МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

9

Найма Гахраманова
Магомед Керимов
Ильгам Гусейнов

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по предмету

МАТЕМАТИКА

для 9-го класса
общеобразовательных школ

Замечания и предложения, связанные с этим изданием, просим отправлять на электронные адреса:
radius_n@hotmail.com и **derslik@edu.gov.az**
Заранее благодарим за сотрудничество!

RADIUS

Содержание

6 Многоугольники

7 Неравенства

8 Векторы

9 Числовые последовательности

10 Представление информации. Комбинаторика. Веротность

Используемые условные знаки

Стандарты содержания

Приобретеннные навыки учеников

Необходимый теоритический материал

Необходимые начальные знания

Примерные задания для обучения

Дополнительные ресурсы

Моменты, требующие внимания

Вопросы на рефлекцию

Домашнее задание

Оценивающие задания

Решения некоторых заданий, данных в учебнике

Словарь

Структура учебника

Учебник состоит из 10-ти разделов.

1-й раздел. Этот раздел охватывает некоторые стандарты содержательной линии "Числа и действия". Навыкам чтения записи, сравнению действительных чисел в 8-ом классе было отведено достаточное место. В связи с этим повторению и обобщению этой темы выделен 3 учебного часа, а основное внимание отведено навыкам формирования и применения свойств корня n-ой степени и степени с рациональным показателем. Каждое новое понятие - теоретическая информация, графическое изображение, математическая запись сопровождается решениями примерных задач.

2-й раздел. В этом разделе уроки по содержательной линии геометрии охватывают формирование навыков по применению свойств касательной и секущей к окружности. На этих уроках последовательно исследованы свойства окружности, так же свойства касательной и секущей к ней соответственно возрастному уровню заданы задания, требующие соответственные обсуждения. Большая часть геометрических задач сопровождается графическими изображениями, что играет важную роль в визуальном представлении проблемы и в правильном формировании пространственных представлений. Задания, требующие доказательство какого-либо предложения, даны с определением плана данных и доказательства.

3-й раздел. Этот раздел выделен для формирования стандартов содержательной линии "Алгебра и функции". По применению квадратичной функции не были выделены особо выраженные стандарты содержания. Приходится решать уравнения и неравенства предусмотренные основными стандартами и подстандартами содержания графическим методом, однако эти навыки невозможно применять без применения самой квадратичной функции. С учетом международного опыта, а также того, как в данных стандартах следующих классов эта тема больше не имеет места, то на исследование, применение квадратичной функции - решение финансовых задач в реальных жизненных ситуациях, выражение этой функцией задач на конструкции отводится широкое место.

4-й раздел. В этом разделе по содержательной линии геометрии были включены уроки соответственно стандартам “3.2.3. Знает формулу расстояния между двумя точками, по координатам центра и радиусу пишет уравнение окружности”.
Также рассматривается разные проблемы реальной ситуации, такие как археологические раскопки, удаленность от эпицентра землетрясения, передача мобильных сигналов и др.
5-й раздел. Этот раздел посвящен формированию умений по содержательной линии “Алгебра и функции”, такие как составлять уравнения с одной переменной или системы уравнений с двумя переменными в зависимости от реальной ситуаци. В уроки были включены рациональные уравнения, а также уравнения с переменными под знаком модуля, системы уравнений (в которых одно уравнение первой, а другое второй степени, оба уравнения второй степени), решения примерных заданий, задачи на реальные жизненные ситуации и задачи по информации относящихся к различным областям науки. А также приводятся задачи, сязанные с финансовыми вопросами. Обучение решению уравнений разработано соответственно возрастным особенностям учащихся,на основе международных исследований.
6-й раздел. Этот раздел посвящен многоугольникам. В этом разделе описывается вывод и применение формул для радиусов окружностей, вписанной и описанной около треугольника, свойства четырехугольников, описанной около окружности и вписанной в окружность, а также расчет площади правильного многоугольника.
7-й раздел. Этот раздел посвящен формированию умений по содержательной линии “Алгебра и функции”, такие как решает квадратное неравенство, решает алгебраические неравенства методом интервалов, В этом разделе графическому решению неравенств отведено широкое место, отмечены веб-линки использованных графкалькуляторов. В решении неравенств графкалькуляторы являются незаменимыми инструментами. При решении задач, связанных с финансовыми вопросами, а также задач на конструкции, в реальных жизненных ситуациях применяются квадратные неравенства с очень большими или с очень малыми коэффициентами с составлением графика соответствующей функции. Здесь вспомогательным инструментом может быть только графкалькулятор. Решение неравенства алгебраическим способом ученик также может проверить с помощью графика, построенного на графкалькуляторе.
8-й раздел. В этом разделе по содержательной линии геометрии даны уроки понятие вектора на плоскости, правила сложения, вычитания и умножения вектора на число. В обучении понятия вектора реализован новый подход, примененный в результате исследования опытов развитых стран. Ученик определяет модуль и угол наклона вектора измерениями, определяет реальные измерения по принятому масштабу.
Действия над векторами выполняются графическими изображениями, Эти задания формируют реальные жизненные навыки у учащихся, навыки выполнения задач и оценивания их результатов. Правильное обучение вектора имеет очень большое значение для формирования профессиональных и художественных навыков. В этом разделе преобразования движения представлены задачами, основанными на сравнительных графических представлениях.

9-й раздел. Этот раздел отведен на формирование навыков применять свойства арифметической и геометрической прогресии для решения задач. Задачи связанные с числовыми последовательностями, также арифметическими и геометрическими прогрессиями, даны с чередованием обучающих и прикладных задач.
10-й раздел. Планируется развивать навыки анализировать и классифицировать данные, представленные в таблицах, диаграммах, гистограммах или графиках, создавать таблицы частот и диаграммы и решать простые задачи,связанные с комбинаторикой и вероятностью. В учебник включены примеры решений задач, связанных с умением представить статистическую информацию с таблицей распределение частот, гистограммами, полигоном частот, а также вычислять среднее арифметическое значение по таблице распределения частот.
В учебник включены обучающие примеры на перестановки (пермутации) и комбинезон, а также задачи, на вычисление вероятностей в решении которых требуется найти число возможных и благоприятных вариантов при помощи комбинаторики.
В конце учебника также даны общие задания по курсу математики средней школы.

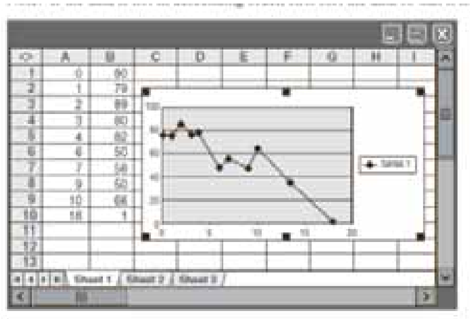
Факторы, оказывающие положительное влияние на приобретение высоких результатов обучения.

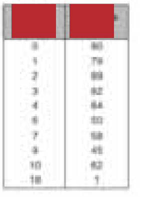
1. В большинстве случаев ученик знакомится с новыми понятиями посредством задания на исследование с мотивированным характером. Эти задания, несущие больше практический характер, создают условия для восприятия понятий учениками, для очного их представления. Поэтому в максимальной степени следует обеспечить организацию этих занятий и присутствие всех учеников на них;
2. Приготовление виртуальных или бумажных плакатов, отражающие объяснения новых понятий и их демонстрация в течении урока;
3. Будучи общеклассной деятельностью - теоретические информации представляются обсуждениями, объяснением примеров;
4. Обратить внимание на выполнение обучающих заданий всеми учениками и проведение формативного оценивания путем наблюдения;
5. Для отстающих учеников необходимо приготить простые задания посредством программ, изготавливающим рабочие листы;
6. Объяснение в классе прикладных и творческих заданий, одна часть которых дается как домашнее задание. Из-за долгосрочности некоторых прикладных и творческих заданий приготовление учениками этих заданий в более развернутом виде - в форме реферата.
7. Обеспечение самостоятельного обучения учащихся и с целью близкого участия родителей в образовании своего ребенка - обеспечить доставку родителям интернет-адресов.
8. Обеспечение доставки всем ученикам особых заданий, данных в пособии для учителей и составленные по данным критериям.

Технологические инструменты, используемые в современном преподовании предмета “Математика” и информация о программном обеспечении

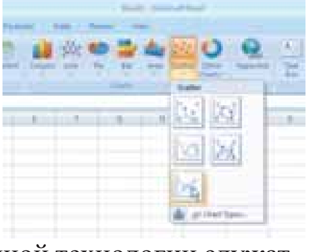
Результаты обучения и интернет-адреса

Электронная таблица и пример полигона частоты EXCEL.





MİCROSOFT EXCEL



Числа и действия. Производить вычисления по формуле.

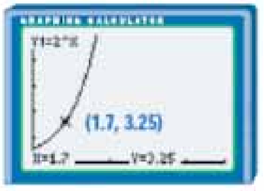
Алгебра и функции. Составление электронных таблиц. Построение графических функций.

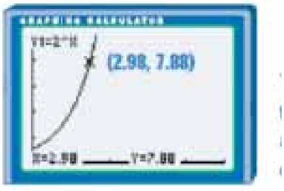
Статистика и вероятность. Составить электронные таблицы и представить информацию в разных графических формах.

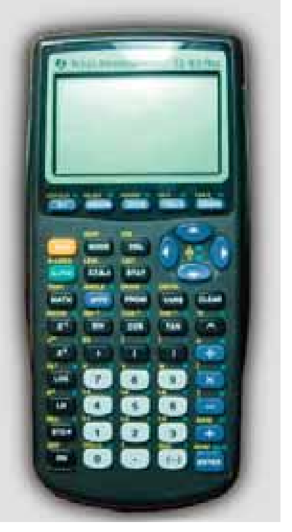
В преподавании математики достижения современной технологии служат эффективной организации обучения. Среди инструментов обучения наряду с виртуальными инструментами, служащими реализации стандартов по всем содержательным линиям - интернет, графкалькуляторы, электронные таблицы, легко переносимые с помощью особых программ-производство малогабаритных графкалькуляторов, стало причиной положительных изменений в преподавании математики. Этими калькуляторами широко пользуются в развитых Европейских странах, Америки, Канаде. С помощью программы с графическим обеспечением Corel DRAW можно выполнить определенные работы. При обучении математике в определенной степени можно воспользоваться программой Microsoft Excel, имеющей возможности вычисления и подготовки статических информаций. Приготовлены отдельные программы для обучения математике с помощью интернета - Geometer’s Sketchpad® Geometry Software, Fathom Dynamic Data Software. А также имеются программные обеспечения, широко используемые при обучении природоведения, математики, социальных наук и т.д.

Однако несмотря на постоянные обновления этих программ, с большой скоростью распространяется использование мобильных графкалькуляторов. Существуют объективные и субъективные причины невозможности использования вышеперечисленных программ - из-за компьютера, из-за связи с интернетом, не являющимся доступным для каждого ученика и т.д.

Наиболее используемые графкалькуляторы - это графкалькуляторы серии малого габарита, имеющие интерфейсную связь с большими компьютерами. Использование таких графкалькуляторов запланировано в старших классах при обучении математике и охватывает все содержательные линии. Использование технологии - одно из основных направлений деятельности. Для молодежи с современным мышлением использование этих технологий не создадут трудностей.







С помощью этих графкалькуляторов возможно:

- построить график любой функции;
- представить функцию с заданным графиком - таблицей, формулой;
- определение области определения и множества значений функции;
- нахождение максимума и минимума и .т.д.

Также есть возможность решения систем уравнений, решения неравенств, действий над матрицами, решения статических задач, решения задач по комбинаторике. Вредная сторона пользования технологией - мысли которые могут беспокоить: “Все работы выполняет калькулятор, а когда учит ученик”? Однако навыки систематизирования информации, введения в компьютер, обработки результатов играют важную роль в формировании творческого и аналитического мышления. В современном мире, в реальных жизненных ситуациях каждый все больше нуждается в этих навыках.

Виртуальные графкалькуляторы. В нужных местах учебника, а также в пособии для учителей даны веблинки графкалькуляторов. Виртуальные графкалькуляторы бывают разными в зависимости от используемой темы. Часть их имеют ограниченные возможности - предназначены только лишь для выполнения графических заданий. Однако удобны для использования. Например, такие как: https://www.desmos.com/calculator, http://www.meta-calculator.com/online/, http://my.hrw.com/math06_07/nsmedia/tools/Graph_Calculator/graphCalc.html и др.

Обратите внимание, что запись $\sqrt[n]{a}$ можно записать в виде $a^{\frac{1}{n}}$.

Существуют виртуальные графкалькуляторы с более широкими возможностями, которые предназначены для построения графиков тригонометрических, рациональных функций, а также для решения статических, комбинаторных, алгебраических задач.

Например, такие как https://mathway.com/graph

Ссылки WEBSITE для обучения и занятий

1. http://algebralab.org/studyaids/studyaid.aspx?file=Algebra2_2-6.xml
2. http://edhelper.com/LinearEquations.htm
3. http://www.kgsepg.com/project-id/6565-inequalities-two-variables
4. http://library.thinkquest.org/20991/alg /systems.html
5. http://math.tutorvista.com/algebra/linear-equations-in-two-variables.html
6. https://sites.google.com/site/savannaholive/mathed-308/algebra1
7. http://www.algebra-class.com/graphing-inequalities.html
8. http://www.beva.org/maen50980/Unit04/LI-2variables.htm
9. www.classzone.com/books/algebra_1/page_build.cfm?id=lesson5&ch=6
10. http://www.mathchamber.com/algebra7/unit_06/unit_6.htm
11. http://www.mathwarehouse.com/algebra/linear_equation/linear-inequality.php
12. www.montereyinstitute.org/courses/Algebra1/COURSE_TEXT_RESOURCE/U05_L2_T1_text_final.html
13. http://www.netplaces.com/algebra-guide/graphing-linear-relationships/graphinglinear-inequalities-in-two-variables.htm
14. ww.netplaces.com/search.htm?terms=linear+inequalities+in+two+variables
15. www.personal.kent.edu/~rmuhamma/Algorithms/MyAlgorithms/MathAlgor/linear.html
16. http://www.purplemath.com/modules/ineqgrph.html
17. http://www.saddleback.edu/faculty/lperez/algebra2go/begalgebra/index.html#systems
18. http://www.tutorcircle.com/solving-systems-of-linear-equations-and-inequalitiest71gp.html#close_iframe#close_iframe
19.//www.wyzant.com/Help/Math/Algebra/Graphing_Linear_Inequalities.aspx
20. https://www.khanacademy.org
21.http://www.metmuseum.org/~/media/Files/Learn/For%20Educators/Publications%20for%20Educators/Islamic_Art_and_Geometric_Design.pdf
22. http://www.learnalberta.ca/content/memg/3_A/index.html

Навыки,умения и содержательные стандарты по 9-му классу

К концу 9-го класса учащийся:

•читает, пишет, сравнивает и выстраивает действительные числа, на координатной оси показывает приблизительно точку, соответствующую действительному числу, при решении задач применяет свойства объединений и пересечений множест

• применяет свойства корня *n*-ой степени ($n > 2$) и степеней с рациональным показателем

• применяет формулы процентов в решении практических задач

• находит приближенные значения выражений, содержащих квадратный и кубический корни и результаты сравнивает с результатами, полученными с применением вычислительной техникой

• соответственно жизненным ситуациям составляет систему из двух уравнений - с одной переменной и с двумя переменными. записав данное предложение в виде системы двух линейных неравенств - решает ее, применяет свойства последовательностей, арифметической и геометрической прогрессий в решений в задач

• решает систему уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение первой, а другое второй степени, решает квадратные неравенства.

• в данный треугольник вписывает и описываетокружность и применяет их свойства при решении задач, применяет свойства касательных и секущих окружности

• применяет в математических и физических задачах понятие вектора и действия над ними, представляет движение на плоскости как конгруентное преобразование фигур

• применяет формулу расстояния между двумя данными точками, пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу.

• От одной производной единицы измерения переходит к другой, проверяет правильность результатов полученных при практических измерениях.

• Читает и анализирует информации данные в виде таблицы, диаграммы, гистограммы или в графическом виде, создает таблицу частоты и строит диаграмму.;

• решает простые задачи по комбинаторике и теории вероятности

Основные стандарты и подстандарты по содержательным линиям.

1. Числа и действия. Учащийся:

1.1.1. Читает и пишет действительные числа.

1.1.2. Сравнивает и выстраивает действительные числа.

1.1.3. На координатной оси показывает приблизительно точку, соответствующую действительному числу.

1.1.4. При решении задач связанные с действительными числами применяет свойства объединений и пересечений множеств.

1.2. Применяет математические операции, математические процедуры и отношения между ними.

1.2.1. Находит значения выражений применяя свойство корня n-ой степени ($n > 2$).

1.2.2. Применяет свойство степеней с рациональным показателем.

1.2.3. ($n > 2$) Упрощает выражения содержащий корень n-ой степени.

1.2.4. Применяет формулы сокрашенного умножения в выражениях содержащих корень n-ой степени ($n > 2$).

1.2.5. Применяет формулы процентов в решении практических задач (при банковских операциях, изменениях цен продажи)

1.3. Производит расчеты, оценивает точность полученных результатов.

1.3.1. Находит приближенные значения выражений, содержащих квадратный и кубический корни и результаты сравнивает с результатами, полученными с применением вычислительной техникой.

2. Альгебра и функции. Учащийся:
2.1. Проблемы разных ситуаций выражает в алгебраическом виде и исследует..
2.1.1. Соответственно жизненным ситуациям составляет систему из двух уравнений -с одной переменной и с двумя переменными.
2.1.2. Записав данное предложение в виде системы двух линейных неравенств - решает ее.
2.1.3. Применяет свойства последовательностей, арифметической и геометрической прогрессий в решений в задач.
2.2. Выполняет алгебраические процедуры
2.2.1. Проводит тождественные преобразования под алгебраическими выражениями.
2.2.2. Решает систему уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение первой, а другое второй степени.
2.2.3. Решает квадратные неравенства.
2.3. Выражает зависимости между величинами, встречающимися в повседневной жизни, через функции
2.3.1. Решает алгебраические неравенства методом интервалов.
3. Геометрия. Учащийся:
3.1. Исследует с помощью геометрических изображений, представлений и логическими обсуждениями свойства и признаки фигур.
3.1.1. Знает понятия ломанной и многоугольника, изображает правильный многоугольник.
3.1.2. В данный треугольник вписывает и описываетокружность.
3.1.3. Применяет свойства касательных и секущих окружности
3.1.4. Применяет свойства четырехугольника вписанного и описанного около окружности при решении задач.
3.1.5. Применяет в математических и физических задачах понятие вектора на плоско сти, правила сложения, вычитания и умноже ния вектора на число
3.2. Применяет геометрические преобразования и симметрию к решению задач
3.2.1. Знает понятия параллельного переноса на плоскости и применяет для преобразования фигур.
3.2.2. Знает понятие преобразование движения и получает преобразованием из одной конгруэнтной фигуры другую.
3.2.3. Знает формулу расстояния между двумя данными точками, пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу.
4. Измерения. Учащийся:
4.1. Понимает значение единиц измерения, использует соответствующие измерительные приборы.
4.1.1. От одной производной единицы измерения переходит к другой.
4.2. Выполняет расчеты с использованием измерительных и расчетных инструментов
4.2.1. Проверяет правильность результатов полученных при практических измерениях.
5. Статистика и вероятность. Учащийся:
5.1. Собирает статистическую информацию, систематизирует, анализирует и представляет результат.
5.1.1. Читает и анализирует информации данные в виде таблицы, диаграммы, гистограммы или в графическом виде
5.1.2. Статические информации классифицирует по определенным свойствам.
5.1.3. Определяет правильность статических информаций.
5.1.4. Возникшие на основе статических информаций создает таблицу частоты вариантов и строит диаграмму.
5.2.1. Различает виды выборок и решает простые комбинаторные задачи.
5.2.2. На основе статических информаций прогнозирует возможность событий.
5.2.3. Решает простые задачи на вероятность с помощью комбинаторики.

1 **Корень *n*-ой степени**
Степень с рациональным показателем

Таблица планирования по 1-му разделу

Стандарты содержания	Урок №	Тема	Поурочный час	Учебник стр.
1.1.1. Читает и записывает действительные числа. 1.1.2. Сравнивает и упорядочивает действительные числа. 1.1.3. Показывает, приблизительно, на числовой оси точку, соответствующую действительному числу. 1.1.4. Применяет свойства объединения и пересечения множеств при решении задач на множестве действительных чисел. 1.2.1. Находит значения выражений, применяя свойства корня n-ой степени ($n > 2$). 1.2.2. Применяет свойство степеней с рациональным показателем. 1.2.3. Упрощает выражения содержащий корень n-ой степени ($n > 2$). 1.2.4. Применяет формулы сокращенного умножения в выражениях содержащих корень n-ой степени ($n > 2$) . 1.2.5. Применяет формулы процентов в решении практических задач (при банковских операциях, изменениях цен продажи) 1.3.1. Находит приближенные значения выражений, содержащих квадратный и кубический корни, и сравнивает с результатами, полученными с применением вычислительной техники.	1-3	Действительные числа	3	6-11
	4-8	Корень *n-ой* степени Свойства корня *n-ой* степени	5	12-20
	9-11	Степень с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем.	3	21-25
	12-13	Обобщающие задания	2	26-27
	14	Задания суммативного оценивания по разделу 1	1	
		Всего	14	

Пример поурочного плана

Степень с рациональным показателем. Прикладные задания. 3-й час

Содержательные стандарты.

1.2.2. Применяет свойство степеней с рациональным показателем.

1.2.5. Применяет формулы процентов в решении практических задач (при банковских операциях, изменениях цен продажи)

1.3.1. Находит приближенные значения выражений, содержащих квадратный и кубический корни, и сравнивает с результатами, полученными с применением вычислительной техники.

Цель урока - формирование нижеследующих навыков учащихся:

- применяет свойства степени с рациональным показателем;
- решает задачи с применением свойств степени с рациональным показателем.

Мотивация. Если цена какого либо продукта в течении n лет выросла с p_1 манат до p_2 маната, тогда по этому продукту средняя годовая инфляция вычисляется как:

$$r = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Вычислите инфляцию для нижеследующих продуктов:

Продукт	1 кг в 2016- ом году цена (₼)	1 кг в 2020- ом году цена (₼).
Мясо	9	11
Сливочное масло	10	12

Как видно, в реальных жизненных ситуациях приходится решать задачи, в которых нужно упрощать выражения, содержащие степень с рациональным показателем и найти ее значение.

По формуле $r = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$ вычислим степень инфляции для мяса и масла:

Мясо: $r = \left(\frac{11}{9}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 0{,}051$ Масло: $r = \left(\frac{12}{10}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 0{,}047$

Как видно в цене мяса средняя годовая инфляция составляет 0,051, то есть 5,1%. в цене масла 0,047, то есть 4,7%. **На этот этап урока отводится 5-6минут.**

Рекомендуется дать домашнее задание на самостоятельное исследование степени инфляции продуктов питания, бытовых предметов и.т.д

Выполняются прикладные задания данные в учебнике на стр. 24-25.

Обсуждается задача **У.29** Вместо n ученики записывают одно значение и вычисляется количество кофеина оставшегося в организме человека за это время. Ученикам поручают провести исследование на вредность или полезность кофеина в организме человека. Кофеин оказывает положительное влияние на стимулирование центральной нервной системы. В маленьких дозах добавляется к различным напиткам. Принятие в больших дозах опасно. В качестве домашнего задания, задается выполнить письменно все пункты задачи.

4-5 минут. Как домашнее задание задается У.28 и У.30

Задание **У.31** формирует навыки сравнения данных чисел со степенью с рациональным показателем. Задается вопрос: который из чисел $2^{\frac{1}{3}}$ и $5^{\frac{1}{4}}$ больше? Как вы это определяете? Некоторые из учеников на доске приводя разные примеры отвечают на вопрос. Ученикам поручают читать задачу. Некоторых учеников просят рассказать своими словами проблему поставленную в задаче.

Ученик: Должен найти объемы прямоугольного паралелепипеда с данными измерениями и куба с данным ребром и сравнить эти результаты. **6–7 мин.**
Полное выполнение задания задается домой.

Общеклассная деятельность. Разыгрывается игра с картами ... У меня, а ... у кого Готовятся карты, число которых равно числу учеников в классе. Проверяется наличие начальной и конечной карты.

У кого начальная карта, тот читает информацию на карте. Все ученики записывают прочитанную информацию и вычисляют.

Так как $4^{\frac{3}{2}} = 8$, то у кого карта с 8 отвечает:

Начальная карта у меня А у кого $4^{\frac{3}{2}}$?

8 у меня А у кого $125^{\frac{2}{3}}$?

Задания такого типа делают обучение более развлекательным, увеличивают мотивацию. Помогают формированию таких навыков как слушание, понимание, устное вычисление и т.д., а также развивает социальные навыки. Игральные карты в пособии даны на стр. 28-30. Игра - выгодное средство для проведения формативного оценивания. Могут быть включены и карты с отрицательным показателем степени. **7-8 мин.**

Работа в группах. Задание **У.33** выполняется как работа в группах по 4 человека в каждом. **7-8 мин**. Каждый член группы рисует квадрат, на сторонах отмечает выбранную рациональную или иррациональную величину, вычисляет периметр квадрата. Таким же образом рисуется куб, отмечается длина ребра и вычисляется полная поверхность. Потом члены групп проверяют задания друг-друга, после нужных исправлений объявляют о готовности к презентации. После презентации всех групп ведется обобщение о том, какими математическими знаниями пользовались для выполнения этих заданий:
- Навык замены одной переменной через другую, например, $S = a^2$. Отсюда получается $a = \sqrt{S}$. А периметр квадрата $P = 4 \cdot a = 4\sqrt{S}$
Аналогично объем куба $V = a^3$, ребро $a = \sqrt[3]{V}$, полная поверхность $S_t = 6 \cdot a^2 = 6\sqrt[3]{V^2}$
- Навыки различать рациональные и иррациональные числа. Навыки применения свойств корней, проведение вычислений над иррациональными числами и др.

Рефлекс. По работе в группах - согласно формативному оцениванию, учитель определяет слабую группу учеников.

Оценивание. Оценивание можно провести используя рабочие листы различной сложности. Выбираются рабочие листы, соответствующие уровню знаний учеников или же составляет заново. Рабочие листы могут быть использованы и как домашнее задание. **5 мин.**

Действительные числа. 2 часа

Стандарты содержания

1.1.1. Читает и записывает действительные числа.
1.1.2. Сравнивает и упорядочивает действительные числа.
1.1.3. Показывает, приблизительно, на числовой оси точку, соответствующую действительному числу.
1.1.4. Применяет свойства объединения и пересечения множеств при решении задач на множестве действительных чисел.

Формирование навыков учеников

- *классифицирует множество действительных чисел;*
- *изображает действительные числа на числовой оси;*
- *сравнивает действительные числа;*
- *Применяет свойства объединений и пересечений множеств на множестве действительных чисел.*

Словарь

Действительные числа, натуральные числа, целые числа, рациональные числа, иррациональные числа

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы.

Урок 1-3. Действительные числа. Учебник. стр. 6-11. 3 часа

Мотивация. На доске записываются такие числа, как:

$$-\frac{7}{3} \quad \pi \quad \sqrt{3} \quad 0,1(3) \quad -3 \quad 5$$

Отвечающий ученик классифицирует показанные числа по соответствующим числовым множествам.
Например, $-\frac{7}{3}$ рациональное число.
–3 соответствует как множеству целых так и множеству рациональных чисел. Вспоминается определение рационального числа. Числа, записанные в виде $\frac{m}{n}$ ($m \in Z$, $n \in N$) являются рациональными. А к каким множествам чисел можно отнести числа $\pi, \sqrt{3}$, 5?
Множество рациональных чисел- множество, в которое входят обыкновенные дроби, конечные и периодические десятичные дроби, натуральные и целые числа. Числа, которые не могут быть выражены в виде отношения двух целых чисел (т.е. и виде $\frac{m}{n}$) называются иррациональными. А как называется множество чисел, в которое входят и рациональные и иррациональные числа? 1-й, 2-й час выполняются задания на сравнения чисел, выражение их в различных формах, определение абсолютной величины. Навыкам сравнения действительных чисел уже отведено место над рациональными и иррациональными числами. Примеры заданий для формирования этих навыков:

• Напишите два числа между дробями $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{6}$. Как объясните мнение о том, что между этими числами можно написать бесконечное число чисел?

• Как определить числа, расположенные между числами $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$? Обращается внимание навыкам определения целой и дробной частей числа.

3-й час. Выполняются задания на умение записывать множества действительных чисел неравенствами, интервалами. Отмечаются сходства и различия свойств объединения и пересечения множеств, этих свойств и свойств действий сложения и умножения над числами. Отслеживается - выполнение задания **У.22** каждым учеником.

? Решения некоторых заданий, данных в учебнике.

У.6 Найдите разность чисел обратного и противоположного числу $a = \sqrt{2} + 1$

Решение. b) число обратное *заданному* $a = \sqrt{2} + 1$:

$\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2} - 1$ *числитель и знаменател умножается на* $(\sqrt{2} - 1)$

число противоположное: $-a = -(\sqrt{2} + 1) = -\sqrt{2} - 1$. Тогда имеем:

$\frac{1}{a} - (-a) = (\sqrt{2} - 1) - (-\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$

У.14 Найдите целую и дробную части чисел.

Решение. f) Поскольку $1 < \sqrt{3} < 2$, значит : $[\sqrt{3}] = 1; \{\sqrt{3}\} = \sqrt{3} - 1$

g) на обе стороны неравенства $2 < \sqrt{5} < 3$ прибавим 1. $3 < \sqrt{5} + 1 < 4$

Значит, $[\sqrt{5} + 1] = 3$; $\{\sqrt{5} + 1\} = \sqrt{5} + 1 - 3 = \sqrt{5} - 2$

Рабочий лист № 1

Имя_______ **Фамилия**__________ **Число**__________

1. Расположите действительные числа в порядке возрастания.

a) $\frac{11}{5}$; $-\pi$; $-2{,}9$; $-\sqrt{7}$ ___________________________________

b) $4{,}5$; $3\frac{5}{6}$; $\sqrt{16}$; $\frac{8}{3}$; 2π ______________________________

c) $\sqrt{4}$; $1{,}8$; $-\sqrt{10}$; $-\sqrt{\frac{36}{9}}$; 5 _____________________________

2. Расположите на числовой оси.

a) $-\sqrt{1}$; $0{,}1$; $\sqrt{13}$; $-\frac{3}{5}$; $\sqrt{6}$

b) $-\sqrt{5}$; π; $\frac{\pi}{3}$; $4\frac{2}{3}$; $\sqrt{18}$

Стандарты содержания

1.2.1. Находит значения выражений, применяя свойства корня n-ой степени ($n > 2$).
1.2.3. Упрощает выражения содержащий корень n-ой степени ($n > 2$).
1.2.4. Применяет формулы сокращенного умножения в выражениях содержащих корень n-ой степени ($n > 2$) .
1.3.1. Находит приближенные значения выражений, содержащих квадратный и кубический корни, и сравнивает с результатами, полученными с применением вычислительной техники.

