = 1$
3. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ düsturu doğrudur.

Uyuşmayan iki hadisənin baş vermə ehtimalı.
İstənilən uyuşmayan $A \subset U$ və $B \subset U$ hadisələri üçün

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

düsturu doğrudur.



Nümunə. Torbada sarı, qırmızı və ağ rəngli şarlar var. Ağ şarın çıxma ehtimalı 0,25, qırmızı şarın çıxma ehtimalı 0,30-dur. Torbadan təsadüfən bir şar çıxarsanız, onun sarı rəngdə olması ehtimalını hesablayın.
Həlli: Torbadan bir şar çıxarılsa, onun ağ və ya qırmızı rəngdə olması ehtimalı P(ağ və ya qırmızı) = 0,25 + 0,30 = 0,55 olar.
Torbadan sarı şarın çıxması ağ və ya qırmızı şarın çıxmaması hadisəsi deməkdir. Deməli, P(sarı) = P (ağ və ya qırmızı şarların çıxmaması)
Bu hadisələr uyuşmayan hadisələrdir və onların kəsişməsi yoxdur. Hadisənin baş verməsi ilə baş verməməsinin ehtimalları cəmi 1-ə bərabər olmalıdır.
Deməli, P(sarı) = 1 – P (ağ və ya qırmızı) = 1 – 0,55 = 0,45.

Öyrənmə tapşırıqları

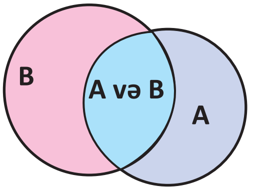
1. Hər bir hadisə üçün elementar hadisələr fəzasını yazın:

a) İki qəpik pulun birgə atılma sınağı;
b) Ailədəki 3 uşağın oğlan və ya qız olması.

2. İstehlakçıların hüquqlarını müdafiə təşkilatının verdiyi məlumata görə, yeni alınmış avtomobillərdən bir il ərzində 17%-nin bir dəfə, 7%-nin iki dəfə, 4%-nin isə 3 dəfədən çox təmirə ehtiyacı olur. Bu məlumata görə təsadüfi seçilmiş bir avtomobilin təmirə:
a) heç müraciət etməməsi;
b) ən çoxu bir dəfə müraciət etməsi;
c) heç olmasa bir dəfə müraciət etməsi ehtimalını tapın.

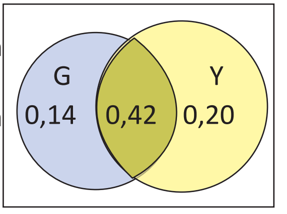
3. Qan qrupları O (I qrup), A (II qrup), B (III qrup) və AB (IV qrup) kimi işarə edilir. Qırmızı aypara təşkilatının verdiyi məlumata görə, qəzanın baş verdiyi şəhərdə əhaliinin 45%-i O, 40% -i A, 11%-i B, qalanları isə AB qrupuna aiddirlər.
1) Könüllü qan verən şəxsin qan qrupunun:
a) AB (IV qrup) olması ehtimalını; b) A (II qrup) və ya B (III qrup) olması ehtimalını; c) O (I qrup) olmaması ehtimalını tapın.

4. Qutuda 7 ağ, 3 qara şar var. Təsadüfən çıxarılan 2 şarın ən azı birinin ağ rəngdə olması hadisəsinin ehtimalını tapın.



İki hadisənin baş vermə ehtimalı.
Ümumi halda istənilən $A \subset U$ və $B \subset U$ hadisələri üçün $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ düsturu doğrudur.

Nümunə. Tələbələrin 56%-i tələbə şəhərciyində yaşayır, 62%-i isə burada ancaq yemək yeyir, 42%-i isə şəhərcikdə həm yaşayır, həm də yemək yeyir. Tələbələr arasından seçilmiş bir nəfərin:
a) şəhərcikdə yaşayan, lakin orada yemək yeməyən tələbə olması ehtimalı;
b) nə şəhərcikdə yaşayan, nə də orada yemək yeyən tələbə olması ehtimalı neçədir?



Həlli: a) G ={şəhərcikdə yaşayan tələbələr}, Y ={ şəhərcikdə yemək yeyən tələbələr} olsun. Şərtə görə $P(G \cap Y) = 0{,}42$-dir.
$P(G) = 0{,}56$ olduğundan, $P(G \cap \overline{Y}) = 0{,}56 - 0{,}42 = 0{,}14$;
b) $P(\overline{G} \cap Y) = 0{,}62 - 0{,}42 = 0{,}20$; $0{,}14 + 0{,}42 + 0{,}20 = 0{,}76$ cəmi seçilmiş tələbənin şəhərcikdə yaşayan və ya orada yemək yeyən tələbə olması ehtimalını göstərir. Bir tələbənin nə şəhərcikdə yaşayan, nə də orada yemək yeyən tələbə olması ehtimalı isə $P(\overline{G} \cap \overline{Y}) = 1 - 0{,}76 = 0{,}24$ olar.

Şərti ehtimal. Bəzən hadisənin baş verməsi əlavə şərtlər daxilində baş verə bilər. Məsələn, zərin atılma sınağında düşən xalın cüt olması məlumdursa, artıq hər bir cüt xalın düşmə ehtimalı $\frac{1}{3}$ olacaq. Halbuki bu məlumat olmadıqda hər bir xalın, o cümlədən cüt xalın düşmə ehtimalı $\frac{1}{6}$ idi. Deməli, hansısa bir hadisənin ehtimalını hesablayarkən ona təsir edə bilən başqa bir hadisəni də nəzərə almaq lazım gələ bilər.
B hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində A hadisəsinin baş vermə ehtimalına **şərti ehtimal** deyilir və $P(A|B)$ kimi işarə olunur.

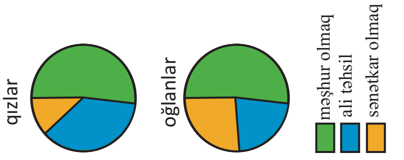
Nümunə. Psixoloqlar 1/3-i kənd, 1/3-i şəhər ətrafı və 1/3-i şəhər mərkəzindəki məktəblərdən olmaqla təsadüfi seçilmiş 478 şagird arasında aşağıdakı suallarla sorğu aparmışlar. Suallardan biri və seçimlər aşağıdakı kimidir.

Sizin üçün hansı daha mühümdür?
Məşhur olmaq **Ali təhsilli olmaq** **Sənətkar olmaq**

Sorğunun nəticələri aşağıdakı kimi olmuşdur:

	Məşhur olmaq	Ali təhsilli olmaq	Sənətkar olmaq	Cəmi
Oğlanlar	117	50	60	227
Qızlar	130	91	30	251
Cəmi	247	141	90	478

● Rəyi soruşulanlar arasından təsadüfi seçilmiş birinin:



qız şagird olması ehtimalı $P(\text{qız}) = \dfrac{251}{478} \approx 0{,}525;$

qız şagird və məşhur olmaq istəyən olması ehtimalı $P(\text{məşhur}|\text{qız}) = \dfrac{130}{478} \approx 0{,}271;$

sənətkar olmaq istəyən şagird olması ehtimalı $P(\text{sənətkar}) = \dfrac{90}{478} \approx 0{,}188.$

● Qızlar arasından bir nəfər seçilsə, onun sənətkar olması ehtimalı $P(\text{sənətkar}|\text{qız}) = \dfrac{30}{251} \approx 0{,}120$

● Oğlanlar arasından bir nəfər seçilsə, onun sənətkar olması ehtimalı $P(\text{sənətkar}|\text{oğlan}) = \dfrac{60}{227} \approx 0{,}264$

Yuxarıda hesabladığımız ehtimalların bəzisini yenidən aşağıdakı kimi hesablayaq. Məsələn,

$$P(\text{sənətkar}|\text{qız}) = \frac{30/478}{251/478} = \frac{30}{251}$$

Deməli, $$P(\text{sənətkar}|\text{qız}) = \frac{P(\text{qız və sənətkar})}{P(\text{qız})}$$ və ya

$$P(\text{qız}|\text{ali təhsil}) = \frac{91/478}{141/478} = \frac{91}{141}$$

Deməli, $$P(\text{qız}|\text{ali təhsil}) = \frac{P(\text{ali təhsil və qız})}{P(\text{ali təhsil})}$$

Bu nümunələri ümumiləşdirsək, şərti ehtimal düsturu aşağıdakı kimi olacaq:

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ və } B)}{P(B)} \quad \text{və ya} \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{burada } P(B) > 0.$$

Şərti ehtimal düsturundan alırıq:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$ *Ehtimalların vurulma qaydası*

Nümunə. Ailədə iki uşaq var. Uşaqlardan biri oğlandırsa, hər iki uşağın oğlan olması ehtimalını tapın.

Həlli: oğlanı - o, qızı - q kimi işarələsək, elementar hadisələr fəzası
U = {oo, oq, qo, qq} olar.
Hər iki uşağın oğlan olması hadisəsini E, heç olmasa birinin oğlan olması hadisəsini F hərfi ilə işarə edək. Onda

$$E = \{oo\}, \quad F = \{oo, oq, qo\}, \quad E \cap F = \{oo\}$$

$$P(F) = \frac{3}{4}, \quad P(E \cap F) = \frac{1}{4}, \quad P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Şərti ehtimal düsturu hadisələrin asılı olması və ya asılı olmaması ilə bağlı deyil. İstənilən hadisənin ehtimalını bu düstura görə hesablamaq olar.

Nümunə. Tələbə şəhərciyində yataqxananın 3-cü mərtəbəsi ən komfortlu sayılır və burada 3 boş otaq var. Cəmi 12 boş otaq var və otaqlar tələbələr arasında nömrə çəkmək yolu ilə bölüşdürülür. Əvvəlcə Elmir, sonra dostu nömrə çəkdi. Onların hər ikisinin 3-cü mərtəbəyə düşməsi ehtimalını tapın.
Həlli:

Aydındır ki, Elmirin çəkdiyi nömrə geri qaytarılmır və dostu artıq 12 deyil, 11 kartdan istifadə edir. Elmirin 3-cü mərtəbəni seçmə ehtimalı $\frac{3}{12}$ -dür.
Elmir istədiyi mərtəbəni seçmişsə, dostunun şansı $\frac{2}{11}$ olur.

Elmirin 3-cü mərtəbəni seçməsi şərti daxilində dostunun da 3-cü mərtəbəni seçmə ehtimalını şərti ehtimal düsturundan istifadə etməklə hesablayaq.

$$P(\text{El. və D}) = P(E) \times P(D|\text{El.}) = \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} \approx 0,045$$

$P(A|B) = P(A)$ olarsa, yəni B hadisəsinin baş verməsi A hadisəsinin ehtimalını dəyişdirmirsə, A və B hadisələrinə **asılı olmayan hadisələr** deyilir. A və B hadisələri asılı olmadıqda $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ münasibəti doğrudur.
Əgər A və B asılı olmayan hadisələrdirsə, onda $\overline{A}$ ilə B də asılı deyil.

Nümunə. Ərzaq təminatı ilə məşğul olan şirkət hər səhər yeməkxanaya təzə çörək gətirməlidir. Yeməkxana müdiri bunun ehtimalının 0,85 olduğunu deyir. Siz bu yeməkxanada 4 gün dalbadal səhər yeməyi yeməli olsanız, hər səhər yeməyində təzə çörəyin olması ehtimalını tapın.
Həlli: Hər səhər təzə çörəyin gətirilməsi hadisəsi digər günlərdə təzə çörək gətirilməsindən asılı olmadığından axtarılan ehtimal
$0,85 \times 0,85 \times 0,85 \times 0,85 \approx 0,522$ olur.

Nümunə. Torbada 3 ağ, 7 qara kürə var. Torbaya qaytarılmadan iki kürə ardıcıl çıxarılır. İkinci kürənin ağ olması ehtimalını tapın.
Həlli: A_1 və A_2 ilə uyğun olaraq torbadan çıxan 1-ci və 2-ci kürənin ağ olması hadisəsini işarə edək. A_2 hadisəsi o vaxt baş verir ki, ya hər iki kürə ağ rəngdədir, ya da 1-ci çıxan qara, 2-ci ağ rəngdədir.
Deməli, $A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap A_2)$
Onda $P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2|\overline{A_1}) =$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{10} \text{ olar.}$$

Öyrənmə tapşırıqları

1. Ailədə iki uşaq var. Verilən şərtlərə görə hər iki uşağın oğlan olması ehtimalını hesablayın: a) ən kiçik uşaq qızdır; b) biri qızdır.

2. Həkimə müraciət edən uşaqların yetmiş faizində üşütmə halları, otuz faizində isə boğaz ağrıları şikayətləri olur. Təsadüfi seçilmiş bir uşaqda həm üşütmə, həm də boğaz ağrısı olması ehtimalını hesablayın.

3. Tutaq ki, hər hansı bir şəxsin 80 yaşa qədər yaşaması (B hadisəsi) ehtimalı
$P(B) = 0{,}3$, 90 yaşa qədər yaşaması (A hadisəsi) ehtimalı isə
$P(A) = P(A \cap B) = 0{,}2$ -dir.
a) 80 yaşına çatmış şəxsin 90 yaşa qədər yaşaması ehtimalını hesablayın.
b) $P(B|A)$ hadisəsinin ehtimalı 1-ə bərabərdir. Bu fikri əsaslandırın və situasiyaya uyğun izah edin.

4. Zər üç dəfə atılmış, A və B hadisələri aşağıdakı şərtlə müəyyən edilir.
A hadisəsi: hər üçüncü atışda 4 xal düşmüşdür;
B hadisəsi: hər birinci atışda 6 xal, hər ikinci atışda 5 xal düşmüşdür.
B hadisəsinin baş verməsi şərtilə A hadisəsinin baş verməsi ehtimalını hesablayın.

5. Avtomobil təkərləri istehsal edən şirkət məhsullarının 2%-nin defektli ola biləcəyi haqqında məlumat yaymışdır. Əgər siz bu şirkətdən 4 təkər almışsınızsa, onlardan ən azı birinin defektli olması hadisəsinin ehtimalını tapın.

6. Üzərinə 1, 2, 3, 4, 5 rəqəmləri yazılmış eyni formalı kartlardan ikisi ardıcıl olaraq qutudan çıxarılır. İlk çıxarılan kartdakı rəqəm:
a) cütdürsə; b) təkdirsə,
ikinci çıxarılan kartdakı rəqəmin tək olması ehtimalını tapın.

7. Birinci atıcının bir atəşlə hədəfi vurma ehtimalı 0,8, ikincininki isə 0,6-dır. Atıcılar bir-birindən asılı olmadan hədəfə bir dəfə atəş açırlar. Aşağıdakı hadisələrin ehtimalını tapın:
a) hədəfin yalnız birinci atıcı tərəfindən vurulması;
b) hədəfin hər iki atıcı tərəfindən vurulması;
c) hədəfin vurulmaması;
d) hədəfin atıcılardan biri tərəfindən vurulması;
e) hədəfin atıcılardan heç olmasa biri tərəfindən vurulması.

8. İki eyni qutunun birincisində 2 ağ, 1 qara, ikincisində isə 1 ağ, 4 qara kürə var. Qutulardan biri təsadüfən seçilir və bir kürə çıxarılır. Çıxarılan kürənin ağ olması ehtimalını tapın.

1. Verilən külliyyata görə ədədi orta, dispersiya və standart meyli hesablayın.

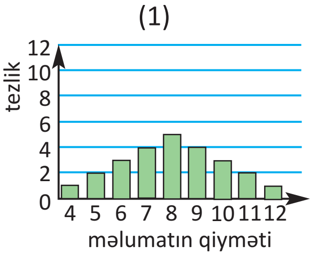
a) 11 10 8 4 6 7 11 6 11 7

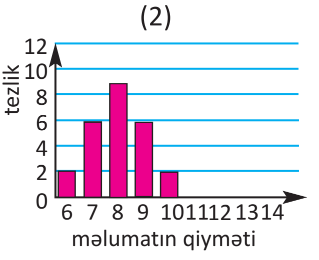
b) 13 23 15 13 18 13 15 14 20 20 18 17 20 13

c) 15 8 12 5 19 14 8 6 13

d) 24 26 27 23 9 14 8 8 26 15 15 27 11

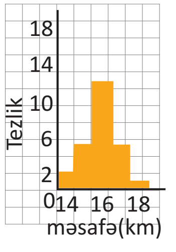
2. Aşağıdakı qrafiklərdə məlumat simmetrik paylanmışdır.
a) Hansı statistik məlumatda standart meylin daha böyük olduğunu hesablamalar aparmadan müəyyən edin.
b) Hər bir hal üçün ədədi orta və standart meyli hesablayım.
c) Normal paylanma diaqramını çəkin.



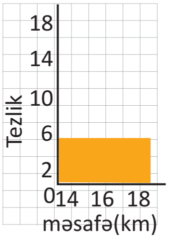


3. Hesablama aparmadan hansı qrafikdə verilmiş məlumatda standart meylin böyük olduğu haqqında fikrinizi söyləyin.

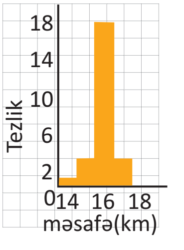
a)



b)



c)



4. Mağazada satılan hazır yeməklər vakuumla qablaşdırılmışdır. Yeməklərin saxlanma müddəti normal paylanmaya uyğun olmaqla orta hesabla 180 gün, standart meyil isə 30 gündür. Yeməklərin neçə faizinin saxlanma müddəti:
a) 150 gün ilə 210 gün arasındadır;
b) 180 gün ilə 210 gün arasındadır;
c) 90 gündən azdır;
d) 210 gündən çoxdur?

5. Torbada 10 qara, 5 ağ şar var. Torbaya qaytarılmadan ardıcıl çıxarılmış iki şarın qara rəngdə olması ehtimalını hesablayın.

6. 28 nəfərin gündə neçə saat televizora baxdıqları haqqında sorğunun nəticəsini qutu və qulp diaqramı ilə təqdim edin.

2	4	3	1	5	7	1	4	3	2	6	4	5	5
2	0	3	5	9	4	5	2	1	3	6	7	2	4

a) Rəyi soruşulanların neçə faizi televizora 4 saatdan çox baxır?
b) Rəyi soruşulanlar arasından təsadüfi bir nəfər seçilsə, onun televizora 2 saatdan çox baxmayanlardan olması ehtimalı nə qədərdir?

7. Məktəbdə 1000 şagird təhsil alır. Onlardan 430 nəfəri qızlardır. Qızların 10%-i 8-ci sinifdə təhsil alanlardır. Əgər təsadüfi bir şagird seçilsə, onun 8-ci sinifdə oxuyan qız şagird olması ehtimalını tapın.

8. Tezlik cədvəli plastik oyuncaqlar istehsal edən şirkətdə işləyən təsadüfi seçilmiş 100 nəfərin həftəlik maaşını göstərir.
a) Tezlik cədvəlindəki məlumatı normal paylanma əyrisi ilə təqdim edin.
b) Təsadüfi seçilmiş bir nəfərin həftəlik qazancının 170 manatdan çox olanlar arasından olması ehtimalını hesablayın.

Siniflər	Tezlik
150 – 158	5
159 – 167	16
168 – 176	20
177 – 185	21
186 – 194	20
195 – 203	15
204 – 212	3

9. İki zər atılmışdır. Onlardan birində 3, digərində 5 xalın düşməsi ehtimalını tapın.

10. Hər birinin üzərinə Azərbaycan əlifbasının bir hərfi yazılmış kartların yığıldığı qutudan təsadüfi 2 kart çəkilmişdlr. Ehtimalları hesablayın.
a) P(2 sait) b) P(2 samit) c) P(1 sait, 1 samit)

11. Aşağıdakı qiymətlərə görə məlumatın paylanma formasını müəyyən edin.

a) ədədi orta = 35 median = 40 moda = 45
b) ədədi orta = 50 median = 51 moda = 38

12. Normal paylanmada ədədi orta 27, standart meyil 5-dir.
Təsadüfi bir qiymət seçilsə, onun:
a) 22 və 32 arasında olması; b) ən azı 37 olması;
c) ən çoxu 32 olması; d) 27 ilə 37 arasında olması
hadisəsinin ehtimalını tapın.

10

Tənliklər, bərabərsizliklər, tənliklər sistemi

- İrrasional tənliklər
- İrrasional bərabərsizliklər
- Üstlü tənliklər sistemi
- Loqarifmik tənliklər sistemi
- Ümumiləşdirici tapşırıqlar

Bunları bilmək maraqlıdır!

Paleontoloqlar müxtəlif canlıların qalıqları və onların fəaliyyətinin izləri əsasında Yerin geoloji təkamülünü, canlı aləmini və onun inkişaf qanunauyğunluqlarını öyrənirlər.
Bu zaman onlar çoxlu sayda müxtəlif növ tənlikləri və tənliklər sistemini (üstlü, loqarifmik və s.) həll etməli olurlar.

İrrasional tənliklər

Radikal işarəsi altında (yaxud kəsr üstlü qüvvətə yüksəldilmiş) dəyişəni olan tənliyə irrasional tənlik deyilir.

Nümunələr. $\sqrt[3]{x+2} - x = 3$; $\sqrt{x-1} = 5$

İrrasional tənlikləri həll edərkən, adətən qüvvətə yüksəltmə əməli tətbiq olunur. Bu zaman aşağıdakıları nəzərə almaq lazımdır:

- İrrasional tənliyin həlli həqiqi ədədlər çoxluğunda axtarılır.
- Cüt dərəcədən radikalların hesabi, tək dərəcədən radikalların isə həqiqi qiymətləri götürülür.
- Tənliyin hər iki tərəfini tək dərəcədən qüvvətə yüksəltdikdə onunla eynigüclü tənlik alınır.
- Cüt dərəcədən qüvvətə yüksəltmə aparıldıqda alınmış tənlikdə dəyişənin mümkün qiymətləri çoxluğu genişlənə bilər. Nəticədə alınmış tənliyin köklərinin bəziləri verilmiş irrasional tənliyi ödəməyə bilər. Ona görə də cüt dərəcədən qüvvətə yüksəltmə aparıldıqda dəyişənin tapılmış qiymətlərinin verilmiş tənliyi ödəyib-ödəmədiyini yoxlamaq lazımdır.

Nümunə 1. $\sqrt{x-3} + x = 5$ tənliyini həll edin.

Həlli: $\sqrt{x-3} = 5 - x$

$x - 3 = (5 - x)^2$

$x^2 - 11x + 28 = 0$

$x_1 = 4$, $x_2 = 7$

Radikal olan ifadəni tənliyin bir tərəfində saxlayaq, tənliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək, sadələşdirək və həll edək.

Yoxlama. $x = 4$ olduqda $\sqrt{4-3} + 4 = 5$; $5 = 5$

$x = 7$ olduqda $\sqrt{7-3} + 7 = 9$; $9 \neq 5$

$x = 7$ verilmiş tənliyi ödəmir. Cavab: $\{4\}$

Qeyd edək ki, $\sqrt{x-3} = 5 - x$ tənliyini onunla eynigüclü $\begin{cases} x - 3 = (5-x)^2, \\ 5 - x \geq 0 \end{cases}$ sisteminə gətirməklə də həll etmək olar.

Bu üsulla həlli siz yerinə yetirin!

Öyrənmə tapşırıqları

1. Tənlikləri həll edin.

a) $\sqrt{x+3} - 3 = 1$ b) $\sqrt{3t+4} + 2 = 1$ c) $\sqrt{x^2-7} - 1 = 2$

d) $\sqrt[3]{1-2x} + 1 = 4$ e) $\sqrt[4]{x^2+16} = \sqrt{5}$ f) $\sqrt{5 + \sqrt[3]{x+2}} = 3$

g) $\sqrt{x-2} + x = 8$ h) $\sqrt{x^2-x-4} = x + 2$ i) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$

2. Tənlikləri müxtəlif üsullarla həll edin.

a) $\sqrt{x^2+4x+4} = 3$ b) $\sqrt{x^2-2x+1} = 2x + 1$ c) $\sqrt{x^2+6x+9} = x + 5$

3. Tənliyi ödəyən neçə həqiqi ədəd var?

a) $(x^2-1)\sqrt{x+5} = 0$ b) $(x^2-4)\sqrt{x-1} = 2x^2 - 8$ c) $\sqrt{4-x^2} - \sqrt{x-4} = 3$

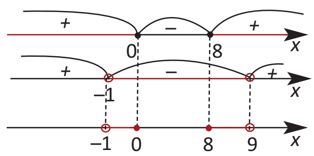
İrrasional bərabərsizliklər

Radikal işarəsi altında dəyişəni olan bərabərsizliyə irrasional bərabərsizlik deyilir. İrrasional bərabərsizliklərin də həlli həqiqi ədədlər çoxluğunda axtarılır və kökün, bərabərsizliklərin xassələrindən istifadə etməklə rasional bərabərsizliklər sisteminin həllinə gətirilir.

Nümunə. $\sqrt{x^2-8x}<3$ bərabərsizliyini həll edin.
Həlli: Verilmiş bərabərsizliyin həlli dəyişənin mümkün qiymətləri şərti, yəni $x^2-8x\geq 0$ şərti daxilində hər iki tərəfi kvadrata yüksəltməklə $x^2-8x<9$ bərabərsizliyinin həllinə, başqa sözlə, onunla eynigüclü aşağıdakı sistemin həllinə gətirilir:
$$\begin{cases} x^2-8x\geq 0,\\ x^2-8x<9\end{cases}$$

Sistemə daxil olan hər bir bərabərsizliyi intervallar üsulu ilə həll edib, bu həllərin kəsişməsini tapaq:

$$\begin{cases} x^2-8x\geq 0,\\ x^2-8x<9\end{cases} \qquad \begin{cases} x(x-8)\geq 0,\\ (x-9)(x+1)<0\end{cases}$$



Cavab: $(-1;0]\cup[8;9)$

Nümunə: $\sqrt{x+3}>x+1$ bərabərsizliyini həll edin.
Həlli: Sağ tərəfin işarəsinə görə iki hala baxaq.

1) $x+1<0$ olarsa, bərabərsizlik $x+3\geq 0$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün ödənir. Deməli,
$$\begin{cases} x+1<0,\\ x+3\geq 0\end{cases}$$
sistemini həll etməliyik.
Onun həlli $[-3;\ -1)$ aralığıdır.

2) $x+1\geq 0$ olarsa, verilmiş bərabərsizliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldə bilərik, yəni bu halda
$$\begin{cases} x+1\geq 0,\\ x+3>(x+1)^2\end{cases}$$
sistemini alarıq. Bu sistemin həlli $[-1;\ 1)$ aralığıdır.

Verilmiş bərabərsizliyin həlli $[-3;\ -1)\cup[-1;\ 1)=[-3;\ 1)$ olur.

Öyrənmə tapşırıqları.

4. Bərabərsizlikləri həll edin.

1) $\sqrt{x-3}\geq 2$ 2) $\sqrt{2t-3}>1$ 3) $\sqrt{2x+3}<3$ 4) $\sqrt{z-4}\leq 2$
5) $\sqrt{x^2+15x}>4$ 6) $\sqrt{x^2-3x}\leq 2$ 7) $\sqrt[3]{x^2-2x}>2$ 8) $\sqrt[4]{x^2-3x}<\sqrt{2}$
9) $(x^2-4x)\cdot\sqrt{3-x}\leq 0$ 10) $\sqrt{x^2-6x+8}\geq -1$ 11) $\sqrt{x^2-x-2}>0$
12) $\sqrt{x^2-6x+9}\leq 2$ 13) $\sqrt{y^2-4y+3}>3$ 14) $\sqrt{x^2+18}\geq 2-x$
15) $\sqrt{24-5x}<x$ 16) $\sqrt{x+2}>x$ 17) $\sqrt{x^2-2x}>1-x$

Üstlü tənliklər sisteminin həlli digər tənliklər sisteminin həllindən fərqlənmir. Burada əzəvetmə, cəbri toplama, qrafik həll üsulu və s. tətbiq olunur.

Nümunə1: $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin.

Həlli: Verilən tənliklər sistemini

$\begin{cases} 9^{x+y} = 9^3, \\ 3^{x-y-1} = 3^0 \end{cases}$ şəklində yazaraq, sistemə daxil olan tənliklərin hər birində qüvvət üstlərini bərabərləşdirməklə $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ xətti tənliklər sistemini alarıq. Bu sistemin həlli (2;1) cütüdür.

Nümunə 2: $\begin{cases} x - y = 1, \\ 2^x + 2^y = 12 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin.

Həlli: Sistemin birinci tənliyindən $x = y + 1$ kimi tapıb ikinci tənlikdə yazmaqla y-ə nəzərən $2^{y+1} + 2^y = 12$ tənliyini alarıq, onu da $2^y \cdot (2 + 1) = 12$

və ya $2^y = 4$ şəklində yazmaq olar. Buradan $y = 2$ və onda $x = 2 + 1 = 3$ olar.

Beləliklə, verilmiş tənliklər sisteminin həlli (3; 2) cütüdür.

Nümunə 3: $\begin{cases} 2^{y-x} - 5^y = 3, \\ 2^{y-x} + 5^{y-1} = 9 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin.

Həlli: Sistemin I tənliyini (–1)-ə vurub II ilə tərəf-tərəfə toplasaq, $5^y + 5^{y-1} = 6$ tənliyini alarıq. Onu da $5^y(1 + \frac{1}{5}) = 6$ şəklində yazaq.

Buradan $y = 1$ tapılır. $y = 1$ qiymətini sistemin I tənliyində yerinə yazaq:

$$2^{1-x} - 5 = 3; \quad 2^{1-x} = 8; \quad 1 - x = 3; \quad x = -2$$

Deməli, verilmiş tənliklər sisteminin həlli (–2; 1) cütüdür.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Tənliklər sistemini həll edin.

a) $\begin{cases} 2^{x+y} = 32, \\ 5^{x+3y} = 0{,}2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x \pi 3^y = 18, \\ 2^y \pi 3^x = 12 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3^x - 2^{x+y} = 1, \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4^{x-y} = 128, \\ 3^{3x+2y-3} = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3^x - 3^y = 6, \\ 3^{x+y} = 27 \end{cases}$

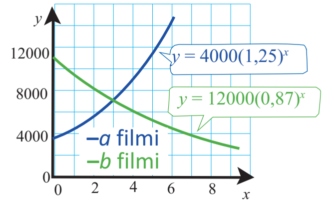
f) $\begin{cases} 2^{y-x} - 5^y = 3, \\ 2^{y-x} + 5^{y-1} = 9 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 36, \\ x - y = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2^x + 3^{y-1} = 17, \\ 2^{x+2} - 3^y = 5 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 3^x + 3^y = 10, \\ x - y = 2 \end{cases}$

2. Şəkildəki qrafikdə 2004-cü ildən nümayiş olunan iki müxtəlif filmə baxan tamaşaçıların sayının (y) illərin sayından (x) asılılığı verilmişdir. Filmlərin tamaşaçılarının dəyişməsi və bu qrafiklərin kəsişmə nöqtəsi haqqında fikirlərinizi yazın.



Loqarifmik tənliklər sisteminin həllində də əvəzetmə, cəbri toplama və s. üsullar tətbiq edilir və loqarifmik funksiyanın məlum xassələrindən istifadə olunur. Bunu nümunələr üzərində izah edək:

Nümunə: $\begin{cases} x + y = 6, \\ \log_2 x + \log_2 y = 3 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin.

Həlli: Aydındır ki, $x > 0$, $y > 0$ olmalıdır.

Sistemin birinci tənliyindən $y = 6 - x$, ikinci tənliyindən isə $\log_2 (xy) = 3$ və ya $xy = 8$ alarıq.

Beləliklə, $\begin{cases} y = 6 - x, \\ xy = 8 \end{cases}$ sistemini alırıq.

$y = 6 - x$ əvəzləməsini $xy = 8$ tənliyində yerinə yazmaqla $x^2 - 6x + 8 = 0$ kvadrat tənliyi alınır. Onun kökləri $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ ədədləridir. Onda əvəzləmədən $y_1 = 4$, $y_2 = 2$ tapılır. Verilmiş sistemin həlli (2; 4) və (4;2) cütləridir.

Nümunə: $\begin{cases} \log_2 (x - y) = 1, \\ 2^x \cdot 3^{y+1} = 72 \end{cases}$ tənliklər sistemini həll edin.

Həlli: Sistemin birinci tənliyindən $x - y = 2$ alarıq. Buradan $x = 2 + y$ əvəzləməsi aparmaqla sistemin ikinci tənliyini $2^{2+y} \cdot 3^{y+1} = 72$ və ya $3^{y+1} \cdot 2^{y+1} = 36$ şəklinə gətirmək olar. Onu da $6^{y+1} = 6^2$ şəklində yazıb alırıq ki, $y = 1$. Onda $x = 3$. Beləliklə, (3; 1) cütü verilmiş sistemin həllidir.

Öyrənmə tapşırıqları

1. Tənliklər sistemini həll edin.

a) $\begin{cases} x - y = 6, \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 6, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_2 (x + y) = 3, \\ \log_4 (x - y) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 1, \\ \log_3 (xy) = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3, \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \lg x + \lg y = 4, \\ \lg x - \lg y = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 324, \\ \log_2 (x - y) = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3^{x+1} \cdot 2^y = 24, \\ \log_3 (y - x) = 1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \log_2 x + 2^{\log_2 y} = 6, \\ x^y = 32 \end{cases}$

j) $\begin{cases} \log_x y + \log_y x = 2, \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$

1. $x^2 - y^2 = 17$ şərtini ödəyən x və y natural ədədləri üçün $x \cdot y$ hasilini tapın.