Формирование навыков учеников

• *выполняет задания на нахождение точного и приблизительного значений квадратного и кубического корней;*

• *применяет свойства корня n-ой степени.*

Словарь

корень n-ой степени, степень с рациональным показателем

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы
Адреса интернета:
https://mathway.com/graph
ttps://go.hrw.com/math/midma/gradecontent/manipulatives/GraphCalc/graphCalc.html

Урок 4-8. Учебник стр. 12-20. Корень *n*-ой степени. Свойства корня *n*-ой степени. 5 часа

1-ый, 2-ой урок включает формирование вычислительных навыков кубического корня. Эти навыки могут быть оценены нижеследующими навыками-критериями. Выражение списком более детальных навыков, другими словами - правильное определение критерий оценивания оказывает положительное влияние на организацию обучения. Формативное оценивание проводится наблюдениями по этим критериям.

•Письменно точно вычисляет куб и корень кубический некоторого числа;

•Вычисляет калькулятором куб и корень кубический чисел;

• Определяет корень кубический чисел;

• Для вычисления корня кубического чисел, применяет некоторые методы вычислений данные в учебнике.

• Знает определение арифметического корня и результат исходящий из этого определения, решает уравнение n-ой степени $x^n = a$.

• Объясняет на примерах равенства:
$\sqrt[n]{a^n} = a$, если n-нечетное;
$\sqrt[n]{a^n} = |a|$, если n-четное

Применяемые основные первоначальные навыки:
Свойства степеней
Разложение числа на простые множители.
Геометрические знания: формулы периметров, площадей и объемов фигур.

Рассматривая данное задание ученики вспоминают свойства степеней. Выражая запись $64 = 4^3 = 8^2$, записью $4^3 = (2^2)^3$ и $8^2 = (2^3)^2$ или же $64 = 2^6$ понимают, что все записи-различные эквивалентные записи одного числа. Задание может быть выполнена как работа с маленькими группами. Объявляется, кто напишет больше примеров в течении 3-х минут. Ученики понимают, что в этих примерах стратегия составления связано со свойствами степеней.
Например, $(5^2)^3 = (5^3)^2$, $(7^2)^3 = (7^3)^2$

Методические рекомендации по некоторым заданиям данным в учебнике

У.25. Биология. Высоту дерева можно найти приблизительно вычислив значение выражения $35\sqrt[3]{d^2}$. Здесь d - диаметр ствола дерева (в метрах), h - его высота. Чему приблизительно равна высота дерева с диаметром ствола 1,1 м?

Ученики вычисляют высоту какого-либо дерева в школьном дворе, в садах, в парках используя эту формулу. Эту работу можно выполнить как работу в группах. Каждая группа выбирает одно дерево. Произведя различные измерения (по длине окружности) определяют диаметр дерева.

3-5-й час. Планируется формировать навыки применения корня *n-ой* степени и его свойств.Основные критерии навыков применения свойств корня n-ой степени:

• Применяет свойство корня n-ой степени из произведения для $a \geq 0$ и $b \geq 0$ при упрощении числовых и содержащих переменную выражений:

Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

• Применяет свойство корня n-ой степени из дроби для $a \geq 0$ и $b > 0$ при упрощении числовых выражений и содержащих переменную: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

• Применяет свойство корня n-ой степени из корня $к$-той степени если n, k - натуральные числа и $a \geq 0$ при упрощении числовых выражений и выражений с переменными: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$

• Если n, k, m - натуральные числа и $a \geq 0$, упрощает, сокращая общие множители в показателе подкоренного выражения и в показателе корня: $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$

• Выполняет задания на вынесение множителя из-под знака корня.

• Выполняет задания на внесение множителя под знак корня.

• Выполняет задание на освобождение знаменателя дроби от иррациональности.

Для формирования этих навыков в учебнике приведено определенное количество упражнений. Однако, чтобы проверить отдельные способности и еще больше развить их, наряду с использованием рабочих листов данных в учебнике, рекомендуется также и учителям приготовить дополнительные листы. Эту работу могут выполнить сами же ученики на уроке информатики -как интегративное задание.

! Моменты требующие внимания, наиболее часто встречающиеся ошибки учащихся:

- При сравнение $4\sqrt{2}$ и $\sqrt{32}$ ученик думает, что $4\sqrt{2}$ меньше $\sqrt{32}$. Выражая $\sqrt{32}$-х эквивалентными выражениями $\sqrt{4\cdot 8}$ и $\sqrt{16\cdot 2}$ понимает равенство их $4\sqrt{2}$. При сравнении смешанных радикалов $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$ понимает внесение множителя под знак корня.
- Задание “В выражении $3\sqrt[5]{2}$ внесите множитель под знак корня” выполняют как $\sqrt[5]{3\cdot 2}$. Ученик понимает, что множитель под знаком корня записывается в степени равном показателю корня : $3\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{(3^5)\cdot 2}$
- Выражение $-2\sqrt[3]{5}$ может записаться как $-\sqrt[3]{40}$ или же $\sqrt[3]{-40}$. Однако число $-2\sqrt{5}$ не эквивалентно числу $\sqrt{-20}$.

Рабочий лист № 2

Имя________ Фамилия___________ **Число___________**

Определяет и вычисляет кубический корень числа.

1. Вычислите куб чисел:

$4^3 =$ $5^3 =$ $6^3 =$ $7^3 =$ $8^3 =$ $9^3 =$ $10^3 =$

2. Воспользовавшись первым заданием найдите устно кубические корни чисел:

$\sqrt[3]{125} =$ ______ $\sqrt[3]{1000} =$ ______ $\sqrt[3]{64} =$ ______ $\sqrt[3]{216} =$ ______

$\sqrt[3]{8} =$ ______ $\sqrt[3]{512} =$ ______ $\sqrt[3]{343} =$ ______ $\sqrt[3]{8000} =$ ______

$\sqrt[3]{2744} =$ ______ $\sqrt[3]{64000} =$ ______ $\sqrt[3]{216000} =$ ______ $\sqrt[3]{6859} =$ ______

3. Определите между какими последовательными целыми числами будет кубический корень.

$\sqrt[3]{200}$ ⟶ между 5 и 6, $5^3 = 125$; $6^3 = 216$

$\sqrt[3]{4}$ ⟶ между____и _____ , ____^{3} = _____; _____^{3} = ______

$\sqrt[3]{1,65}$ ⟶ между____и _____ , ____^{3} = _____; _____^{3} = ______

$\sqrt[3]{100}$ ⟶ между ____и _____ , ____^{3} = _____; _____^{3} = ______

4. С помощью калькуятора вычислите.

$\sqrt[3]{200} =$ $\sqrt[3]{1,65} =$ $\sqrt[3]{4} =$ $\sqrt[3]{100} =$

Решения некоторых заданий, данных в учебнике.

У.19. Упростите.

Решение. c) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} + \sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^4} = (\sqrt{2}+1) + |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1 = 2\sqrt{2}$

d) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}-3)^3} + \sqrt[4]{(\sqrt{2}-3)^4} = (\sqrt{2}-3) + |\sqrt{2}-3| = \sqrt{2}-3+(-\sqrt{2}+3) = 0$

У.20 **Решение.** При $1 < x < 2$, находим:

$$\sqrt{(x-3)^3} + \sqrt{x^2-4x+4} = (x-1) + \sqrt{(x-2)^2} = x-1+|x-2| = x-1-x+2 = 1$$

У.24 **Решение.** Объем кубов с ребрами 3 см и 4 см будет соответственно , $V_1 = 27$ см^3 и $V_2 = 64$ см^3. Расплавив эти два железных куба получили один куб.
Объем полученного куба: $V = V_1 + V_2 = 27 + 64 = 91$ см^3
Значит длина ребра этого куба будет $a = \sqrt[3]{91}$ см.
С помощью калькулятора находим: $a \approx 4{,}5$ см

Рабочий лист № 3

Имя_______ **Фамилия**__________ **Число**__________

● *Применяет свойства корня n-ой степени*

1. Вычислите.

$\sqrt[3]{0{,}5} \cdot \sqrt[3]{16} =$ $\quad$ $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16} =$ $\quad$ $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} =$

$(\sqrt{18} - \sqrt{8}) \cdot \sqrt{2} =$ $\quad$ $(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[3]{4} =$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} =$

2. Вычислите.

$\sqrt[3]{\sqrt{729}} =$ $\quad$ $\sqrt[4]{\sqrt{256}} =$ $\quad$ $(2\sqrt[3]{3})^6 =$ $\quad$ $(-2\sqrt[6]{4})^3 =$

3. Упростите.

$(\sqrt[4]{b^2})^4 =$ $\quad$ $\sqrt[9]{z^3} =$ $\quad$ $\sqrt[6]{\sqrt[3]{n^{18}}} =$ $\quad$ $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} =$

$\sqrt[2n]{a^{4n}} =$ $\quad$ $\sqrt[3]{\sqrt[4]{u^2}} =$ $\quad$ $\sqrt[3]{\sqrt[8]{z^6}} =$ $\quad$ $\sqrt[6]{\sqrt[5]{u}} =$

4. Упростите.

$(\sqrt{ab})^3 \cdot \sqrt{a^3b^3} =$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt{x^3y^5}}{\sqrt{x^2y^4}} =$ $\quad$ $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b^7}}{\sqrt[3]{a^2b^6}} =$

$\sqrt{x^n} \cdot (\sqrt{x})^n =$

? Решения некоторых заданий, данных в учебнике.

У.49 **Решение.** d) в выражении $\frac{2}{x}\cdot\sqrt[4]{\frac{x^5}{8}}$ должно выполняться условие $x>0$

Чтобы внести множитель $\frac{2}{x}$ под знак корня возведем ее в 4-ю степень:

$$\frac{2}{x}\cdot\sqrt[4]{\frac{x^5}{8}}=\sqrt[4]{\left(\frac{2}{x}\right)^4\cdot\frac{x^5}{8}}=\sqrt[4]{\frac{16x^5}{x^4\cdot 8}}=\sqrt[4]{2x}$$

e) $c\cdot\sqrt[4]{-\frac{3}{c}}$ поскольку $c<0$. Получаем:

$$c\cdot\sqrt[4]{-\frac{3}{c}}=-(-c)\cdot\sqrt[4]{-\frac{3}{c}}=-\sqrt[4]{(-c)^4}\cdot\sqrt[4]{-\frac{3}{c}}=-\sqrt[4]{c^4\cdot\left(-\frac{3}{c}\right)}=-\sqrt[4]{-3c^3}$$

Рабочий лист № 4

Имя_______ **Фамилия**__________ **Число**__________

● *ВНося множителя под знак корня записывает выражение под одним корнем.*

1. Внесите множитель под знак корня.

$a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b}$

$\frac{u}{z}\sqrt[3]{\frac{z^2}{u}}=\sqrt[3]{\left(\frac{u}{z}\right)^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{z^2}{u}}=\sqrt[3]{\frac{u^3z^2}{z^3u}}=\sqrt[3]{\frac{u^2}{z}}$

$b\sqrt[3]{a^2b}=$

$\frac{u}{z}\sqrt[3]{\frac{z^4}{u^7}}=$ $\qquad$ $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}}=$

$b\sqrt[4]{a^2bc^2}=$

2. Упростите.

$\sqrt[3]{z\sqrt[3]{z}}=$ $\qquad$ $\sqrt[4]{u\sqrt{u}}=$ $\qquad$ $v\cdot\sqrt{v}\cdot\sqrt{2v^2}=$ $\qquad$ $\sqrt{w\sqrt{w\sqrt[3]{w}}}=$

● *Упрощает выражения сведя корни с разными показателями к корням с одинаковыми показателями.*

1. Упростите.

$2\sqrt[3]{3\sqrt{3}}=2\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}}=2\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[6]{3}=2\sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[6]{3}=2\cdot\sqrt[6]{3^2\cdot 3}=2\cdot\sqrt[6]{3^3}=2\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[6]{3^3}}=\sqrt[6]{\frac{4}{27}}$

$4\sqrt{5\cdot\sqrt[3]{25}}=$ $\qquad$ $\sqrt[3]{4\cdot\sqrt{8}}=$ $\qquad$ $8\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{8}}=$

$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{100}}=$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}=$ $\qquad$ $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[4]{3}}=$

Рабочий лист № 5

Имя_______ Фамилия__________ Число__________

● *Освобождает знаменатель от корня.*

1. Освободите знаменатель от иррациональности.

Пример:

$$\frac{3a}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3a}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3a\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \frac{3a\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3a\sqrt[3]{2}}{2}$$

$\frac{6}{\sqrt[3]{9}} =$ $\qquad$ $\frac{6}{\sqrt[3]{2}} =$ $\qquad$ $\frac{4}{\sqrt[4]{8}} =$

$\frac{\sqrt[4]{72}}{\sqrt[4]{2}} =$ $\qquad$ $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} =$ $\qquad$ $\frac{5\sqrt[4]{18}}{\sqrt[4]{2}} =$

2. Освободите знаменатель от иррациональности.

$\frac{6}{\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}} =$ $\qquad$ $\frac{4}{\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}} =$

$\frac{8}{\sqrt[4]{32}-\sqrt[4]{2}} =$ $\qquad$ $\frac{10}{\sqrt[4]{32}+3\sqrt[4]{2}} =$

3. Освободите знаменатель от иррациональности.

$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} =$

$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[4]{3}} =$

$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[4]{2}} =$

$\frac{2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{16}} =$

Урок 9-13. Учебник стр. 21-27. Степень с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем. Обобщающие задания. 5 часов.

Стандарты. 1.2.2. Применяет свойство степеней с рациональным показателем.
1.2.5. Применяет формулы процентов в решении практических задач (при банковских операциях, изменениях цен продажи)
1.3.1. Находит приближенные значения выражений, содержащих квадратный и кубический корни, и сравнивает с результатами, полученными с применением вычислительной техники.

Запланированные критерии оценивания навыков:

- Применяет запись степени с дробным показателем, числитель которой равен единице: $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$. (n - натуральное, x - любое неотрицательное действительное число)
- Применяет равенства $x^{\frac{m}{n}}=\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m=\sqrt[n]{x^m}$ или же $x^{\frac{m}{n}}=\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$,

в которых m целое, n натуральное, x - любое положительное число.

- Применяет свойство произведения степеней при упрощении числовых и содержащих переменную выражений.
- Применяет свойство произведения степеней с рациональным показателем при упрощении числовых и содержащих переменную выражений.
- Применяет свойство степени произведения и степени в степень при упрощении числовых и содержащих переменную выражений.
- Применяет свойство степени с отрицательным показателем при упрощении числовых и содержащих переменную выражений.
- Применяет свойство степени частного при упрощении числовых и содержащих переменную выражений.
- Применяет степень с нулевым показателем при упрощении выражений содержащих переменную.

Моменты, требующие внимания:

Нужно обратить внимание на то, что значение степени с рациональным показателем a^p не зависит от формы записи дроби p. Например $8^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{2}{6}}$. В степени с рациональным показателем в основном делается акцент на важность условия поставленного на основание степени. В противном случае нарушается однозначность степени с дробным показателем. Например, целесообразно провести сравнение $(-8)^{\frac{1}{3}}$ и $(-8)^{\frac{2}{6}}$ при нарушении условия положительности основания, и показать, что несмотря равенстве $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, указанные выражения различны. Обсуждается задание **У.4.** Ученики должны усвоить основную идею: любое положительное число "a" можно представить в виде $(a^n)^{\frac{1}{n}}$.

Известные нам свойства степеней с целым показателем справедливы и для любой степени с рациональным показателем при положительном основании. Ученики выполняют эти свойства, рассказывают устно; а один из учеников каждое рассказанное свойство записывает на доске математической записью. Рекомендуется свойства степеней с рациональным показателем продемонстрировать в виде плаката или с помощью проектора.

Наиболее часто встречающиеся ошибки учеников можно сгруппировать как показано ниже. Рекомендуется заранее информировать учеников об ошибках.

1. ошибка 1. $\frac{1}{x^2} = x^{1/2}$ ошибка 2. $\frac{2}{x^{1/2}} = 2x^2$ ошибка 3. $\sqrt[3]{x^2} = x^{-2/3}$

2. Еще раз объясняет на данном примере понимание разности между произведением степеней с рациональным показателем и возведением степени в степень. Аналогично степени с целым показателем, при вычислении произведения степеней с рациональным показателем - показатели степеней складываются; при возведении степени в степень показатели степеней перемножаются.

$$\text{a) } x^{\frac{5}{6}} x^{\frac{2}{3}} \qquad \text{b) } (27x^2)^{\frac{2}{3}}$$

Рекомендуется проверить правильность применения этого свойства на смешанных примерах.

1. Упростите.

$9^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{4}} =$ $\quad 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} =$ $\quad 8^{-\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} =$ $\quad 5^{-\frac{1}{18}} \cdot 5^{-\frac{1}{18}} =$

$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} =$ $\quad y^{\frac{3}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}} =$ $\quad b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} =$ $\quad m^{-\frac{1}{12}} \cdot m^{-\frac{1}{12}} =$

2. Упростите.

$(6^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}} =$ $\quad (2^{\frac{1}{8}})^{\frac{1}{8}} =$ $\quad (9^{\frac{1}{3}})^2 =$ $\quad (27^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} =$

$(p^{\frac{5}{2}})^{\frac{4}{15}} =$ $\quad (h^{\frac{4}{7}})^{\frac{7}{4}} =$ $\quad (c^{\frac{1}{16}})^{-\frac{8}{11}} =$ $\quad (z^{-\frac{6}{25}})^{-\frac{5}{2}} =$

3. Упростите.

$(36k)^{\frac{1}{2}} =$ $\quad (27x)^{\frac{1}{3}} =$ $\quad (3n^2)^{\frac{1}{8}} =$ $\quad (64x^9)^{\frac{1}{3}} =$

3. Как по вашему относится правило о сумме и разности целых чисел к сумме степеней с положительным и отрицательным показателем? Ученики могут дать следующее объяснение: Сумма двух положительных чисел - положительное число, сумма двух отрицательных чисел - отрицательное число. А также применение правил - произведение двух чисел с одинаковыми знаками положительно, а произведение двух чисел с разными знаками отрицательно напоминают для степени с рациональным показателем. Для формирования, оценивания и развития каждого навыка можно воспользоваться данными рабочими листами.

Рекомендуется как домашнее задание выучить каждое свойство, произвести математическую запись, придумать новые примеры.

Из-за большого числа примеров на рабочих листах, рекомендуется выполнение части заданий с рабочих листов как домашняя работа.

Обобщающие задания данные в учебниках создают условия для укрепления знаний данного раздела учениками. Обобщающие задания учитель может использовать и для суммативного оценивания.

Рабочий лист № 6

Имя_______ Фамилия__________ Число__________

- *Применяет запись степени с дробным показателем, числитель которого равен единице $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$. n-натуральное , x -любое неотрицательное число.*
- *Применяет равенства $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$ или же $x^{\frac{m}{n}} = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$*

где m - целое, n натуральное, x любое положительное число.

1. Вычислите не пользуясь калькулятором.

$16^{\frac{1}{4}} =$ $\quad 49^{0,5} =$ $\quad 64^{\frac{2}{3}} =$ $\quad \left(\frac{49}{9}\right)^{1,5} =$ $\quad 8^{\frac{5}{3}} =$

2. Замените корнем - степень с рациональным показателем.

$27^{\frac{2}{3}} =$ $\quad 32^{\frac{3}{2}} =$ $\quad 32^{\frac{2}{5}} =$ $\quad 400^{1,5} =$ $\quad \left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{2}{3}} =$

3. Каждое выражение запишите в виде степени с рациональным показателем.

$\sqrt[3]{4} =$ $\quad \sqrt{9} =$ $\quad \sqrt{18} =$ $\quad (\sqrt{10})^3 =$ $\quad (\sqrt[3]{10})^2 =$

4. Эквивалентные выражения отметьте одинаковым номером или закрасьте одинаковым цветом.

$\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}$	$9^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt[6]{y^3}$
$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$	$(\sqrt{9})^3$	$y^{\frac{2}{4}}$
$x^{\frac{8}{12}} \cdot x^{\frac{9}{12}}$	3^3	$y^{\frac{1}{2}}$
$x^{\frac{17}{12}}$	27	$\sqrt{y}$
$\sqrt[12]{x^{17}}$	$4x^{\frac{1}{4}}$	$4\sqrt[4]{x}$

$m^{-\frac{1}{3}}$	$4^{-\frac{1}{2}}$	$-(32)^{\frac{1}{5}}$
$\frac{1}{m^{\frac{1}{3}}}$	$\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}$	$-\sqrt[5]{32}$
$\frac{1}{\sqrt[3]{m}}$	$\frac{1}{\sqrt{4}}$	-2
$\frac{\sqrt[3]{m^2}}{m}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{4}$

Рабочий лист № 7

Имя_______ Фамилия__________ Число__________

● *Применяет свойство произведения степеней в упрощении числовых и содержащих переменную выражений.*

● *Применяет свойство степени отношения в упрощении числовых и содержащих переменную выражений.*

1. Упростите используя определение и свойства степени с рациональным показателем.

$\dfrac{\sqrt[9]{2^3}}{\sqrt[3]{2^9}} =$

$\sqrt[7]{7} \cdot \sqrt[3]{7} =$

$\sqrt[4]{18} \cdot \sqrt{12} =$

$\sqrt{5} \cdot \sqrt[5]{5} =$

$\dfrac{\sqrt[6]{4}}{\sqrt[3]{4}} =$

$\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{36}} =$

2. Упростите используя свойства степени с рациональным показателем.

$x^{1/4}x^{1/4} =$

$n^{1/4}n^{-1/4} =$

$(a^0 b^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}\ x^0 =$

$\dfrac{8t^{1/2}}{4t^{1/4}} =$

$\dfrac{y^0}{(x^{\frac{3}{4}}y^{-1})^{\frac{1}{3}}} =$

$\left(\dfrac{50x^2y^4}{2x^4y^7}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$x^{-3/2} : x^{-1/4} =$

$yx^{1/3} \cdot xy^{3/2} =$

$(a^2b^{1/2})(a^{1/3}b^{-1/2}) =$

$\dfrac{5^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}y}{5^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}y^5} =$

$\dfrac{-9a^{-4}b^{\frac{3}{4}}}{3ab^{\frac{3}{4}}} =$

$\left(\dfrac{x^6y^3}{z^9}\right)^{\frac{1}{3}} =$

3. Упростите используя свойства степени с рациональным показателем.

$\sqrt[5]{n} \cdot \sqrt{n} =$

$\dfrac{\sqrt{16x^5}}{\sqrt[3]{x^2}} =$

$\sqrt[7]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} =$

Решения некоторых заданий, данных в учебнике.

У17. Выразите нижеследующее выражение через a, если $234^{\frac{1}{2}} = a$

Решение: a) $2{,}34^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{234}{100}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{234^{\frac{1}{2}}}{100^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{a}{10} = 0{,}1a$

У20. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем.

Решение b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}} = \sqrt[30]{a} = a^{\frac{1}{30}}$

c) $\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x\sqrt{x}}} = (x\cdot(x\cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (x\cdot(x^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (x\cdot x^{\frac{3}{8}})^{\frac{1}{3}} = (x^{\frac{11}{8}})^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{11}{24}}$

У27. Докажите, что значение выражения не зависит от переменной.

Решение a) Применив свойства степени с рациональными показателями упростим выражение:

$$\frac{(9^n - 5\cdot 9^{n-1})^{\frac{1}{2}}}{(27^{n-1} - 19\cdot 27^{n-2})^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(9^n\cdot\left(1-\frac{5}{9}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(27^{n-1}\cdot\left(1-\frac{19}{27}\right)\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(3^{2n}\cdot\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(3^{3(n-1)}\cdot\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{\left(3^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(3^{3(n-1)}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{3^n\cdot\frac{2}{3}}{3^{n-1}\cdot\frac{2}{3}} = 3$$

У13. (стр. 27). **Решение.** b) Подставив данное значение переменной в выражении с помощью формул сокращенного умножения $(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$ имеем:

$$x^3 + 3x = \left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right)^3 + 3\left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right) = \left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right)^3 +$$

$$+ 3\cdot\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right) + 3\left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right) = 14$$

У14. стр. 27). **Решение.** a) Формулу $A = P(1 + r)^t$ можно выразить и как $(1 + r)^t = \dfrac{A}{P}$. Обе части равенства если возвести в степень $\dfrac{1}{t}$, получим

$$((1 + r)^t)^{\frac{1}{t}} = \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{t}}$$

Отсюда: $1 + r = \left(\dfrac{A}{P}\right)^{\frac{1}{t}}$, $r = \left(\dfrac{A}{P}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$

b) По условии задачи $P = 2000$; $A = 2332{,}8$; $t = 2$. Тогда

$$r = \left(\frac{2332{,}8}{2000}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \left(\frac{11664}{10000}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \left(\left(\frac{108}{100}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{108}{100} - 1 = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

$r = 0{,}08$. Значит, годовой прирост составляет 8%

Степень с рациональным показателем

Карты игры " У меня, а ... у кого?"

Старт карта у меня У кого? $4^{\frac{3}{2}}$?	У меня 8 У кого? $125^{\frac{2}{3}}$?
У меня 25 У кого? $\sqrt[3]{32}$?	У меня $2\sqrt[3]{4}$ У кого? $\sqrt{72}$?
У меня $6\sqrt{2}$ У кого? $\sqrt{a^6b^4}$?	У меня a^3b^2 У кого? $\sqrt{27}$?
У меня $3\sqrt{3}$ У кого? $\frac{10}{\sqrt{2}}$?	У меня $5\sqrt{2}$ У кого? $\sqrt{a^5b^3}$?

Карты игры " У меня, а ... у кого?"

Старт карта у меня

У меня $a^2b\sqrt{ab}$ **У кого?** $\sqrt{\dfrac{25}{2}}$?	**У меня** $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ **У кого?** $3\sqrt{48}$?
У меня $12\sqrt{3}$ **У кого?** $(3-\sqrt{2})^2$?	**У меня** $11-6\sqrt{2}$ **У кого?** $(a^2b^2)^3$?
У меня a^6b^6 **У кого?** $2(a^2b)^3$?	**У меня** $2a^6b^3$ **У кого?** $2b(2a^3b)^2$?
У меня $8a^6b^3$ **У кого?** $\sqrt[3]{54}$?	**У меня** $3\sqrt[3]{2}$ **У кого?** $(ab^2)^2$?

Карты игры “ У меня, а ... у кого?”

У меня a^2b^4 **У кого?** $\frac{7}{3+\sqrt{2}}$?	**У меня** $3-\sqrt{2}$ **У кого?** $81^{\frac{2}{3}}$?
У меня $9\sqrt[3]{9}$ **У кого?** $\frac{8}{\sqrt{3}}$?	**У меня** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. **У кого?** $(5-\sqrt{6})^2$?
У меня $31-10\sqrt{6}$. **У кого?** $\frac{2-\sqrt{3}}{5-\sqrt{7}}$?	**У меня** $\frac{10+2\sqrt{7}-5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{18}$. **У кого?** $2(a^4b)^4$?
У меня $2a^{16}b^4$. **У кого?** $\frac{8}{\sqrt{2}}$?	**У меня** $4\sqrt{2}$. **Последняя карта**

Таблица критерий суммативного оценивания по разделу 1.

№	**Критерии**	Замечания об ученике
1.	Вычисляет разными способами точно или приближенно корень кубический из некоторых чисел.	
2.	Если $a \geq 0$ и $b \geq 0$, применяет свойство корня n-ой степени из произведения при упрощении числовых и с переменными выражений.	
3.	Если $a \geq 0$ и $b > 0$, применяет свойство конря n-ой степени из частного при упрощении числовых и с переменными выражений.	
4.	Если n, k, m - натуральные числа и $a \geq 0$, то применяет свойство корени из корня при упрощении числовых и с переменными выражений.	
5.	Если n, k, m - натуральные числа и $a \geq 0$, упрощает по общему множителю подкоренного выражения и показателя корня.	
6.	Упрощает выражения содержащие корни.	
7.	Применяет свойство произведения степеней при упрощении числовых и выражений с переменными.	
8.	Применяет свойство произведения степеней с рациональными показателями при упрощении числовых и с переменными выражений.	
9.	Применяет свойство степени произведения и степень степени при упрощении числовых и с переменными выражений.	
10.	Применяет свойство степени частного при упрощении числовых и с переменными выражений.	
11.	Применяет свойство степени с отрицательным рациональным показателем при упрощении числовых и с переменными выражений.	

Урок 14. Задания суммативного оценивания по разделу 1

1. Расположите числа $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[6]{4}$ в порядке возрастания.

2. Вычислите: $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt[4]{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})$.

3. Покажите отрицательные числа:
A) $\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}$ B) $\sqrt[4]{4} - \sqrt{2}$ C) $\sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{3}$ D) $\sqrt[6]{2} - \sqrt[18]{10}$

4. Определите знак разности: $3\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{2}$.

5. Сравните значения выражений: $0{,}2\sqrt[3]{(-5)^6}$ и $2\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt[4]{625}}$.

6. Множество квадратных корней натуральных чисел от 1 до 9-ти обозначено через A, а множество кубических корней - B. Найдите $A \cap B$.

7. Какое из равенств верно?
A) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} = 4$ B) $\sqrt[15]{(-2)^5} = \sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[8]{(-3)^4} = \sqrt{3}$ D) $\sqrt[3]{(-2)^6} = -4$

8. Покажите число $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ в виде степени с рациональным показателем.

9. Для натуральных чисел m и n справедливо равенство $(m+n)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}\,(m-n)^{-\frac{1}{2}}$.
Найдите значения выражения $m^2 + n^2$.
A) 25 B) 20 C) 12 D) 7

10. Одной банки краски хватает на покраску 12 м^2 площади.
a) Сколько банок краски хватит для покраски поверхности трех железных кубов с ребрами равными 3 м, 4 м и 5 м?
b) Если эти три куба расплавить и изготовить один куб, то сколько банок краски понадобится для покраски поверхности этого куба?

11. Покажите любую пару x и y удовлетворяющую уравнению $x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = 6$.

12. Упростите выражение: $\dfrac{x - x^{\frac{1}{2}} - 2}{x - 2x^{\frac{1}{2}}}$

13. Найдите значение выражения $(1 - \frac{1}{x}) \cdot (1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$, при $x = \sqrt[3]{2}$.

14. Установите соответствие:

1. $\sqrt[4]{a^4} = \lvert a \rvert$	A) верно при любых значениях a;
2. $\sqrt[3]{a^3} = -a$	B) верно только при $a = 0$;
3. $\sqrt[6]{a^6} = -a$	C) верно при $a \leq 0$;

15. Вычислите значение выражения.

$$(\sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{32}) : \sqrt[4]{2}$$

16. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями $\sqrt[3]{2}$ см, $\sqrt[3]{2}$ см, $\sqrt[3]{18}$ см. Сравните объем этого параллелепипеда с объемом куба, ребро которого равен $\sqrt[4]{4}$ см.