2. $y = 2x^2 + 3x - 7$ parabolası ilə $y = 4x - 4$ düz xəttinin kəsişmə nöqtələrini tapın.

3. Triqonometrik tənliklərin həllini x dəyişəni üçün həqiqi ədədlə, θ dəyişəni üçün dərəcə ilə ifadə edin.

a) $\sin^2\theta + 2\cos\theta = -2,\ 0° \le \theta \le 360°$

b) $\cos 2\theta + \cos\theta = 0,\ 0° \le \theta \le 360°$

c) $\cos 2\theta + \sin^2\theta = 0,\ 0° \le \theta \le 360°$

d) $\cos x = \cot x,\ 0 \le x \le 2\pi$

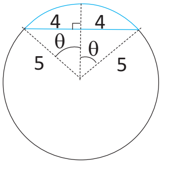
e) $2\sin^2\theta + \sin 2\theta = 0,$

f) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta,$

g) $\tan x = -2\sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$

h) $4\cos^2 2x - 4\cos 2x + 1 = 0,\ 0 \le x \le 2\pi$

4. Radiusu 5 sm olan çevrədə uzunluğu 8 sm olan vətərin gərdiyi qövsün uzunluğunu tapın. Cavabı ondabirlərə qədər yuvarlaqlaşdırın.



5. Bölmə əməlini yerinə yetirin. Qalığı müəyyən edin.

a) $(x^3 + 3x^2 - 67x + 27) : (x + 10)$

b) $(x^3 + 8x^2 - 8x - 2) : (x - 1)$

c) $(3m + 4 - 11m^2 + 5m^3) : (4 + 5m)$

d) $(54n^3 + 36n^2 + 54n - 16) : (9n - 3)$

6. Əgər dairənin radiusu 5 sm-dən 3 sm-ə qədər azaldılarsa, onun çevrəsinin uzunluğu və sahəsi neçə faiz azalar?

7. Ağzı açıq qutu düzbucaqlı şəklində olan kartonun künclərindən kvadratşəkilli hissələrin çıxarılması, qatlanıb yapışdırılması ilə düzəldilmişdir.
Ölçüləri 15 sm × 13 sm olan kartonun kənarlarından çıxarılan kvadratların tərəfi nə qədər olsa, qutunun həcmi 198 sm^3 olar?

8. Paraleloqramın diaqonalları $\vec{a} = \langle 3;3;0\rangle$ və $\vec{b} = \langle -1;1;2\rangle$ vektorları ilə müəyyən edilmişdir.

a) Göstərin ki, bu paraleloqram rombdur.

b) Rombun tərəflərini göstərən vektoru yazın və tərəfinin uzunluğunu tapın.

c) Rombun bucaqlarını tapın.

9. $y = x^2$ funksiyasının qrafiki üzərində elə nöqtə tapın ki, bu nöqtədən keçən toxunan $2x + y = 0$ düz xəttinə paralel olsun.

10. Funksiyanın törəməsini tapın.

a) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

b) $y = \dfrac{3}{\sqrt{2x+1}}$

c) $y = x^3 \sin 2x$

d) $f(x) = e^x \cos 2x$

e) $y = \sin^2(3x-2)$

f) $y = (1+\cos 2x)^2$

g) $f(x) = \sqrt{e^{4x}+1}$

h) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

i) $y = x^2 e^{3x}$

11. $f(x) = [x]$ tam hissə funksiyasının $[-2;3)$ aralığında qrafikini qurun, kəsilmə nöqtələrini göstərin, bu nöqtələrdə sağ və sol limitləri tapın.

12. Uyğunluğu müəyyən edin.

1. $f(x) = 2e^{2x}$
2. $f(x) = 2xe^{x^2}$
3. $f(x) = 2x \cos x^2$

A) İbtidai funksiyası $F(x) = \sin x^2 + c$
B) İbtidai funksiyası $F(x) = e^{2x} + c$
C) İbtidai funksiyası $F(x) = e^{x^2} + c$

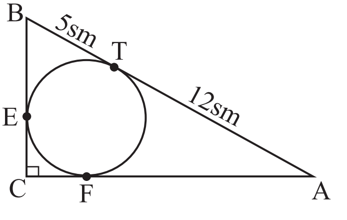
13. Ədədləri müqayisə edin:

1) $a = 5^{200}$, $b = 3^{300}$, $c = 28^{100}$ 2) $m = \log_4 3$, $n = \log_5 4$

14. Bərabərsizliyi həll edin:

a) $(0{,}3)^x > 3\frac{1}{3}$ b) $2^{\lg x} > \sin\dfrac{5\pi}{6}$

15. Şəkildə verilənlərə görə ABC düzbucaqlı üçbucağının perimetrini və sahəsini tapın.



16. Limitləri hesablayın.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-4x+3}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-4}$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-9}$

d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2+2x-4}{x^4-2x^3+x-2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$

17. Hansı cüt ədəddir?

a) İki cüt ədədin ədədi ortası
b) İki sadə ədədin ədədi ortası
c) İki tam kvadrat ədədin ədədi ortası
d) Vuruqlarından biri 4 olan iki ədədin ədədi ortası
e) Üç ardıcıl tam ədədin ədədi ortası

18. İkihədlinin verilmiş çoxhədlinin vuruğu olub-olmadığını yoxlayın.

1) $P(y) = y^5 + 6y^4 + 7y^2 + 33y - 54, \qquad y + 6$

2) $P(x) = x^5 - 3x^4 - 78x^3 + 84x^2 - 31x - 88, \qquad x - 10$

3) $P(b) = b^5 + 8b^4 - 11b^2 + 10b - 8, \qquad b - 1$

19. A, B ədədləri tam ədədlərdir və A : B nisbəti 2 : 3 kimidir. Əgər A və B ədədlərinin hər birinə 100 əlavə edilsə, onların nisbəti 3:4 kimi olar. A və B-nin qiymətlərini tapın.

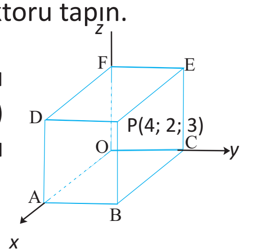
20. Limitləri tapın.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

21. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ funksiyası üçün aşağıdakıları müəyyən edin:
a) Böhran nöqtələrini;
b) Artma, azalma aralıqlarını;
c) Ekstremumlarını;
d) [–2; 2] parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətlərini.

22. A (3; –4; –1), B (1; –2; 3) və C (7; 1; 0) üçbucağın təpə nöqtələridir.
a) $\angle$ B-ni tapın.
b) Üçbucağın sahəsini tapın.
c) Üçbucaq müstəvisinə perpendikulyar olan vahid vektoru tapın.

23. Üçölçülü koordinat sistemində təsvir edilmiş düzbucaqlı paralelepipedin təpə nöqtələrindən biri P(4; 2; 3) olarsa, paralelepipedin digər təpələrinin koordinatlarını tapın.



24. İfadənin ən böyük və ən kiçik qiymətlərini(əgər varsa) tapın:
a) $3 - 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \tan\alpha$ b) $3\sin\alpha - 4\cos\alpha$

25. Tənliyi həll edin: a) $2\cdot 4^{\frac{1}{x}} - 3\cdot 2^{\frac{1}{x}} = 2$ b) $3\cdot 4^{\sqrt{x}} + 2\cdot 9^{\sqrt{x}} = 5\cdot 6^{\sqrt{x}}$

26. İnteqralları hesablayın.

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}}dx$ b) $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \frac{1}{x}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^1 x(\sqrt[4]{x} + \sqrt{x})dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-3x}\,dx$ e) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta$ f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta\, d\theta$

27. Verilən şərtlərə görə hər hansı $f(x)$ funksiyasının qrafikini çəkin.

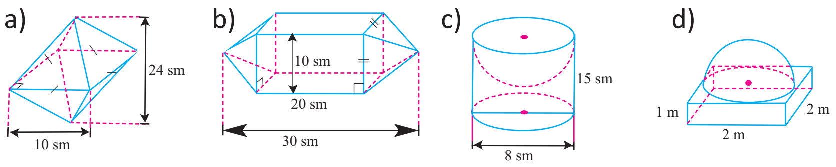
a) $\lim\limits_{x\to 5+} f(x) = -3$, $\lim\limits_{x\to 5-} f(x) = 1$ və $f(5) = 0$

b) $\lim\limits_{x\to -1+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = 3$ və $f(-1) = 5$

c) $\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = -4$ və $f(2) = -4$

28. Katetləri 5 sm və 12 sm olan düzbucaqlı üçbucağın:
a) uzunluğu 12 sm olan;
b) uzunluğu 5 sm olan tərəfi ətrafında fırlanmasından alınan konusun həçmini tapın.
c) a və b bəndindən tapılan həcmlərin nisbətini yazın.

29. Verilən ölçülərə görə fiqurların həcmini tapın.



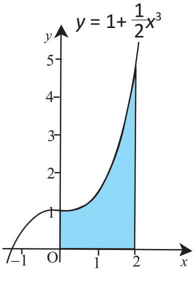
30. Gülnazgilin sinfində 20 şagird var və ev tapşırıqlarını müəllimin seçimi ilə hər gün bir nəfər izah edir. Bu gün izah üçün seçilmiş şagird həftə ərzində bir daha seçilmir. Gülnazın bazar ertəsi bu iş üçün seçilmə ehtimalı ilə çərşənbə günü seçilmə ehtimalı eynidirmi?

31. Evin kilidinin kodu beşrəqəmlidir. Neçə mümkün variant var:
a) rəqəmlər təkrarlandıqda; b) rəqəmlər təkrarlanmadıqda?

32. $v(t) = 6t + 6$ sürəti ilə (m/san) düzxətli hərəkət edən cismin $t = 1$-dən $t = 4$ saniyə anına qədər müddətdə qət etdiyi məsafəni tapın.

33. $z = 4$ müstəvisi ilə $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ sferasının kəsişməsini təqdim edin.

34. Ədədi silsilədə $a_3 = 3$, $a_7 = 17$ olarsa, beşinci həddi tapın. Bu silsilənin 30-dan kiçik olan hədlərinin cəmini hesablayın.



35. $y = 1 + \dfrac{1}{2}x^3$ funksiyasının qrafiki verilmişdir. Rənglənmiş sahəni tapın.

36. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$ limitini tapın.

37. A (1;4) nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının qrafiki üzərindədir. Qrafikin 3 vahid sola paralel köçürülməsi və x oxuna nəzərən əksetməsinə görə A nöqtəsinin yeni koordinatlarını yazın.

38. Komponentləri ilə verilmiş $\vec{a}$ və $\vec{b}$ vektorlarının skalyar hasilini tapın. Bu vektorlar arasındakı bucağın növünü müəyyən edin.

1) $\vec{a} = \langle -2; 1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 1; 2 \rangle$
2) $\vec{a} = \langle 2; 3; -1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 4; 3; -17 \rangle$
3) $\vec{a} = \langle 1; -2; 5 \rangle$, $\vec{b} = \langle 3; -2; -2 \rangle$

39. P (1; 4; −2) nöqtəsindən keçən və $\vec{n}\langle 3; -1; 2 \rangle$ vektoruna perpendikulyar olan müstəvinin tənliyini yazın.

40. Bərabərsizlikləri həll edin:
a) $2(5-x) > 3x$; b) $\dfrac{x-3}{2-\sqrt{3}} > \sqrt{3} + 2$; c) $4 < 2 - 3x \le 8$; d) $||x-3| - 1| < 3$

41. a) Diaqonalları 12 sm və 16 sm olan rombun sahəsini, perimetrini, hündürlüyünü və daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusunu tapın.
b) Perimetri 32 sm, hündürlükləri 3 sm və 5 sm olan paraleloqramın sahəsini tapın.

42. $y = x^3$, $y = -x^3 + 2$, $x = 0$ və $x = 6$ xətləri ilə əhatə olunmuş sahəni hesablayın.

43. $[-2; 2]$ parçasında $y = 4 - x^2$ funksiyasının qrafiki ilə hüdudlanmış müstəvi hissənin x oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun həcmini tapın.

44. 1) İfadələri hesablayın:

a) ${}_5P_3$, ${}_8P_6$, ${}_{11}P_8$, ${}_{12}P_5$; b) ${}_{15}C_8$, ${}_4C_1$, ${}_8C_6$, ${}_{12}C_3$.

2) Hansı böyükdür: ${}_8P_k$ yoxsa, ${}_8C_k$?

3) İsbat edin ki, ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$

45. Lotereya uduşu 0-dan 9-a qədər rəqəmlərdən lotereya barabanın seçdiyi təkrarlanmayan üç rəqəmlə müəyyən edilir. Adilin qeyd etdiyi üç rəqəmə görə udma ehtimalı nə qədərdir?

46. a) Üçbucağın tərəflərinin uzunluqları nisbəti 5 : 5 : 6 kimidir. Üçbucağın perimetri 32 sm olarsa, tərəflərinin uzunluqlarını və hündürlüklərini tapın.
b) Yan tərəfi 15 sm, oturacağa çəkilmiş hündürlüyü 12 sm olan bərabəryanlı üçbucağın perimetrini, sahəsini, daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını tapın

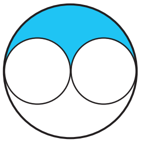
47. Bahar marafon qaçışında yolun beşdə bir hissəsini qaçmışdır. O, daha 4 km qaçarsa, bütün məsafənin dörddə bir hissəsini qaçmış olar. Qaçış yolunun uzunluğu neçə kilometrdir?

48. İlk 50 natural ədədlər çoxluğundan 2-nin və 3-ün misillərini atsaq, neçə elementli çoxluq alınar?

49. $\tan x = \frac{5}{12}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ və $\sin y = -\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$ olduğunu bilərək

$\cos(x - y)$ ifadəsinin qiymətini tapın.

50. Böyük dairənin radiusu, kiçik dairələrin isə hər birinin diametri 4 sm-dir. Şəkildə ştrixlənmiş hissənin sahəsini tapın.



51. $f(x) = -2x^3 + 15x^2 - 24x$ funksiyası hansı aralıqda artandır?

52. Hesablayın: a) $\lg 2 \cdot \lg 50 + \lg^2 5$ b) $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$

53. $y = x^4 - 4x^3$ funksiyası verilmişdir. Funksiyanın:
a) qrafikinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini tapın;
b) böhran nöqtələrini tapın;
c) artma-azalma aralıqlarını tapın;
d) ekstremum nöqtələrini və ekstremumlarını tapın;
e) qrafikini qurun.

54. a) Torbada 5 ağ, 4 qırmızı şar var. Geri qaytarılmadan təsadüfi olaraq ardıcıl iki şar çıxarılır. Bu şarlardan ən azı birinin ağ rəngdə olması ehtimalını tapın.
b) Şərti ehtimalın düsturunu və ona aid bir nümunəni yazın.

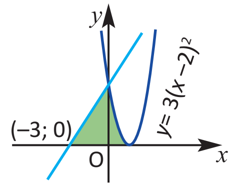
55. 40 turisti yerləşdirmək üçün üçnəfərlik və dördnəfərlik çadırlar quruldu. Cəmi 12 çadır quruldusa, onların neçəsi üçnəfərlikdir ?

56. Lətif 20 dəqiqəyə kitabın 24 səhifəsini oxuyursa: a) 35 dəqiqəyə neçə səhifə oxuyar? b) 360 səhifəlik kitabı nə qədər vaxta oxuyar?

57. $y = kx + b$ düz xətti absis oxunu $(-3; 0)$ nöqtəsində, $y = 3(x-2)^2$ parabolasını ordinat oxu üzərində kəsir.

a) Düz xətt parabola ilə daha hansı nöqtədə kəsişir?

b) Rəngli hissənin sahəsini tapın



58. Həcmi 4 sm³, yan səthinin sahəsi 8 sm² olan düzgün dördbucaqlı piramidanın oturacağının təpəsindən qarşıdakı yan üzə qədər məsafəni tapın.

59. $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ funksiyası verilmişdir.

a) təyin oblastını tapın; b) tərs funksiyanı yazın və qiymətlər çoxluğunu göstərin; c) $f(x-1) \le 0$ bərabərsizliyini həll edin.

60. Uyğunluğu müəyyən edin (c_n ardıcıllığın n-ci həddi, S_n ilk n həddin cəmidir) 1.
$S_n = n^2 + 3n$ A) $c_2 = 6$ B) $c_2 = 5$ C) $c_2 = 4$
2. $S_n = n^2$ D) həndəsi silsilədir E) $c_n = 2n - 1$
3. $S_n = 2^n - 1$

61. $a, b \in \mathbb{N}$, $a : b = 3 : 4$, ƏKOB$(a; b)$ + ƏBOB$(a; b) = 39$ olarsa, $a + b$ cəmini tapın.

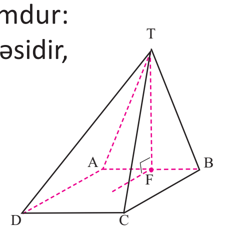
62. $\vec{x} = \vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ və $\vec{y} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ olduğuna görə aşağıdakıları müəyyən edin.

a) $3\vec{x} - 2\vec{y}$ b) $|\vec{x} - 2\vec{y}|$ c) $4\vec{x} + 2\vec{y}$

63. Şəkildə verilən piramida haqqında aşağıdakılar məlumdur: Hündürlüyün oturacağı olan F nöqtəsi AB-nin orta nöqtəsidir, TF = 5 m, ABCD düzbucaqlıdır və AB = 6 m, BC = 8 m

a) Piramidanın səthinin sahəsini tapın

b) Piramidanın həcmini tapın.



64. Tənlikləri həll edin.

a) $4\sin^2 x - 3\cos x = 3$ b) $\tan x - 3\cot x - 2 = 0$

c) $\sin 3x + \sin 5x = 0$ d) $\cos 3x - \cos x = 0$

65. Hesablayın. a) $\dfrac{\text{ƏKOB }(84; 126)}{\text{ƏBOB }(84; 126)}$ b) $\dfrac{\text{ƏKOB }(54; 72)}{\text{ƏBOB }(54; 72)}$

66. a) $x = \sqrt{3}$ olduqda $(3x + y)^2 + 2\,(3x + y)\,(x - y) + (x - y)^2$;

b) $a = \sqrt{5}-1$ olduqda $\dfrac{\sqrt{2} - ab^2}{1 + b^2} + \dfrac{\sqrt{2}b^2 - a}{1 + b^2}$ ifadəsinin qiymətini tapın.

67. Torbada ağ və qara rəngli kürələr var. Qara kürələrin sayının ağ kürələrin sayına nisbəti 3:2 kimidir. Qara kürələrin yarısını çıxarsaq, torbada qalan ağ kürələrin sayı qara kürələrin sayından 3 ədəd çox olar.
1) Torbada neçə kürə var? 2) Torbaya baxmadan iki kürə çıxarılsa:
a) hər ikisinin ağ rəngli olması; b) müxtəlif rəngli olması ehtimalını tapın.

68. $\sin x\,(\cos y + 2\sin y) - \cos x\,(2\cos y - \sin y) = 0$ olduğuna görə $\tan\,(x + y)$-i tapın.

69. Cisim $a(t) = 2t$ təcili (sm/san^2) ilə düzxətli hərəkət edir. Cismin başlanğıc sürəti 9 sm/san-dir.
a) Cismin $v(t)$ sürət funksiyasını müəyyən edin
b) Cismin $t = 0$-dan $t = 5$ saniyə anına qədər müddətdə getdiyi məsafəni tapın.

70. A(1; –2;7), B(2;3;5), D(–1;3;6) nöqtələri ABCD rombunun təpələridir. C təpəsinin koordinatlarını tapın.

71. a) $3x^2 - x - 1= 0$ tənliyinin köklərinin kvadratları cəmini tapın.
b) $x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ köklərinin cəmi onların hasilindən 1 vahid böyükdür. m-i tapın və tənliyi həll edin.

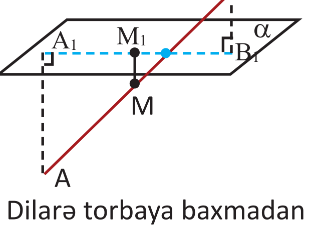
72. Ədədləri artan sırada düzün. $a = \dfrac{31}{32}$, $b = \dfrac{32}{33}$, $c = \dfrac{35}{34}$, $d = \dfrac{36}{35}$

73. 1) c-nin hansı qiymətində $(c^2 - 4)x = c + 2$ tənliyinin: a) yeganə həlli var;

b) sonsuz sayda həlli var; c) həlli yoxdur?

2) c-nin hansı qiymətində tənliklər sisteminin bir həlli var? $\begin{cases} 2x + y = c, \\ y = x^2 \end{cases}$

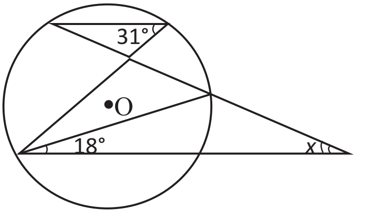
74. Müstəvini kəsən AB parçasının ucları müstəvidən 8 sm və 2 sm məsafədədir. Parçanın M orta nöqtəsinin müstəvidən məsafəsini tapın.



75. Torbada 10 sarı, 10 qırmızı, 10 mavi şar var. Dilarə torbaya baxmadan təsadüfi bir şar çıxarıb rəfiqəsinə verdi, sonra torbada qalan şarlardan daha birini çıxardı. Çıxarılan şarların müxtəlif rəngli olma ehtimalı neçədir?

76. Tənliyi həll edin: a) $|x+6| = |x-66|$ b) $|3x+2| + |3-x| = 5$

77. Şəkildə verilənlərə görə x bucağını tapın.

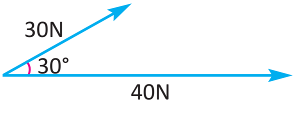


78. Gündəlik marjinal maya dəyərini $C'(x) = 0{,}000006x^2 - 0{,}006x + 4$ funksiyası ilə modelləşdirmək olar, burada x istehsal olunan məhsulun sayını göstərir. Gündəlik sabit xərcin 100₼ olduğunu nəzərə alaraq:

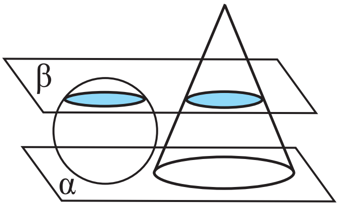
a) ilk 500 məhsul üçün ümumi maya dəyərini tapın.

b) 201-ci məhsul istehsalından 400-cü məhsul istehsalına qədərki maya dəyərini tapın.

79. Cismə tətbiq olunan iki qüvvə 30N və 40 N olmaqla 30º bucaq təşkil edir. Bu qüvvələrin əvəzləyicisini tapın.
Göstəriş: kosinuslar teoremindən istifadə edin.



80. Diametri 10 sm olan kürə və radiusu 6 sm olan konus α müstəvisi üzərindədir. α müstəvisindən 8 sm məsafədə ona paralel β müstəvisi keçirilmişdir. Kürənin və konusun β müstəvisi ilə kəsiyi konqruyent dairələrdir. Konusun hündürlüyünü tapın.



81. Funksiyaların artma və azalma aralıqlarını, böhran nöqtələrini, ekstremumlarını tapın və qrafiklərini qurun.

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$ b) $f(x) = (x+1)^4$

c) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$

82. **Orta yağıntı miqdarı.** İlin əvvəlindən başlayaraq (x gün sonra) gündəlik yağıntı miqdarını(santimetrlə) $r(x) = 0{,}00002(6511 + 366x - x^2)$ funksiyası ilə müəyyən etmək olar. 180 gün ərzində düşən orta yağıntı miqdarını müəyyən edin.

83. $f(x) = |x|$ funksiyasının qrafiki koordinat başlanğıcından keçən ibtidai funksiyasını tapın.

84. Ata qızıl külçəni 3 oğlu arasında böldü. Böyük oğluna külçənin $\frac{2}{5}$ hissəsini, ortancıl oğluna isə $\frac{1}{4}$ hissəsini verdi. Qalan 240 q qızılı isə kiçik oğluna verdi. Külçə neçə qram idi?

85. **Havanın temperaturu.** 10 saat ərzində havanın temperaturunu $f(t) = -0{,}1t^2 + 0{,}8t + 34$, $0 \le t \le 10$ asılılığı ilə müəyyən etmək olar.
a) Minimum temperaturu tapın.
b) Maksimum temperaturu tapın.
c) Orta temperaturu tapın.

86. Bucağın daxilində M nöqtəsi verilmişdir. M nöqtəsindən elə düz xətt keçirin ki, bu düz xəttin bucağın daxilində qalan parçası M nöqtəsi ilə 1:2 nisbətində bölünmüş olsun.

87. x, y, z natural ədədlər, $5y = 6z$, $x = 2z$ olarsa, $x + y + z$ cəminin ən kiçik qiymətini tapın.

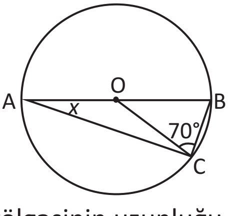
88. $a - \frac{1}{a} = 3$ olarsa, $a^2 + \frac{1}{a^2}$ ifadəsinin qiymətini tapın.

89. 5 %-li 16 *l* duz məhlulu ilə 10 %-li 24 *l* duz məhlulunu qarışdırdıqda alınan məhlulun neçə faizli olduğunu tapın.

90. Həndəsi silsilə təşkil edən üç natural ədədin ikincisi birincisindən 3 vahid böyükdür. Belə silsilələrin sayını tapın.

91. $x - y = 7$, $x + y = 4$ olarsa, $x^2 - y^2 - 5x - 5y$ ifadəsinin qiymətini tapın.

92. Verilənlərə görə x bucağının dərəcə ölçüsünü tapın. O nöqtəsi çevrənin mərkəzidir.



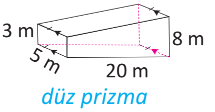
93. Günün müəyyən vaxtında şəhər meydanındakı heykəlin kölgəsinin uzunluğu 12 m olur. Bu zaman kölgənin uc nöqtəsinə heykəlin ən hündür nöqtəsindən çəkilmiş düz xətlə üfüqi kölgə xətti arasında qalan bucaq 35° olur. Heykəlin hündürlüyünü tapın.

94. Verilmiş funksiyanın tərs funksiyasını tapın. Verilmiş funksiyanın və tərs funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu göstərin.
a) $y = 2^{x-3} + 1$ b) $y = 1 - \log_2(x + 1)$

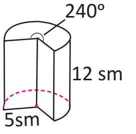
95. Cisim verilmiş $s(t)$ qanunu ilə düzxətli hərəkət edir. $s(t)$ funksiyasının qrafikini təsvir edin. İkinci tərtib törəmədən istifadə etməklə təcili tapın. Cismin yavaşıyan, yaxud yeyinləşən hərəkətdə olduğunu müəyyən edin. Qurduğunuz qrafikdə bu özünü necə göstərir?

a) $s(t) = 2t^2 + 4t$ b) $s(t) = 40t + 10t - 5t^2$

96. Verilən ölçülərə görə fiqurların:
a) həcmini;
b) səthinin sahəsini tapın.



düz prizma

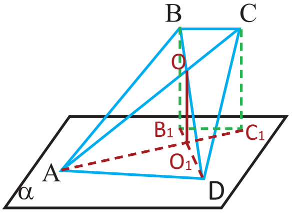


97. Bir qurğunun həcmi 60000 m^3-dur. Bu həcmi kub santimetrlə ifadə edən ədədi standart şəkildə yazın.

98. (2;2) nöqtəsindən keçən, absis oxuna və $y = 4$ düz xəttinə toxunan çevrənin tənliyini yazın

99. Sinifdə 14 şagird var. Onlardan iki nəfəri bu gün keçiriləcək tədbirdə qonaqları qarşılamaq üçün seçilməlidir.
a) Neçə variant mümkündür.
b) Nərgiz bu sinifdə oxuyur. O, ya Seymurla, ya da Gülnarla seçilmək istəyir. Bu hadisənin ehtimalı neçədir?

100. ABCD trapesiyasının AD oturacağı α müstəvisi üzərində, diaqonallarının O kəsişmə nöqtəsi müstəvidən 2 sm məsafədədir. AD:BC = 3:2 olarsa, trapesiyanın BC oturacağından α müstəvisinə qədər məsafəni tapın.



101. **Orta əhali artımı.** Tutaq ki, ölkə əhalisinin t-ci ildəki artımını $P(t) = 5{,}4e^{0.01t}$ kimi müəyyən etmək olar, burada P əhalinin (milyonla) sayını, t isə 2000-ci ildən başlayaraq illəri göstərir. 2001-ci ildən 2005-ci ilə qədər illik orta əhali artımını tapın.

102. Qatarın sürəti 70-dən 85 km/saat qədər artarsa, eyni yolu getməyə sərf olunan zaman neçə faiz azalar?

103. a) $\dfrac{x+y}{y} = 3$ olarsa, $\dfrac{x-y}{x}$ ifadəsinin qiymətini tapın.

b) $8^{x-1} = 4^{y+2}$ olarsa, $3x - 2y$ ifadəsinin qiymətini tapın.

104. a) Eyni sürətlə işləyən 3 fəhlə müəyyən işi 15 günə yerinə yetirir. Həmin sürətlə bu işi 5 fəhlə neçə günə yerinə yetirər?
b) Bir işi 24 işçi eyni sürətlə gündə 8 saat işləməklə 30 günə yerinə yetirir. Gündə 6 saat işləməklə neçə işçi bu işi 20 günə yerinə yetirə bilər?

105. 1) Aşağıdakı cədvələ görə dispersiyanı və standart meyli hesablayın.

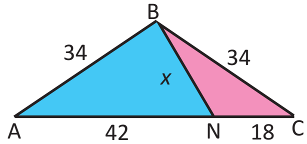
x	6	7	10	11	11	13	16	18	18	cəm
$x-\bar{x}$	−7	−6	−3	−2	−2	0	3	5	12	
$(x-\bar{x})^2$	49	36	9	4	4	0	9	25	144	280

2) Verilən məlumata görə siz də cədvəl tərtib edin, dispersiyanı və standart meyli tapın.

a) 74, 72, 83, 96, 64, 79, 88, 69

b) 326₼, 438₼, 375₼, 366₼, 419₼, 424₼

106. Şəkildə verilənlərə görə hər bir rəngli hissənin perimetrini və sahəsini tapın.



107. Çevrə üzərində 12 nöqtə qeyd edilmişdir. Təpələri bu nöqtələrdə yerləşən neçə üçbucaq qurmaq olar?

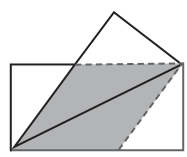
108. İctimai təşkilatın rəhbərliyinə seçkilərdə səslərin 65%-ni Tahir, qalanını isə Ulkər qazandı. Əgər Tahir Ülkərdən 120 səs çox qazanmışsa, səsvermədə neçə nəfər iştirak etmişdir?

109. İfadəni sadələşdirin:

a) $(2^{10}+2^{10}+2^{10}+2^{10})^{1/3}$ b) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

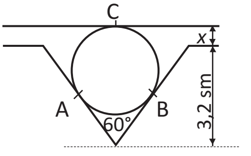
110. 102564 ədədinin sonuncu rəqəmini pozub əvvəlinə yazdıqda alınan 410256 ədədi 102564-dən 4 dəfə böyük olur: 410256 = 4 × 102564.
Sonuncu rəqəmi 9 olan elə altırəqəmli ədəd tapın ki, bu xassəyə malik olsun.

111. 6 sm × 12 sm ölçülü düzbucaqlı formalı vərəq diaqonalı boyu qatlandı. Kənara çıxan hissələr kəsildikdən sonra açıldıqda romb alındı. Bu rombun tərəfinin uzunluğunu tapın.

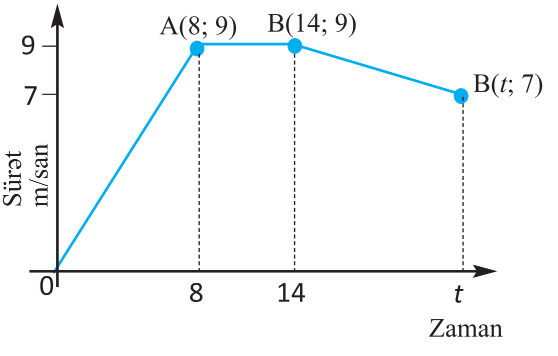


112. Əhməd uzunluğu 500 metr olan dairəvi qaçış yolunda 12 km/saat, Elmir isə 9 km/saat sürətlə qaçır. Onlar eyni vaxtda eyni nöqtədən eyni istiqamətdə hərəkətə başlayırlar.
a) Neçə dəqiqədən sonra onlar yenidən görüşər?
b) Onlar qaçmağa davam etsələr, hərəkətə başladıqları nöqtədə görüşərlərmi? Əgər mümkündürsə, bu görüş neçə dəqiqədən sonra baş verər?