17. Временем циркуляции крови называется среднее время, при котором кровь в теле делая один оборот возвращается к сердцу. Для млекопитающих время циркуляции (секундами) можно вычислить по формуле $T=17{,}4\, m^{1/4}$, m -показывает массу (в килограммах). Найдите приближенное значение времени циркуляции крови - в секундах: a) у коровы массой 120 кг; b) у слона массой 4000 кг.

18. Расположите числа $\dfrac{\sqrt[4]{144}}{\sqrt{3}}$, $2^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{3}}$, $(4^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{2}}$ в порядке возрастания.

2 Окружность

Таблица планирования по 2-му разделу

Содержательные стандарты	Урок №	Урок	Коль часов	Учеб.стр. №
3.1.3. Применяет свойство касательной и секущей к окружности. 4.1.1. От одной производной единицы измерения переходит к другой.				
	15- 16	Центральный угол. Дуга окружности.	2	28-31
	17-19	Свойства хорды	3	31-36
	20-21	Угол, вписанный в окружность	2	36-38
	22-23	Касательная к окружности	2	39-42
	24-26	Углы, образованные касательными и секущими	3	42-46
	27-28	Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности	2	46-48
	29-30	Обобщающие задания	2	49-50
	31	Задания суммативного оценивания по разделу 2	1	
		Всего	17	

Стандарты содержания

3.1.3. Применяет свойство касательной и секущей к окружности.
4.1.1. От одной производной единицы измерения переходит к другой.

Формирующие навыки учеников

- *Решает задачи на центральный угол, градусные меры минорных и мажорных дуг;*
- *Решает задачи на нахождение длины дуги;*
- *Применяет свойство хорд в решении задач;*
- *Знает свойство углов вписанных в окружность, представляет геометрически и применяет в решении задач;*
- *Изображает касательную к окружности, знает свойства и применяет в решении задач;*
- *Знает словесно свойства углов, образованных секущими и касательными, изображает геометрически и применяет в решении задач;*
- *Изображает отрезки секущих окружность, применяет свойства их длин в решении задач.*

Словарь

- Окружность
- Круг
- Касательная
- Секущая
- Радиус
- Диаметр
- Хорда
- Центральный угол
- Сектор
- Сегмент
- Дуга

Дополнительные ресурса

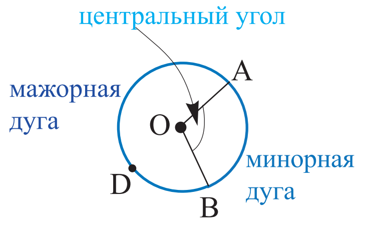
Рабочие листы

Адреса интернета:

www.mathopenref.com/polygonconcave.html
www.learnalberta.ca/content/memg/Division03/Tangent/index.html

Урок 15-16. Учебник стр. 28-31. Центральный угол. Дуга окружности. 2 часа

На данном рабочем листе геометрическими изображениями повторяется окружность и его части.
Расширив понятия центрального угла, дуги вводятся понятия меньшая дуга - минор и большая дуга - мажорная дуга.



Геометрические изображения отражающие эти понятия изготовляется заранее в виде плаката или на Смарт досках. Факты об измерениях дуг окружности исследуются совместными обсуждениями и на изображениях. Ученики понимают, что геометрические изображения показывают ясно эти факты.

1. Градусная мера минорной дуги меньше $180°$ и равна градусной мере соответствующего центрального угла : $\smile AB = \angle AOB$

2. Градусная мера мажорной дуги больше $180°$ и его значение равна разности $360°$ и значение соответствующей минорной дуги:
$\smile ADB = 360° - (\smile AB)$

3. Градусная мера полуокружности равна $180°$.

Решается задач на конгруэнтные дуги.

2-й час. Исследуются формула для длины дуги и примеры с ее применениями. Решается задачи данные в учебнике по этой теме.

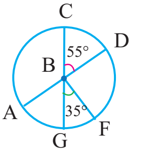
Рабочий лист № 1

Имя_______ Фамилия_________ **Число________**

- *Решает задачи на центральный угол, градусные меры минорных и мажорных дуг.*
- *Решает задачи на нахождение длины дуги.*

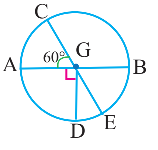
1. Отметьте, чем является каждый - можорной дугой, минорной дугой или же полуокружностью и найдите градусные меры (CG и AD - диаметры)

$\cup$ CD $\cup$ AC $\cup$ CG
$\cup$ CGD $\cup$ GCF $\cup$ ACD
$\cup$ AG $\cup$ ACF



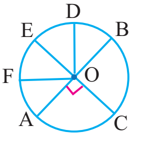
2. Найдите градусные меры каждого из углов (CE и AB - диаметры).

$\angle$ CGB $\angle$ BGE
$\angle$ AGD $\angle$ DGE
$\angle$ CGD $\angle$ AGE



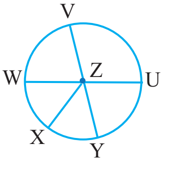
3. Если EC и AB диаметры и $\angle BOD \cong \angle DOE \cong \angle EOF \cong \angle FOA$, найдите градусную меру каждой дуги.

$\cup$ BC $\cup$ AC
$\cup$ AFE $\cup$ EB
$\cup$ ACB $\cup$ AD
$\cup$ CBF $\cup$ ADC



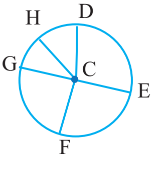
4. WU и VY -диаметры $\angle WZX \cong \angle XZY$, $\angle VZU = 4x$, $\angle UZY = 2x + 24$. Найдите градусную меру каждой дуги.

$\cup$ UY $\cup$ WV
$\cup$ WX $\cup$ XY
$\cup$ WUY $\cup$ YVW
$\cup$ XVY $\cup$ WUX



5. Диаметр окружности равен 24 единицам. По данному углу, найдите длину соответствующей дуги. GE - диаметр (C - центр окружности).

Если $\angle$ DCE = 100°, найдите длину $\cup$ DE;
Если $\angle$ GCF = 90°, найдите длину $\cup$ DHF;
Если $\angle$ HCF = 125°, найдите длину $\cup$ HDF;
Если $\angle$ DCH = 45°, найдите длину $\cup$ HD.



Урок 17-19. Учебник стр. 31-36. Свойства хорды. 3 часа.

В следующие три часа имеется в виду исследование трех основных теорем о хордах, обратные теоремы и их следствия.
Во время объяснения урока обращается внимание на понимание учащимся приведенного полного или незаконченного доказательства теоремы. С целью формативного оценивания рекомендуется завершение этих доказательств некоторыми учениками устно или же объяснение на каком основании выдвинуто вперед то или иное предложение.

Навыки. *Знает теоремы о хордах, изображает геометрически и применяет при решении задач.*

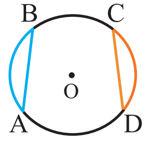
Рабочий лист № 2

Имя ________ Фамилия__________ Число_________

- *Знает теорему о конгруэнтных хордах, изображает геометрически.*

Теорема 1.

Обратная теорема 1.

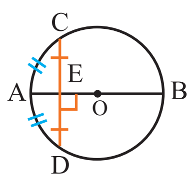


- **Знает теорему о среднем перпендикуляре хорды.**

Теорема 2.

Следствие 1.

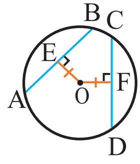
Следствие 2.



- **Знает теорему о хордах расположенных на одинаковом расстоянии от центра, изображает геометрически.**

Теорема 3.

Обратная теорема 3.

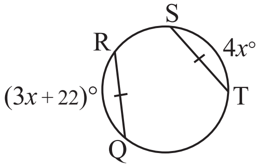


Рабочий лист № 3

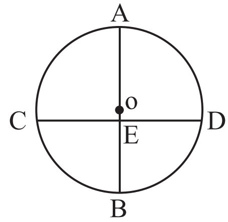
Имя_______Фамилия_________ **Число________**

● *Применяет теоремы о хордах в решении задач.*

1. Дано: $ST \cong QR$
Найдите: Градусную меру $\smile QR$

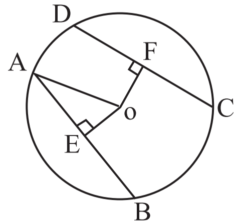


2. **Дано:** В окружности с центром O диаметр AB пересекается с хордой CD в точке E. Если $AB \perp CD$, то какое утверждение всегда верно?
1) $\smile AC \cong \smile BD$
2) $\smile BD \cong \smile DA$
3) $\smile AD \cong \smile BC$
4) $\smile CB \cong \smile BD$

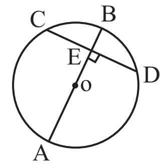


3. **Дано:** В окружности с центром O, $AB \cong CD$, OA - радиус и $OE \perp AB$, $OF \perp CD$, $OF = 15$, $CF = y + 10$
$AB = 4y$.

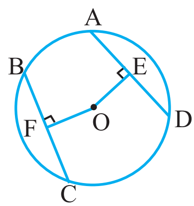
Найдите: DF и AO.



4. **Дано:** Точка O - центр окружности. $AB \perp CD$, $AO = 10$ и $BE = 4$.
Найдите: CE.



5. **Дано:** В окружности с центром O, хорди BC и AD находятся на одинаковом расстоянии от центра. Если $OF = 18$, $ED = 24$ единицам, то найдите радиус окружности.

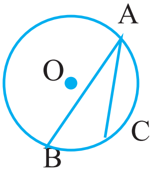


Урок 20-21. Учебник стр. 36-38. Угол, вписанный в окружность. 2 часа

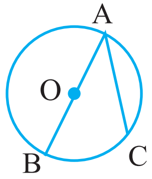
- *Знает свойство угла вписанного в окружность, изображает геометрически и применяет в решении задач.*
- *Знает теорему о вписанных конгруэнтных углах, изображает геометрически и применяет в решении задач.*

Изображаются различные положения углов вписанных в окружность относительно центра окружности. Для каждого случая выражаются мнения о виде угла. Результаты сравниваются.

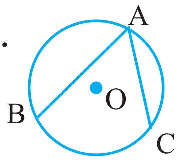
1.



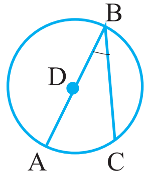
2.



3.



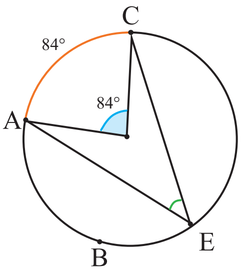
Объясняется связь между градусной мерой угла вписанного в окружность, с градусными мерами дуги, на которую он опирается и соответствующего центрального угла.



Теорема 1. Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

$$\angle ABC = \frac{\smile AC}{2}$$

Обращается внимание на навыки учеников выражать эту связь на примере словами, геометрическим изображением, математической записью. Например, ученик показывая теорему изображениями на рисунке, на примере демонстрирует понимание свойств вписанных углов. Чтобы наблюдать наглядно эту зависимость рекомендуется воспользоваться программой геогебра и http://www.mathopenref.com/circleinscribed.html.

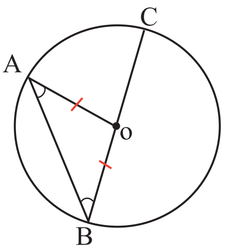


Ученики должны уметь доказывать следствие, что вписанной угол опирающийся на диаметр окружности прямой.

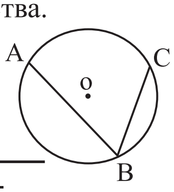
Действительно, вписанный угол опирающийся на диаметр, опирается на полуокружность, то есть на дугу равную 180°. По теореме о вписанном угле, значение рассматриваемого угла равен 90°, то есть угол-прямой.

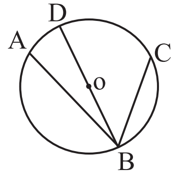
Доказательство теоремы для каждого из 3-х случаев может быть задано ученикам как самостоятельная работа. В также данные доказательства в пособии для учителей могут быть рассмотрены в классе. Эту работу можно записать заново в системном виде и дать как домашнее задание.

Предложение	Основа
1. Соединим А и О	1.---------------------------
2. ΔAOB равнобедренный	2. ОА и ОВ радиусы
3. $\angle BAO = \angle ABO = x$	3. Углы при основании равнобедренного треугольника ΔAOB
4. $\angle AOC = \angle BAO + \angle ABC$	4. $\angle AOC$ - внешний угол треугольника ΔAOB.
5. $\angle AOC = x + x = 2x$	5. По свойству равенства
6. $\smile AC = \angle AOC = 2x$	6. По свойству центрального угла
7. $\angle BAO + \angle ABO = \smile AC$	7. По свойству равенству
8. $\angle ABC = \dfrac{\smile AC}{2}$	8. По свойству равенства.



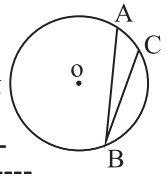
2-ой случай. Воспользуемся доказанным 1-ым случаем

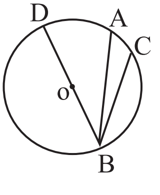




Предложение	Основа
1. Проведем диаметр через точку В	1.---------------------------
2. $\angle ABD = \dfrac{\smile AD}{2}$ $\angle DBC = \dfrac{\smile DC}{2}$	2. Вписанной угол со стороной на диаметре окружности.
3. $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$	3. Аксиома сложения углов
4. $\angle ABC = \dfrac{\smile AD}{2} + \dfrac{\smile DC}{2}$	4. Свойства равенства
5. $\angle ABC = \dfrac{\smile AD + \smile DC}{2}$	5. Алгебраическое преобразование, распределительное свойство умножения.
6. $\smile AD + \smile DC = \smile AC$	6. Правило сложения дуг
7. $\angle ABC = \dfrac{\smile AC}{2}$	7. Свойства равенства

3-ий случай. Воспользуемся доказанным первым случаем

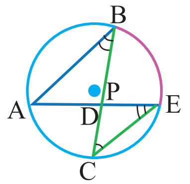




Предложение	Основа
1. Проведем диаметр через точку В	1.---------------------------
2. $\angle ABD = \dfrac{\smile AD}{2}$ $\angle DBC = \dfrac{\smile DC}{2}$	2. Вписанный угол со стороной на диаметре.
3. $\angle ABC = \angle DBC - \angle ABD$	3. Аксиома сложения углов
4. $\angle ABC = \dfrac{\smile CD}{2} - \dfrac{\smile DA}{2}$	4. Свойства равенства
5. $\angle ABC = \dfrac{\smile CAD - \smile DC}{2}$	5. Алгебраическое преобразование, распределительное свойства умножения
6. $\smile DAC - \smile DA = \smile AC$	6. Правило сложения дуг
7. $\angle ABC = \dfrac{\smile AC}{2}$	7. Свойства равенства

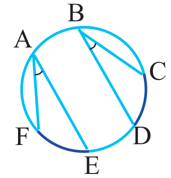
2-ой час. Объясняются результаты полученные из теоремы о вписанных конгруэнтных углах. Отмечается широкое применение этих результатов при решении задач.

http://www.learnalberta.ca/content/memg/Division03/Inscribed%20 Angle%20Property/Explanation/index.html



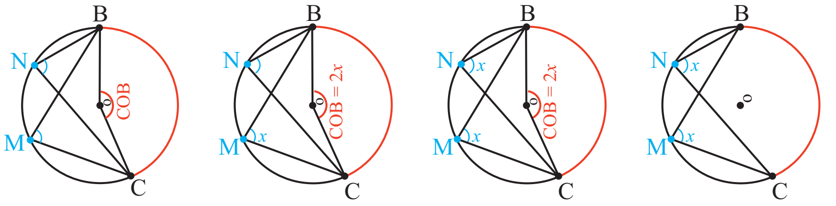
Конгруэнтные углы вписанные в окружность

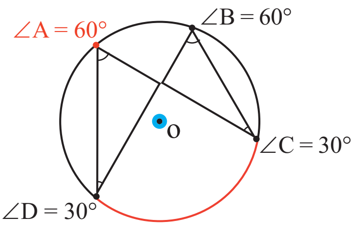
Следствие 3. Углы опирающиеся на одну и ту же дугу, конгруэнтны. $\angle EAB \cong \angle BCE$, $\angle ABC \cong \angle AEC$.



Следствие 4. Вписанные углы, опирающиеся на конгруэнтные дуги, конгруэнтны.
Если $\smile FE \cong \smile CD$, то $\angle FAE \cong \angle DBC$.

Вписанные конгруэнтные углы изображаются будучи различными измерениями. Ученик наблюдает с изменением угла изменение соответствующей дуги. А также наблюдает одинаковое изменение величин углов опирающихся на одну и ту же дугу.
Из показанных интернет - адресов можно продемонстрировать соответствующие рисунки, а также можно проследить презентацию.





Ученик должен уметь представить изображением, как показано внизу, понимаемую им теорему. Тем самым ученик демонстрирует наряду с такими практическими навыками как рисование окружности определенного радиуса. Построение угла определенной величины с помощью транспортира и первоначальные навыки объяснения теоремы, представление геометрическим изображением, а также применение на примере.

У.5. 2) (стр. 36)

Решение: Так как вписанные углы опирающиеся на одну и ту же дугу конгруэнтны.

$\angle D \cong \angle C$ и $\angle A \cong \angle B$

Отсюда,

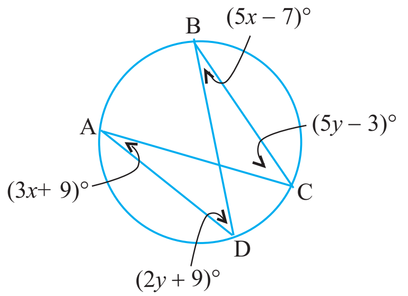
$(3x + 9)^\circ = (5x - 7)^\circ$ $\quad$ $(5y - 3)^\circ = (2y + 9)^\circ$

$2x = 16$ $\quad$ $3y = 12$

$x = 8$ $\quad$ $y = 4$

Тогда $\angle D = (2 \cdot 4 + 9)^\circ = 17^\circ$,

$\angle B = (5 \cdot 8 - 7)^\circ = 33^\circ$.

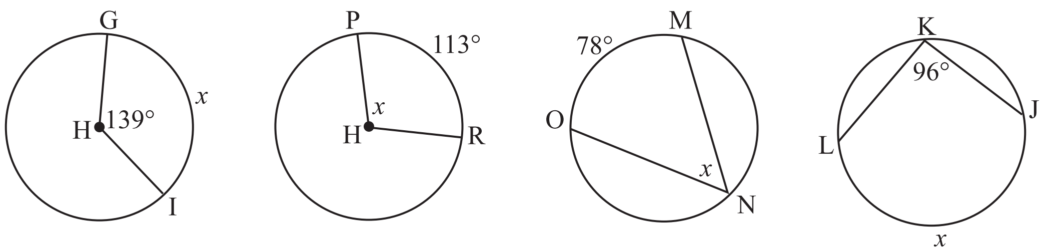


Рабочий лист № 4

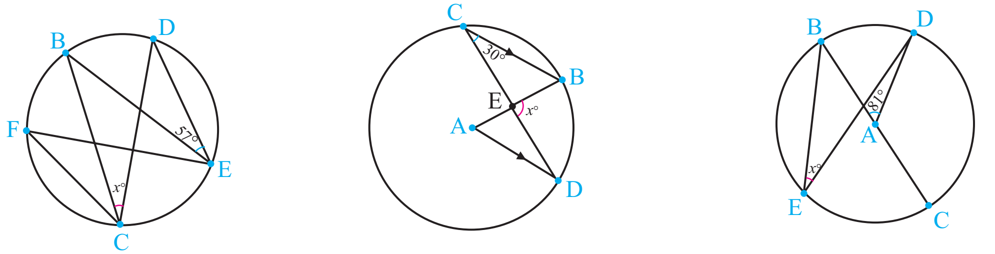
Имя_______ Фамилия_________ **Число________**

- *Решает задачи применяя свойства вписанных в окружность углов.*
- *Знает теорему о вписанных конгруэнтных углах, изображает геометрически и применяет в решение задачи.*

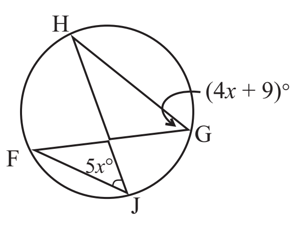
1) По данным найдите x . H - центр окружности.



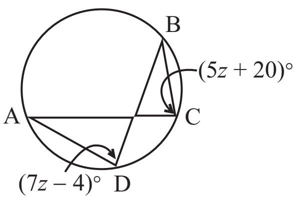
2) По данным найдите неизвестные . A - центр окружности.



3) $\angle FJH = ?$



4) Найдите градусную меру $\smile AB$

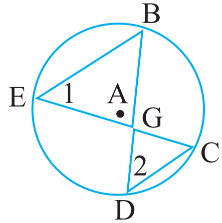


4) В окружности с центром A, $\angle 1 = 13x - 9°$ и $\angle 2 = 27x - 65°$

a) Найдите значение x.

b) Найдите $\angle 1$ и $\angle 2$.

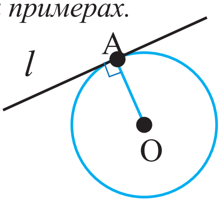
c) Если $\angle BGE = 82°$, найдите $\angle ECD$.



Урок 22-23. Учебник стр. 39-42. Касательная к окружности. 2 часа

• *Изображает касательную к окружности, знает свойства и применяет при решении задач.*
• *Понимание определения касательной демонстрирует геометрическими изображениями.*
• *С помощью теоремы Пифагора или чисел Пифагора обосновывает, что данный отрезок является касательной к окружности.*

• *Знает теорему о касательных, проведенных из одной точки, изображает геометрически, выражает математическим выражением, показывает на примерах.*

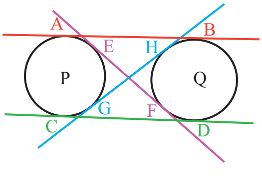


Определение касательной, свойства касательной объясняет в виде прямой и обратной теоремы.
Определение и свойства ученики представляют геометрическими изображениями.

По интернет адресу http://www.learnalberta.ca/content/memg/Division03/Tangent/index.html из меню MATHEMATICS GLOSSARY любое геометрическое (или алгебраическое) понятие можно проследить в виде картинного изображения или презентации.
Проверяется навык рисования общей касательной к двум окружностям. Рекомендуется выполнять такие задания с помощью технологии.
Объясняется свойство касательных проведенных из одной точки. Решается задача-пример.

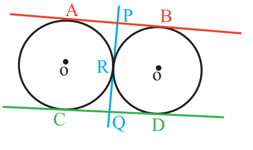
! Моменты требующие внимания

1. Окружности не имеют общих точек



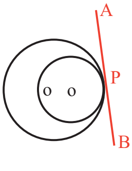
Имеют четыре общие касательные.

2. Окружности имеют внешнее касание



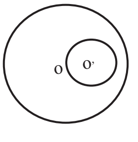
Имеют три общие касательные

3. Касаются внутренним образом



Имеют одну общую касательную

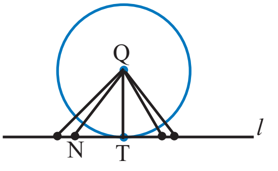
4. Окружности концентрические или же одна расположена внутри другой



Не имеют общих касательных

Доказательство свойств касательной:

Теорема (признак касательной) Прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку, является касательной окружности.



Доказательство: Пусть OT - радиус окружности, прямая l проходит через точку T и перпендикулярная OT. Так как, наклонная длиннее перпендикуляра, то расстояние от точки O до всех остальных точек прямой l больше радиуса OT. Поэтому все точки прямой l, кроме точки T, лежат вне окружности. Следовательно прямая l и окружность имеют единственную общую точку T, и прямая l по определению является касательной. Теорема доказана.

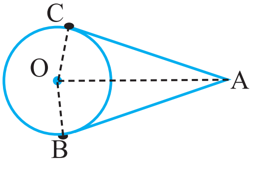
? Решение некоторых заданий, данных в учебнике

У.5. Докажите Теорему 2

Теорема 2. Отрезки касательных, проведенных из одной точки конгруэнтны и центр окружности находятся на биссектрисе угла, образованного касательными.
Доказательство теоремы 2.

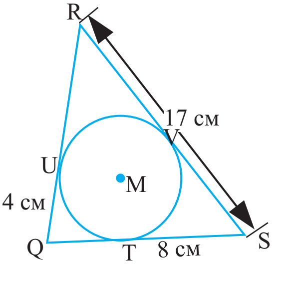
Дано: AB и AC - отрезки касательных проведенных из точки A к точкам касания.
Докажите: $AB \cong AC$, $\angle BAO \cong \angle CAO$

Проведем радиусы окружности OC, OB и отрезок OA.



Предложение	Основа
1. OC = OB	1. Радиусы окружности
2. $\Delta AOC \cong \Delta AOB$	2. Конгруэнтность прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету
3. $AC \cong AB$	3. Соответственные стороны конгруэнтных треугольников
4. $\angle BAO \cong \angle CAO$	4. Соответственные углы конгруэнтных треугольников

У.9. (стр. 41) По данным на рисунке найдите длины сторон фигур и периметр.
b) Решение. Длины отрезков касательных, проведенных из точки вне окружности к точкам касания равны.
QT = QU = 4 см, SV = ST = 8 см,
RV = RS – SV = 17 – 8 = 9
RU = RV = 9 см.
Значит, QS = QT + TS = 4 + 8 = 12 см,
QR = QU + RV = 4 + 9 = 13 см, RS = 17 см, тогда
P = 12 + 13 + 17 = 42 см



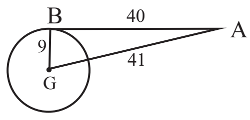
Рабочий лист № 5

Имя_______ **Фамилия**_________ **Число**________

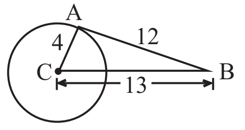
• *Изображает касательную к окружности, знает ее свойства и применяет в решении задач.*

1. Определите касательная или нет.

a) AB

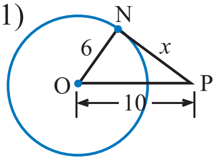


b) AB



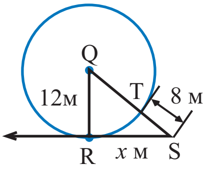
2. Найдите переменную *x*, приняв соответствующий отрезок за касательную.

1)



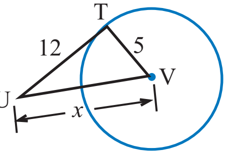
$x =$ ________

2)



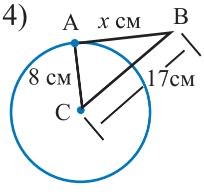
$x =$ ________

3)



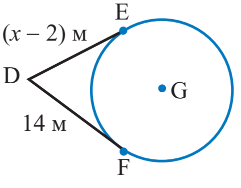
$x =$ ________

4)



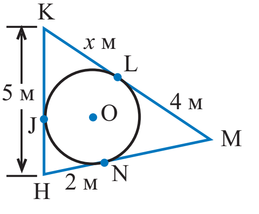
$x =$ ________

5)



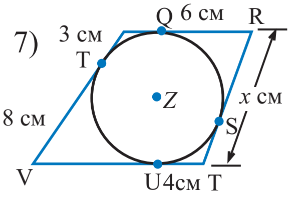
$x =$ ________

6)



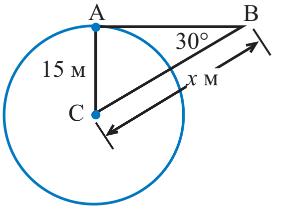
$x =$ ________

7)



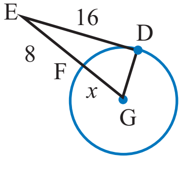
$x =$ ________

8)



$x =$ ________

9)



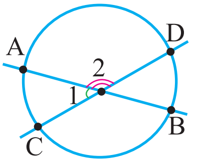
$x =$ ________

Урок 24-26. Учебник стр. 43-46. Углы, образованные касательными и секущими. 3 часа

• *Изображает углы, образованные секущей и касательной, знает правила определения их градусных мер и применяет в решении задач.*

Вершина угла расположена внутри окружности.

Теорема. Если вершина угла, образованного двумя секущими, находится внутри окружности, то его градусная мера равна полусумме градусных мер дуг, заключенных между сторонами данного угла и угла, вертикального данному.



$$\angle 1 = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile DB) \qquad \angle 2 = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile BC)$$

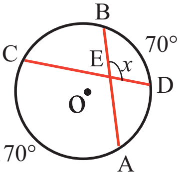
Объясняется обсуждениями секущей и свойства угла, образованного пересечением двух секущих. Повторяются свойства смежных и вертикальных углов. Выявляется образование секущими двух углов с различными величинами.

! Правильность свойства ученики могут проверить эмпирическим путем, то есть могут проверить путем опыта. Например, любой искомый угол, может быть определен вычислением или же измерением (с определенной погрешностью). Результаты сравниваются (естественно, если рисунок соответствует данным измерениям)

Например, по данным на рисунке требуется найти градусную меру x угла $\angle BED$.

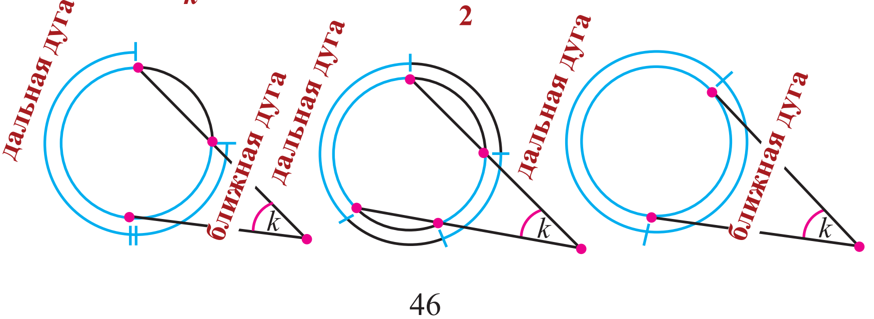
До начала решения задачи ученики:

1) Высказывают приближения о градусной мере угла
2) Измеряют угол транспортиром
3) Вычисляют угол (120°) применяя соответствующее свойство;
4) Результаты сравниваются



Для того, чтобы ученики лучше представили себе о каких дугах идет речь при объяснении свойств углов образованных касательными и секущими, рекомендуется приготовление рисунков и презентаций как показано внизу.

$$k = \frac{\smile \text{дальная дуга} - \smile \text{ближная дуга}}{2}$$



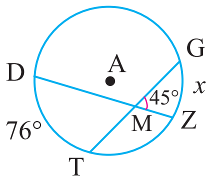
Рабочий лист № 6

Имя_______ Фамилия_________ Число________

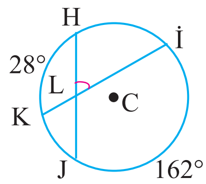
● *Знает теорему о градусной мере угла, расположенного между двумя секущими, изображает геометрически, записывает математически и применяет при решении задачи.*

1. По данным найдите.