113. A və B çevrəyə toxunma nöqtələridir. Çevrənin diametrinin 2,4 sm olduğunu bilərək x-i tapın.

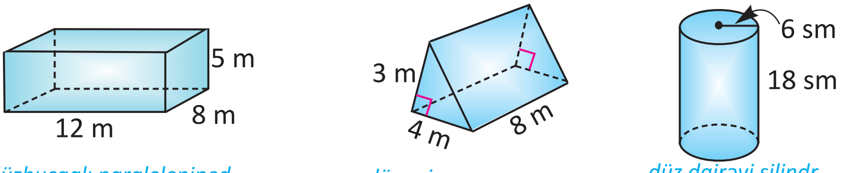


114. Şəkildə zamandan asılı olaraq sürətin dəyişməsinin qrafiki verilmişdir. Orta sürətin 7,52 m/san olduğunu bilərək qrafikdə verilənlərə görə t zamanını tapın.
Göstəriş: Gedilən yolun qrafikaltı sahənin cəminə bərabər olduğunu nəzərə alın.



115. A(0; 3; 4), B(1; 2; 0) və C(−1; 6; 4) nöqtələrindən keçən müstəvinin tənliyini yazın.

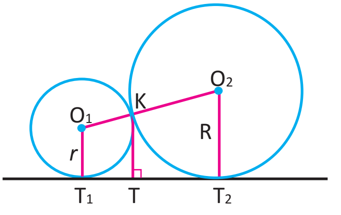
116. Verilən ölçülərə görə fiqurların tam səthinin sahəsini və həcmini tapın.



düzbucaqlı paralelepiped *düz prizma* *düz dairəvi silindr*

117. a) $y = 2 + \sqrt{x-1}$ funksiyasının tərs funksiyasını tapın.
b) $y = \sqrt{2^x - 8}$ funksiyasının təyin oblastını tapın.
c) $y = \log_{\frac{1}{2}}(3 + 2\sin 2x)$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu tapın.

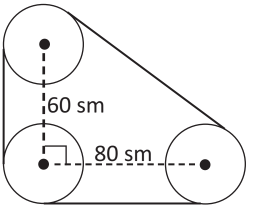
118. Radiusu R və r olan iki çevrə xaricdən toxunur.
a) Ortaq toxunanın toxunma nöqtələri arasındakı məsafəni (T_1T_2);
b) Ortaq toxunma nöqtəsindən ortaq toxunana qədər məsafəni (KT) tapın.



119. Silindrik çənin daxili səthini boyamaq üçün bir kvadrat metrinə 20 manat olmaqla cəmi 2000 manat ödənilmişdir. Çənin dərinliyi 10 m-dir.
a) Çənin iç səthinin sahəsini tapın.
b) Çənin radiusunu tapın.
c) Çənin həcmini hesablayın.

120. Kərim uzaq məsafəyə qaçışı zamanı hava günəşli olduqda saatda 10 km sürətlə, hava yağışlı olduqda isə saatda 6 km sürətlə qaçır. O, 20 km məsafəyə qaçışı 3 saata tamamlamışsa, qaçış boyu neçə saat yağışlı olmuşdur?

121. Şəkildə göstərildiyi kimi konveyer hissəsində radiusları 10 sm olan üç diskin mərkəzləri arasındakı üfüqi və şaquli məsafə 80 sm və 60 sm-dir. Diski əhatə edən kəmərin uzunluğunu tapın.



122. Məxrəci: a)100-ü aşmayan; b) n-i aşmayan bütün düzgün kəsrlərin cəmini tapın.

123. x ədədi m və 9, y ədədi $2m$ və 15, z ədədi $3m$ və 18 ədədinin ədədi orta qiymətinə bərabərdir. x, y, z ədədlərinin ədədi orta qiymətini m dəyişəni ilə ifadə edin.

124. Kökləri verilən ədədlər olan tam əmsallı ən kiçik dərəcəli çoxhədli yazın.

a) 1; 4; 3 b) –1; 3; –5 c) 3; –3i; 1

125. Yaşayış məntəqəsində aparılan araşdırmalar göstərdi ki, burada yaşayan ailələrin 15%-nin avtomobili yoxdur, 60%-nin bir avtomobili, 20%-nin iki avtomobili, 5%-nin üç avtomobili var. Bu məntəqədə 100 ailə yaşayırsa, burada neçə avtomobil var?

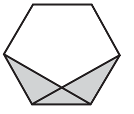
126. Bərabərtəfli iki üçbucaq verilmişdir. Sahəsi bu üçbucaqların sahələri cəminə bərabər olan üçbucağı qurun.

127. Məxrəci 82 olan neçə ixtisar olunan düzgün kəsr var?

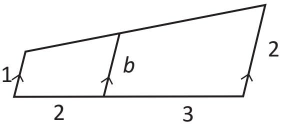
128. Taxta parçasını 5 hissəyə ayırmaq üçün 8 dəqiqə lazımdır. Bu taxta parçasını 8 hissəyə ayırmaq üçün nə qədər vaxt lazımdır?

129. $x^2 + y^2 = 1$ və $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ tənlikləri verilmiş hər iki çevrəni əhatə edə bilən üçüncü çevrənin radiusu ən azı nə qədər olmalıdır?

130. Şəkildə göstərilən düzgün altıbucaqlının hansı hissəsi rənglənmişdir.



131. Fiqurda paralel parçalar oxla qeyd edilmişdir. Şəkildə verilənlərə görə b parçasının uzunluğunu tapın.



132. $\dfrac{24x^2 + 25x - 47}{ax - 2} = -8x - 3 - \dfrac{53}{ax - 2}$ tənliyi $ax \neq 2$ olmaqla x-in bütün qiymətlərində doğrudur. a sabitinin qiymətini tapın.

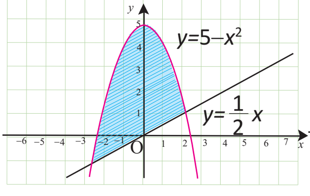
133. $x^2 - xy - 2y^2$ ifadəsini vuruqlara ayırın.

134. Riyaziyyat qiymətləndirmə tapşırıqlarında 25 sual var. Hər düz cavaba 4 bal verilir, hər səhv cavaba görə 1 bal çıxılır. Başir bütün suallara cavab yazmış və 35 bal toplamışdır. Başirin neçə səhv cavabı olmuşdur?

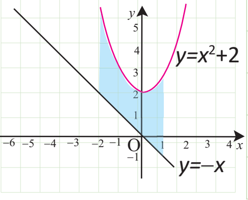
135. $(-4;0)$ və $(0;3)$ nöqtələrindən keçən və mərkəzi $x - 2y + 11 = 0$ düz xətti üzərində yerləşən çevrənin tənliyini yazın.

136. Qrafik təsvirlərdə verilənlərə görə rəngli hissənin sahəsini tapın.

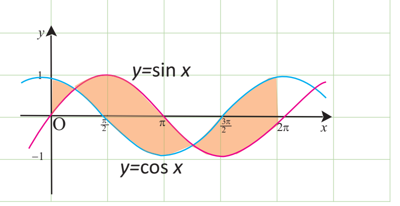
a)



b)



c)



137. Üçölçülü koordinat sistemində qurun:

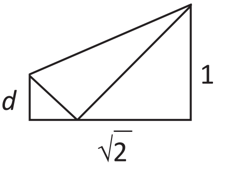
a) A(–1; 2; 3) nöqtəsini; b) $y = 4$ müstəvisini.

138. Ölçüləri $\langle 1; 0; 0\rangle$, $\langle 0; 2; 0\rangle$, $\langle 0; 0; 6\rangle$ vektorları ilə müəyyən edilən paralelepipedin həcmini tapın.

139. Həcmi 9856 sm^3 olan konusun radiusu 28 sm olarsa: a) hündürlüyünü; b) doğuranını; c) yan səthinin sahəsini tapın.

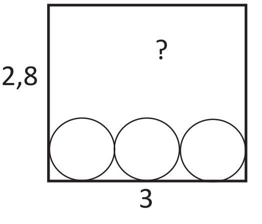
140. Şagirdlərlə sinif rəhbərinin birlikdə orta yaşı 16, sinif rəhbərinin 36, şagirdlərin orta yaşı isə 15-dir. Sinifdə neçə şagird var?

141. Tərəflərinin uzunluğu 1 və $\sqrt{2}$ olan düzbucaqlı formalı vərəq şəkildə göstəriliyi kimi, təpələrindən birinin qarşı tərəfin üzərinə düşməsi şərti ilə qatlanmışdır. Bu halda qeyd edilən d uzunluğunun qiymətini tapın.



142. İdman meydançasının 3 girişi var. Meydançaya gələn iki nəfərin eyni qapıdan daxil olma ehtimalını tapın.

143. Ölçüləri 1×3×2,8 vahid olan düzbucaqlı paralelepiped formalı qutuya diametri 1 vahid olan 8 şar yerləşərmi?



144. $x^2 + y^2 - 8x = 0$ tənliyi ilə verilmiş çevrənin radiusunu tapın

145. a, b, c müsbət ədədləri həndəsi silsilənin ardıcıl hədləri olduqda lg$a$, lg$b$, lg$c$ ədədlərinin ədədi silsilə əmələ gətirdiyini isbat edin.

146. Sadələşdirin. $\dfrac{5^2-1}{3^2-1}\cdot\dfrac{9^2-1}{7^2-1}\cdot\dfrac{13^2-1}{11^2-1}$

147. Çiyələkli və ərikli şokoladlar qırmızı və narıncı qutularda satılır. Qırmızı qutularda 17 çiyələkli, 5 ərikli şokolad, narıncı qutularda isə 7 çiyələkli, 11 ərikli şokolad var. Əgər Hüseyn bir qırmızı qutu konfet almışsa, neçə qutu narıncı konfet alsa, çiyələkli və ərikli şokoladların sayı bərabər olar?

148. a) $\overline{20a2} = 12 \cdot n$ olduqda a rəqəmini tapın, burada $n \in N$.

b) $\overline{7a3b}$ şəklində olub 15-ə bölünən neçə dördrəqəmli ədəd var?

149. $f(x) = \frac{x^3}{3} - x - 3$ funksiyasının $[-2; 2]$ parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətini tapın.

150. $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ funksiyası verilmişdir.
a) $f(x) = -\frac{3}{4}$ tənliyini həll edin.
b) Funksiyanın ən kiçik qiymətini tapın.

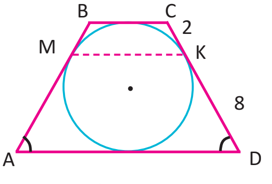
151. Hesablayın.
a) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52} - \sqrt{117^2 - 108^2}$ b) $(\sqrt{6} + 2\sqrt{3})^2 - 6\sqrt{8}$ c) $\sqrt{3+\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{11 - 6\sqrt{2}}$

152. Həm 35-ə, həm də 42-yə böldükdə qalıqda 3 alınan ən kiçik çoxrəqəmli ədədi tapın.

153. 1) 2772 ədədinin ən böyük sadə vuruğunu tapın.

2) 210 ədədinin, hər birinin yalnız: a) iki sadə vuruğu; b) üç sadə vuruğu olan neçə böləni var?

154. Şəkildə verilənlərə görə ABCD bərabəryanlı trapesiyasının perimetrini və sahəsini, yan tərəflərinin çevrəyə toxunma nöqtələrini birləşdirən MK parçasının uzunluğunu tapın.



155. Elmi tədqiqat aparan qrupda riyaziyyatçıların orta yaşı 40, kompüter elmi mütəxəsislərinin orta yaşı isə 35-dir. Qrupda cəmi 40 nəfər varsa və orta yaş tam ədədə bərabərdirsə, riyaziyyatçıların sayının kompüter mütəxəssislərinin sayına nisbətini tapın. Mümkün hallara baxın.

156. Ardıcıllığın ilk dörd həddi 1; 4; 2 və 3-dür. 5-ci həddindən başlayaraq hər bir hədd özündən əvvəlki dörd həddin cəminə bərabərdir. Bu ardıcıllığın səkkizinci həddini tapın.

157. a) Qabarıq onbirbucaqlının neçə diaqonalı var?
b) Diaqonallarının sayı 54 olan qabarıq çoxbucaqlının daxili bucaqlarının cəmini tapın.

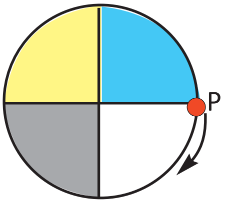
158. Avtomobil şirkətləri avtomobil mühərrikinin yağını tənzimləyən klapanın aşağı və yuxarı periodik hərəkətini $f(t) = \sin t \cdot \cos t$ funksiyası ilə müəyyən edirlər. Klapanın rəqsi hərəkətinin amplitudunu və tezliyini tapın.

159. A(1; −2) və B(4; −2) nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.

160. Bərabərsizliyi həll edin:
a) $x^4 < 36$ b) $|2x - 3| < x$

161. Həftə ərzində idman zalına gələnlərin sayı hər gün əvvəlki gündə gələnlərin sayının ikiqatından 10 nəfər az olmuşdur. Əgər şənbə şünü idman zalına 130 nəfər gəlmişsə, çərşənbə günü zalda neçə nəfər olmuşdur?

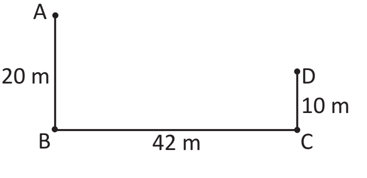
162. Çevrəsinin uzunluğu 12 sm olan dairə dörd bərabər hissəyə bölünmüş və şəkildə göstərildiyi kimi rənglənmişdir. İşıqlı nöqtə çevrə boyunca saat əqrəbinin hərəkəti istiqamətində 100 sm uzunluqda yol qət etdikdə hansı rəngli hissəyə uyğun qövs üzərində olacaq?



163. Uzunluğu 48 sm olan məftil birinin uzunluğu digərindən 2 dəfə çox olan iki hissəyə ayrıldı. Bu məftillərdən iki kvadrat düzəldildi. Kvadratların sahələri cəmini tapın.

164. Həftəlik istehsal edilən x vahid məhsulun maya dəyərini
$C(x) = 0{,}3x^3 - 5x^2 + 28x + 200$ funksiyası ilə ifadə etmək olar.
Marjinal maya dəyərini ifadə edən $MC(x) = C'(x)$ funksiyasını yazın.
Bu funksyaların qrafiklərini eyni koordinat sistemində qrafkalkulyatorla qurun.

165. Tələt A nöqtəsindən D nöqtəsinə BC xətti üzərində olan nöqtəyə toxunmaqla gəlməlidir. Tələt BC üzərindəki nöqtəni harada seçcə, ən yaxın yolla A-dan D-yə gələ bilər?



166. a) $x^2 - 5x + q = 0$ tənliyin kökləri üçün $x_1^2 + x_2^2 = 13$ ödənirsə, q-nü tapın.
b) a-nın hansı qiymətlərində $ax^2 + x + 1 = 0$ tənliyinin iki müxtəlif kökü var?

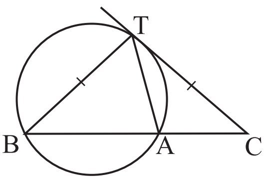
167. Qutuda 6 ağ, 4 qara kürə var. Onlardan 3-ü təsadüfən çıxarılır. Rənginə görə hansı tərkibli kürələrin çıxması daha ehtimallıdır.

168. Yayın 3 sm sıxılması üçün 9 N qüvvə tətbiq edilmişdir. Yayın 4 sm sıxılması üçün görülən işi hesablayın.

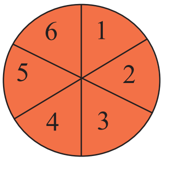
169. (3;9) və (11;3) çevrənin diametrinin uc nöqtələridir. Bu çevrə daxilinə çəkilmiş üçbucağın iki təpəsi bu nöqtələrdə yerləşir. Üçbucağın üçüncü təpəsinin elə koordinatlarını tapın ki, sahəsi maksimum olsun.

170. Oturacağı AC olan bərabəryanlı ABC üçbucağında P və Q nöqtələri uyğun olaraq CB və AB tərəfləri üzərindədir.
AC = AP = PQ = QB olarsa, B bucağının dərəcə ölçüsünü tapın.

171. CT çevrəyə toxunan, CT = BT, $\angle TAB = 76°$ olarsa, $\angle BTA$-nı tapın.



172. Təssəvvür edin ki, piroq şəkildə göstərildiyi kimi dilimlənmiş və nömrələnmişdir. İlk istədiyiniz dilimi götürə bilərsiniz, lakin sonrakı dilim yeyilmiş dilimin yanındakı olmalıdır. 6 dilim tortu bu cür yeməyin neçə mümkün variantı var?



173. a) $a = \sin 3°$, $b = \sin 5°$, $c = \cos 88°$ ədədlərini müqayisə edin.
b) $y = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu tapın.

174. Aslan evini Gəraya 60 000 manata satdı. Gəray bu evi tezliklə 10% bahasına Camala satdı. Camal evi aldığı qiymətdən 10% ucuz olmaqla yenidən Aslana satdı. Aslanın bu alqı-satqıda gəliri varmı, varsa, nə qədərdir?

175. 1) n-nin hansı qiymətində $\dfrac{1}{2^{10}} + \dfrac{1}{2^9} + \dfrac{1}{2^8} = \dfrac{n}{2^{10}}$ bərabərliyi doğrudur?

2) x-in hansı qiymətində $2^x - 3$; $2^{\frac{x}{2}}$; $2^{x-1} + 2$ ədədləri həndəsi silsilənin ardıcıl hədləridir?

176. 15 biçinçi çəmənliyin $\frac{5}{6}$ hissəsini 4 saata biçir. 9 biçinçi bu çəmənliyin $\frac{3}{4}$ hissəsini neçə saata biçər?

177. $\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{30}-\sqrt{45}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}-3}$ ifadəsini sadələşdirin.

178. $\int_0^6 f(x)dx = 8$ və $\int_0^4 f(x)dx = 2$ olarsa, $\int_4^6 f(x)dx$ inteqralını hesablayın.

179. a) 200 ədədini 30% azaldıb, yeni ədədi 30% artırsaq, hansı ədəd alınar?
b) Malın qiymətini 10% artırıb, sonra yenidən 10% azaltdılar. Qiymət necə dəyişdi?

180. Qutuda 6 qara, x sayda ağ kürə var. Təsadüfən götürülən bir kürənin ağ olması ehtimalı $\frac{2}{5}$ olarsa, x-i tapın. Bu qutudan 2 kürə çıxarılsa, onların müxtəlif rəngli olma ehtimalını tapın.

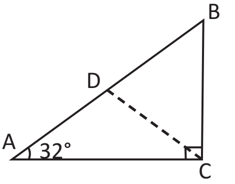
181. a) Tili a olan düzgün tetraedrin həcmini tapın.
b) Həcmi V olan düzgün tetraedrin hündürlüyünü tapın.

182. $[-2;2]$ parçasında verilmiş $y = 2-|x|$ funksiyasının qrafikinin Ox oxu ətrafında fırlanmasından alınan fiqurun tam səthinin sahəsini tapın

183. Tənliyi həll edin:
a) $\cot x\cdot(1-\cos x)=0$ b) $\sin^3 x+\cos^3 x = 1+3\sin x\cos x$

184. a-nın hansı qiymətlərində $\sin x+\cos x = \sqrt{2}\cdot\log_2 a$ tənliyinin həlli var?

185. ΔABC-də $\angle C = 90°$, $\angle A = 32°$, AC = 48 sm olarsa, CD medianının uzunluğunu tapın.



186. 100 ballıq qiymətləndirmə sistemi ilə sinifdəki 30 şagirdin orta nəticəsi 70 bal olmuşdur. Şagirdlərdən 5 nəfəri 20, 25, 25, 30, 40 bal qazanmış və keçid balını toplaya bilməmişdir. Keçid balı toplayanların orta balını tapın.

187. 87-ni hansı natural ədədə bölmək lazımdır ki, qismət böləndən 2 vahid böyük, qalıq isə böləndən 1 vahid kiçik olsun?

188. İkirəqəmli natural ədədin rəqəmlərinin yerini dəyişsəniz, alınan ədəd əvvəlkindən 20% çox olar. Əvvəlki ədədi tapın.

189. Hesablayın:

a) $\sin 18° \cdot \sin 54°$ b) $\dfrac{\cos^2 53° - \sin^2 23°}{\sin 14°}$

190. $(-3; 4)$ nöqtəsi θ dönmə bucağının son tərəfi üzərindədir. $\sin\theta$ -nın qiymətini tapın.

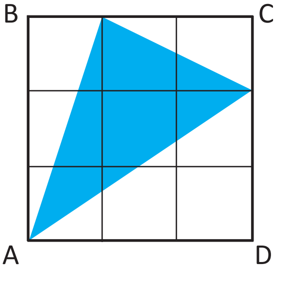
191. $1 + 2\cos x = 0$ tənliyinin $[0; 2\pi]$ parçasındakı köklərini tapın.

192. Fermada süd məhsulunun miqdarı 4 il ərzində aşağıdakı kimi dəyişir: Birinci iki il x % artır, növbəti iki ildə x % azalır. Tutaq ki, fermada artıq 100 vahid süd istehsal edilmişdir. Növbəti 4 il müddətində əvvəlindən sonuna qədər süd miqdarı haqqında məlumatı şərti faiz qəbul etməklə təqdim edin.

193. Bilik yarışmasının seçmə turunda iştirakçılara aşağıdakı məsələni üç dəqiqə ərzində həll etmək tapşırılır. Anar, Bəxtiyar və Fəridin yediyi almalar bir-birinə görə müqayisəli olaraq aşağıdakı kimidir.
Anar: Bəxtiyarın yediyi almaların yarısı qədər, üstəgəl Fəridin yediyi almaların üçdə biri üstəgəl bir alma,
Bəxtiyar: Fəridin yediyi almaların yarısı qədər üstəgəl Anarın yediyi almaların üçdə biri və üstəgəl iki alma,
Fərid: Anarın yediyi almaların yarısı qədər, üstəgəl Bəxtiyarın yediyi almaların üçdə biri qədər üstəgəl üç alma yemişdir.
Uşaqlar birlikdə neçə alma yemişlər?

194. 200 şagird arasında aparılan sorğu göstərdi ki, onlardan 120 nəfəri vanilli, 150 nəfəri şokoladlı dondurmanı xoşlayır, 20 nəfər isə heç birini bəyənmir. Onlardan neçə nəfəri hər iki növ dondurmanı xoşlayır?

195. Tərəfi 3 vahid olan ABCD kvadratı 9 bərabər kvadrata bölünmüşdür. Ştrixlənmiş hissənin sahəsini tapın.



196. Üç balqabaq iki-iki olmaqla bütün mümkün variantlarda tərəzidə çəkildi. Nəticələr 12 kq, 13, kq, 15 kq kimi olmuşdur. Balqabaqlardan ən yüngülü neçə kiloqramdır?

197. $\log_2(6!) = a$, $\log_2 7 = b$ olarsa, $\log_2(8!)$ ifadəsini a və b ilə ifadə edin.

Çoxhədlilər

Səh. 8-12. №1 b) $Q(y) = 2y^2 + 3y + 15$, $r = 59$. c) $Q(x) = -x^2 + 4x - 4$, $r = 13$.
№2 $2x^3 - 3x^2 - 20x + 29$ №3 $B(x) = x - 2$. №4 a) $Q(x) = x^2 - x$, $R(x) = -2x - 3$;
b) $Q(x) = x^2 + 4$, $R(x) = 12$ №5 $Q(2) = 3$ №6 e) $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $r = 0$.
№7 d) $Q(m) = m^3 + 5m^2 - 3m + 2$, $r = 6$ №11 1) a) $r = 94$.
№12 d) $Q(t) = 2t^3 - t^2 + t + 2$, $r = -4$. №13 b) $c = -10{,}5$. №14 a) $c = 57$.
№15 $k = 4$ və ya $k = -2$. №16 a) $c = 11$. №18 $-x+1$ №19 a) $3x - 10$; b) $2x + 5$.
№20 $1{,}5x^2 + 20x + 120$. №21 $3x^2 + 200x + 3000$.

Səh. 14-17. №2 b) $k = 6$; c) $k = -6$ №3 1) $f(x) = (x-10)(x-4)(x+2)$; 4) $f(x) = (x+5)(x-3)^2$
№4 b) $\{-\frac{1}{3}; -4; 2\}$ №5 2)a) 0; b) – 6. №6 a) $\{-1; 2; 3\}$ №8 a) $x+2$ və $x+4$
b) $x+3$ və $x+5$ №10 $\{-2; -1; 2; 5\}$ №11 a) $\{\frac{1}{2}; -1; 3\}$; b) $\{\frac{1}{3}; -2; 3\}$
№12 $P(x) = 2(x+2)(x-1)(x-2)$ №13 $x_1 = -3$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 1$

Səh. 20. №1 a) $x = 0{,}5$; $y = 2{,}5$. №5 g) $2 + 6i$; h) 25 №6 a) 1,2 №7 b) $1 - i$
№9 b) $(y+3i)(y-3i)$ c) $(2x+i)(2x-i)$ №10 a) $\pm 2i$; c) $\pm 4i$;
№11 a) $2+3i$, $2-3i$

Səh. 22-24. №1 b) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = 4$; dərəcəsi 5-dir. e) $x_1 = x_2 = x_3 = 4$, $x_4 = x_5 = 3$,
$x_6 = 1$; dərəcəsi 6-dır. №2 c) $\{0{,}5; 3; 5\}$ №3 c) $x_1 = 2$; $x_2 = -1-\sqrt{5}$; $x_3 = -1+\sqrt{5}$.
№4 b)$\rightarrow f$; a)$\rightarrow g$; c)$\rightarrow h$ №5 c) $\{\frac{1}{2}; 1\pm\sqrt{2}\}$. №6 b) $x = -2$ iki dəfə
təkrarlanan kökdür. №7 $a = -3$, $x_1 = -2$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ №8 b) ± 1; $\pm i$.
№ 10 b) $P(x) = (x-1)^2 \cdot (x^2+1)$, dərəcəsi 4-dür; c) $P(x) = (x-2)\cdot(x^2 - 6x + 10)$,
dərəcəsi 3-dür. №11 1 milyon sayda.

Səh. 27-28. №1 a) dərəcəsi 3; baş əmsalı 2; $x\rightarrow+\infty$ olduqda $f(x)\rightarrow+\infty$, $x\rightarrow-\infty$ olduqda
$f(x)\rightarrow-\infty$. №3 a) tək dərəcəli çoxhədli; b) baş əmsal mənfidir
c) $(-4;0)$, $(-1;0)$, $(3;0)$. №4 a)→4); b)→2); c)→1); d)→3). №6 c) 4sm.
№7 a) ən azı 3 dərəcəli; b) ən azı 4 dərəcəli; c) ən azı 4 dərəcəli.

Səh. 31. №3 a) $y = 1$ üfüqi asimptotdur; b) $y = 0$ üfüqi asimptotu, $x = 1$ və $x = -1$ şaquli
asimptotlarıdır; d) $x = -1$ şaquli asimptotu, $y = 2x - 1$ maili asimptotudur.
№4 a)→2); b)→3); c)→1).

Səh. 32. №1 $m = 1$; $n = -5$. №2 $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$, $B(x) = x + 3$,
$Q(x) = x^2 - 5x + 6$, $r = 0$. №4 b) $r_1 = r_2 = 0$ №6 a) $Q(x) = 3x - 8$, $r = 20$.
№7 a) $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 1\pm\sqrt{2}$; b) $x_1 = 2$, $x_{2,3} = -1\pm\sqrt{6}$. №8 a) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = x_4 = -2$.
№9 a) $P(x) = (x+2)(x+1)^2$; b) $P(x) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$.

Fəzada vektorlar

Səh. 37-41. №3 c) 8-ci; g) 6-cı №6 b)17 №9 $(0;3;0)$ və ya $(0;-1;0)$ №10 $a = 2$ vəya $a = 8$
№11 2) x,y,z oxlarına qədər məsafələr uyğun olaraq $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$ vahiddir.
№13 $(0; \frac{1}{4}; -\frac{1}{4})$ nöqtəsi. №15 $B(-1; -5; 7)$ №16 $(2; 4; 2)$, $(4; 0; 4)$, $(-2; 2; 6)$.
№17 17. №18 $(0;-1;0)$ və ya $(-2;2;-3)$. №19 $AB : BC = 1 : 2$. №20 $(4;6;12)$

Səh. 45-48. №1 b) $\overrightarrow{RS} = \langle -9; -5; 11\rangle$, $|\overrightarrow{RS}| = \sqrt{227}$. №2 e) $|\vec{v}| = \sqrt{68}$. №5 b) $y = 8$, $z = 15$ olduqda
№6 $2\vec{a} - 3\vec{b} = \langle 0; -3; 11\rangle$. №7 b) $2\vec{v} - 3\vec{w} = \langle -5; 14; -8\rangle$. №8 $\vec{c} = \langle 4; -1; 5\rangle$. №9 $K(3;6;14)$
№10 $k = -2$. №11 $\langle -9; 0; -9\rangle$ №12 a) $\overrightarrow{OP} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. №13 a) $P(2; -1; -1)$.
№14 c) $|\vec{v}| = \sqrt{29}$ №15 b) $x = -3$; $y = 4$; $z = 4$. №16 b) $\vec{e} = \langle \frac{-3}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{2}{\sqrt{14}} \rangle$
№17 b) $\vec{e} = \langle \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}; 1\rangle$ №19 c) $\sqrt{54}$. №24 b) $9\vec{i} - 5\vec{j}$

Səh. 51-53. №2 a)≈2753,26; b) –83,14; c) 0. №4 b) $\vec{p}\cdot\vec{q}=23$. №5 –12. №6 a) 43 Coul. №7 a) 590,88 Coul. №8 a) $\vec{e}=\langle\frac{3}{5};\frac{4}{5}\rangle$;b)$\vec{F}=\langle 12;16\rangle$; c) A $=\vec{F}\cdot\vec{d}$ = 200 Coul. №11 c) $\theta=90^o$ d) $\theta=180^o$. №12 2) $k=\pm 2$. №13 a) $\langle 6;-8\rangle$ və ya $\langle -6;8\rangle$. b) $k=-7$ №14 135°. №16 a)$\angle A=90^o;\angle B\approx 64^o;\angle C\approx 26^o$; b)$\angle B=90^o$; $\angle A=\angle C=45^o$

Səh. 55. №1 b) $2x-3y-18=0$. №2 b) $2x+y+1=0$. №3 b) 45° və 135°. №4 b) 90°. №5 b) 0,8; c) $3\sqrt{2}$

Səh. 59-61. №3 a) $7x+y+z-18=0$. №4 a) $6x-4y-5z=0$. №5 a) $n=\langle 1;-7;-18\rangle$ №6 b) $y+2z=0$. №7 $x-6y-z-1=0$, yox №9 a) $x+2y-3z+12=0$; b) $x+y+z=0$. №11 b) 2 vahid. №12 a) $3x+2y+5z+8=0$. №13 a) $k=8$; b) $k=-2,5$ №14 60°

Səh. 62-63. №1 a) $x^2+y^2+z^2=16$, b) $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=36$. №2 (0;0;0), (2;0;0), (0;–6;0), (0;0;10). №3 $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=24$. №4 17. №6 Sferanın mərkəzi M(–1;8;–5) nöqtəsindədir. Radiusu 6-dır. A nöqtəsindən sferaya qədər məsafə 11 vahiddir. №7 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-7)^2=49$ və ya $(x-3)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=49$. №10 a) $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-6)^2=36$

Səh. 66. №2 a) (2;–3;6); b) (–1;–2;6). №3 c) (2;–3;1). №4 c) (3;2;–1). №5 (–2;–13;0)

Səh. 67-68. №2 $\sqrt{6}$. №5 c) 25. №6 45°. №7 a) (4;0;3) və ya (5;–1;4). №9 a) ≈129,27N və ≈95,96 N. №12 a) –5; b) 6. №14 $(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=24$. №17 C(0;8;4).

Limit

Səh. 74-76. №2 d) 2; e) 3; f) 1. №3 c)1024sm³ №4 1) a) 7; b) 7; c) 7. №5 a) –1; c) –3.

Səh. 78-82. №2 1) a) 15; b) 5; c) 6; d)$\frac{2}{3}$. №3 1) –17; 2) 1; 5) 7; 6) 5. №4 c) 32; d) 2; f) 2. №5 d) 3; e) 1; f) 0. №7 g) 14; i) –1 №8 a) 50 ; b) 50; c) 10000 №10 e) 4; f) $-\frac{3}{4}$; g) 2; h)$\frac{5}{6}$ i) –7 . №11 3)$\frac{1}{4}$; 6) $-\frac{1}{6}$; 7)$\frac{1}{4}$; 8)$\frac{1}{6}$; 9)$\frac{1}{2}$; 11) $\frac{1}{4}$; 12) $\frac{1}{3}$. №12 1) a) 4; b) 64; c) 64. 3) a) 3; c) 2 №14 a) 25 milyon manat; c) tələb edilən vəsait sonsuz artır. №15 b) 1500; c) 1000. №16 a) 20; b) 22; c) 36; d) 36 e) 32; f) 34; g) yoxdur; h) 32. №17 8

Səh. 84-88. №2 4) $x=-1$ kəsilmə nöqtəsidir; a) $f(-1)=2$; d) yoxdur. №3 a) bütün həqiqi ox-da kəsilməzdir. b) $x=1$ nöqtəsində kəsiləndir. №5 1) $x=2$ nöqtəsində kəsiləndir, $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$; 3) $x=-2$ nöqtəsində kəsiləndir, $x\to -2$ olduqda limiti yoxdur. №7 2) a) kəsilməzdir; b) kəsiləndir. №10 1) b) $x=5$; c) $\lim\limits_{x\to 5^-}f(x)=8$, $\lim\limits_{x\to 5^+}f(x)=7$.