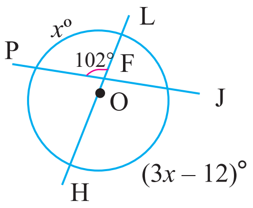
a) $\smile GZ$



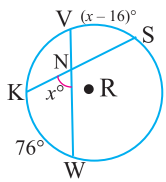
b) $\angle H L \dot{I}$



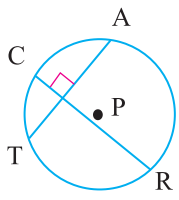
c) $\smile HJ$



d) $\smile SV$

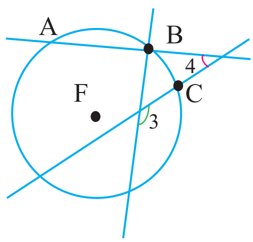


2. Если $CR \perp AT$, найдите сумму $\smile AC + \smile TR$.



3.

a) Если $\angle 4 = 38^\circ$ и $\smile BC = 38^\circ$, найдите $\smile AE$.
b) Если $\smile BAE = 198^\circ$ и $\smile CD = 64^\circ$, найдите $\angle 3$.



Рабочий лист № 7

Имя_______ Фамилия_________ **Число________**

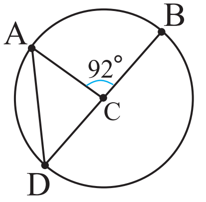
● *Изображает углы образованные касательной и секущей, знает правила определения их градусных мер и применяет в решении задач.*

1. По данным на рисунке найдите (C - центр окружности).

$\angle ADB =$ _________

$\angle ACD =$ _________

$\angle CAD =$ _________

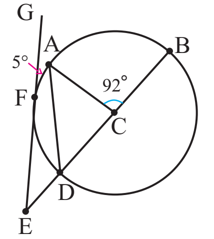


$\smile AD =$ _______

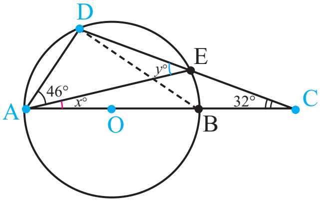
$\smile FD =$ _______

$\smile FB =$ _______

$\angle GEB =$ _______



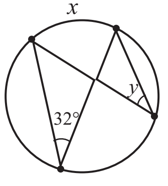
2. По данным на рисунке найдите $\angle DEA$.
(O - центр окружности).



3. По данным на рисунке найдите.

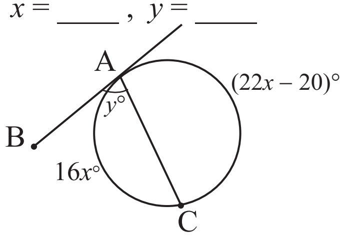
$x =$ _______

$y =$ _______

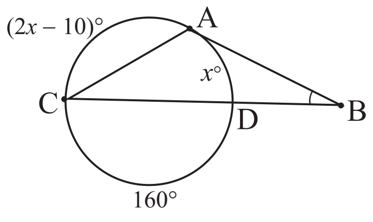


4. Отрезок AB - касательная к окружности. Найдите требуемые.

$x =$ _____ , $y =$ _____



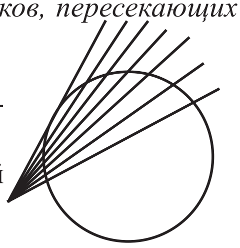
$\angle B =$ _____



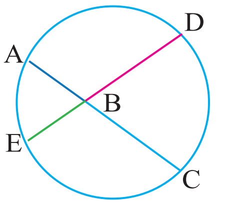
Урок 27-30.. Учебник стр. 46 - 50. Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности. Обобщающие задания 4 часа.

- *Изображает отрезки, пересекающие окружность, знает правило нахождения их длин и применяет в решении задач.*

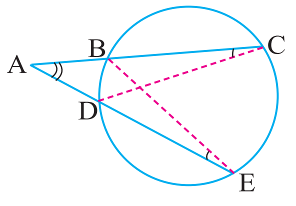
- *Изображает геометрически отрезки пересекающие окружность в зависимости от места их пересечения.*
- *Выражает математически (алгебраически) длины отрезков, пересекающих окружность в зависимости от места точек пересечения.*



Теоремы о длинах отрезков пересекающих окружность объясняются рассуждениями.
Ученики понимают, что касательная частный случай секущей (случай, когда точки пересечения совпадают)



Теорема 1. При пересечении двух хорд, произведение отрезков одной хорды, полученных точкой пересечения, равно произведению отрезков второй хорды: $AB \cdot BC = EB \cdot BD$

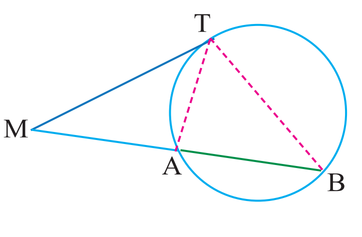


Теорема 2. Если из точки вне окружности проведены секущие, то произведение каждого секущего отрезка на ее внешнюю часть постоянно. $AC \cdot AB = AE \cdot AD$

Проведем хорды BE и CD окружности

Предложение	Основание
1. $\angle ACD \cong \angle AEB$	1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу равны.
2. $\Delta ACD \sim \Delta AEB$	2. По Признаку УУ подобия треугольников.
3. $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{AD}{AB}$	3. У подобных треугольников соответствующие стороны пропорциональны.
4. $AC \cdot AB = AE \cdot AD$	4. Свойство пропорции.

Теорема 3. Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной, равен произведению секущего отрезка на ее внешнюю часть. $MT^2 = MA \cdot MB$

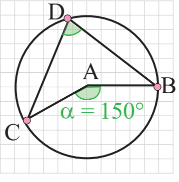


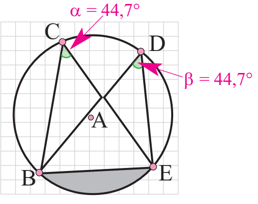
Рабочий лист № 8

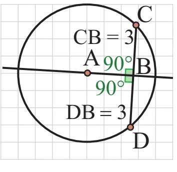
Имя_______ Фамилия_________ Число________

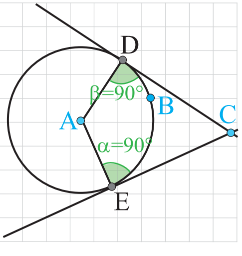
- *Изображает отрезки пересекающие окружность, знает правило нахождения их длин и применяет в решении задач.*
- *Изображает геометрически отрезки пересекающие окружность в зависимости от места их пересечения.*
- *Выражает математически (алгебраически) длины отрезков, пересекающих окружность в зависимости от места точек пересечения.*

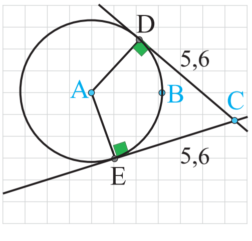
Напишите математическими символами выражение по рисунку, соответствующую окружности и содержание 5-ти геометрических свойств данных числовыми данными.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

? Решения некоторых заданий, данных в учебнике.

У.6. (стр 48) Решение.

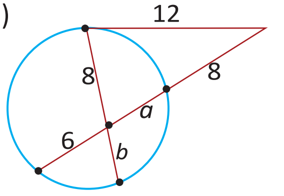
b) По теореме касательной и секущей окружности, получаем: $12^2 = 8\cdot(8 + a + 6)$

Отсюда $a = 4$

По теореме секущих хорд окружности получаем $6a = 8b$

Подставив здесь a =4 находим, b=3.

b)



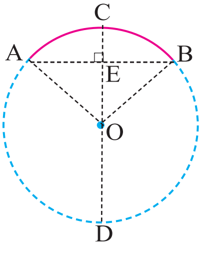
? **У.8. (стр 48) Решение.** a) Обозночив конечные точки дуги-радуги через A и B дополним ее к окружности.

Нарисуем диаметр окружности CD, который перпендикулярен хорде AB . O центр окружности. Поскольку перпендикульярный диаметр делит хорду на две равные части, то AE = EB = 4 км . Пусть R радиус окружности, По условии задачи CE = 1,6 км, тогда DE = 2R – 1,6 (км).

По теореме секущих хорд окружности получаем:

DE · EC = AE · EB.

Отсюда находим, что (2R – 1,6) · 1,6 = 4 · 4; R = 5,8 км.



b) Длина окружности радуги будет: $C = 2\pi \cdot 5{,}8 \approx 36{,}4$ км.

Как дополнительную задачу можно поручить ученикам найти длину дуги радуги ($\smile$ACB). Поскольку в ΔAOE $\sin\angle AOE = \dfrac{AE}{AO} = \dfrac{4}{5{,}8} \approx 0{,}6897$

с помощью калькулятора находим, что градусная мера $\angle$AOE приблизительно равна $\angle AOE \approx 43{,}6°$, тогда $\angle AOB \approx 87{,}2°$. По формуле длины дуги находим, что

$$l = \frac{87{,}2}{360} \cdot 2\pi \cdot 5{,}8 \approx 8{,}8 \text{ км}$$

? **У.9. (стр. 50) Решение.**

По данным: $\cup DF : \cup FE : \cup EG : \cup GD = 5 : 2 : 1 : 7$

$5k + 2k + k + 7k = 360°$

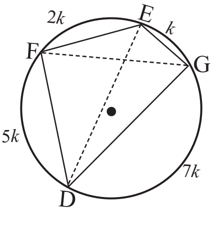
$15k = 360°, \quad k = 24°$

$\cup DF = 120°$

$\cup FE = 48° \qquad \angle FDE = \angle FGE = \frac{1}{2} \cup FE = 24°$

$\cup EG = 24°$

$\cup GD = 168° \qquad \angle DFG = \angle DEG = \frac{1}{2} \cup GD = 84°$

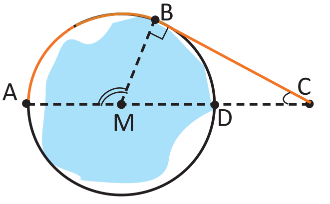


У.10. (стр. 50) **Решение.**

а) По условии задачи поскольку $AC = 9$, $AM = 3$, то находим, что $MD=3$, $DC=3$. С другой стороны поскольку $MB \perp BC$ и $MC = 2 \cdot MB$, ясно, что, $\angle C=30^\circ$. Тогда $\angle BMC = 60^\circ$, $\angle AMB = 120^\circ$.

Найдем длину дугообразной дороги AB.

$$l_{AB} = \frac{120}{360} \cdot 2\pi \cdot 3 = 2\pi \approx 6{,}3 \text{ км}$$



ΔMBC прямоугольный треугольник и по теореме Пифагора сможем найти длину дороги BC.

$$BC = \sqrt{MC^2 - MB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}2 \text{ км}$$

Значит, длина дороги соревнования приблизительно состовляет

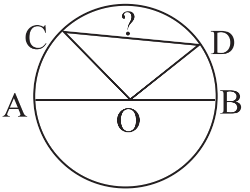
$$6{,}3 + 5{,}2 = 11{,}5 \text{ км}$$

b) $11{,}5 \cdot 5 = 57{,}5$. Значит, Кянан с благотворительными намеренями должен потратить 57,5 ₼.

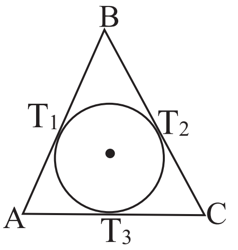
Таблица критерий суммативного оценивания по разделу 2.

№	Критерии	Замечания
1	Решает задачи по нахождению длины дуги	
2	Применяет свойства хорд при решении задач	
3	Применяет свойства вписанных в окружность углов при решении задач	
4	Применяет свойства касательных к окружности при решении задач	
5	Применяет свойства углов образованных касательными и секущими при решении задач	
6	Изображает отрезки пересекающие окружность, знает правила нахождения их длин и применяет при решении задач	

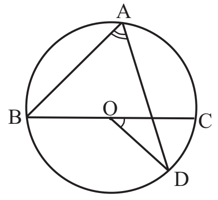
Урок 31. Задания суммативного оценивания по разделу 2



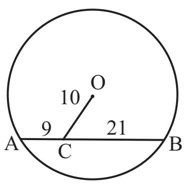
1. Найдите длину хорды CD, если диаметр окружности равна 10 см, $\cup AC = 37°$, $\cup BD = 23°$. O - центр окружности.



2. Окружность вписанная в равнобедренный треугольник точками касания делит боковые стороны на отрезки $AT_1 = 3$ см, $BT_1 = 4$ см. Найдите периметр треугольника.



3. O-центр окружности. Найдите $\angle DOC$, если $\angle A = 70°$.

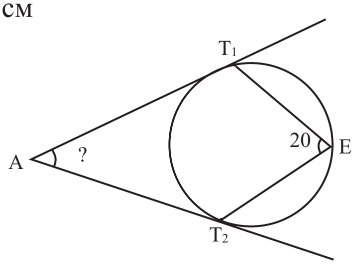


4. O-центр окружности. Найдите радиус окружности, если $OC = 10$ см, $AC = 9$ см, $BC = 21$ см.

A) 14 см B) 15 см C) 16 см D) 17 см

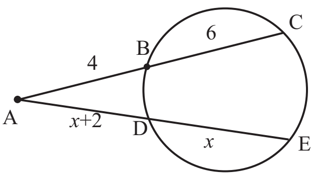
5. Найдите длину дуги, соответствующую окружности с радиусом 10 см и центральным углом 18°.

A) π см B) 2π см C) $0{,}5\pi$ см D) 3π см



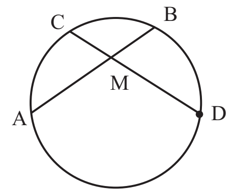
6. AT_1 и AT_2 - касательные к окружности.
Если $\angle T_1ET_2 = 20°$, то найдите $\angle A$.

A) 100° B) 140° C) 120° D) 80°



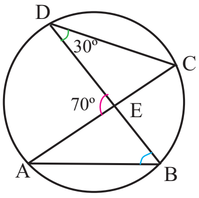
7. Если $AB = 4$, $BC = 6$, $AD = x + 2$ и $DE = x$, то найдите длину отрезка AE.

A) 9 B) 8 C) 7 D) 10

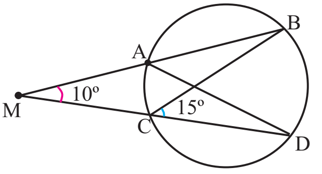


8. Если $CM = 3$ см, $MD = 8$ см, $AM = 6$ см, то найдите BM.

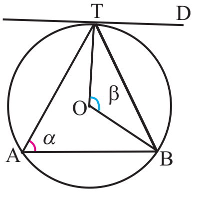
9. Если $\angle\ CDE = 30°$, $\angle AED = 70°$, то найдите $\angle ABE$.



10. Если $\angle\ M = 10°$, $\angle\ C = 15°$, то найдите $\angle D$.



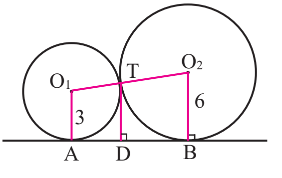
11. Установите соответствия. O - центр окружности, TD - касательная.



1. $\angle$ BTD = 20°	A) $\beta + \alpha = 60°$
2. $\angle$ BTD = 30°	B) $\beta - \alpha = 20°$
3. $\angle$ BTD = 40°	C) $\beta - \alpha = 30°$
	D) $\beta + \alpha = 120°$

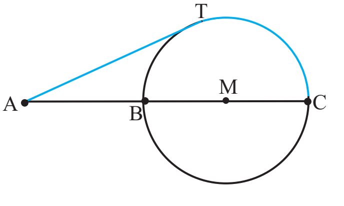
12. В окружности с диаметром 20 см найдите расстояние от центра до хорды длиной в 12 см.

13. Проведена общая касательная AB к окружностям имеющим внешнее касание. По данным найдите расстояние от точки касания T до прямой AB.



14. Точками A, B, C, D окружность делится в отношении 2 : 3 : 3 : 4 и точки соединены последовательно. Найдите углы четырехугольника ABCD.

15. Вокруг озера на окраине города построена круговая дорога (центр соответствующего круга обозначен точкой M). Спортсмены начинают разбег из точки A, которая находится в 2-х км от кольцевой дороги. Спортсмены должны достичь финиша в точке C, которая находится на наибольшем прямом расстоянии от A. Беговая дорога состоит из части AT как касательная кольцевой дороги и из дуги $\smile TC$ кольцевой дороги,



a) Если AM : AC = 2: 3, то найдите сколько километров составляет длины дороги AT ?
b) Найдите градусную меру $\smile TC$.
c) Сколько километров длина беговой дорожки? Округлите до десятых.

3 **Функции. Графики**

Таблица планирования 3-го раздела

Стандарты содержания	Урок №	Тема	Поурочные часы	Учебник
2.2.2. Решает систему уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение первой степени, а другое второй степени. 2.2.3. Решает квадратное неравенство. 2.3. Выражает зависимости между величинами, встречающимися в повседневной жизни, через функции	32- 34	Квадратичная функция и ее график	3	51-57
	35-36	Представление квадратичной функции в разных формах	2	57-59
	37	Пересечение параболы $y = a(x - m)^2 + n$ с осью абсцисс.	1	60-61
	38-40	Построение графика функции $y = ax^2 + bx + c$. Исследование функции $y = ax^2 + bx + c$	3	62-66
	41- 43	Решение задач применением квадратичной функции	3	67-69
	44-45	Функция y = $\|x\|$ и ее график	2	70-73
	46	Функция $y= x^3$ и ее график	1	73-74
	47-48	Обобщающие задания	2	75-76
	49	Задания суммативного оценивания по разделу 3	1	
	Всего		18	

Стандарты содержания

2.2.2. Решает систему уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение первой степени, а другое второй степени.
2.2.3. Решает квадратное неравенство.
2.3. Выражает зависимости между величинами, встречающимися в повседневной жизни, через функции

Формирующие навыки учеников

- *Строит график квадратичной функции составлением таблицы значений*
- *Строит график квадратичной функции с помощью графика функции $y = x^2$;*
- *Строит график квадратичной функции по видам выражений*

$y = a(x - m)^2 + n$ и $y = a(x - p)(x - q)$

- *Определяет нули функции;*
- *Строит график функции соответствующую общему виду $y = ax^2 + bx + c$ и исследует;*
- *Решает задачи применяя квадратичную функцию;*
- *Строит график функции $y = |x|$;*
- *Строит графики функции вида*

$y = a|x - m| + n$.

- *Строит график функции $y = x^3$;*

Математический словарь

- Квадратичная функция
- Парабола
- Вершина параболы
- Ось симметрии параболы
- Нули квадратичной функции
- Функции с модулем
- Кубическая функция

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

Интернет-адреса:https://mathway.com/graph http://www.meta-calculator.com/online, https://www.desmos.com.

Урок 32-34. Учебник стр. 51-57. Квадратичная функция и ее график. 3 часа

1-ый час. Отмечается широкое применение квадратичной функции в инженерных, строительно-монтажных работах. Обратив внимание на мосты, сооруженные в последние годы в городе Баку, то можно увидеть конструкции в виде параболы. Куполообразные арки можно встретить на каждом шагу, будь эти образцы древних или же современных времен. Все эти конструкции возможны благодаря проведению на высоком уровне расчетов над квадратичными функциями. А также с помощью квадратичных функций можно получить важные экономические показатели, оценить ситуацию и претворить в жизнь новые планы. Рекомендуется исследовать квадратичные функции в нижеследующих направлениях.

1. Сравнение графиков функций $y = x^2$ и $y = ax^2$.
2. Сравнение графиков функций $y = x^2$, $y = x^2 + n$.
3. Сравнение графиков функций $y = x^2$, $y = (x + m)^2$.

Графики можно построить и граф-калькулятором. Для каждого случая ученики исследуют относительно каких осей графики меняют свое положение. Задаются вопросы по чтению графической информации и по навыкам применения. Что можете сказать по поводу того, что в таблице значений функции $y = x^2$ с изменением x изменяются значение y. Слушаются мнения отдельных учеников
- при любых значениях x значения y неотрицательны.
- несмотря на различные значения x, значения y повторяются.

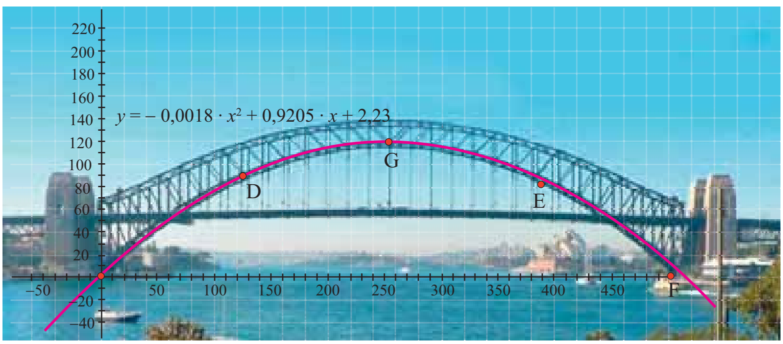
Может ли в какой либо функции

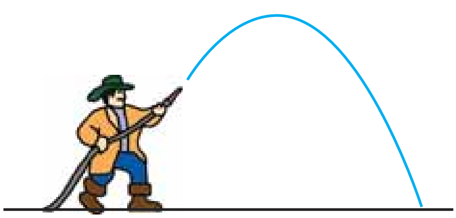
одним и тем же значениям x соответствовать разные значение y? Повторяется определение функции.

2. Как по вашему изменится положение графика, если функция была бы в виде $y = -x^2$? Слушаются мнения учеников. Ученик: это означает, что все значения у неположительные и график располагается в нижней полуплоскости.

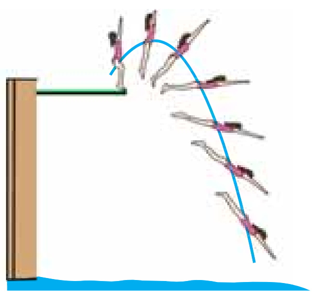
3. Если $x = 3$, то значение функции $y = x^2$ равно 9, то есть $y = 9$. А для функции $y = 3x^2$ при $x = 3$ как изменится значение y? Будет в 3 раза больше. А как изменится y для функции $y = \frac{1}{3}x^2$? Объясните это нахождением координат нескольких точек на графике. Можно ли по этим значениям определить в каком случае парабола расширяется, а в каком сужается. Слушаются мнения учеников: значение функции " $y = 3x^2$ при одних и тех же значениях x по сравнению с функцией $y = x^2$ растут с "большей скоростью", поэтому его график наиболее вытянут, более узкий и больше сжат к оси y. А график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ по сравнению с графиком функции $y=x^2$ "растет медленнее" и поэтому график функции более широкий.
4. Можно ли по записям $y = x^2 + n$ и $y = (x + m)^2$ сказать какой из этих графиков получается скольжением по оси Ox, а какой по оси Oy. Слушаются мнения учеников. Запись $y = x^2 + n$ показывает то, что функция $y= x^2$ уже "есть" и прибавляемое число n в зависимости от знака полностью изменяет значение " y". А запись $y = (x + m)^2$, показывает то, что при изменении значения x на m единиц образуется квадратичная функция. Поэтому, график меняет положение по отношению к параболе $y = x^2$ по оси Ox.

Даются информации о квадратичной функции и о реальных жизненных ситуациях, демонстрируются картины.





Вода, вытекаемая из шланга с ускорением образует параболу.



Траектория прыжка плавца на дно воды имеет форму параболы.

2-ой, 3-й час. График квадратичной функции.

Вопросы на исследование 1. Как влияет коэффициент a функции $y = ax^2$ на значения и положение графика функции $y = x^2$?

2. Как влияет свободный член функции $y = x^2 + n$ на значения и положение графика функции $y = x^2$.

3. Как влияет m-ый член функции $y = (x - m)^2$ на зачения и положение графика функции $y = x^2$

4. Как влияет коэффициент a функции $y = a(x - m)^2 + n$ на значение и положение графика функции $y = x^2$.

Очень важно провести это исследование графкалькулятором. Построив график графкалькулятором ученики выполняют также полезные задания, показанные внизу:

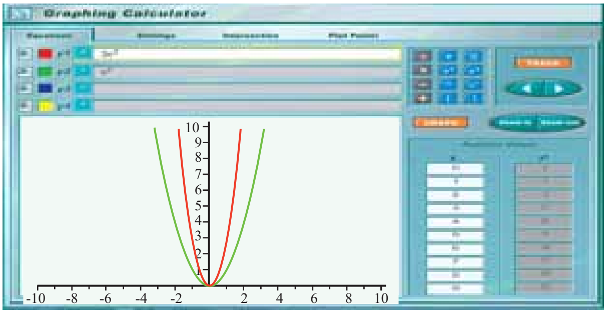
1. Появляется больше возможности для сравнений графиков.

2. Определяет максимальное и минимальное значение x, масштаб расположения информации по x и y.

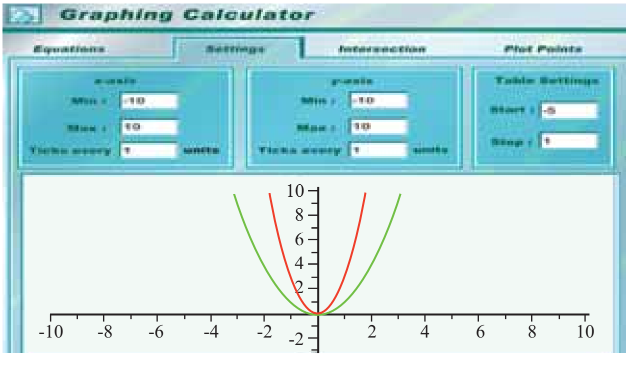
3. Отмечает на графике любую точку и анализирует соответствующую информацию. Самый соответствующий графкалькулятор для школьной программы по адресам:

www/go.hrw.com/math/midma/gradecontent/manipulatives/GraphCalc/graphCalc.html и http://www.meta-calculator.com/.

Если при пользовании графкалькулятором возникает какая-нибудь техническая проблема, то поиском Graf calculator на GOOGLE можно выбрать другой. Например, https://mathway.com/graph, https://www.desmos.com/calculator

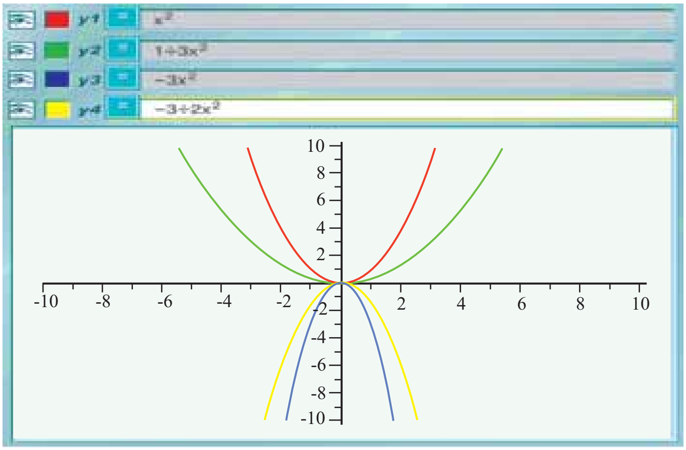


С помощью меню Settings ученик может заранее определить интервал значений аргумента, изменяющийся интервал функциями “y”, изменяющиеся шаги переменных x и y, а также для таблицы значений начальное значение и изменяющиеся шаги.



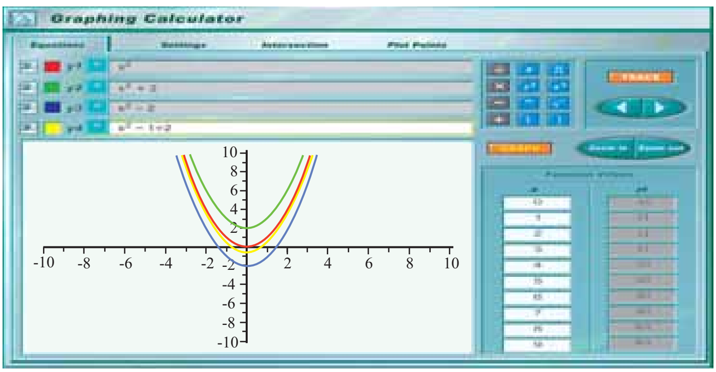
1.Как влияет коэффициент a функции $y = ax^2$ на значения и положение графика функции $y = x^2$? Задавая различные значения коэффициенту a наблюдается положение графика функции $y = ax^2$ относительно графика функции $y = x^2$. Дробные числа в этой программе выражаются действием деления.

Ученики отмечают, что в зависимости от значений коэффициента a ветви параболы $y = x^2$ сужаются или расширяются. В зависимости от знака коэффициента “a” ветви параболы направляются наверх или вниз. На показанном графкалькуляторе в одной координатной плоскости можно построить графики 4-х функций.



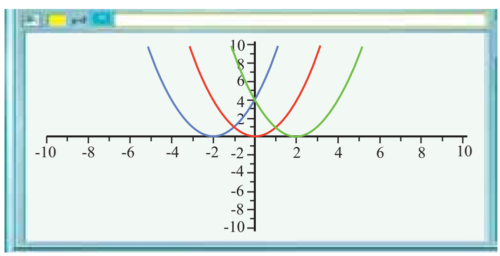
На более профессиональном графкалькуляторе в одной координатной плоскости можно построить еще больше графиков функций.

2. Как влияет свободный член функции $y = x^2 + n$ на значения и положение графика функции $y = x^2$. Задавая различные значения n, ученики наблюдают изменение положения графика функции $y = x^2$. По n-му члену график перемещается по оси Oy вниз или наверх.



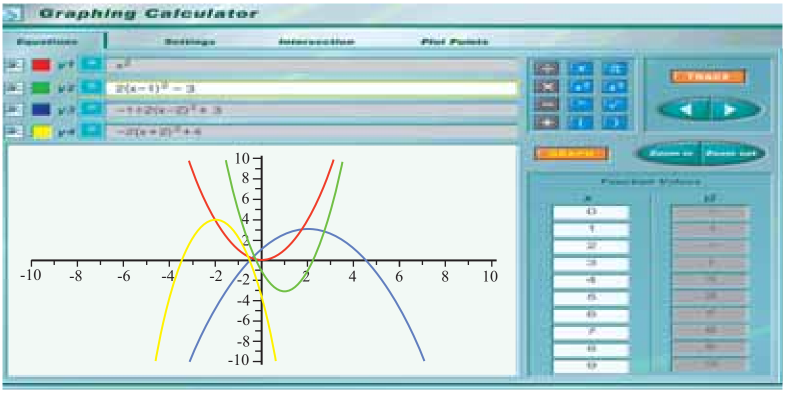
3. Как влияет m-ый член функции $y = (x - m)^2$ на значения и положение графика функции $y = x^2$.

m-это число, которое влияет на значение полного квадрата x, поэтому график получается перемещением графика функции $y = x^2$ налево или направо вдоль оси Ox.



4. Как влияет коэффициент a функции $y = a(x-m)^2 + n$ на значения и положение графика функции $y = x^2$?

Наконец, для квадратичной функции, в которую включены одновременно члены a, m, n изменения положения графика относительно функции $y = x^2$ обобщаются.



Влияние знака и значения коэффициента a.

При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ -вниз.

- При $-1 < a < 1$ парабола сжатием к оси абсцисс становится шире параболы $y = x^2$.
- Если $a > 1$ или же $a < -1$ парабола растяжением от оси Оx вдоль оси Оy становится "уже" параболы $y = x^2$.

Влияние знака и значения "n" на график

- Парабола вдоль оси Oy перемещается на $|n|$ единиц: при $n < 0$ вниз, при $n > 0$ вверх.
- n - соответствует ординате вершины параболы.

Влияние знака и значения "m" на график

- При $m > 0$ парабола перемещается вдоль оси Ox вправо, при $m < 0$ -влево.
- m- соответствует абсцисс вершины параболы,
- $x - m = 0$ - уравнение оси симметрии параболы, прямая $x = m$ - ось симметрии параболы.

Ученик понимает, что числа m и n - координаты вершины функции.

Несмотря на возможность пользования графкалькулятором ученики производя соответствующие изменения над графиком функции $y = x^2$, строят графики в тетради.

Ученикам рекомендуют приготовить презентацию на построение графиков на графкалькуляторе, и по таблице значений письменно.

Презентации собираются в портфолио учащегося. В учебнике даны несколько образцов заданий. Рекомендуется выполнение этих образцов письменно всеми учениками, исследуя обсуждениями.

Запись квадратичной функции в виде выделения полного квадрата облегчает построение его графика.

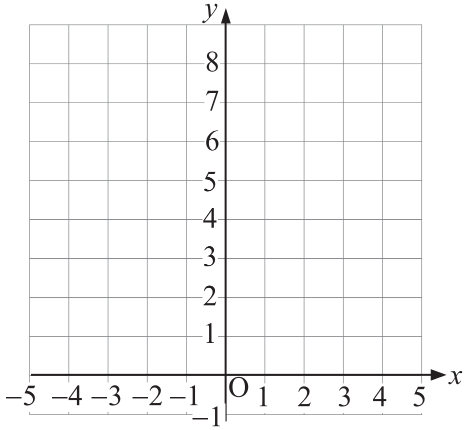
Рабочий лист № 1

Имя__________ **Фамилия**__________ **Число**_________

● *Строит графики функций* $y = x^2 + n$ *и* $y = (x - m)^2$ *по графику функции* $y = x^2$

Воспользуясь графиком функции $y = x^2$ постройте графики данных функций:

1) $g(x) = x^2 + 1$



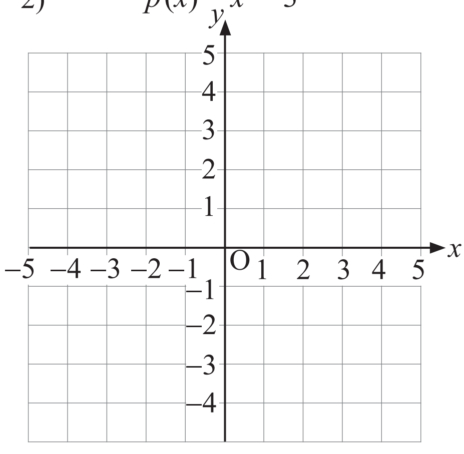
Объяснение: ____________________

____

____

____

2) $p(x) = x^2 - 3$



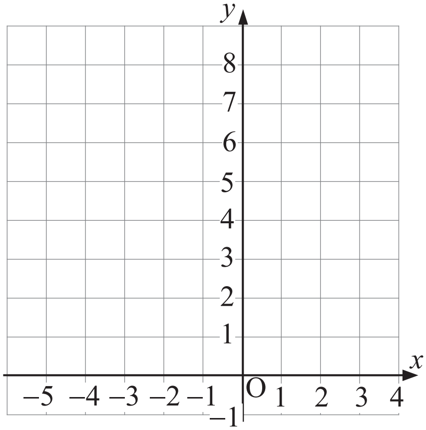
Объяснение: ____________________

____

____

____

3) $r(x) = (x + 1)^2$



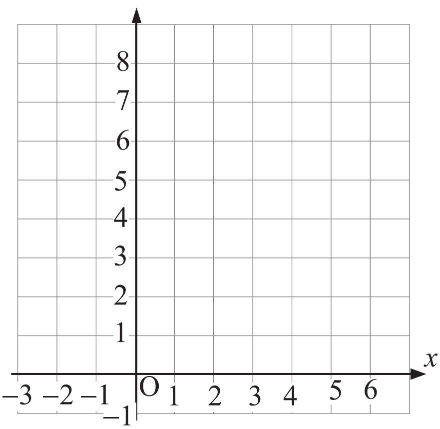
Объяснение: ____________________

____

____

____

4) $k(x) = (x - 3)^2$



Объяснение: ____________________

____

____

____

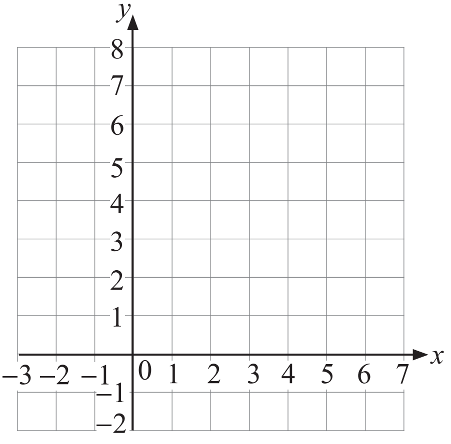
Рабочий лист №2

Имя__________ Фамилия__________ **Число_________**

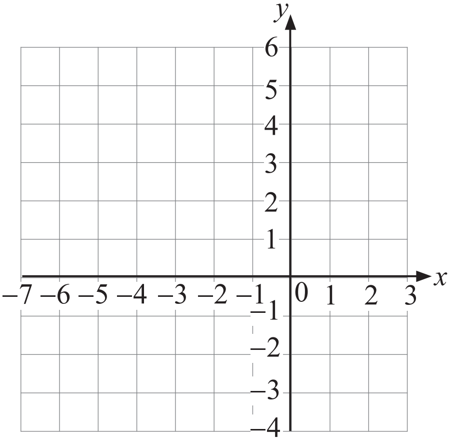
● *Строит график данный квадратичной функции вида* $y = a(x - m)^2 + n$

Постройте графики функций по координатам вершины и оси симметрии

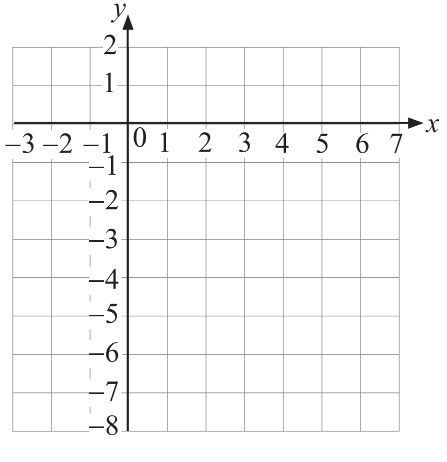
1) $y = (x - 3)^2 + 2$



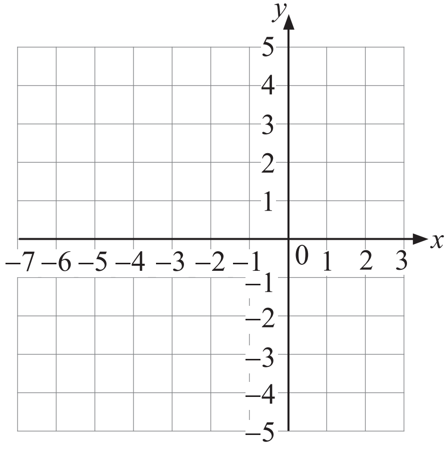
2) $y = (x + 3)^2 - 1$



3) $y = -(x - 2)^2 - 4$



4) $y = -(x + 3)^2 + 3$



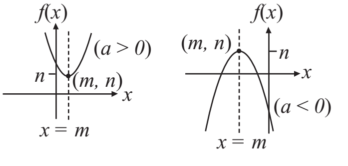
Урок 35-36. Учебник стр. 57-59.
Представление квадратичной функции в разных формах. 2 часа

В отведенных последующих часах для обучения квадратичной функции в учебнике и в пособии для учителей даны рабочие листы, специальные задания, способствующие усвоению учениками нижеследующих навыков.

- Определять координаты вершины графика квадратичной функции
- Определять координаты точек пересечения графика с осями координат.
- Определять точки максимумума и минимумума квадратичной функции
- По графику функции определять в каком интервале значения функции будут положительными, а в каком - отрицательными.
- Определять квадратичную функцию по координатам вершины и любой точки на ее графике.
- Определять квадратичную функцию по точкам пересечения с осями координат.

Шаги построения параболы $y = a(x-m)^2 + n$

1. Вершина параболы располагается в точке $(m; n)$. Если ветви параболы направлены вниз, то значение n показывает наибольшее значение (максимум) функции; если же ветви параболы направлены вверх, то значение n показывает наименьшее значение (минимум) функции.

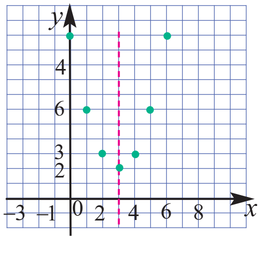


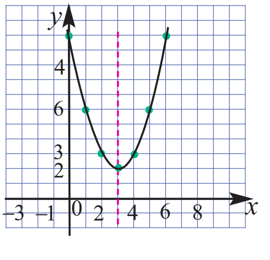
2. Находятся точки пересечения параболы с осями координат. Например, для функции $y = (x-3)^2 + 2$ при $x=0$ получится $y=11$, то есть парабола пересекает Oy в точке $(0;11)$.

Определяется вершина параболы: (3; 2)

3. Осью симметрии является прямая $x = m$

4. Обращается внимание на навыки местонахождения точек на графике по оси симметрии. В данном примере это определяется уравнением $x - 3 = 0$. Проводится ось симметрии $x = 3$. По оси симметрии отмечаются точки, находящиеся на равных расстояниях с равными ординатами, другими словами, отмечаются симметричные точки на одной горизонтальной прямой. Эти точки соединяются сплошной линией.





Обратите внимание! При положительный *“m”* вершина параболы располагается в правой полуплоскости от оси ординат, а при отрицательном *“m”* в левой полуплоскости.

У.21. В каком случае можно написать уравнение оси симметрии квадратичной функции по данным координатам пар точек на графике?

а) (3; 10) и (7; 10)   b) (4; 6) и (6; – 2)

Точки, находящиеся на параболе, расположены попарно на одинаковом расстоянии относительно оси симметрии и ординаты этих точек должны быть одинаковыми. Уравнение оси симметрии $x = m$ определяется как координаты середины отрезка из равенства $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

В случае а)данные условия выполняются и так как $\frac{3+7}{2} = 5$, то уравнение оси симметрии будет $x = 5$.

По данным пункта b) уравнение оси симметрии написать невозможно.

Рабочий лист № 3

Имя__________ **Фамилия**__________ **Число**_________

● *Соответственно общему виду квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ строит и исследует график.*

Пример. Напишите уравнение параболы, пересекающейся с осями координат в точках (–3; 0) и (2; 0), ветви которой направлены вверх.

(–3; 0) и (2; 0)	По этим точкам график пересекает ось абсцисс при значениях аргумента (–3) и 2
$x = -3,\ x = 2$	По точкам пересечения с осью Ox уравнение квадратичной функции будет в виде $y = a(x - p)(x - q)$ А также точки пересечения с осью x является корнями соответствующего квадратного уравнения.
$(x + 3)(x - 2)$	Вид разложения квадратного трехчлена на множители. Если ветви параболы были бы направлены вниз, то перед выражением нужно было-бы поставить знак минус.
$x^2 + x - 6$	Так как здесь $a > 0$ и ветви параболы направлены вверх, перед выражением знак минус не пишется.
$y = x^2 + x - 6$	Записывается функция.

1) Напишите уравнение какой-либо параболы, пересекающейся с осями координат в заданных точках и ветви которой направлены вверх.

a) (–3; 0) и (4; 0) b) (–12; 0) и (–3; 0) c) (2; 0) и (5; 0)

2) Напишите уравнение какой-либо параболы пересекающейся с осями координат в заданных точках и ветви которой направлены вниз.

a) (–2; 0) и (6; 0) b) (1; 0) и (7; 0) c) (5; 0) и (–3; 0)

Рабочий лист № 4

Имя__________ **Фамилия**__________ **Число**_________

• *Строит и исследует график, соответствующий общему виду квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$.

Пример. Напишите уравнение параболы с вершиной в точке (–2; –4) и проходящей через точку (1; 3)

Воспользуемся видом квадратичной функции $\boldsymbol{y = a(x - m)^2 + n}$

Напишем координаты вершины (–2; –4) в $y = a(x - m)^2 + n$, получим:

$y = a(x - (-2))^2 + (-4) = a(x + 2)^2 - 4$

Чтобы найти "a" воспользуемся координатами точки (1; 3)

$3 = a \cdot 3^2 - 4$

$a = \frac{7}{9}$ $\qquad$ $y = \frac{7}{9}(x + 2)^2 - 4$

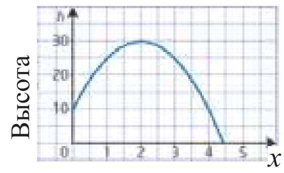
a) Напишите уравнение параболы с вершиной в точке (–3; 2) и проходящей через точку (4; 7).

b) Напишите уравнение параболы с вершиной в точке (4; 5) и проходящей через точку (2; –2).

c) Напишите уравнение параболы с вершиной в точке (–2; 5) и проходящей через точку (0; 9).

d) Напишите уравнение параболы с вершиной в точке (4; –1) и проходящей через точку (2; 3).

Урок 37. Учебник стр. 60, 61.
Пересечение параболы $y = a(x - m)^2 + n$ с осью абсцисс. 1 час



Информация о нулях функции, то есть - о пересечении графика функции с осью абсцисс - важная информация. Ученики представляют эти точки и связь этих точек с корнями квадратного уравнения. Точки пересечения параболы с осями абсцисс и ординат имеют важное практическое значение в решении задач реальных жизненных ситуаций. Например, предположим, что график на рисунке был изображен во время прыжка какого- нибудь зверя (лягушки, белочки. т.п.). Точки пересечения с осями координат позволяют выявить с какой высоты началось движение, а также дальность прыжка.

? Решения некоторых заданий, данных в учебнике.

У.26. Определите число общих точек нижеследующих функций с осью абсцисс.
Решение. a) $y = 5x^2 - 7$. Вершина параболы - точка (0; –7) находится ниже оси абсцисс, ветви параболы направлены вверх. Значит, парабола пересекает ось абсцисс в двух точках.
b) $y = -2(x + 1)^2$. Вершина параболы - точка (–1; 0) находится на оси абсцисс, а ветви параболы направлены вниз. Число общих точек равно 1.

У.27. Не строя графики функций
1) $y = 5(x - 15)^2 - 100$ 2) $y = -4x^2 + 14$ 3) $y = (x + 18)^2 - 8$
определите:
a) Направление ветвей параболы; b) Точку вершины графика;
c) Уравнение оси симметрии; d) Число точек пересечений с осью x.

Решение. 1) a) $a = 5 > 0$. Ветви параболы направлены вверх.
b) $m = 15$, $n = -100$, вершина параболы: (15; –100)
c) $x = 15$
d) Вершина параболы (15;–100) находится ниже оси абсцисс, а ветви параболы направлены ввреx. Значит парабола пересекает ось абсцисс в двух точках.

2) a) $a = -4 < 0$. Ветви параболы направлены вверх.
b) $m = 0$, $n = 14$, вершина параболы: (0; 14)
c) $x = 0$
d) Вершина параболы (0; 14) находится выше оси абсцисс, а ветви параболы направлены вниз. Значит парабола пересекает ось абсцисс в двух точках.

С осью Ox парабола пересекается в двух точках.
3) a) $m = -18$, $n = -8$ вершина параболы: (–18; –8)
b) $a = 1 > 0$. Ветви параболы направлены вверх.
c) $x = -18$
d) Вершина параболы (–18; –8) находится ниже оси абсцисс, а ветви параболы направлены ввреx. Значит парабола пересекает ось абсцисс в двух точках.

У.28. Заданы 1) $f(x) = x^2 - 5x - 24$; 2) $g(x) = x^2 - 2x + 1$; 3) $p(x) = 4x^2 - 20x + 24$

a) Разложив квадратный трехчлен на множители запишите в виде $y = a(x - p)(x - q)$

b) Определите координаты пересечений с осями x и y. c) Постройте график

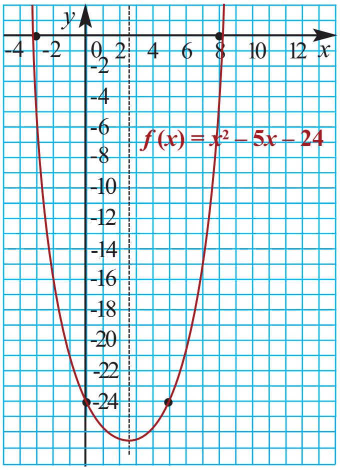
Решение.

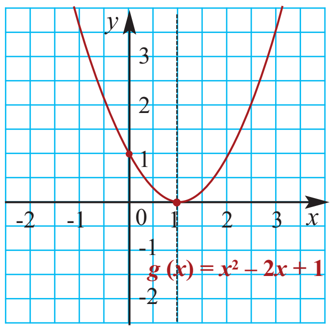
a) $f(x) = (x - 8)(x + 3)$, $g(x) = (x - 1)^2$, $p(x) = 4(x - 2)(x - 3)$

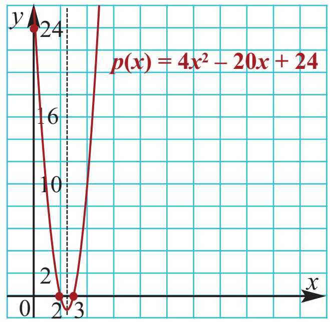
b) Точки пересечения с осями x и y.

$f(x)$: (8; 0) и (– 3; 0); (0; – 24) $g(x)$: (1; 0); (0; 1) $p(x)$: (2; 0) и (3; 0); (0; 24)

c)







Для того, чтобы построить график функции вида $y = a(x - p)(x - q)$ ученики устно представляют необходимые “важные” точки. Эти точки: точки пересечения оси Ox и Oy и точка вершины параболы.

Важность уравнения оси симметрии, еще раз доводится до внимания учеников. Отмечая симметричные точки по оси симметрии на листе бумаги в клетку, путем подсчитывания можно построить график функции более четким и точным.

У.31. Даны точки пересечения параболы с осями координат. По этим данным найдите координаты вершины параболы.

a) (3; 0), (–1; 0), (0; –6) b) (–2; 0), (–3; 0), (0; 4) c) (–3; 0), (1; 0), (0; 3)

a) I способ. Для того, чтобы найти коэффициенты a, b, c, в квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ нужно в равенстве $y = ax^2 + bx + c$ учесть координаты данных точек.

По точке пересечения оси ординат с точкой (0;–6) находится коэффициент с: $-6 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, $c = -6$. Точка в функции $f(x) = ax^2 + bx - 6$, учитывая координаты точек (3; 0) və (–1; 0) получим:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 6 \\ 0 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9a + 3b = 6 \\ a - b = 6 \end{cases}$$

Умножив 2-е уравнение системы на 3 и сложив почленно с 1-ым, получим: $12a = 24$, $a = 2$. Это значение подставив во 2-е уравнение, получим $b = -4$. Итак, $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$. Воспользуемся формулами:

$$m = \frac{-b}{2a} \text{ и } n = f(m)$$

$$m = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1 \text{ и } n = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 6 = -8$$

II способ. Воспользуемся видом: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n$

Нужно отметить, что так как прямая $x = m$ является осью симметрии параболы, то из формулы $m = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ можно найти m.

$x_1 = 3,\ x_2 = -1 \Rightarrow m = \dfrac{3 + (-1)}{2} = 1$ Квадратичная функция примет вид: $y = a(x - 1)^2 + n$

Если здесь учесть координаты точек (3; 0) (или (–1; 0)) , (0; –6) получим:

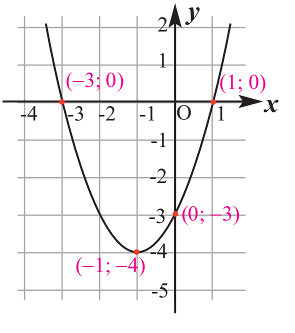
$$\begin{cases} 0 = 4a + n \\ -6 = a + n \end{cases} \Rightarrow a = 2, \quad n = -8, \quad f(x) = 2(x - 1)^2 - 8$$

III способ. Если известны точки пересечения графика квадратичной функции с осью абсцисс, тогда ее можно представить в виде $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. В рассматриваемом случае так как $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, то $y = a(x - 3)(x + 1)$. Если здесь учесть координаты точки (0 ; –6), то находим:

$$-6 = a(0 - 3)(0 + 1); \quad -6 = -3a; \quad a = 2$$
$$y = 2(x - 3)(x + 1); \quad y = 2(x^2 - 2x - 3) = 2(x - 1)^2 - 8$$

Урок 38-40. Учебник стр. 62-66. Построение графика функции $y = ax^2 + bx + c$. Исследование функции $y = ax^2 + bx + c$. 3 часа

1. Обращается внимание навыкам выделения полного квадрата из квадратного трехчлена
2. Квадратичная функция анализируется по нижеследующим показателям:
   - уравнению оси симметрии;
   - точке вершины;
   - наибольшему или наименьшему значению;
   - области определения и множеству значений;
   - пересечению с осью Ox ;
   - пересечению с осью Oy;



Для того чтобы построить график функции, заданной в общем виде, нужно определить нижеследующие точки. Покажем это шагами на примере функции $y = x^2 + 2x - 3$

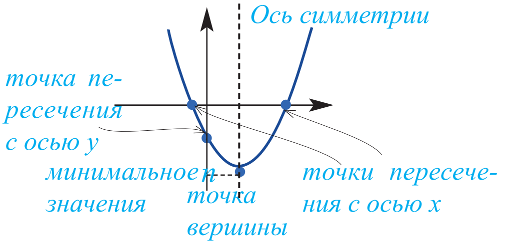
1. $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$

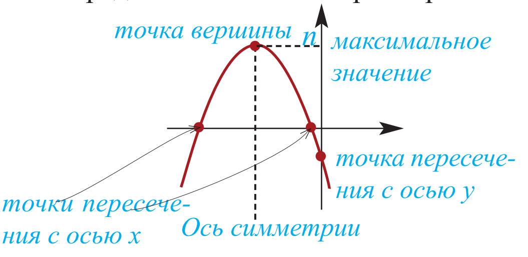
Найдем абсциссу вершины: $m = -\dfrac{b}{2a} = -1$

Учитывая значение $x = -1$ в уравнении $y = x^2 + 2x - 3$, найдем ординату вершины: $y = 1 - 2 - 3 = -4$. Точка вершины: **(–1; –4)**

2. Найдем точку пересечения графика с осью Oy:
В уравнении $y = x^2 + 2x - 3$ при $x = 0$, получим $\boldsymbol{y = -3}$. Точка пересечения графика с осью Oy: **(0; –3)**
3. Найдем точку пересечения графика с осью Ox.
В уравнении $y = x^2 + 2x - 3$ при $y = 0$, получим
$x^2 + 2x - 3 = 0$. Корнями будут: $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$. Точки:
(–3; 0) и (–1; 0) - точки пересечения параболы с осью Ox
4. Отметив эти точки в координатной плоскости, построим параболу.

Каким показателям обращены внимания во время исследования квадратичной функции показаны на нижеследующих графиках (даны в учебнике)
При выполнении задания отмечается важность представления этих параметров.



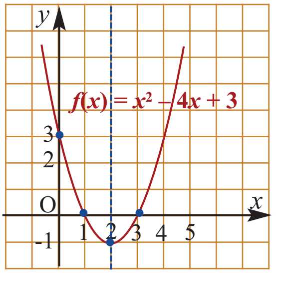


Областью определения является множество всех действительных чисел $\{x \mid x \in \mathrm{R}\}$.
Множество значений: $[n; +\infty)$

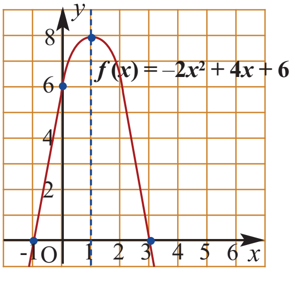
Областью определения является множество всех действительных чисел $\{x \mid x \in \mathrm{R}\}$.
Множество значений: $(-\infty; n]$

У.36. 1) Постройте график функции. 2) Найдите расстояние между точками пересечения с осью Ox. 3) Напишите уравнение оси симметрии.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$



Решение. a) Выделим полный квадрат:
$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$
Точка вершины: (2; –1)
Парабола пересекается с осью ординат в точке (0; 3)
Точки пересечения с осью абсис находим из уравнения: .
$x^2 - 4x + 3 = 0$. так как корни этого уравнения 1 и 3, значит парабола пересекает ось абсцисс в точках (1; 0) и (3; 0) Отметив найденные точки на координатной плоскости строим параболу. .
Расстояние между точками пересечений с осью абсцисс: $d = |3 - 1| = 2$
Уравнение оси симметрии: $x = 2$



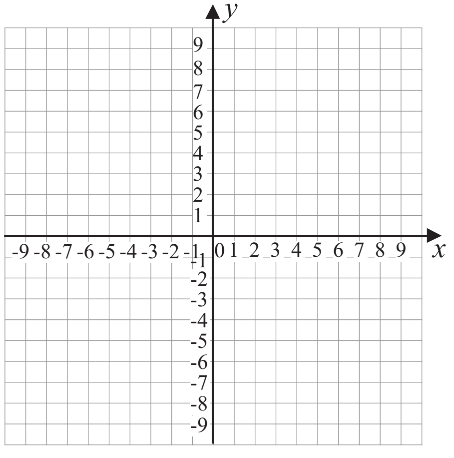
d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6 = -2(x-1)^2 + 8$.
Точка вершины: (1; 8)
При $x = 0$ получим $f(0) = 6$, значит парабола пересекает оси ординат в точке (0; 6). Поскольку Корни уравнения $-2x^2 + 4x + 6 = 0$ являются –1 и 3, значит парабола пересекает ось абсцисс в точках (–1; 0) и (3; 0). Отметив найденные точки на координатной плоскости строим параболу.Расстояние между точками пересечений с осью абсцисс: $d = |3 - (-1)| = 4$. Уравнение оси симметрии: $x = 1$

Рабочий лист № 5

Имя__________ **Фамилия**__________ **Число**_________

● *Строит и исследует график квадратичной функции соответствующий общему виду* $y = ax^2 + bx + c$.

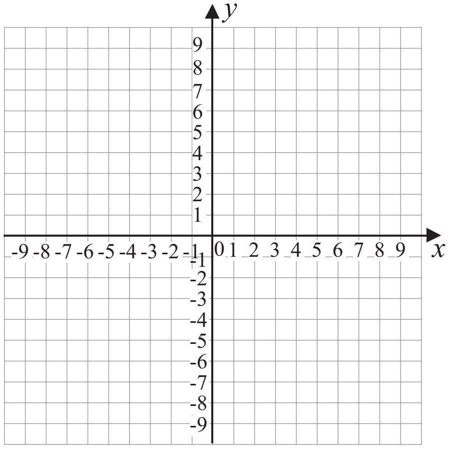
а) $y = -x^2 - 6x - 5$



• запись по точке вершины (выделение полного квадрата)

• точку вершины;
• уравнение оси симметрии;
• наибольшее и наименьшее значение;
• область определения и множество значений;
• пересечение с осью Ox (если есть);
• пересечение с осью Oy .

b) $y = x^2 - 6x + 5$



• запись по точке вершины (выделение полного квадрата)

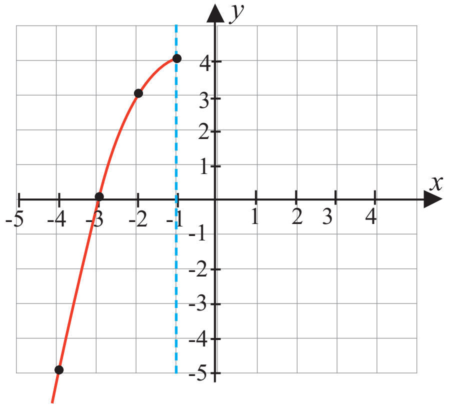
• точку вершины;
• уравнение оси симметрии;
• наибольшее и наименьшее значение;
• область определения и множество значений;
• пересечение с осью Ox (если есть);
• пересечение с осью Oy .

Рабочий лист № 6

Имя__________ Фамилия__________ **Число_________**

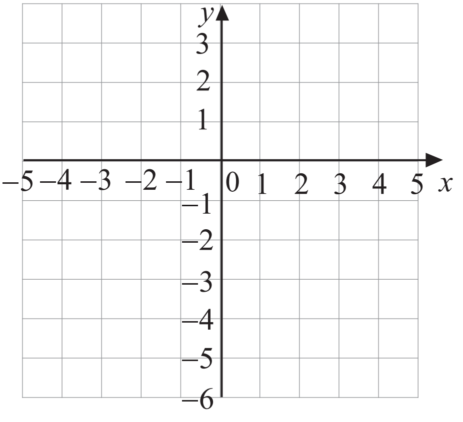
● *Строит и исследует график квадратичной функции соответствующий общему виду* $y = ax^2 + bx + c$

На рисунке дана половина параболы. По данным выполните задания.



x	$f(x)$
–4	–5
–3	0
–2	3
–1	4
0	
1	
2	

- Напишите координаты вершины.
- Напишите уравнение оси симметрии
- Напишите точки, симметричные 3-ем данным точкам.
- Напишите точку пересечения с осью y
- Напишите точку пересечения с осью x
- Функция имеет максимум или минимум?
- Напишите функцию.
- Постройте полный график функции.

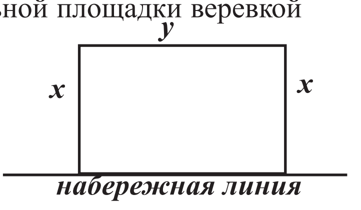


Урок 42-44. Учебник стр. 67-69.
Решение задач применением квадратичной функции. 3 часа

Задачи можно объединить в 2-х группах. Один из этих групп-задачи на нахождение максимальных и минимальных значений с использованием особенностей квадратичной функции. Они охватывают экономические задачи, а также такие геометрические задачи как площадь, объем.
А вторая группа задач, по особенностям графика квадратичной функции-параболы, это моделирующие задачи. Эти задачи наиболее часто применяются в инжинерно-конструкторских задачах, а также при изображении некоторых движений.