Səh. 90. №1 3) – 0,5 4) –1; 6) $-\sqrt{2}$ №2 1)$\frac{1}{5}$; 2)1,5; 6)$\frac{2}{3}$; 7)2; 8)0; 9)$\frac{1}{4}$; 10)2;11) –4 №3 a)$\frac{1}{2}$; b) –1; c)$\frac{1}{4}$

Səh. 94-95. №1 a) $x=-2$ və $x=2$ düz xətləri şaquli asimptotlarıdır. №2 b)$y=0$ düz xətti üfüqi asimptotudur №3 a) $x=2$ düz xətti şaquli, $y=2$ düz xətti üfüqi asimptotudur №4 c) 1,5; e)$\frac{1}{4}$; f) $-\frac{1}{4}$; g) 2,5; h) 0 №5 a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$. №8 30. №10 64 №11 a) ≈ 459449; b) 400000.

Səh. 98-101. №5 1) 3; 3) 2; 6) 3; 11)$\frac{1}{4}$; 15) 1 №6 a) e^2; b) $e\sqrt{e}$; e)e^3 ; f)$\frac{1}{e}$

Səh. 102. №1 8) 0,5; 11) $\frac{1}{2}$; 15) 0 №4 a) 1; b) –2; d) 1 №7 0 və 2.

Fırlanma fiqurları
Silindr, konus, kürə

Səh. 106 №1 $h = 6\sqrt{3}$ sm. №2 I hal: h= 3sm, d= 8sm; II hal: h=4 sm, d=6 sm.
№3 I hal: R≈4,77 sm, II hal: R≈3,18 sm

Səh. 108-110. №1 a)112π sm^2; b)64π m^2; c)80π sm^2. №2 a) 720π sm^2. №3 a) 108 sm^2;
c) 78π sm^2. №4 b) 4 dəfə artar. №5 R=4 sm, h=14 sm.
№6 I hal: S_{tam} ≈58,2 m^2, II hal: S_{tam} ≈53,7 m^2. №7 2:3 №8 ≈641 sm^2.
№9 a) ≈457,06 sm^2 ≈ 482,19sm^2 №10 a) S_{yan} = 96π sm^2, S_{tam} = 144π sm^2.
№11 ≈46,3 m^2. №12 Bir tam dövrdə ≈5,89 m^2 sahə düzlənər.
№13 ≈16 sm. №14 ≈1583,4 m^2. №15 ≈1514,3 sm^2. №16 ən azı 4 rulon.

Səh. 115-117. №1 a)100,8°; b)7 sm, 175π sm^2 c)24 sm; d) 224π sm^2. №2 a)144π sm^2;
e)50π m^2. №4 a) $l = \frac{S_{yan}}{\pi r}$. №5 b) 540π mm^2.№7 666π sm^2. №8 0,6π m^2;0,96πm^2.

№9 a) 216 m^2; b) 90π m^2 №10 16,8π sm^2 №11 a)36π; b)24π; c)60π; d)48π;

№12 11 sm^2. №13 240°. №15 240π sm^2. №16 silindrə. №17 ≈ 15,81m^2.
№18 b)$25\sqrt{5}\pi$ sm^2, $25\pi(1+\sqrt{5})$ sm^2. №19 62,25 π sm^2, 20,25 π sm^2

Səh. 119. №1 14π m^2. №2 36 sm^2. №3 45°. №4 R^2. №5 12 sm^2 . №6 500 sm^2.
№7 ≈ 1,66 m^2. №8 675π sm^2 ≈ 0,21 m^2

Səh. 121-122. №1 b) $S_{yan} = 45\pi$ sm^2, $S_{tam} = 90\pi$ sm^2. №2 226π sm^2 ≈ 710 sm^2.
№3 a)104,5π m^2, 168,38π m^2. №4 325π sm^2, 650π sm^2. №5 p ≈ 1,33 manat.
№6 S_{yan} = 100π sm^2. №7 h = 15 m. №8 $S_{yan} = \frac{SR^2}{R^2 - r^2}$.

Səh. 125-128. №1 c) 64π m^2 №3 1:16 №4 b) 64 π №5 3sm №6 c) 3:2 №7 468π sm^2.
№8 320π sm^2. №9 100π sm^2, 20π sm^2, 80π sm^2 №10 a) 64π sm^2; b) 128π sm^2;
c) 192π sm^2; d) $S_{tam} = 3\pi R^2$. №11 7sm №12 180π sm^2 №13 a) ≈7,07m^2
№14 a) 320π sm^2, b) 1 : 5 №15 6 sm. №16 300π sm^2. №17 280π m^2.
№18 400π sm^2 və ya 1100π sm^2. №19 910π sm^2 №20 $h = R(\sqrt{3}-1)$

Səh. 129-130. №1 a)195π sm^2;b)115π sm^2; c)(440+16π)sm^2 №2 144π sm^2
№3 a) $S_{tam} = \pi d^2 + \pi dl$. №4 a) 150π m^2 b)180m^2. №5 ≈9,1 l №6 çatar
№7 d)$6\sqrt{3}$ sm^2; e)32 №8 π sm^2 №9 a) 87π sm^2. №10 a) 1026π sm^2.

Səh. 131 №2 $S_1:S_2$ = 25:16, $h = \frac{4}{5}$ H. №3 $\frac{15}{8}$ π sm^2 №4 4sm, 6sm və 6sm, 9sm

Səh. 132-133. №1 12 sm. №2 a) $l = 2r$; b) 72π sm^2 №3 a) 660 sm^2; e) 9π m^2 №5 ≈31,3m^2
№6 c)200π sm^2 №7 26 sm №8 576π sm^2 №9 $4\sqrt{15}$ sm^2 №10 50π sm^2

Funksiyanın törəməsi

Səh. 138-139. №2 1) a) $\frac{1}{2}$; b) 1; d) 1. №3 a) Yarışın qalibi Fazildir. №4 a)1; b) $1\frac{2}{3}$
№6 4) a)10 m/san №7 2) a)20π №9 a)1; b)2 №10 c)≈2 №11 a) $v(1) = 5$;
b) $v(5) = 13$;

Səh. 143-145. №1 b) $f(x)=3x^3,\ f'(x)=9x^2$ №2 b) $y'=4x,\ y'=-6x$. №4 1) a) x_2, x_7; b) x_1, x_4; c) x_6; 2) x_3 və x_5. №6 b) 2; c) –0,5 №7 1) a) $y = 4x-4$; 2) b) $y = 12x-16$.
№9 A→c, B→b, C→a. №11 $\frac{1}{2\sqrt{t+40}}$

Səh. 148-150. №2 d) $-12x^3$; g) $-\frac{5}{x^2}$ h) $\frac{-2}{x\sqrt{x}}$ №3 d) $\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{x}}$; e) $4\pi r^2$. №4 2) $\frac{x\sqrt[4]{x}+12}{4x^2}$; 4) $\frac{x+2}{2x\sqrt{x}}$.
№5 d) $2x-\frac{2}{x^2}$. №6 a) $f'(0) = 4,\ f'(2) = 16$; b) $f'(1) = 1,5,\ f'(4) = \frac{5}{16}$

№7 a) $x=0,\ x=\pm\sqrt{2}$ olduqda. №8 a) $(-2;+\infty)$; b) $x\in(0;2)$. №9 $f'(x)=3x^2-2x-1$
№10 $a=2,\ b=-2,5$. №14 $k=-6$; $y=-6x+10$. №16 a) $x_1=0,\ x_2=2$.
b) $y=0,\ y=12x-12,\ y=0,\ y=12x-16$. №17 (2;3), $y=3x-3$ №18 $k=4$; $k=-4$.
№19 $y=-2x-3$ və ya $y=6x-11$. №20 c) $f(x)=x^3-2$ №21 qrafiklər kəsişmirlər.
№22 a) $k=-2$; b) $y=\frac{1}{2}x+4$. №23 b) ≈17san

Səh. 152 №1 a) $4x-7$. №3 a) $y=11x-6$ №5 131 №6 a) $P(x)=(2x^3+8x)\cdot(3x^2-4x)$
№7 b) $y=-36x+65$; c) $y=-4x-24$. №8 b) (2;–70) c) (1;3), $\left(-\frac{7}{3}; -\frac{32}{9}\right)$
№10 a) 90 l; b) saatda $3\frac{1}{3}\,l$ azalır.

Səh. 153-154. №1 3) $\frac{-17}{(4+t^2)}$; 4) $\frac{x^2+6x-12}{(x+3)^2}$. №3 a) $\frac{1}{(x+1)^2}$; b) $\frac{-1}{(x+1)^2}$. №4 1) b) $y=\frac{1}{2}x+2$;
2) a) $y=\frac{x+5}{18}$. №5 $\frac{12-x^2}{x^4}$ №6 $T'(2)=-0,96°C$. №7 a) $N'(t)=\frac{2000\,t}{(3t^2+10)^2}$

Səh. 156-160. №2 a) $60(4x+1)^4$; b) $24x(3x^2-1)^3$. №3 a) $\frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$; c) $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. №4 a) $\frac{20}{(3-2x)^3}$
№5 a) $h'(x)=18(6x-1)^2,\ z'(x)=18x^2$ №6 c) $f'(-2)=-2$. №7 $f'(1)=-10$.
№8 b) $x\in\left(\frac{1}{10};\frac{1}{2}\right)$. №9 a) $\frac{-3}{(3x+5)^2}$ №10 a) $y=0,6x+3,2$; b) $y=x+3$

№12 $2m(2t+1)$. №14 b) ≈60,4; ≈69,52; ≈87,68. №15 a) $S=\pi\cdot t^4$, sızılan neftin yayılma sahəsi zamanın 4-cü dərəcədən qüvvəti ilə mütənasibdir.
b) $S'=4\pi t^3$, yayılma sürəti zamanın kubu ilə düz mütənasibdir.
№17 a) 110 manat; b) 80 manat. №18 a) 16 manat; b) 15,998 manat; c) istehsal artdıqca marjinal gəlir azalır. №19 c) ≈593,6 manat

Səh. 162-163. №1 5) $30x$; 9) $\frac{6}{x^4}$. №2 1) 48; 4) 62. №3 1) $24x-2$; 2) $\frac{44}{(2x-3)^3}$.
№5 a) $v(t)=-gt+v_0$; $a(t)=-g$. b) $h(t)=-0,5gt^2+18t+3$; $v(t)=-gt+18$; $a(t)=-g$. №7 49 Coul №8 6N.

Səh. 165-166. №1 e) $2e^x(x+1)$; f) $xe^x(2+x)$ №2 c) $3\cdot4^{x+2}\cdot\ln4$; d) $-3\cdot10^{3x-4}\cdot\ln10$.
№3 b) $y=2x+1$; c) $y=-ex$. №4 a) 2; b) $1,5e$. №5 a) $(-\infty;0)$; b) $(1;+\infty)$.

№7 a) ≈71,7 milyon. №9 a) ≈44,85, c) ≈6,98. №10 c) ≈0,92; d) $\lim\limits_{t\to\infty} c'(t)=0$, istehsal stabilləşir, maya dəyərinin dəyişməsi yoxdur.

Səh. 168-169. №1 c) $\frac{2}{2x+1}$; d) $\frac{2x}{x^2+1}$. №2 a) $x\cdot(2\ln x+1)$; c) $\frac{3\ln^2 x}{x}$. №4 b) $\frac{3}{(x-2)(x+1)\ln3}$.
№5 a) $4\log_2 e$; b) –2 №6 1) $(1;+\infty)$; 2) b) $x=1$ olduqda. №7 a) $y=x$.
№8 b) $N'(t)=20e^{0,2t}$ №9 b) ≈ 0,36 manat. №14 a) ≈830; ≈2066.

Səh. 172-173. №2 g) $2x\sin x+x^2\cos x$; i) $2x\cos 2x-2x^2\sin 2x$. №3 a)0; b) 1. №4 d)3; f)0.

№5 b) $4\cos 4x$; c) $-2\sin 2x$ №7 5) $\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}$. 7)$2e^{2x}(\sin 2x+\cos 2x)$

№8 b)$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$; c) $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$. №11a)$\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$;b)$\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$

c) $y=-x+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$ №14 $-\sin 2x$, yəni d) bəndi. №17 a)$3\sin\theta-2\cos\theta$.

Səh. 174. №3 b) $y=3$. №4 $f''(x)=-18x-2$. №5 a) -101. №6 a)$1\frac{3}{4}$;b) $-\frac{\sqrt{2}}{6}$.
№7 d) $4\sin^3\theta\cos\theta$.№9 b)≈645 manat

Fırlanma fiqurlarının həcmi

Səh. 176-179. №2 a) 450 mm³ №3 a)6,4 m №4 10π kub vahid №5 80 π sm³ №6 100π sm³ artar.
№8 $\frac{SC}{4\pi}$ №9 $4\sqrt{2}\ \pi$ №10 4:1 №11a) 900π m³; b)189π sm³. №12 d) $21{,}3\pi$ m³
№13 b) 4 uzunluq vahidi №14 ≈ 250 manat №15 ≈ 3,43 kq №17 ≈ 21,1 sm³
№18c) 15,5 π m³ №21≈114 ədəd №22 125 sm³ №23 64π sm³ №24 ≈1,02 m³

Səh. 181-183. №1 a)7π m³ b)π m³. №2 a)180π sm³ c) 4m №3 36 π №4 $h=3y$ №5 a)864sm², 960 sm³ №6 16,8 π sm², $9{,}6\pi$ sm³ №7 96π sm² №8 128π sm³ №9 $\frac{\pi l^3}{8}$
№10 ≈ 418 ədəd №11 ≈185,4 sm³ №12 $h=6$ sm №13 Qabın 80%-i ≈ 151 dəqiqəyə boşalar, ≈0,75 *l* №14 a)50π sm³ №15 $168{,}48\pi$ №16 54 sm³
№18 b) ≈73 *ml* №19 216π sm², 388π sm³ №20 ≈9,5 manat, ≈14,09 manat

Səh. 185-187. №2 b)3m. №3c)R=6sm h=18sm.№52) a)144π sm².№6 ≈526,5 m³, ≈1485,2m³.
№7 B-72π sm², 36π sm³. №9 9 π sm² ; $\frac{50}{3}$ πsm³. №10 45π sm³ və 243π sm³.
№11 112500π sm³. №12 1) $\frac{28}{3}$ π sm³; 2) $\frac{442}{3}$ π sm³. №13 a) $\frac{448}{3}$ π sm³;
b) $\frac{550}{3}$ π sm³.

Səh. 189-191. №2 a) $V_1:V_2=1:8$, b)$V_1:V_2=8:27$. №4 a) 256 m³. №5 3sm.
№6 a) 4 dəfə; b) 8 dəfə c) 27 : 64. №7 ≈314 m³. №9 b) 10 m³.
№10 $V_1:V_2=1:8$, $S_1:S_2=1:4$.№11 960 sm².

Səh. 192-193. №3 ≈9,921 m³. №4 ≈1,177 ton. №5 ≈392 kq. №6 ≈ 3 vahid. №9 99π sm³

Törəmənin tətbiqi ilə funksiyanın araşdırılması

Səh. 198-199. №1 a) $f(3)>f(10)$ №3 b) $(-\infty;1{,}5]$ aralığında azalır, $[1{,}5;+\infty)$ aralığında artır. d) $(-\infty;0]$ və $[4;+\infty)$ aralıqlarında azalır, $[0;4]$ aralığında artır.
e) funksiya $(-\infty;-1]$ və$[3;+\infty)$ aralıqlarının hər birində artır, $[-1;3]$ parçasında azalır. №4 a) funksiya $(-\infty;3]$ aralığında azalır, $[3;+\infty)$ aralığında artır. №5 e) $(-\infty;-2]$ və $[2;+\infty)$ aralıqlarında artır, $[-2;2]$ aralığında azalır.
№9 4) a) $-\frac{1}{3}$ və 1; b) $(-\infty;-\frac{1}{3}]$ və $[1;+\infty)$ aralıqlarında artır, $[-\frac{1}{3};1]$ aralığında azalır. №10 a) $h(3)>h(4)$; b) $h(-1)<h(0)$.
№11 b) $b\in[-6;6]$ olduqda.