? Решения некоторых заданий, данных в учебнике.

У3. Для проведения соревнований по волейболу в море туристы должны установить игровую площадку прямоугольной формы с учетом того, что одна сторона будет прилегать к берегу. Очертив 3 стороны прямоугольной площадки веревкой длиной 60 м и поставив на ней специальные маркеры, они хотят охватить наибольшую территорию. Каковы должны быть размеры игровой площадки?



Решение. Ширину игровой площадки прямоугольной формы обозначим как x, а длину - y. По условии задачи $2x + y = 60$, Отсюда находим: $y = 60 - 2x$. В формуле площади прямоугольника $S = xy$ подставив $y = 60 - 2x$, получаем: $S = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$. Выделением полного квадрата формулу напишем в виде $S = -2(x - 15)^2 + 450$. Как видно, при $x = 15$, S имеет самое большое значение равное 450. При ширине $x=15$ м длина площадки будет: $y = 60 - 2 \cdot 15 = 30$ (м). Значить при размерах 15 м × 30 м площадка имеет самую большую площадь.

У.5. Зависимость между количеством билетов (N), проданных на концерт и днями (n) продаж определится как $N(n) = -10n^2 + 60n + 200$. В какой день продано наибольшее количество билетов? Найдите число билетов проданных в этот день.
Решение: Записав в виде $N(n) = -10(n^2 - 6n - 20) = -10[(n - 3)^2 - 29] = -10(n - 3)^2 + 290 = 290 - 10(n - 3)^2$, получим, что 3-ий день ($n = 3$) было продано наибольшее число билетов. Число проданных билетов в этот день равно 290.

У.6.Бизнес. Максимальное денежное поступление. Транспортная компания, занимающаяся перевозкой пассажиров, обслуживает ежедневно 200 пассажиров. Цена одного билета 5 манатов. Владелец компании считает, что каждый раз рост в цене на 50 копеек приводит к уменьшению 10-ти пассажиров.
a) Сколько раз компания должна повысить цены, чтобы получить максимальное поступление от продажи билетов?
b) Сколько манатов составит максимальное денежное поступление компании при таких повышениях цен?
Решение: 1. Обозначим через x- число 50-ти копеечных повышений, тогда цена одного билета будет: $(5 + 0{,}5x)$
2. Так как при каждом повышении цен число людей уменьшается на 10, то число пассажиров будет: $(200 - 10x)$

3. Деньги, вырученные от продажи билетов обозначим, через $P(x)$

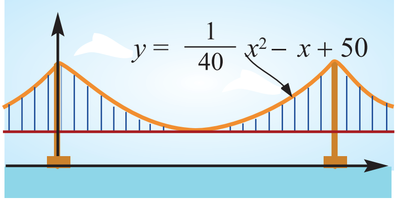
$$P(x) = (200 - 10x)(5 + 0{,}5x) = 1000 + 100x - 50x - 5x^2 =$$
$$= -5x^2 + 50x + 1000 = -5(x^2 - 10x - 200) =$$
$$= -5((x-5)^2 - 25 - 200) = -5((x-5)^2 - 225) \quad \text{а отсюда } P(x) = -5(x-5)^2 + 1125$$

При $x = 5$ функция $P(x)$ принимает наибольшее значение, равное 1125.

a) Если компания 5 раз произведет увеличение цен, то от продажи билетов получит максимальное поступление: $P(5) = 1125$

b) Если в обыкновенные дни при обслуживании 200 пассажиров поступила $200 \cdot 5 = 1000$ манат, то после пятикратного подорожания цен на 50 копеек поступление составит $(200 - 10 \cdot 5)(5 + 0{,}5 \cdot 5) = 1125$ манат.

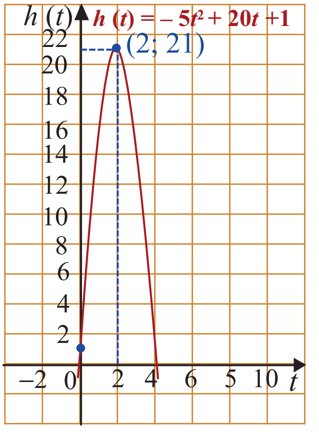
У.9. Трос поддерживающий вес моста между двумя опорами имеет форму параболы заданную формулой $y = \frac{1}{40}x^2 - x + 30$ в выбранной системе координат, как показано на рисунке (x, y в метрах). Самая низкая точка троса находится на мосту. На какой высоте от поверхности воды находится мост?



Выделив квадрат двучлена в квадратичной функции $y = \frac{1}{40}x^2 - x + 30$ найдем координаты вершины:

$$y = \frac{1}{40}x^2 - x + 30 = \frac{1}{40}(x^2 - 40x + 30 \cdot 40) =$$
$$= \frac{1}{40}(x^2 - 40x + 1200) = \frac{1}{40}\left((x-20)^2 - 400 + 1200\right) =$$
$$= \frac{1}{40}\left((x-20)^2 + 800\right) = \frac{1}{40}(x-20)^2 + 20$$

при $x = 20$-ти наименьшее значение функции равняется 20. То есть мост от поверхности воды находится на расстоянии 20 метров.



У.10. Движение. Высоту (в метрах) мяча через t секунд после броска вверх можно найти по формуле $h = -5t^2 + 20t + 1$.

a) Через сколько секунд мяч достигнет высоты 16 м?

b) На какую максимальную высоту поднимется мяч?

c) Сколько секунд мяч пробудет в воздухе?

a) Из уравнения $-5t^2 + 20t = 16$ найдем через сколько секунд мяч достигнет высоты 16 метров:

$$-5t^2 + 20t - 15 = 0 \Rightarrow$$
$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

Отсюда находим $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

Физически это показывает, что после подбрасывания вверх, мяч дважды оказывается на высоте 16 метров от земли. Первый раз после подбрасывания за 1 секунду (мяч поднимаясь вверх), а второй раз за 3 секунды (достигнув максимальной высоты, возвращаясь). Другими словами это симметричные точки (1; 16) и (3; 16), лежащие на параболе, являющейся траекторией мяча.

b) Так как зависимость высоты брошенного вверх мяча от времени - квадратичная функция, то выделив полный квадрат покажем ее в виде:

$$h = -5t^2 + 20t + 1 = -5(t^2 - 4t - 0{,}2) = -5\left((t-2)^2 - 4 - 0{,}2\right) = -5(t-2)^2 + 21$$

$$h(t) = -5(t-2)^2 + 21$$

Квадратичная фукнция имеет наибольшее значение. Это значение она принимает при $t = 2$ секундам и $h(2) = 21$. То есть максимальная высота подъема мяча равна 21 метру.

c) Для того чтобы найти сколько секунд мяч останется в воздухе, решим уравнение $h(t) = 0$

$$-5t^2 + 20t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100+5}}{5} \approx \frac{10 \pm 10{,}25}{5}$$

Отметим, что так как при $t = 0$ мяч от земли находился на расстоянии 1 метра, то корень t_1 не относится к решению задачи. $t_2 \approx 4{,}05$ секунд показывает время падения мяча на землю. Значит мяч был в воздухе приблизительно 4,05 секунд.

Урок 44-48. Учебник стр. 70-76. Функция $y = |x|$ и ее график. Функция $y = x^3$ и ее график. Обобщающие задания. 5 часов

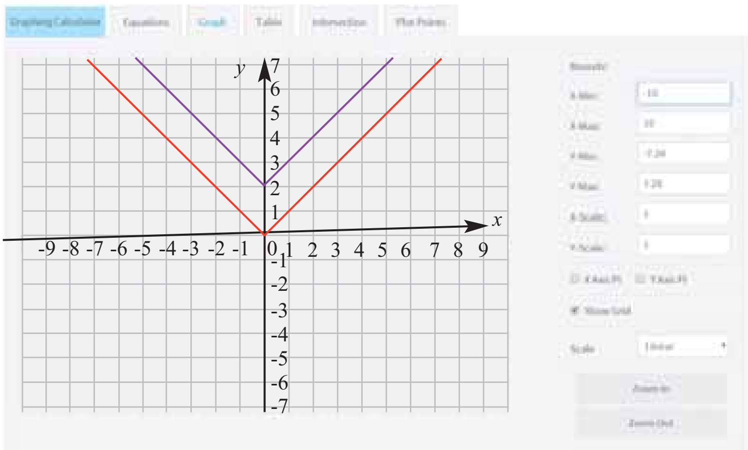
- Пользуясь графиком функции $y = |x|$, строит графики функции $y = 2|x|$, $y = |x+2|$ и $y = -|x+2|$.
- Пользуясь графиком функции $y = |x|$, строит графики функции $y = |x| + 2$ и $y = -|x| + 2$.

1-й, 2-й час. Аналогично правилу построения квадратичной функции, пользуясь графиком функции $y = |x|$, можно построить графики функции $y = 2|x|$, $y = |x+2|$ и $y = -|x+2|$, а также $y = |x| + 2$ и $y = -|x| + 2$.

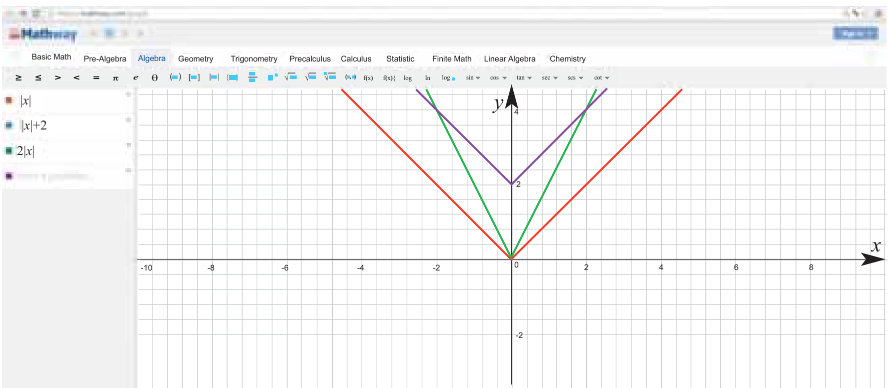
Исследуя шаги построения графика, заданного в учебнике. обобщаются основные черты функции с модулем**.**

Чтобы построить графики функций с модулем можно воспользоваться графкалькулятором, показанным ниже интернет-адресом:

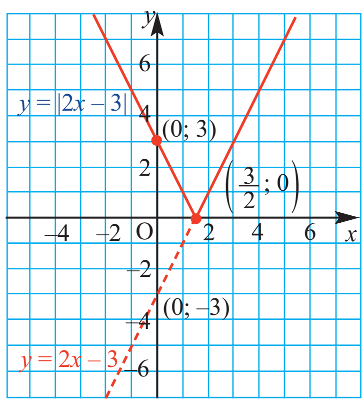
http://www.meta-calculator.com/online



https://mathway.com/graph



Одним из способов построения графика функции с модулем является использование соответствующего графика линейной функции. Для функции $y = |2x - 3|$ можно воспользоваться графиком функции $y = 2x - 3$. Для этого часть графика функции $y = 2x - 3$,



расположенную ниже оси абсцисс, нужно отобразить симметрично относительно оси x.

1. Точка $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ относится и к графику функции $y = 2x - 3$ и к графику функции $y = |2x - 3|$

2. Областью определения функции $y = |2x - 3|$ является множество всех действительных чисел. $\{x \mid x \in R\}$.

Множество значений функции $[0; +\infty)$, потому что при любых значениях x имеем: $|2x - 3| \geq 0$.

3. График функции $y = |2x - 3|$ можно разделить на графики двух независимых линейных функций: 1) При $x \geq \frac{3}{2}$ на график функции $y = 2x - 3$;
2) При $x \leq \frac{3}{2}$ на график функции $y = -(2x - 3)$ или же $y = -2x + 3$
Нижеследующие функции можно показать как данные части функции $y = |2x - 3|$

$$\begin{cases} y = \ \ 2x - 3, & x \geq 1{,}5 \\ y = \ \ -(2x - 3), & x \leq 1{,}5 \end{cases}$$

Рекомендуется выполнение заданий нижеследующих видов

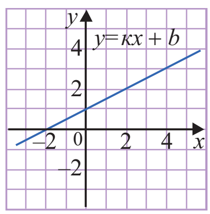
1) Таблица значений относится к функции $y = кx + b$. Измените значения в таблице для $y = |кx + b|$.

x	$y = кx + b$
–2	–3
–1	–1
0	1
1	3
2	5

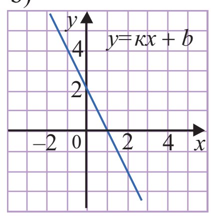
2) При пересечении графика функции $y = кx + b$ с осью абсцисс $x = 3$, а при пересечении с осью ординат $y = 4$. Напишите соответствующие значения точек пересечения графика функции $y = |кx + b|$ с осями x и y.

3) Перерисуйте график $y = кx + b$ в тетрадь. В одной координатной плоскости постройте график функции $y = |кx + b|$

a)

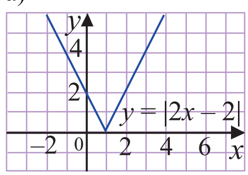


b)

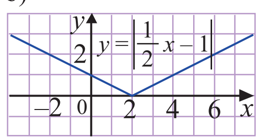


4) Напишите две разные линейные функции, соответствующие графику функции $y = |f(x)|$

a)

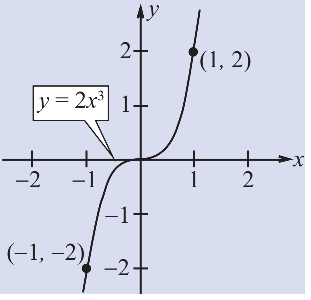


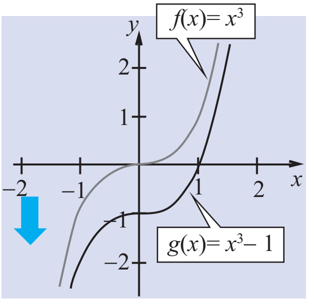
b)

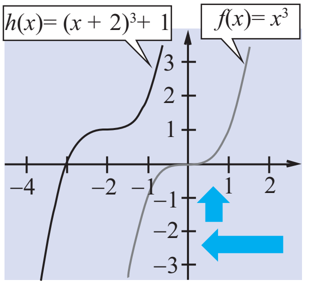


3-й час. График функции $y = x^3$. Практическая работа, данная в учебнике, может быть выполнена исследованием графика функции $y=x^3$, согласно уровню знаний учеников в два подхода - в ограниченном виде или в развернутом виде. 1-ый подход имеет в виду построение графика функции $y = x^3$, распознавание его формы, формирование умений определения приближенного значения кубического корня и куба числа по координатам точек. В учебнике график функции $y = x^3$ дан таким подходом.
2-ой подход имеет в виду построение графика графкалькулятором и может в более широком аспекте охватить исследовательские задания.

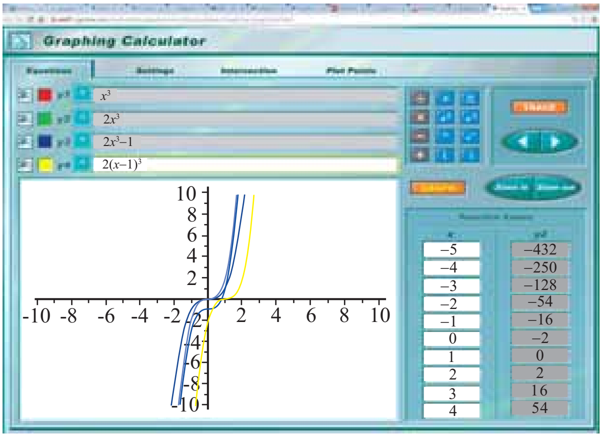
Строится график функции $y = x^3$. Используя этот график строятся графики функций $y = ax^3$ и $y = ax^3 + n$, $y = a\,(x - m)^3 + n$.





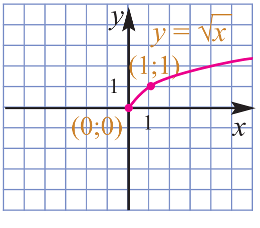


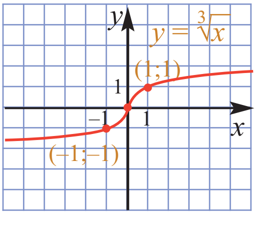
Примеры построений с графкалькулятором:
https://go.hrw.com/math/midma/gradecontent/manipulatives/GraphCalc/graphCalc.html .



Также строятся графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

Рекомендуется также произвести сравнительный анализ этих графиков с графиком функции $y = x^3$. Будучи первым уроком это задание может показаться трудным. Однако знакомство с технологическими ресурсами и их применение устраняют эти трудности и облегчают обучение.





На 4-й vә 5-й учебным часам отведены решения обобщающих задач.

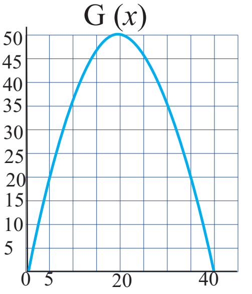
? Решения некоторых заданий, данных в учебнике.

У.7. (стр. 75) Решение. Функцию $h(t) = -5t^2 + 20t$, задающую зависимость высоту h от время t запишем в следующем виде, выделив полный квадрат:

$h(t) = -5t^2 + 20t = -5(t^2 - 4t) = -5(t^2 - 4t + 4) + 20 = -5(t - 2)^2 + 20$

Из этой записи видно, что наибольшая высота подъем мяча равна 20 м и мяч достигает эту высоту при $t = 2$ секунд.

У.8. (стр. 75). Бизнес. Максимальная прибыль



Исследования выявили, что доход типографии изменяется по формуле $G(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 5x$

Здесь x показывает число (тысячами) проданных книг, $G(x)$ - соответствующий доход (тысячами манат)

a) От продажи скольких книг типография получила доход в 32 тыс. манат? b) От продажи скольких книг компания получила максимальную прибыль?

c) Как объясните два ответа, полученные в пункте a)?

a) Для того чтобы ответить на вопрос “От продажи скольких книг типография получила доход в 32 тыс. манат” решим уравнение

$$-\frac{1}{8}x^2 + 5x = 32. \text{ Отсюда}$$

$$x^2 - 40x + 256 = 0 \text{ и } x_1 = 8,\ x_2 = 32$$

То есть от продажи 8-и тысяч и 32-х тысяч книг.

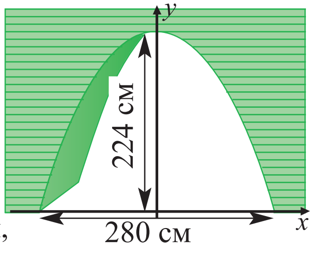
b) Чтобы вычислить максимальную прибыль компании от продажи книг, функцию $G(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 5x$ покажем в следующем виде, выделив полный квадрат:

$$-\frac{1}{8}x^2 + 5x = -\frac{1}{8}(x^2 - 40x) = -\frac{1}{8}\left((x-20)^2 - 400\right) = -\frac{1}{8}(x-20)^2 + 50$$

То есть при продаже 20-ти тысяч книг, максимальная прибыль компании составит 50 тысяч манат.

c) В пункте a) кампания получает прибыль в 32 тысячи манат от продажи 8 тысяч и 32 тысяч книг. Это видно и по графику -книги сначала продавались по более высокой цене и с ростом числа продаваемых книг цена понизилась. Так что, 8 тысяч книг сначала продавались по 4 маната и компания получила доход в 32 тыс. манат, а затем этот же доход получила от продажи 32-х тысяч книг, продавая по 1-му манату.

У.16. (стр. 76) **Решение:**



1) По данным измерениям (в метрах) арки, запишем квадратичную функцию в виде: $y = ax^2 + 2{,}24$. При $x = 1{,}4$ (м), $y = 0$: $0 = 1{,}96a + 2{,}24$. Отсюда $a = -\frac{8}{7}$. Значит, искомая функция имеет вид: $y = -\frac{8}{7}x^2 + 2{,}24$. 2) a) Точка, расположенная на расстоянии 70 см от края арки находится в расстоянии от оси симметрии (в данном случаеот оси ординат) на $1{,}4 - 0{,}7 = 0{,}7$ (м). Чтобы найти высоту арки в этой точки, вычислим значения функции $y = -\frac{8}{7}x^2 + 2{,}24$ при $x = 0{,}7$:

$$y = -\frac{8}{7} \cdot 0{,}7^2 + 2{,}24 = 1{,}68 \text{ (м)}.$$

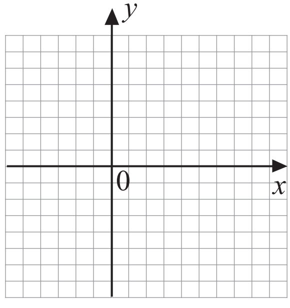
Рабочий лист № 7

Имя__________ Фамилия__________ **Число_________**

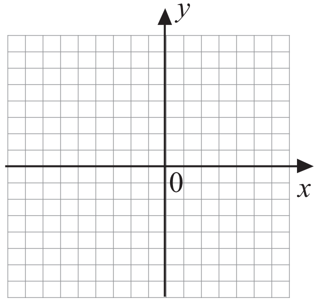
● *Пользуясь графиком функции $y = |x|$, строит графики функции $y = 2|x|$, $y = |x + 2|$ və $y = -|x + 2|$.*

Постройте графики функций с модулем

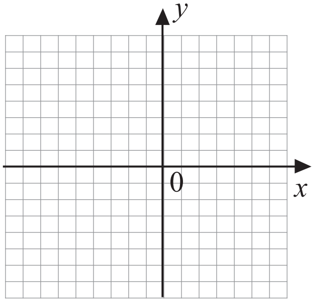
$f(x) = |x - 3|$



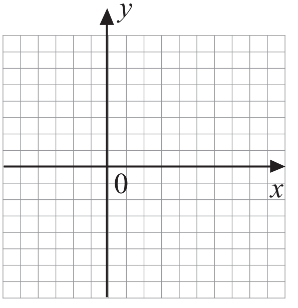
$f(x) = |x + 2|$



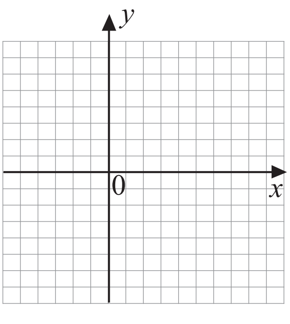
$f(x) = |x + 3|$



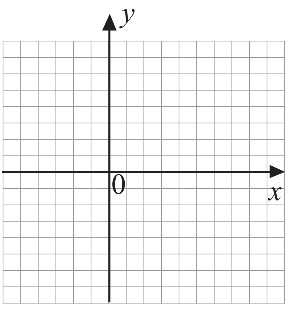
$f(x) = |x - 4|$



$f(x) = |3 - x|$



$f(x) = |4 - x|$



Рабочий лист № 8

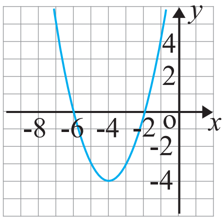
Имя__________ **Фамилия**__________ **Число**_________

• Пользуясь графиком функции $y = x^2$, $y = a(x - m)^2$, строит графики функции $y = ax^2 + n$ и $y = a(x - m)^2 + n$.

1. Какая из функций не является квадратичной?
   a) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 7$
   b) $f(x) = (x - 3)(2x + 5)$
   c) $f(x) = 5x^2 - 20$
   d) $f(x) = 3(x - 9) + 6$

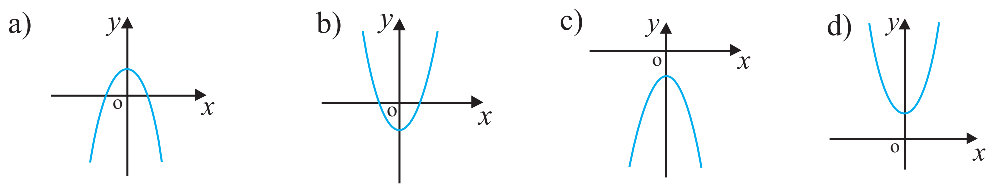
2. Найдите множество значений функции $y = -6\ (x - 6)^2 + 6$.
   a) $(-\infty; 6]$
   b) $[6; +\infty)$
   c) $(-\infty; -6]$
   d) $[-6; +\infty)$

3. Какая из функций соответствует графику?
   a) $y = (x + 4)^2 + 4$
   b) $y = (x - 4)^2 + 4$
   c) $y = (x + 4)^2 - 4$
   d) $y = (x - 4)^2 - 4$

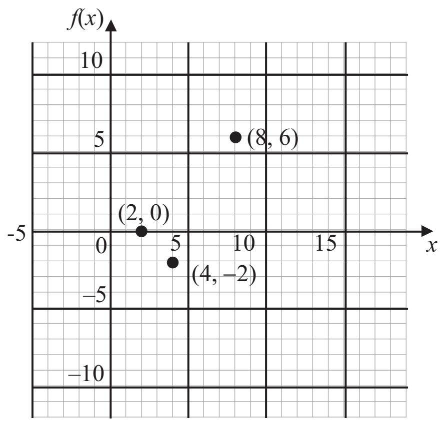


4. Какой из квадратичных функций эквивалентна функция $y = \ x^2 - 4x - 5$?
   a) $y = (x - 2)^2 - 1$
   b) $y = (x - 2)^2 - 9$
   c) $y = (x - 1)^2 - 4$
   d) $y = (x - 1)^2 - 6$

5. Выберите график, соответствующий функции. $y = 1 + ax^2$ и $a < 0$



6. При каких значениях a и q парабола $y = a(x - p)^2 + q$ не пересекает ось абсцисс?
   a) $a > 0$ и $q > 0$
   b) $a < 0$ и $q > 0$
   c) $a > 0$ и $q = 0$
   d) $a < 0$ и $q = 0$



7. Точка (4; –2) является вершиной квадратичной функции. Точки (8; 6) и (2; 0) лежат на графике функции. Дополните график, написав координаты еще двух точек, принадлежащих графику.

Таблица критерий суммативного оценивания по разделу 3

№	Критерии	Замечания
1	Строит график квадратичной функции составлением таблицы множества значений.	
2	График квадратичной функции строит пользуясь графиком функции $y = x^2$	
3	Строит графики квадратичный функций вида $y = a(x - m)^2 + n$ и $y = a(x - p)(x - q)$	
4	Определяет нули функции.	
5	Решает задачи применяя квадратичную функцию	
6	Строит график функции $y = \|x\|$.	
7	Строит график функции вида $y = a\|x - m\| + n$	
8	Строит и исследует график квадратичной функции соответствующий общему виду $y = ax^2 + bx + c$	
9	Строит график функции $y = x^3$.	

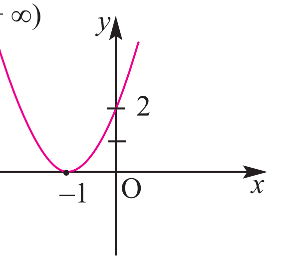
Урок 49. Задания суммативного оценивания по разделу 3

1. Найдите b, если парабола $y = 2x^2 + 6x - 3$ проходит через точку A $(1; b)$.

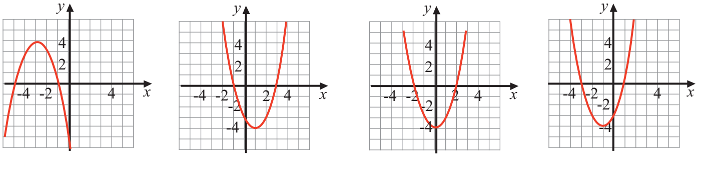
2. Дана функция $f(x) = x^2 + px + q$. Если $f(1) = -1$, то найдите сумму $p + q$.
A) – 2 B) 2 C) 0 D) 1

3. Найдите множество значений функции $y = x^2 - 4x + 6$.
A) $[0 ; +\infty)$ B) $[2 ; +\infty)$ C) $[1 ; +\infty)$ D) $[6 ; +\infty)$

4. Укажите уравнение параболы данной на рисунке.
A) $y = (x + 1)^2 + 2$ B) $y = (x + 1)(x - 2)$
C) $y = (x + 1)^2$ D) $y = 2(x + 1)^2$



5. Укажите график функций $y = (x - 1)^2 - 4$.



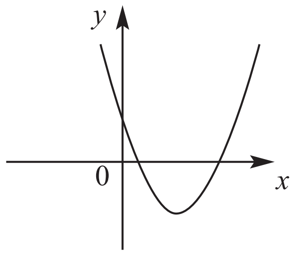
6. Точка A (2; 3) лежит на параболе $y = x^2 + 2x + c$. Покажите точку вершины этой параболы.
A) $(-1; 6)$ B) $(2 ; 4)$ C) $(-1; -6)$ D) $(-2 ; 3)$

7. Абсцисса точки вершины параболы $y = -x^2 + bx + 6$ равна 2, найдите b.
A) – 4 B) 4 C) 2 D) –2

8. В какой точке пересекает парабола $y = (x-2)(x+3)$ ось Oy ?

9. Постройте график функции $y = |x-1|$.

10. По графику функции $y = ax^2 + bx + c$ данному на рисунке определите знаки коэффициентов a, b, c .



11. Зависимость расстояния от поверхности земли h (в м.) мяча, брошенного вверх с начальной скоростью $v_0 = 24$ м/сек, от времени полета определяется формулой: $h = 24t - 5t^2$.
a) Найдите наибольшую высоту, на которую поднимается мяч.
b) Через сколько секунд после броска мяч упадет на землю?

12. Определите соответсвие..

1) $y = x^2 + 4$
2) $y = 4 - x^2$
3) $y = (x-1)^2 + 2$

A) Наименьшое значение равно 4
B) Наибольшее значение равно 4
C) Наименьшее значение равно = 2
D) Наименьшее значение принимает при $x = 1$.

13. При каком значении c наименьшее значение функции $y = x^2 - 2x + c$ равно 5?

14. Даны точки пересечения параболы с осями координат: (–1; 0), (3; 0), (0; –3). Найдите координаты вершины параболы.

15. График какой квадратичной функции получится, если параболу $y = x^2$ переместить на 2 единицы в горизонтальном направлении в право и в вертикальном направлении на 3 единицы вниз?

16. Дан прямоугольник со сторонами 3 см и 5 см. Если большую сторону уменьшить на a см, а меньшую увеличить на a см, то при каком значении a площадь полученного прямоугольника будет наибольшей?

17. На одной координатной плоскости постройте графики фукций $y = x^3$ и $y = 2 - x$. Укажите точки персечений графиков.

18. Фермер намеревается охватить наибольшую возможную площадь в форме прямоугольника, одна из сторон которого граничит с берегом реки, использовав материал для забора длиной 80 м для оставшихся трех сторон. Как он может определить размеры прямоугольника?

4 Уравнение окружности

Таблица планирования 4-го раздела

Стандарты содержания	Урок №	Тема	Поурочные часы	Учебник стр.
3.1.3. Применяет свойства касательных и секущих окружности. 3.2.3. Знает формулу расстояния между двумя данными точками, пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу. 4.2.1. Проверяет правильность результатов полученных при практических измерениях.	50- 53	Расстояние между двумя точками	4	77-81
	54-58	Уравнение окружности	5	82-89
	59-60	Площадь кругового сектора и сегмента	2	90-91
	61-62	Обобщающие задания	2	92-93
	63	Задания суммативного оценивания по разделу 4	1	
	Всего		14	

Образец поурочного плана, относящийся ко 4-му разделу

Уравнение окружности - 1-ый час. Учебник стр. 82-84.

Стандарты содержания. 3.2.3. Знает формулу расстояния между двумя точками, пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу.

Предполагаемое формирование навыков учеников: Ученик:
- Пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу.
- Пишет уравнение окружности по точке центра и точке на окружности;
- Пишет уравнение окружности по координатам крайних точек диаметра;
- Строит окружность по уравнению окружности;
- Данное уравнение приводит к уравнению окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;

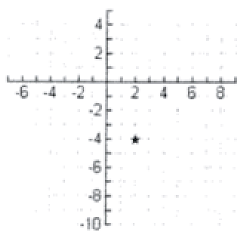
Мотивация. Какими точками вы пользуетесь, чтобы построить график заданной линейной функции вида $y=kx+b$? Выслушиваются мнения учеников. Определив координаты двух точек, например, точки пересечения с осями Ox и Oy можно построить график любой линейной функции. Какие точки по вашему мнения должны быть даны, чтобы в координатной плоскости можно было бы построить любую окружность? Слушаются мнения. Вместе с учениками исследуются обсуждения, что если известны координаты центра и координаты любой точки на окружности, то можно построить окружность. **3-4 мин.**

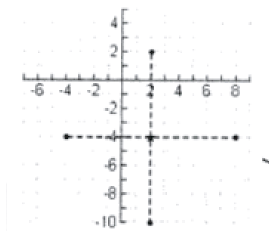
Обучение. По точке (0;0) и любой точке (x; y) применяя формулу расстояния между точками - обсуждениями вместе с учениками, определяется правило нахождения радиуса окружности. Уравнение окружности с центром в начале координат определяется как $x^2 + y^2 = r^2$. Построение окружности с центром в начале координат было показано на примере 1. Построение окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ с центром не в начале координат показано на нижеследующем примере. Обращается внимание навыкам нахождения центра и радиуса окружности заданной уравнением $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ и построению окружности. Пример $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 36$.
Обсуждение. Из записи $(x-2)$ получается, что абсцисса центра окружности равна 2, а из записи $(y+4)$ получается что ордината центра равна–4. Вероятность ошибок допущенных учениками в знаках координат велика и поэтому рекомендуют обратить внимание на эти моменты. Ответы учеников проверяются на нескольких примерах.

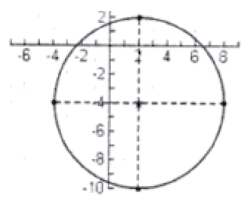
Отмечается центр окружности

Отмечаются 4 точки, которые находятся от центра на $\sqrt{36} = 6$ единиц направо, налево, наверх и вниз.

Рисуется окружность проходящая через эти 4 точки.





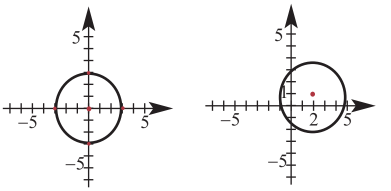


Рекомендуется выполнение этого задания в тетради каждым учеником. Обращается внимание ученикам, которые находятся под наблюдением. **7-8 мин**.

Рекомендуется выполнить в классе в качестве индивидуальной работы общеклассными обсуждениями - по одному пункту из заданий У.1, У.2, У.3, У.4, У.5, У.6 Остальные пункты могут быть заданы как домашнее задание. **6-7 мин.**

Обсуждения задания У.10. Какие формулы могут быть использованы при выполнении пункта а) другими словами, как можно составить уравнение окружности, если известны координаты конечных точек диаметра? Выслушиваются мнения. Ученики:
- Используя формулы координат середины отрезка $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ можно найти координаты центра окружности.
- Используя формулы расстояния между двумя точками можно найти радиус окружности $r = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$
- По координатам точки, лежащей на окружности (радиус известен) можно записать уравнение окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ **6-7 мин.**

Дифференцированный подход. Слабые ученики. Во время урока слабые ученики, которые под наблюдением, остаются в центре внимания и им задаются дополнительные вопросы. Например, данные на рисунке окружности имеют одинаковые радиусы, однако координаты центров различные. Изменятся ли от этого уравнения окружностей?



Работы в группах. Ученики делятся на группы. Каждому члену группы даются уравнения и таблица классификации уравнений как показано внизу. В каждом столбце одна пустая клетка, в которую ученики сами должны придумать и записать уравнение.

Уравнения:

1. $(x-2)^2+(y-1)^2=25$	**2.** $(x+2)^2+(y-1)^2-100=0$
3. $x^2+(y+1)^2=25$	**4.** $(y-1)^2+(x-2)^2=5$
5. $(x+2)^2+(y-1)^2=10$	**6.** $x^2+(y+1)^2=100$
7. $(x-2)^2+(y-1)^2+15=25$	**8.** $(x-2)^2+(1+y)^2=100$
9. $(y+1)^2+x^2=10$	**10.** $(x-2)^2+(y+1)^2=10$
11. $(x-2)^2+(y+1)^2+4=9$	**12.** $(y+1)^2+(x-2)^2=25$

	Центр (2; 1)	Центр (2; –1)	Центр (0; –1)	Центр (__; __)
Радиус $\sqrt{5}$				
Радиус $\sqrt{10}$				
Радиус 5				
Радиус 10				

Во время работы с группами обращается внимание на обмен информации между членами группы и группами. Проектором может быть показана информация нижеследующего содержания.

Об обмене информации

- свои ответы сравни с ответами ученика из своей группы
- если есть разница, то объясни свое решение и выслушай объяснение решения ученика.
- свою работу сравни с работой ученика из другой группы.
- если есть разница, то обсудите.

Оценивание. В течении всего урока ведется формативное оценивание путем наблюдения. Рабочий лист N1 может быть использован для формативного оценивания уровня знания. Остальные задания данные на странице 83 могут быть заданы как домашние задания.

Стандарты содержания

3.1.3. Применяет свойства касательных и секущих окружности.
3.2.3. Знает формулу расстояния между двумя точками, пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу.
4.2.1. Проверяет соответствие действительности полученных результатов при практических измерениях

Формирование навыков учеников

- *В одномерной (числовой оси) и двухмерной системах координат вычисляет расстояние между двумя точками.*
- *находит среднюю точку отрезка по данным координатам;*
- *Решает задачи на нахождение расстояния между точками;*
- *По разным данным определяет уравнения окружности;*
- *решает задачи с применением уравнения окружности;*
- *Проводит вычисления плана изображенного определенным масштабом, и размеры соответствующие данному масштабу приводит в соответствие с реальными жизненными размерами;*
- *Решает задачи на нахождения центра окружности в реальных ситуациях;*
- *Вычисляет площадь кругового сектора и сегмента .*

Математический словарь

- расстояние между двумя точками
- средняя точка отрезка
- серединный перпендикуляр отрезка
- уравнения окружности
- сектор
- сегмент

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы
Интернет-адреса

Урок 50-53. Учебник стр. 77-81 Расстояние между двумя точками. 4 часа.

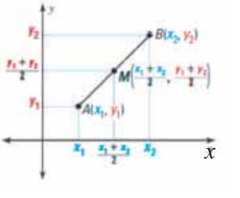
- *В одномерной (числовой оси) и двухмерной системах координат вычисляет расстояние между двумя точками.;*
- *находит среднюю точку отрезка по данным координатам;*
- *Решает задачи на нахождение расстояния между точками;*

Ученикам знакомы нахождение средней точки отрезка в одномерном и двумерном координатных системах. Еще раз рассматриваются задачи такого типа.

Средняя точка отрезка

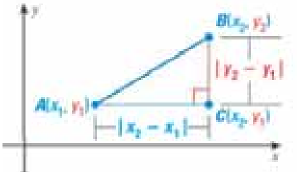
Точка M разделяет отрезок AB на два конгруэнтных отрезка: $AM \cong MB$, значит $AM = MB$
Прямая CD разделяет отрезок AB на две равные части .
$AM \cong MB$, значит $AM = MB$

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



Формула расстояния между двумя точками

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



! Рисуются картины, записываются формулы использованные при совместном обсуждении с учениками. Выполняются задания данные в учебнике. Многие задания охватывают реальные жизненные ситуации - охватывают информации, в которых отмечены направления и расстояния из определенной точки. Эти задания являются важными, с точки зрения - формирования пространственных представлений ученика. Выполняя задания, решаемые применением формулы расстояния между двумя точками обращается внимание нижеследующим навыкам:
- Точки размещаются на координатной плоскости, расстояние определяется по количеству клеток. Затем вычисляется с помощью формулы. Результаты сравниваются.
- Если во время вычислений используются числа, которые не являются полным квадратом, то объявляется заранее с какой точностью ведется вычисление.
- Обращается внимание на выполнение заданий выполненных на участках с определенным масштабом с применением формулы расстояния между двумя точками.

? Решения некоторых заданий, данных в учебнике.

У.5 2) Если $(x\ ;\ y)$ - координаты конца T отрезка RT, то по формулам координат середины отрезка.

$$\begin{cases} x_S = \dfrac{x_R + x_T}{2} \\ y_S = \dfrac{y_R + y_T}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 = \dfrac{2+x}{2} \\ 2 = \dfrac{6+y}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Вычислив расстояния между точками R (2 ; 6) и T (– 4 ; – 2) найдем длину отрезка RT

$$RT = \sqrt{(-4-2)^2 + (-2-6)^2} = 10$$

У.7. Найдем координаты середины стороны AB:

$$x_m = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \qquad y_m = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4+10}{2} = 7$$

Длина отрезка CM : $CM = \sqrt{(7-3)^2 + (4-7)^2} = 5$

У.12. а) A (1 ; 2) , B (2 ; 3), C (5 ; 0)

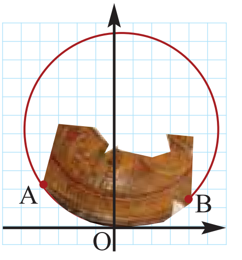
$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$ $\qquad BC = \sqrt{(5-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{18}$

$AC = \sqrt{(5-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20}$ $\qquad (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{18})^2 = (\sqrt{20})^2$

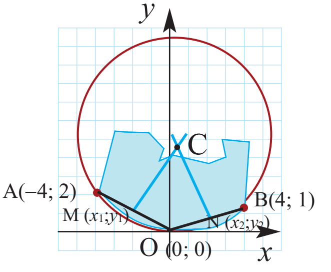
Из равентсва $AB^2 + BC^2 = AC^2$ и по теореме обратной теореме Пифагора можно утверждать, что ΔABC прямоугольный.

У.21. Будучи обобщающим заданием, небольшой проект по определению уравнения прямой, углового коэффициента, определения перпендикулярности прямых по угловому коэффициенту, определение центра окружности требует применение широких математических навыков. Составление учениками математического словаря служит формированию у учеников таких когнитивных навыков как определение, систематизирование и представление информации. Сначала составляется список этого словаря. Рекомендуется наряду с такими простыми понятиями элементов окружности как радиус, центр, диаметр расширить словарь, записав также использованные теоремы. Для составления словаря с помощью ключевых слов в GOOGLE, “MATH Glossary”, MATH DEFİNİTİON and EXAMPLE можно выбрать веблинки. Эти задания наряду с увеличением запаса слов английского языка, также развивает навыки работы ученика с этими источниками.

Для примера было отмечено несколько линков:
http://www.glencoe.com/apps/eGlossary612/landing.php
http://www.mathwords.com/d.htm
http://www.ditutor.com/math_dictionary.html



1. Кусок тарелки помещается в координатную систему и на круговой части отмечаются три точки A, O, B.
2. Определяется диаметр окружности.
Для этого должен быть определен координаты центра окружности:



a) Проводятся серединние перпендикуляры отрезков AO и OB.
b) Определяются угловые коэффициенты прямых содержащих отрезки OA и OB.

♦ Уравнение прямой, содержащуй серединный перпендикуляр отрезка OA:

• Координаты средней точки M :

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-4+0}{2};\frac{2+0}{2}\right)=(-2;1)$$

• Определяется угловой коэффициент k прямой содержашей в себе отрезок AO.

$$k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-2}{0-(-4)}=-\frac{1}{2}$$

Так как серединный перпендикуляр и эта прямая взаимно перпендикулярны, то угловой коэффициент его будет $k = 2$.

• Уравнение прямой $y - 1 = 2\,(x-(-2))$; $y = 2x + 5$

♦ Уравнение прямой содержащей серединный перпендикуляр отрезка OB:

• Координаты средней точки N :

$$N\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{4+0}{2};\frac{1+0}{2}\right)=\left(2;\frac{1}{2}\right)$$

Определяется угловой коэффициент прямой, проходящей через OB.

$$k_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-1}{0-4}=\frac{1}{4}$$

Угловой коэффициент прямой содержащей серединний перпендикуляр равен $k = -4$.

• Уравнение прямой $y-\frac{1}{2}=4\,(x-2)$; $y = 4x - 7{,}5$

Центр окружности находится на обеих прямых. Значит, решением системы уравнений $\begin{cases} y = 2x+5 \\ y = -4x+8{,}5 \end{cases}$ будет координаты этого центра.

$$x=\frac{7}{12};\quad y=\frac{37}{6}\qquad C\left(\frac{7}{12};\frac{37}{6}\right)$$

♦ Расстоянием от точки C до каждой отмеченной точке равен радиусу этой окружности :

$$\sqrt{\left(0-\frac{7}{12}\right)^2+\left(0-\frac{37}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{5525}{144}}\approx 6{,}2\ (\text{см})$$

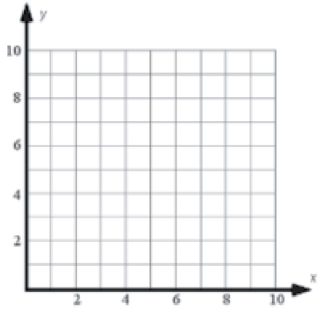
Диаметр тарелки равен приблизительно 12 см.

Рабочий лист № 1

Имя__________ Фамилия__________ Дата__________

● *В одномерной (числовой оси) и двухмерной ситемах координат вычисляет расстояние между двумя точками.*

1) Расположите точки (2; 5) и (8; 5) в координатной плоскости. Вычислите расстояние между этими точками.

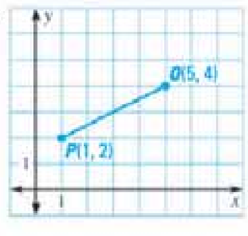


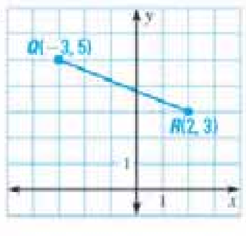
2) Проверьте являются ли координаты данных точек вершинами прямоугольного треугольника.

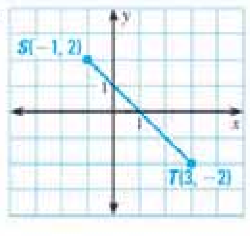
1) (4; 0), (2; 1), (–1; –5)   2) (5; 4), (2; 1), (–3; 2)

3) (1; –5), (2; 3), (–3; 4)   4) (–1; 1), (–3; 3), (–7; –1)

3) Найдите расстояние между данными точками и координаты середины соответствующих отрезков.

a)


b)


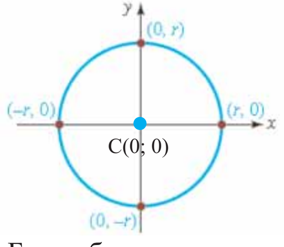
c)


4) Точка M - средняя точка отрезка AB. $AM = \frac{x}{4}$ и $AB = \frac{3x}{2} - 1$
Найдите длину отрезка MB .

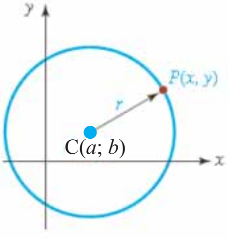
Урок 54-58. Учебник стр. 82-89. Уравнение окружности. 5 часов

- Пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу.
- Пишет уравнение окружности по координатам центра и точке на окружности;
- Пишет уравнение окружности по координатам конечных точек диаметра;
- Пишет уравнение окружности по координатам трех точек расположенных на окружности;
- Данное уравнение приводит к виду уравнения окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;
- По уравнению окружности строит окружность;
- По решению системы уравнений определяет взаимное расположение прямой и окружности: прямая касается окружности; пересекает окружность или ни одним не является.

Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r :
$x^2+y^2=r^2$



Уравнение окружности с центром в точке $(a;b)$ и радиусом r :
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$



Блок обучения и задания данные в учебнике , объясняются обсуждениями, выполняются данные задания.

Задания **У.17** - это задача охватывающая реальную ситуацию. Проблема данная и поставленная в условии задачи определяется учениками самостоятельно. Ведутся обсуждения вокруг таких вопросов как: “Чтобы решить проблему, геометрическим свойством какой фигуры можно воспользоваться?”

У.18. b) Напишем уравнение касательной к окружности $x^2+y^2=41$ в точке T (– 4; –5) :

Решение: 1) Центр окружности точка O (0; 0). Угловой коэффициент прямой содержащей радиус OT равен: $k_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{-5-0}{-4-0}=\dfrac{5}{4}$

Так как касательная перпендикулярна радиусу проведенному в точку касания, то угловой коэффициент касательной находится из отношения

$$k\cdot\frac{5}{4}=-1;\ k=-\frac{4}{5}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=-\dfrac{4}{5}$ и проходящей через точку T (– 4; – 5) будет:

$$y-(-5)=-\frac{4}{5}(x-(-4)),\ y=-\frac{4}{5}x-\frac{41}{5}$$

Ответ: Уравнение касательной к окружности в данной точке: $y=-\dfrac{4}{5}x-\dfrac{41}{5}$

У.19. Решение. а) Чтобы найти число общих точек окружности $x^2 + y^2 = 36$ и прямой $y = 6$, в уравнении $x^2 + y^2 = 36$ подставляем значение $y = 6$. Отсюда найдем $x = 0$.

То есть данная окружность имеет одну общую точку с прямой: (0; 6)
Так как прямая имеет с окружностью одну общую точку, то прямая $y = 6$ является касательной к окружности $x^2 + y^2 = 36$.

У.21. Решение. b) Напишем уравнение окружности с координатами конечных точек его диаметра (a; b) и (c; d). 1) Координаты центра окружности

$$x_m = \frac{a+c}{2} \qquad y_m = \frac{b+d}{2} \qquad M\left(\frac{a+c}{2};\ \frac{b+d}{2}\right)$$

2) Найдем радиус окружности.

$$R = \sqrt{\left(a - \frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{b+d}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-d}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{4}}$$

3) Уравнение окружности $\left(x - \frac{a+c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+d}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2 + (b-d)^2}{4}$

4) Напишем уравнение в нижеследующем виде:

$$\left(x - \frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+d}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-d}{2}\right)^2 = 0$$

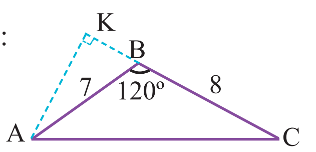
$$\left(x - \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\right)\left(x - \frac{a+c}{2} - \frac{a-c}{2}\right) + \left(y - \frac{b+d}{2} + \frac{b-d}{2}\right)\left(y - \frac{b+d}{2} - \frac{b-d}{2}\right) = 0$$

После упрощения получим: $(x - c)(x - a) + (y - d)(y - b) = 0$.

4-5-й час. Выполняется практическое задание данное на странице 79. Определения синуса, косинуса известные в 8-ом классе расширяются для тупого угла и доводятся до сведения, что синусы смежных углов равны, а косинусы - противоположные числа. Прослеживается выполнение каждым учеником исследовательского задания У.22.

? **У.27. 2) Решение.** а) $y = \sqrt{3} \cdot x + 1$. Здесь $k = \sqrt{3}$ и $\tan\theta = \sqrt{3}$, значит $\theta = 60^\circ$. Это означает, что угол между прямой линией $y = \sqrt{3} \cdot x + 1$ и осью абсцисс на верхней полуплоскости - 60°.

У.32. Решение. Проведем высоту из вершины A в ΔABC: $AK \perp CK$. Так как $\angle BAK = 30^\circ$, то $KB = \frac{AB}{2} = \frac{7}{2}$, тогда $KC = KB + BC = \frac{7}{2} + 8 = \frac{23}{2}$. Применив теорему Пифагора из ΔABK, находим $AK = \frac{7\sqrt{3}}{2}$. Из ΔAKC по теореме



Пифагора: $AC^2 = KC^2 + AK^2 = \left(\frac{23}{2}\right)^2 + \left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{529}{4} + \frac{147}{4} = 169$. Отсюда $AC = 13$.

По определению синуса острого угла из ΔAKC имеем: $\sin\angle C = \frac{AK}{AC} = \frac{7\sqrt{3}}{26}$

Рабочий лист № 2

Имя__________ **Фамилия**__________ **Дата**__________

● *Пишет уравнение окружности по координатам центра и радиусу.*
● *Пишет уравнение окружности по координатам центра и точке на окружности.*

1) По уравнениям определите центр и радиус окружности.

1) $x^2 + y^2 = 36$

2) $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 49$

3) $(x + 1)^2 + (y + 6)^2 = 16$

4) $(x + 3)^2 + (y - 11)^2 = 12$

2) По данным информациям напишите уравнение окружности.

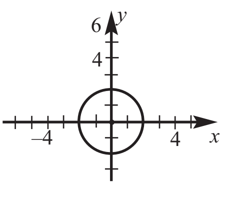
a) Центр: (13; −13), радиус: 4

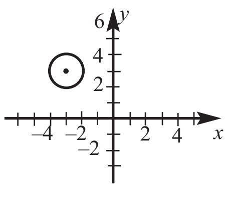
b) Центр: (−1; −5), радиус: $\sqrt{5}$

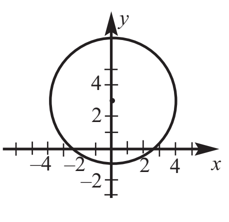
c) Центр: (−2; −3),
координаты точки на окружности (6; 4)

d) Центр: (2; −5),
координаты точки на окружности: (−7; −1)

3) Напишите уравнение окружности.







Рабочий лист № 3

Имя__________ Фамилия__________ Число__________

● *Данное уравнение приводит к уравнению окружности* $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

1) Напишите уравнение окружности в виде $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Отметьте центр и радиус.

a) $x^2+y^2+16x+40y-25=0$

Центр______ Радиус_____

b) $x^2-8x+y^2=33$

Центр______ Радиус_____

c) $x^2+y^2+14x-12y+4=0$

Центр______ Радиус_____

d) $y^2+2x+x^2=24y-120$

Центр______ Радиус_____

2) Уравнение соответствующее новому положению окружности, напишите в виде $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

a) $x^2+y^2+14x+12y+76=0$
Перемешен на 2 единицы вправо и на 4 единицы вниз.

b) $x^2+y^2-10x+20y+61=0$
Перемешен на 1 единицу влево и на 3 единицы вниз.

c) $x^2+y^2+14x-8y+29=0$
на 3 единицы перемешен вверх.

d) $4y+y^2=-28x-x^2-191$
перемешен на 4 единицы вниз.

Рабочий лист № 4

Имя__________ **Фамилия**__________ **Число**__________

● *Пишет уравнение окружности по координатам конечных точек диаметра;*

● *Пишет уравнение окружности по координатам трех точек расположенных на окружности.*

Напишите уравнения окружностей по информациям данным ниже.

a) Конечные точки диаметра (18; −13) и (4; −3)

b) Конечные точки диаметра (7; 7) и (12; 9)

c) Центр: (10, −14)
Уравнение касательной окружности: $x = 13$

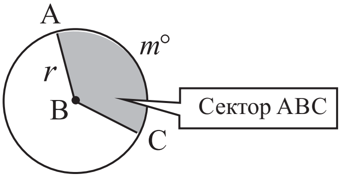
d) Центр: (−2; 12)
Уравнение касательной окружности: $x = -5$

e) Три точки расположенные на окружности:
P (–1; –2), Q (3; 6) и R (11; –2)

f) Три точки расположенные на окружности:
A (−4; 1), B (4; 9) и C (14; 1)

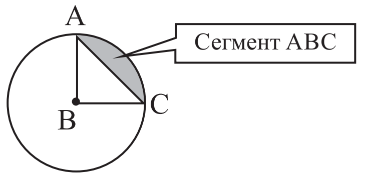
Урок 59-62. Учебник стр. 90-93. Площадь кругового сектора и сегмента. Обобщающие задания. 4 часа

- Вычисляет площади сектора и сегмента



Площадь сектора:

$$S_{ABC} = \frac{m}{360}\pi r^2$$



Площадь сегмента:

$$S_{\text{сегмент}ABC} = S_{\text{сектор}ABC} - S_{\Delta ABC}$$

Должно быть отмечено, что хорда делит круг на два сегмента. Вычисляя площадь сегмента соответствующего большой дуге - к площади соотвествующего сектора прибавляется площадь ΔABC. Степень тяжести заданий на вычисление площадей сектора и сегмента несколько велика. Задачи даны на рисунке с условием определения площади закрашенной части.
Рекомендуется провести устные обсуждения - воспользуясь вычислениями каких площадей можно найти закрашенную площадь?

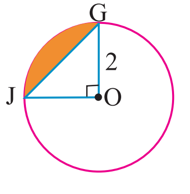
У.2. Решение. а) 1) Площадь сектора данного на рисунке равна $\frac{1}{4}$ площади круга.

$$S_{\text{сектор}} = \frac{1}{4} \cdot 2^2 \cdot \pi = \pi$$

2) $S_{\Delta GHJ} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$

3) $S_{\text{сегмент}} = S_{\text{сектор}} - S_{\Delta} = \pi - 2$

а)



У.7. Решение. а) Площадь закрашенной части на рисунке находится по формуле: $S = S_{\text{сектор}} + S_{\Delta GHJ}$

По данным, площадь сектора составляет $\frac{3}{4}$ часть целого круга.

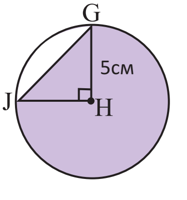
$S_{\text{сектор}} = \frac{3}{4}\pi \cdot 5^2 = \frac{75}{4}\pi$

ΔGHJ прямоугольный треугольник:

$S_{\Delta GHJ} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2} = 12{,}5$

Площадь закрашенной части:

$S' = \frac{75}{4}\pi + 12{,}5 \approx 71{,}4$ см^2

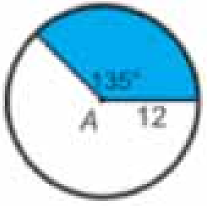


Рабочий лист № 6

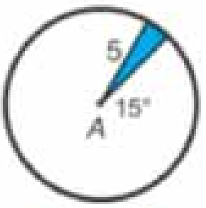
Имя__________ Фамилия__________ Дата__________

Найдите площадь закрашенной части.

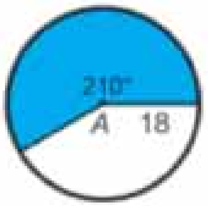
a)



b)

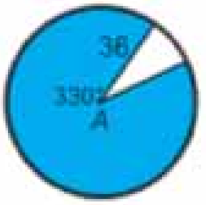


c)

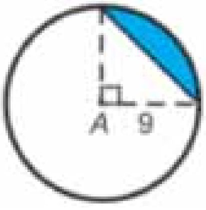


d)

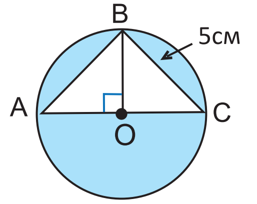
e)



f)



? Решение некоторых задач данных в учебнике



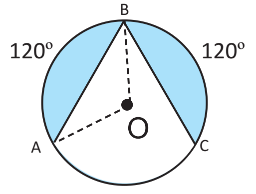
У.7. Решение. b) ΔABC - прямоугольный треугольник.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{5 \cdot 5}{2} = 12{,}5$

Так как из ΔAOC $r^2 + r^2 = 5^2$, $r^2 = 12{,}5$.

Площадь круга $S_d = 12{,}5\pi$, площадь закрашенной части

$S' = 12{,}5\pi - 12{,}5$ (см^2)



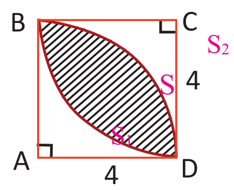
У.8. Решение. Так как по условию задачи длина окружности $C = 12\pi$ мм, $2\pi r = 12\pi,\ r = 6$ мм

Найдем площадь одного из закрашенных сегментов

$$S = \frac{1}{3} S_{круг} - S_{\Delta AOB} = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 120^{\circ} = 12\pi - 9\sqrt{3}$$

Площадь закрашенных сегментов: $S = 2 \cdot (12\pi - 9\sqrt{3})$ мм^2 $\approx 44{,}22$ мм^2

У.12. (стр. 93) Решение. Проведя обозначения как на рисунке. Примем во внимание что $90°$ составляет $\frac{1}{4}$ часть от $360°$.



$S_1 + S = \frac{1}{4}\pi \cdot 4^2 = 4\pi$

$S + S_2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 4^2 = 4\pi$

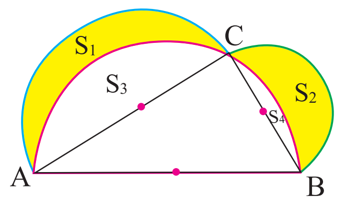
Сложив эти равенства получим:

$S + S_1 + S_2 + S = 8\pi$

Площадь квадрата по рисунку можно выразить, как $S_1 + S + S_2 = 4^2 = 16$.

Учитывая это равенство можем найти требуемую площадь:

$$S + 16 = 8\pi; \quad S = 8\pi - 16$$



У.13. (стр. 93) Решение. Проведем обозначения как на рисунке. По условии AC=8, BC=6, значит AB = 10. Чтобы найти сумму S_3 и S_4 мы должны вычест от площади полукруга (где гипетонуза AB является диаметром) площадь ΔABC.

$$S_3 + S_4 = \frac{1}{2}\pi \cdot 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 12{,}5\pi - 24$$

Чтобы найти S_1 надо вычесть от площади полукруга с диаметром AC площадь S_3, чтобы найти S_2 надо вычесть от площади полукруга с диаметром BC площадь S_4

Тогда : $S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 - S_3 + \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 - S_4 = 12{,}5\pi - (S_3 + S_4) = 24$

Рекомендуется сосредоточить внимание учеников на то, что сумма площади закращенных частей равна площади треугольника ABC. Зависимо от уровня класса или отдельных учеников можно задачу решить для прямоугольных треугольников с катетами a и b и обобщить результаты для задачи.