Səh. 205-207. №5 a) x=0 və x=2; b)$(-\infty;2]$ aralığında azalır, $[2;+\infty)$ aralığında artır
№6 c)böhran nöqtələri $x=-1$ və $x=2$, $(-\infty;-1]$ və $[2;+\infty)$ aralıqlarında artır $[-1;2]$ aralığında azalır, $g(-1)=12$, $g(2)=-15$ №7 5) $x_1=-1$ və $x_2=2$ böhran

nöqtələridir. $x_{max}=-1$, $x_{min}=2$, $f_{max}=13$, $f_{min}=4$. №10 6) $x_1=-1$ və $x_2=1$ böhran nöqtələridir. $x_{min}=1$, $x_{max}=-1$, $f_{min}=-4$, $f_{max}=4$; 9) $x_1=0$ və $x_2=2$ böhran nöqtələridir. $x_{min}=0$, $x_{max}=2$, $f_{min}=0$, $f_{max}=4\cdot e^{-2}$ 10) $x=1$ böhran nöqtəsidir. $x_{min}=1$, $f_{min}=1$. №12 a) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; b) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$.

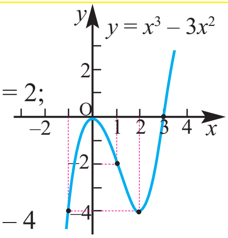
№13 b) 3) $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=0$, $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=-5$. 8) $\max\limits_{[1/e;e]} f(x)=\frac{e+1}{e}$, $\min\limits_{[1/e;e]} f(x)=1$

№15 $C'(x)=0{,}9x^2-10x+28$. №16 b) tərəfi 10 olan kvadrat olduqda perimetri ən kiçik olur. №17a)1;c) $-\frac{1}{2}$;d) 4+8+6. №18 $R=r$ olduqda.

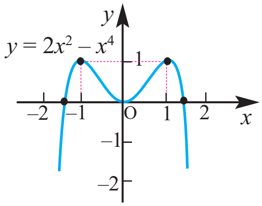
№19 $T_{max}=102{,}2$ F; $T_{min}=95{,}64$ F

Səh. 210-211. №5 a) ən çoxu iki ekstremum nöqtəsi ola bilər. b) $x_1=-3$ və $x_2=4$ böhran nöqtələridir. $x_{max}=-3$, $x_{min}=4$, $f_{max}=142$, $f_{min}=-201$, $(-\infty;-3]$ və $[4;+\infty)$ aralıqlarında artır və, $[-3;4]$ aralığında azalır.

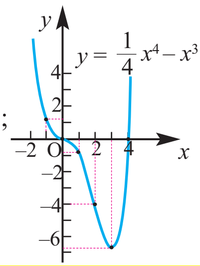
№6 a) oxlarla kəsişmə:
(0;0), (3;0);
böhran nöqtələri: $x_1=0$, $x_2=2$;
$(-\infty;0]$ və $[2;+\infty)$
aralıqlarında artır,
$[0;2]$ aralığında azalır;
$x_{max}=0$, $x_{min}=2$, $f_{max}=0$, $f_{min}=-4$



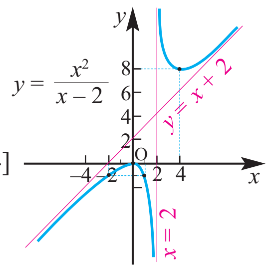
№7 a) oxlarla kəsişmə:
$(-\sqrt{2};0)$, $(0;0)$, $(\sqrt{2};0)$;
böhran nöqtələri:
$x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$;
$(-\infty;-1]$ və $[0;1]$ aralıqlarında artır,
$[-1;0]$ və $[1;+\infty)$ aralıqlarında azalır;
$x_{max}=-1$, $x_{min}=0$, $x_{max}=1$,
$f_{max}=f(-1)=1$, $f_{min}=f(0)=0$,
$f_{max}=f(1)=1$



№7. c) oxlarla kəsişmə:
(0;0), (4;0);
böhran nöqtələri: $x_1=0$, $x_2=3$;
$(-\infty;3]$ aralığında azalır,
$[3;+\infty)$ aralığında artır,
$x_{min}=3$, $f_{min}=-6{,}75$.



№9 c) $D(y)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$;
şaquli asimptot: $x=2$, maili asimptot: $y=x+2$;
böhran nöqtələri: $x_1=0$, $x_2=4$;
$(-\infty;0]$ və $[4;+\infty)$ aralıqlarında artır, $[0;2)$ və $(2;4]$ aralıqlarında azalır; $x_{max}=0$, $x_{min}=4$, $f_{max}=0$, $f_{min}=8$.



Səh. 214-218. №1 12+12 №2 Tərəfi 15 m olan kvadrat olduqda sahəsi ən böyük olar. №3 8sm×8sm №4 Ölçülər 50×100×50 olduqda. №5 6m×6m×3m

№6 a) $\frac{125000}{3}$ m². №72 sm×6 sm×5 sm. №10 Qayıqla C nöqtəsindən məsafəsi 0,75 km olan D nöqtəsinə gəlib, oradan piyada B-yə gəldikdə daha tez çatar.

№12 b) 36 sm². №15 $250\sqrt{3}\,\pi$ sm³ №16 $\frac{128\sqrt{3}\,\pi}{9}$ sm³ №17 $r=\frac{2b}{3}$, $h=\frac{a}{3}$

Səh. 219-220. №5 $(-\infty;-2)\cup(0;2)$. №6 $x_1=0{,}5$ və $x_2=1$. №7 $y=2x-1$. №8 (1;1). №12 8 sm

İnteqral

Səh. 223-231 №2 d) F(x) = x^5. №3 g(x) = 2x+1. №4 b) $x^2 + C$; c) $x^4 + C$; d) tg$x$ + C. №5 d) $\frac{1}{3}x^2 + C$. №6 a) $\frac{4}{3}x^3 + C$; d) $\frac{1}{8}x^4 + C$. №7 b) $-\frac{1}{4x^4} + C$; e) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$; h) $-2x^{\frac{3}{2}} + C$. №8 b) $\frac{3\sqrt{4x+1}}{2} + C$. №9 b) $-\frac{1}{27}(7-3x)^9 + C$. d) $-\frac{1}{25(5x+2)^5} + C$. №10 c) $x^3 + \frac{1}{x} + C$. №11 a) $3x^2$; b) $x^3 + C$; c) $\sqrt{x}$.

№12 b) $x - \frac{x^2}{2} + C$; e) $\frac{x^4}{4} - 9x + C$; g) $x^3 + \frac{1}{2x^2} + C$. №13 e) $x - \frac{x^2}{2} + C$, $(x \geq 0)$.

№14 b) $2u^2 + 5u + \frac{1}{u} + C$; f) $\frac{t^4}{4} + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C$. №15 b) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}x^3 + C$.

№16 c) $\frac{3}{2-4x} + C$; f) $\frac{2}{3}x^3 - x + C$. №17 b) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$. №18 b) $-4e^{3x} + C$; d) $\frac{2^{x+2}}{\ln 2} + C$; g) $\frac{1}{5}\ln|5x+4| + C$. №19 b) $2\ln|2x-3| + C$; c) $-2e^{3-2x} + C$.

№20 a) $e^x - \frac{ex^2}{2} + C$; b) $\frac{2^x}{\ln 2} - 2\ln|x| + C$. №21 b) 2tg$x$ + C; c) −6ctg$x$ + C.

№22 c) −2ctg2x + C. №23 a) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$, c) $-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

№24 e) $-\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$. №25 a) tgθ + C; b) −ctg$x$ − x + C №27 b) $\sqrt{x} - 4$.

№29 c) 4ln$x$ + 1. №34 c) $x(t) = t^2 - 1$. №35 $x(t) = t^2 - 3t$. №36 P(12) ≈ 206152.

Səh. 236-238 №4 f) 2,5; h) 8,5. №6 a) $3\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{4}$. №7 8,5.

Səh. 241-244 №1 4) $\frac{1}{3}$; 9) $\frac{1}{2}$; 15) 1. №2 a) 2. №3 c) 6 i) $\frac{20}{3}$. №4 a) $\frac{20}{3}$. №6 c) 1; d) e−1. №9 b) 9,08. №10 a) ≈ 172 min manat. №12 625m. №14 ≈ 721 nəfər.

Səh. 247-249 №1 a) $\frac{1}{2}$; d) − e. №2 b) 6,5; c) 1,5. №3 a) 4,5 №4 a) 25 №6 a) 40,5; №9 c = 2.

Səh. 252-254. №1 c) $5\frac{1}{3}$. №2 c) 9. №3 b) $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$. №4 c) 6. №5 c) $\frac{1}{6}$. №6 a) 2,5. №7 a) $\frac{5}{6}$. №9 a) 2,5. №10 b) 3 san.

Səh. 258-260. №1 a) 21π; c) $\frac{\pi}{3}$. №3 1) 50π; 5) 7,5π; 7) $\frac{\pi}{6}$. №4 a) 80π №6 a) $3\frac{83}{120}\pi$.

Səh. 261-262. №3 c) 17. №5 c) $\frac{17}{6}$. №7 b) 2. №8 a) 2π+8. №9 b) 2π. №10 c) $49\frac{1}{3}$. №12 a) $x(t) = -0{,}5t^3 + t^2 + 3{,}5t - 9$.

Statistika və ehtimal

Səh. 267-268. №1 3) $\sigma \approx 2{,}24$ №3 a) $\bar{x} = 550$, $\sigma \approx 287$. №6 a) $\bar{x} = \frac{25}{3}$; Ən böyük fərq: 14; $\sigma^2 \approx 14{,}03$; $\sigma = 3{,}75$; b) Ən böyük meyil Pirallahı rayonuna məxsusdur. d) ≈ 393920. №8 a) A: ən böyük fərq 170, $\bar{x} = 272$, $\sigma^2 = 2578$, $\sigma \approx 51$; B: ən böyük fərq 90, $\bar{x} = 227$, $\sigma^2 = 800$, $\sigma \approx 28{,}3$. №8 2-ci futbolçunun nəticəsi daha stabildir.

Səh. 271-273. №1 Quş yumurtalarının ≈81,5%-nin kütləsi 43,09 qramla 45,4 qram aralığındadır. №2 a) (66; 78) b) (60; 84) c) (54; 90). №3 1) c)-də ən böyük, b)-də ən kiçik. №5 a) A şirkətində 5%, B-də 14%. №6 a) ≈ 1710; P=0,16
№7 1) a) 0,82; b) 0,16; c) 0,03. 2) [63;77]. №8 a) m =120, σ = 17,6.
№9 Cəmin 7 düşmə ehtimalı daha yüksəkdir və $\frac{1}{6}$-dir; b) $\frac{1}{12}$

Səh. 276-277. №2 Median $Q_2 = 215$, $Q_1 = 181$, $Q_3 = 231$; Ən kiçik qiyməti 173; Ən böyük qiyməti 241; Məlumatın ≈ 63%-i , əsas hissəsi qutuya düşür. Məlumatın 18,2 %-i sol və sağ qulpdadır. №3 a) 60; b)85; c)75%; d)45; e)[80;105] f) yox.

Səh. 279. №2 a)72%; b)89%; c)28%. №3 1) a) P (A B) = 0,04; b) $P(A \cup B) = 0{,}51$; c) $P(\overline{O}) = 0{,}55$

Səh. 283. №2 0,21. №3 a) $P = \frac{2}{3}$. №5 0,0776. №6 a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{2}$. №7 a)0,32; b)0,48; c)0,08; d)0,44; e)0,92. №8 $\frac{13}{30}$.

Səh. 284-285 №1 b) $\bar{x} = 16{,}6$; $\sigma^2 = 17{,}4$; $\sigma = 4{,}2$. №2 a) 1)-də daha böyükdür. №4 a) 68%; b) 34%; c) 0,5%; d) 16%. №5 $\frac{3}{7}$. №7 0,043. №9 $\frac{1}{18}$. №10 a) $\frac{9}{124}$; b) $\frac{253}{496}$ №12 a) 0,68; b) 0,025; c) 0,84; d) 0,475.

Tənliklər və tənliklər sistemi.
Ümumiləşdirici tapşırıqlar

Səh. 287-288. №1 a)13; c)±4; f)62; i) {–1;3}. №2 b)0. №3 b)iki. №4 4)[4;8]; 8)(–1;0] ∪[3;4); 9)[0;3]; 10) (–∞;2]∪[4;∞); 17) [2;+∞).

Səh. 289. №1 a) (8; –3); b) (1; 2); e) (2; 1); g) (5; 2); h) (3; 3); i) (2;0).

Səh. 290. №1 a) (8; 2); c) (6; 2); e) (4; 2); g) (4; 2); h) (0; 3); i) (2; 5), (32; 1); j) (3; 3)

Səh. 291-311. №2 (–1; –8); (1,5; 2). №3 a)180°; b)60°, 180°, 300°. g)0; $\frac{2\pi}{3}$; π; $\frac{4\pi}{3}$; 2π. №4 ≈ 9,4 sm. №6 çevrəsinin uzunluğu 40%, sahəsi 64% azalar. №7 2 sm. №9 (–1; 1). №10 a) $\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$; g) $\frac{2e^{4x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$. №12 1→B, 2→C, 3→A. №15 40 sm, 60 sm². №16 d) $\frac{1}{4}$; e) $\frac{2}{3}$; f) $\frac{1}{4}$. №20 a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. №21 a) $x=-1$ və $x=2$ b)(–∞;–1] və [2;+∞) aralıqlarında artır, [–1;2] aralığında azalır; c) $y_{max}=y(-1)=13$, $y_{max}=y(2)=-14$. №22 a) 60°;b)$9\sqrt{3}$ №24 a)ƏBQ=3, ƏKQ yoxdur №28 b)240πsm³ №29 b) $\frac{7}{3}$ dm³. №31 a)10^5; b)$_{10}P_5$. №32 63m. №35 4kv.vahid. №39 $3x-y+2z+5=0$. №41 b)30sm². №43 $\frac{512\pi}{15}$ kub vahid. №50 4π. №52 a)1. №53 c)[–∞;3] aralığında azalır, [3;+∞) aralığında artır. d) $x_{min}=3$, $y_{min}=-27$. №57 a)$(\frac{16}{3};\frac{100}{3})$; b) 26 kv.vahid. №58 3sm. №63 a)≈138m²; b) 80m³ №64 c) $\frac{\pi k}{4}$, k∈ Z. №68 2. №69 a)$v(t) = t^2 + 9$;b)$86\frac{2}{3}$ m. №75 $\frac{20}{29}$. №78 a)1600⌒; b)552⌒; №80 24sm. №82 ≈5,7mm. №89 8%. №90 üç. №96 a) 550m³, 942,5sm³. b) ≈476 m², 476sm². №98 $x^2 + (y-2)^2 = 4$ və ya $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$. №99 a) 91; b) $\frac{2}{91}$. №105 1) $\sigma^2 \approx 31{,}1$, $\sigma \approx 5{,}58$. №106 $P_{ABN}=96$, $S_{ABN}=336$, $P_{BCN}=72$, $S_{BCN}=144$. №111 7,5 sm. №113 0,4 sm. №114 45 san. №119 a)100m²; b)≈1,4m; №122 a)2475; b) $\frac{n(n-1)}{4}$. №125 115. №130 $\frac{5}{18}$ №131 1,4. №136 b)7,5; c) $4\sqrt{2}$. №141 $d = \sqrt{2} - 1$. №143 yerləşər. №154 P = 40, S = 80, MK = 6,4. №158 amplitudu $\frac{1}{2}$, tezliyi $\frac{1}{\pi}$. №162 boz. №165 B-dən 28 m məsafədə. №168 0,24C. №169 (4;2), (10;10). №178 6. №184 $0{,}5 \le a \le 2$. №197 $a + b + 3$.

Buraxılış məlumatı

Ümumi təhsil müəssisələrinin 11-ci sinifləri üçün
riyaziyyat fənni üzrə
Dərslik

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər: **Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova**
Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
Əbdürrəhim Fərman oğlu Quliyev

Elmi redaktor **Əbdürrəhim Quliyev**

Dil redaktoru **Asəf Həsənov**

Kompüter tərtibatı **Mustafa Qəhrəmanov**

Bədii tərtibat **Leyla Bəşirova**

Korrektor **Tərlan Qəhrəmanova**

Hesab-nəşriyyat həcmi: 19,1. Fiziki çap vərəqi: 20.
Kağız formatı: 70×100 1/16. Kəsimdən sonra ölçüsü: 165×240 mm.
Səhifə sayı: 320. Şriftin adı və ölçüsü: Calibri qarnituru, 10-11 pt.
Ofset kağızı. Ofset çapı. Sifariş 301. Tiraj 103950. Pulsuz. Bakı – 2023.

Əlyazmanın yığıma verildiyi və çapa imzalandığı tarix: 14.02.2023

Çap məhsulunu nəşr edən:
“Radius” MMC (Bakı, AZ1054, Binəqədi şossesi, 53)

Çap məhsulunu istehsal edən:
“Radius” MMC (Bakı, AZ1054, Binəqədi şossesi, 53)

Pulsuz

Əziz məktəbli !

Bu dərslik sizə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir. O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sizə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, siz də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaq, təmiz və səliqəli saxlayacaqsınız ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşınız ondan sizin kimi rahat istifadə edə bilsin.

Sizə təhsildə uğurlar arzulayırıq!