У.14. (стр.93) Решение. Вычислим площадь одной полки.

$S = \frac{3}{4}\pi \cdot 40^2 = 1200\pi$ см^2

Тогда, чтобы покрыть бумагой 2 полки, понадобится в 2 раза больше, то есть $2400\ \pi$ см^2, а значит приблизительно 7540 см^2 бумаги.

Таблица критерий суммативного оценивания по разделу 4

№	Критерии	Замечания
1.	В одномерной (числовой ось) и двухмерной системах координат вычисляет расстояние между двумя точками	
2.	Находит среднюю точку отрезка по данным координатам	
3.	Решает задачи на нахождение расстояния между двумя точками	
4.	Пишет уравнение окружности с центром в начале координат	
5.	Пишет уравнение окружности с центром в произвольной точке	
6.	Решает задачи с применением уравнения окружности	
7.	Проводит вычисления плана изображенного определенным масштабом, и размеры соответствующими данному масштабу приводит в соответствие с реальными жизненными размерами.	
8.	Вычисляет площади кругового сектора и сегмента	

Урок 63. Задания суммативного оценивания по разделу 4

1. Определите соответствие:

1) $x^2 + y^2 = 16$
2) $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 25$
3) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

A) диаметр равен 8 .
B) центр - точка (5; – 4).
C) центр - точка (1; 4) .
D) радиус равен 3 единицам.

2. Найдите радиус окружности данной уравнением $x^2 + y^2 - 12x = 0$

3. Найдите точку касания прямой $x + 2y = 0$ с окружностью $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 5$.

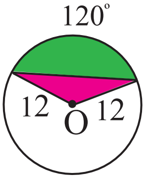
4. Найдите расстояния от начала координат до центра окружности $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$

5. Найдите длину медианы AM в ΔABC с координатами вершин A (3; 1) , B (3; 6) , C (– 5; 2)

6. Вычислите расстояние между точками (1; – 6) и B (7; 2) .

7. При каком значении m точки A (5; m) и B (3; 4) находятся на одинаковом расстоянии от начала координат.

8. По данным на рисунке вычислите площади закрашенных частей. O - центр окружности.



9. Вычислите площадь круга с конечными точками диаметра A (–2; 8) и B (4 ; –2).

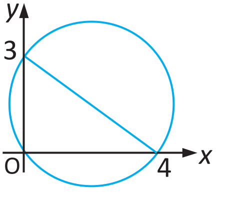
10. Точки A (2; 12) и B (6; 8) - конечные точки диаметра. Напишите уравнение окружности и найдите длину окружности.

11. Вычислите площадь треугольника с вершинами в точках A (3; 4), B (3; –4), C(– 2; – 4).

12. Найдите расстояние от начала координат до окружности
$x^2 - 6x + y^2 - 8y + 9 = 0$.

13. Радиус круга 4 см. Найдите центральный угол соответствующим сектору с площадью 6π см^2.

14. Окружность проходит через точки (0; 0), (0; 3), (4; 0)
a) Напишите уравнение окружности.
b) Выразите через π длину дуги, лежащей 1-й четверти координатной плоскости .
c) Выразите через π сумму площадей частей круга оставщийся на II и IVкоординатной четверти.



15. Окружность проходит через точку A(4; 4) и центр находится в точке M(2; 2).
a) Напишите уравнение окружности.
b) Найдите точки пересечения окружности с координатными осями.
c) Найдите площадь сектора центральным углом 90°.

16. Землетрясение ощущалось не более чем в 90 км от эпицентра. Если местность, где вы проживаете, расположено в 60 км к востоку и 70 км к северу от эпицентра землетрясения, могли бы почувствовать вы это землетрясение?

5 Уравнения. Системы уравнений

Таблица планирования уроков по 5-му разделу

<table>
<tr><th>Стандарт содержания</th><th>Урок №</th><th>Тема</th><th>Число ч.</th><th>Учебник стр.</th></tr>
<tr><td rowspan="10">2.1.1. Составляет уравнение с одной переменной или систему уравнений с двумя переменными, соответственно реальным жизненным ситуациям.
2.1.2. Записывает и решает данное предложение в виде системы двух линейных неравенств с одной переменной.
2.2.1. Выполняет тождественные преобразования над алгебраическими выражениями.
2.2.2. Решает систему уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение первой степени, а другое второй степени.</td><td>64-65</td><td>Уравнения высших степеней</td><td>2</td><td>94-96</td></tr>
<tr><td>66-68</td><td>Рациональные уравнения и решение задач с их применением.</td><td>3</td><td>97- 99</td></tr>
<tr><td>69-70</td><td>Уравнения с модулем</td><td>2</td><td>100-103</td></tr>
<tr><td>71-72</td><td>Иррациональные уравнения</td><td>2</td><td>103-105</td></tr>
<tr><td>73-77</td><td>Системы уравнений</td><td>5</td><td>106-113</td></tr>
<tr><td>78-79</td><td>Решение задач, пириводящее к системе уравнений</td><td>2</td><td>114-115</td></tr>
<tr><td>80-81</td><td>Обобщающие задания</td><td>2</td><td>116-117</td></tr>
<tr><td>82</td><td>Задания суммативного оценивания по разделу 5</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td>83</td><td>Полугодовые задания суммативного оценивания</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Всего</td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

Стандарты содержания

2.1.1. Составляет уравнение с одной переменной или систему уравнений с двумя переменными, соответственно реальным жизненным ситуациям.
2.1.2. Записывает и решает данное предложение в виде системы двух линейных неравенств с одной переменной.
2.2.1. Выполняет тождественные преобразования над алгебраическими выражениями.
2.2.2. Решает систему уравнений с двумя переменными, в которой одно уравнение первой степени, а другое второй степени.

Формирование ученических навыков

- *решает разными способами уравнения высших степеней;*
- *решает рациональные уравнения;*
- *решает уравнения с переменными под знаком модуля*
- *решает иррациональные уравнения;*
- *разными способами решает систему, в которой одно уравнение первой, а другое второй степени.*
- *решает задачи составлением систем уравнений.*

Словарь

уравнения высших степеней, рациональные уравнения, уравнения с модулем, иррачионалные уравнения, система уравнений

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы
https://mathway.com/graph
http://www.meta-calculator.com/online, https://www.desmos.com

Сгруппировав по нижеследующим направлениям рассмотрены различные уравнения и системы уравнений.
Решение уравнений высших степеней.
- Способ разложения на множители
- Уравнения, сводящиеся к квадратным.

Рациональные уравнения.
Уравнения с переменной под знаком модуля.
Системы уравнений.
- Система уравнений, в которой одно уравнение первой, а другое второй степени
- Система уравнений, в которой оба уравнения второй степени.

Урок 64-65. Учебник стр. 94-96. Уравнения высших степеней. 2 часа.

Сначала рассматривается решение уравнений высших степеней способом разложения на множители и способом сведения к квадратному, введением новой переменной.
Ученики выполняют задания применяя навыки разложения многочленов на множители способом группировки.

? Методические рекомендации по выполнению некоторых заданий.

Способ разложения на множители.
В учебнике по каждой теме приведено достаточное количество примеров и задач. Рекомендуется решать примеры заданные в достаточном количестве в виде работы в группах.
Например задания **У.2** или **У.3** можно выполнить четырьмя группами. Всем группам задаются одинаковые примеры, например, уравнения **У.2**. Члены группы делят их между собой. Затем, каждая группа записывает на доске полученные ответы. Ответы проверяются.

Выявляются ошибки. Цель такой организации урока позволяет формированию организации работы учениками; творческих, познавательных навыков, таких как систематизирование и организация информации; социальных навыков работы в коллективе. Поэтому рекомендуется, чтобы в группах ученики самостоятельно организовали работу. При решении уравнений разложением на множители доводится до сведений, что в основном используются нижеследующие преобразования.

Вынесение общего множителя за скобки:	$6x^2 + 15x = 3x(2x + 5)$
Выделение полного квадрата из квадратного трёхчлена:	$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$
Применение формулы разности квадратов:	$4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$
Применение формулы суммы кубов:	$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
Применение формулы разности кубов:	$8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
Разложение квадратного трехчлена на множители:	$2x^2 - 5x - 12 = (2x + 3)(x - 4)$

Заданиями данными на рабочем листе N1 эти навыки проверяются и закрепляются.

До того как перейти к письменному решению уравнения можно сначала провести устное обсуждение. Как понимаете требование “Действительный корень” уравнения? Может ли быть корень этого уравнения иррациональным числом, например, таким числом как $3\sqrt{2}$?

Вызывающий ученик отвечает (ученик, который под наблюдением), (проверяется навык узнавания действительных чисел). А может ли быть под знаком корня отрицательное число? Выслушиваются мнения учеников. Проводятся рассуждения для случаев с четным и нечетным показателем степени корня.

У.6. Один из кореней уравнения $x^3 + ax^2 - 5x + 6 = 0$, равен 3. Найдите a и решите уравнение.

Решение. Так как $x = 3$ корень уравнения, то

$3^3 + a \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$

$9a + 27 - 15 + 6 = 0 \Rightarrow 9a + 18 = 0 \Rightarrow a = -2$

Так как $a = -2$, то уравнение запишем и решим следующим образом :

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 2x + 6 = 0 \Rightarrow$

$x^2(x - 3) + x(x - 3) - 2(x - 3) = 0 \Rightarrow (x - 3)(x^2 + x - 2) = 0$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -2 ; x = 1$

В некоторых рабочих листах степень тяжести увеличена и даны задания охватывающие когнитивные навыки. В рабочем листе N2 наряду с решением несколько сложных рациональных уравнений, требуется еще классифицировать корни во множестве действительных чисел.

Обсуждается вапрос “как легче проверять, что число 8 не является корнем уравнения $x^5 - 3x^4 + x = 15$” и делается вывод:
если уравнение с целыми коэффициентами имеет целые корни, то эти корни должны быть среди делителей свободного члена.

У.7. Найдите нули функции:
Значения аргумента, при которых функция равна нулю, называются нулями функции $f(x) = 0$.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 16x - 80 = 0$. Сгруппировав члены в левой части
$x^2(x-5) + 16(x-5) = 0$ və $(x-5)(x^2+16) = 0 \Rightarrow$
$x^2 + 16 > 0$ и $x - 5 = 0$, получим $x = 5$.

c) $f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$
$x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18 = 0$ $\quad x^4 - x^3 + 2x^3 - 2x^2 - 9x^2 + 9x - 18x + 18 = 0$
$x^3(x-1) + 2x^2(x-1) - 9x(x-1) - 18(x-1) = 0$ $\quad (x-1)(x^3 + 2x^2 - 9x - 18) = 0$
$x - 1 = 0 \quad x = 1$
$x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0 \quad x^2(x+2) - 9(x+2) = 0 \quad (x^2 - 9)(x+2) = 0$
$x = -2 \quad x = 3 \quad x = -3$ Нулями данной функции являются: $-3; -2; 1; 3$.

Введение нового переменного. В этом способе в центре внимания остается в основном применение свойств степеней.

Могут быть заданы задания как показано ниже, для диагностического оценивания:

$x^6 = (x^3)^{\blacksquare}$ $\qquad x^{\frac{1}{2}} = (x^{\blacksquare})^2$ $\qquad x^8 = (x^{\blacksquare})^2$ $\qquad x^4 = (x^{\blacksquare})^2$

Возможность приведения уравнений высших степеней к квадратным можно определить рассмотрев соответствующий многочлен.

1-я группа

a) $x^4 - 10x^2 + 24 = 0$ $\qquad$ b) $3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ $\qquad$ c) $2x^4 - 5x^2 - 12 = 0$
d) $x^6 + 10x^3 - 8 = 0$ $\qquad$ e) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

2-я группа

a) $(2x+5)^2 - (2x+5) - 6 = 0$ $\qquad$ b) $2(s+1)^2 - 5(s+1) = 3$
c) $3(1-y)^2 + 5(1-y) + 2 = 0$

3-я группа

a) $x - 4\sqrt{x} = 0$ $\qquad$ b) $x - 8\sqrt{x} = 0$ $\qquad$ c) $x + \sqrt{x} = 20$
d) $t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{1}{4}} + 1 = 0$ $\qquad$ e) $z^{1/2} - 4z^{1/4} + 4 = 0$

4-я группа

a) $\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1} = 12$ $\qquad$ b) $3x^{-2} - 7x^{-1} - 6 = 0$ $\qquad$ c) $2x^{-2} - 3x^{-1} - 4 = 0$

Указанные уравнения - это уравнения приводящиеся к квадратным. Однако здесь есть многочлены содержащие степень с дробным показателем, иррациональные выражения. Цель заключается в том, что ученик рассматривая члены многочлена проверяет диагностические навыки применения свойств степеней. Ведется учетный опрос: **Какую замену нужно произвести, чтобы полученное уравнение с новой переменной было квадратным?**

У.13. c) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) = 5$

Решение. Сделав замену: $x^2 + 3x = t$, получим

$(t + 1)(t - 3) = 5 \qquad t^2 - 3t + t - 3 = 5$

$t^2 - 2t - 8 = 0 \qquad (t - 4)(t + 2) = 0 \qquad t_1 = 4 \qquad t_2 = -2$

Подставив в замену, получим $x^2 + 3x = 4$ или же $x^2 + 3x = -2$. Отсюда

$x^2 + 3x - 4 = 0 \qquad (x + 4)(x - 1) = 0 \qquad x = -4 \quad x = 1$

$x^2 + 3x + 2 = 0 \qquad (x + 1)(x + 2) = 0 \qquad x = -1 \quad x = -2$

Ответ: $\{-4; -2; -1; 1\}$

У.13. e) $(x^2 - 3)(x^2 + 3) + x^2 - 3 = 0$

Решение. Упростив уравнение можно привести к биквадратному уравнению $x^4 + x^2 - 12 = 0$ или же вынося множитель $x^2 - 3$ за скобку можно привести к условию равенства произведения нулю.

$(x^2 - 3)(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x^2 + 4 \neq 0$

$x^2 - 3 = 0,\ x^2 = 3,\ x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

Ответ: $\{\pm\sqrt{3}\}$

Рабочий лист № 1

Имя______ Фамилия_______ **Число_____**

- *Разлагает многочлены на множители.*

Разложите на множители.

$x^3 - 8 =$	$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 =$
$x^3 + 64 =$	$3x^3 - 6x^2 + x - 2 =$
$27x^3 + 216 =$	$10x^3 + 20x^2 + x + 2 =$
$32x^3 - 4 =$	$2x^3 - 5x^2 + 18x - 45 =$
$81x^4 - 256 =$	$-18x^3 + 2x^2 + 27x - 3 =$
$81 - 16x^4 =$	$8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 =$
$3x^4 - 24x =$	$x^4 - 3x^2 + 2 =$
$32x^6 - 2x^2 =$	$4x^4 - 5x^2 - 9 =$

Рабочий лист № 2

Имя______ Фамилия_______ **Число_____**

● *Разлагает на множители многочлены высших степеней. Классифицирует корни во множестве действительных чисел.*

1) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x = 0$

Рациональный корень:

Иррационалный корень:

2) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$

Рациональный корень:

Иррационалный корень:

3) $x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0$

Рациональный корень:

Иррационалный корень:

4) $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 0$

Рациональный корень:

Иррационалный корень:

5) $x^5 - x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 9x + 9= 0$

Рациональный корень:

Иррационалный корень:

6) $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2 = 0$

Рациональный корень:

Иррационалный корень:

Урок 66-68. Учебник стр. 97-99.

Рациональные уравнения и решение задач с их применением. 3 часа

С решением рациональных уравнений ученики знакомы с 8-го класса. На поурочных часах выделенных для этой темы запланировано закрепить эти навыки и приобрести определенные привычки, а также углубить навыки решения задач с помощью построения рационального уравнения.

- Решает рациональные уравнения и определяет посторонние корни;
- В уравнениях с двумя и более переменными находит требуемые переменные.
- Решает задачи, построив рациональные уравнения.

В данном уравнении определяя ОДЗ среди найденных решений определяет посторонние корни. Например, решая уравнение $\frac{x+5}{x-4}+3=\frac{2x+1}{x-4}$ для переменной находится значение $x = 4$. Однако рациональное выражение входящее в уравнение не имеет смысла при $x = 4$. Значит решением этого уравнения будет пустое множество, $\varnothing$.

Рекомендуется изучать интегративно навыки решения уравнений с двумя переменными с уроками физики. Дается задание.

Напишите 5 формул, выученные до сих пор из физики. Переменные в этих формулах, по очереди выразите одну через другую.

Решения некоторых заданий данных в учебнике.

У.5. Найдите коэффициент k из тождества.

$$\frac{x^2+kx-3}{x^2+5x+6}=\frac{x-1}{x+2}$$

Решение. Учитывая эквивалентность рациональных выражений найдем коэффициент k. Сначала найдем область определения рациональных выражений. Так как область определения рациональных выражений будут все действительные числа, кроме нулей знаменателя, то из уравнений $x^2 + 5x + 6 = 0$, $x + 2 = 0$ получим $x = -2$, $x = -3$. А при этих значениях рациональные выражения не имеют смысла, поэтому поставив условие $x \neq -2$ и $x \neq -3$ приведем знаменатель дроби $\frac{x-1}{x+2}$ к виду $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$.

То есть, числитель и знаменатель дроби $\frac{x-1}{x+2}$ умножим на $(x + 3)$. Тогда

$$\frac{x^2+kx-3}{x^2+5x+6}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$$

Для равенства дробей с одинаковыми знаменателями должны быть равны их числители: $x^2 + kx - 3 = x^2 + 2x - 3$. Отсюда $x^2 + kx - 3 - x^2 - 2x + 3 = 0$, $kx - 2x = 0$ $(k - 2)x = 0$. Для того, чтобы последнее равенство было верным при всех допустимых значениях переменной, должно быть $k = 2$

У.6. Из 20 проведенных игр команда выиграла 12. Сколько игр подряд должна выиграть команда в последующих играх, чтобы выигранные игры составляли 80% всех игр?

Решение. Обозначим через x число подряд выигранных командой игр после 12-ой. Тогда число выигранных игр будет $12 + x$, а число всех игр $20 + x$. По условию задачи получим:

$$\frac{12 + x}{20 + x} = 0{,}8. \text{ Отсюда:}$$

$$0{,}8(20 + x) = 12 + x \Rightarrow 16 + 0{,}8x = 12 + x \Rightarrow$$

$$0{,}2\,x = 4 \text{ и } x = \frac{4}{0{,}2} = 20$$

Значит, команда должна выиграть подряд 20 игр.

У.7. Если к первому из 2-х последовательных чисел прибавить 6, а из второго вычесть 2, то частное полученных чисел будет $\frac{6}{5}$. Найдите эти числа.

Решение. Последовательные числа обозначим через x и $x + 1$. Тогда согласно условию задачи:

$$\frac{x + 6}{x + 1 - 2} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{x + 6}{x - 1} = \frac{6}{5}$$

$$5(x + 6) = 6(x - 1) \Rightarrow 5x + 30 = 6x - 6 \Rightarrow x = 36$$

Значит данные последовательные числа 36 и 37.

В пособии даны рабочие листы по различным степеням сложности рациональных уравнений.

У.9. Работая вместе Рагим и Джамиль скосят всю траву с поля за 2 часа. Джамиль, работая один может выполнить эту работу на 3 часа быстрее, чем Рагим. За сколько часов смог бы скосить все поле каждый из них ?

Решение. Если Рагим скосит один все поле за x часов, то Джамиль выполнит эту работу за $x - 3$. Рагим за 1 час выполнит $\frac{1}{x}$ часть работы, а Джамиль $\frac{1}{x - 3}$ часть работы.

Работая вместе за 1 час они выполнят: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 3}$ часть работы.

Так как работая вместе они выполнят работу за 2 часа, то за 1 час они выполнят $\frac{1}{2}$ часть работы. Значит:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x - 3 + x}{x\,(x - 3)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(2x - 3) = x\,(x - 3) \Rightarrow 4x - 6 = x^2 - 3x$$

$x^2 - 7x + 6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = 1$. $x = 1$ не удовлетворяет условию задачи. Значит, Рагим скосит поле за 6 часов, а Джамиль за 3 часа.

У.10. Если число $\frac{1}{x}$ среднее арифметическое чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$, тогда число x называется средним гармоническим чисел a и b.

a) Выразите это мнение в виде рационального равенства и найдите x.

b) Среднее гармоническое двух чисел равно 6, а разность 8-ми. Найдите эти числа.

Решение. $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$; $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{ab}$, а отсюда $x = \frac{2ab}{a+b}$

Это равенство определяет среднее гармоническое чисел a и b.

b) $\frac{2ab}{a+b} = 6$ $a - b = 8$ Отсюда получим:

$$a = b + 8 \text{ и } \frac{2(b+8) \cdot b}{b+8+b} = 6$$

$2a(b+8) = 6 \cdot (2b+8) \Rightarrow b^2 + 8b = 6b + 24 \Rightarrow b^2 + 2b - 24 = 0$

Корни уравнения $b_1 = -6$, $b_2 = 4$. По условию $a > 0$, $b > 0$ поэтому $b = -6$ не может быть. Значит, $b = 4$. Тогда $a = 12$. Ответ: Числа 4 и 12 .

У.11. Бассейн может опорожняться одновременно двумя трубами разного диаметра за 3 часа. Труба с меньшим диаметром опорожняет бассейн на 8 часов позже, чем труба с большим диаметром. За сколько часов опорожнит бассейн каждая труба в отдельности?

Решение: Если труба с большим диаметром опорожнит бассейн за x часов, тогда труба с меньшим диаметром - за $x + 8$ часов. За 1 час трубы опорожняют соответственно $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x+6}$ часть, работая вместе $\frac{1}{3}$ часть бассейна. Поэтому:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+8} = \frac{1}{3}. \text{ Отсюда } \quad \frac{x+8+x}{x(x+8)} = \frac{1}{3}$$

$$3(2x+8) = x(x+8) \qquad 6x + 24 = x^2 + 8x, \ x^2 + 2x - 24 = 0$$

$x_1 = 4$, $x_2 = -6$. $x = -6$ не соответствует условию задачи.

Большая труба опорожняет бассейн за 4 часов, а меньшая за $4 + 6 = 12$ часов.

У.12. Решение: a) По результатам 6-ти недель средний бал равен 48, то есть

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6} = 48$$

Здесь через a_k обозначены баллы собранные в k-ю неделю. Значит, в первые 6 недель количество собранных бал составило: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 288$:

$$x = \frac{a_7 + a_8}{2}$$

Тогда $a_7 + a_8 = 2x$. По условию средний бал последних 8-и недель:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{8} = 50$$

Отсюда: $\frac{288 + 2x}{8} = 50$ $\quad 2x = 400 - 288$, $2x = 112$, $\quad x = 56$

Ответ: Если средний бал 2-х недель будет равен 56, то средний бал последних 8 недель будет 50.

У.14. Решение: Пусть на одной работе предлагает x манат за каждый час, а на другой $(x + 2{,}25)$ манат. Тогда, чтобы заработать 900 манат, на первой работе Тюркан должна работать $\frac{900}{x}$ часов. По условию задачи, на втором рабочем месте она работая на 10 часов меньше, т.е. $(\frac{900}{x} - 10)$ часов может заработать 980 манат. Задача сводится к решению уравнения:
$(\frac{900}{x} - 10) \cdot (x + 2{,}25) = 980$. Обе части этого уравнения умножим на x $(x \neq 0)$: $(900 - 10x) \cdot (x + 2{,}25) = 980x$. После тождественных преобразований получаем квадратное уравнения: $4x^2 + 41x - 810 = 0$. Корнями этого уравнения являются $-20{,}25$ и 10. Так как $-20{,}25$ не подходит условиям задачи, то $x = 10$. И так на первой работе за 1 час предлагают 10 манат, а на другой 12,25 манат.

! Внизу даны формулы, которые могут быть использованы для формирования навыков нахождения требуемого переменного. Задания такого типа выгодны для обеспечения внутри предметной и межпредметной интеграции.

Наименование	Формула	Решение
Потенциальная энергия	В формуле $E_p = mgh$, m-масса, g - ускорение свободного подения, h-высота. Найдите m .	$m = \dfrac{E_p}{gh}$
Полная поверхность конуса	$S_{бок} = \pi r(r + l)$, r-радиус основания конуса, l - образующая. Найти l.	$l = \dfrac{S_{бок} - \pi r^2}{\pi r}$

Из формулы $v = v_0 + at$, найдите a .

Из формулы $h = \frac{1}{2}gt^2$ найдите g .

Из формулы $V= \pi r^2 h$ (объем цилиндра), найдите h.

Из формулы $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ (кинетическая энергия) найдите v .

Из формулы $V = \frac{KT}{P}$ (объем газа) найдите T .

Из формулы $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (объем конуса) найдите r .

Из формулы $A = P + Prt$ (простой процентный раст) найдите P.

Из формулы $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (полная поверхность цилиндра) найдите h .

Из формулы $U = IR$ (напряжение) найдите I.

Из уравнения $ax + by = c$ найдите y .

Из формулы $S = \frac{1}{2}h(a + b)$ (площадь трапеции) найдите b.

Из формулы $S_{бок} = 2(ac + cb)$ (боковая поверхность прямоугольного паралелепипеда) найдите c.

Рабочий лист № 3

Имя______ Фамилия_______ **Число_____**

● *Решает рациональные уравнения и определяет посторонние корни.*

Решите уравнения и определите посторонний корень.

1) $\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n} = \frac{3}{n^2}$

2) $\frac{6}{k} - \frac{1}{k^2 + 6k} = \frac{1}{k}$

3) $\frac{1}{x + 5} - \frac{1}{x^2 + 5x} = \frac{4}{x^2 + 5x}$

4) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^3 - x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x - 2}{x^2}$

5) $\frac{3}{x - 2} - \frac{1}{x - 8} = \frac{x - 20}{x^2 - 10x + 16}$

6) $\frac{x}{x + 2} + \frac{3}{x - 4} = \frac{4x + 12}{x^2 - 2x - 8}$

7) $\frac{x + 3}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 4x - 32} = \frac{2}{x^2 - 3x - 40}$

8) $\frac{x + 5}{x^2 + 5x - 14} - \frac{4}{x^2 + 10x + 21} = \frac{5}{x^2 + x - 6}$

9) $\frac{x - 2}{x^2 - x - 20} - \frac{7}{x^2 + x - 12} = \frac{2}{x^2 - 8x + 15}$

Рабочий лист № 4

Имя______ Фамилия_______ **Число_____**

● *В равенствах с двумя и более переменными находит требуемую переменную.*

Решение задач по нахождению переменной.

1. Высота параллелепипеда: Тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда, длина основания которого равна 8 см, а ширина 5 см. Найдите высоту тела, если объем равен 120 см^3.

2. Высота цилиндра: Радиус цилиндра равен 4 см, а объем 144π см^3. Найдите его высоту.

3. Процентная ставка: Депозит в размере 3000 манат помещен на 3 года в банк по простой процентной ставке. Если прибыль составит 450 манат, то чему равна депозитная процентная ставка?

4. Длина прямоугольника: Периметр прямоугольника равна 60 см, а ширина 12 см. Найдите его длину.

5. Преобразование температуры: В Нью-Йорке в температура воздуха была 77°F. Чему равна эта температура по Цельсию?

6. Длина сада: Сад имеет форму трапеции. Высота трапеции равна 16 м, меньшее основание 20м, площадь 224 м^2. Найдите длину другого основания.

7. Индекс массы тела вычисляется по формуле $I = \frac{m}{h^2}$. Здесь I показывает индекс массы, m-вес человека (кг), h-длина роста (м).
a) Из формулы найдите *m;* b) Чему равен индекс массы тела человека с весом 50 кг и ростом 1,65 м?

8. Ускорение - это величина показывающее изменение скорости. Ускорение вычисляется по формуле $a = \frac{v_2 - v_1}{t}$. Здесь v_2 - показывает конечную скорость, v_1 - начальную скорость, а t - время. Начальная скорость атлета равна 2 м/сек. Если через 4 секунд скорость атлета будет равна 5 м/сек, то найдите его ускорение.

Урок 69-70.Учебник стр. 100-103. Уравнения с модулем. 2 часа.

Выражение Уравнения содержащие переменную под знаком модуля” коротко будем называть “модульные уравнения”

- Решает модульные уравнения алгебраически;
- Решает модульные уравнения графически.

Ученики младших классов знакомы с решением простых модульных уравнений. На уроках предназначенных для этой темы планируется решить модульные уравнения с различной степенью сложности как алгебраически, так и графически.

1. Правильное понимание учеником понятия абсолютной величины. Проводится диагностическая оценка навыков представления абсолютной величины прописью и словами. Отметьте на числовой оси две точки: +4 и –4. Сколько единиц составляет расстояние этих точек от нуля? Может ли расстояние быть отрицательным числом?

2. Ведутся обсуждения над записью общего вида абсолютной величины любого действительного числа: $|a| = \begin{cases} a & \text{если } a \geq 0 \\ -a & \text{если } a < 0 \end{cases}$

Понимание учениками обобщающей математической записи можно проверить на нижеследующих примерах.

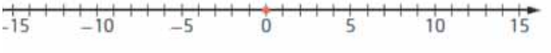
a) Так как $3 > 0$, $|3| = 3$

b) Так как $-7 < 0$, то $|-7| = -(-7) = 7$

А также, для диагностического оценивания, можно использовать задания на вычисления, как показано ниже:

$|4| - |-6|$ b) $5 - 3|2 - 7|$ c) $|-2(5 - 7) + 6|$

3. Исследуются решения простых уравнений. Решение уравнения $|x| = 10$ покажите на числовой оси геометрическим изображением.



Сколько решений имеет каждое из уравнений:

$|x| = 7$

$|x| = 0$

$|x| = -5$

Существует ли модульное уравнение, которое не имеет ни одно решение?

Модульные уравнения можно объединить в 3 группы.

Уравнения	**Эквивалентные уравнения**	**Множество решений**
$\lvert x\rvert = k\ (k > 0)$	$x = k$ или $x = -k$	$\{k, -k\}$
$\lvert x\rvert = 0$	$x = 0$	$\{0\}$
$\lvert x\rvert = k\ (k < 0)$		$\varnothing$

По определению абсолютной величины числа: $|x| = \begin{cases} x & \text{если } x \geq 0 \\ -x & \text{если } x < 0 \end{cases}$

Поэтому, при решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля рассматриваются два случая. **1-ый случай.** Выражение стоящее под знаком модуля положительно, или равно нулю.

2-ой случай. Выражение стоящее под знаком модуля отрицательно.

Примеры данные в учебнике исследуются обсуждениями. Рекомендуется наряду с алгебраическим способом решения модульных уравнений, обратить внимание и на графический способ.

Графический способ решения уравнения легко притворить в жизнь с помощью графкалькулятора. Поэтому графический способ на самом деле может быть использован для проверки решения алгебраическим способом.

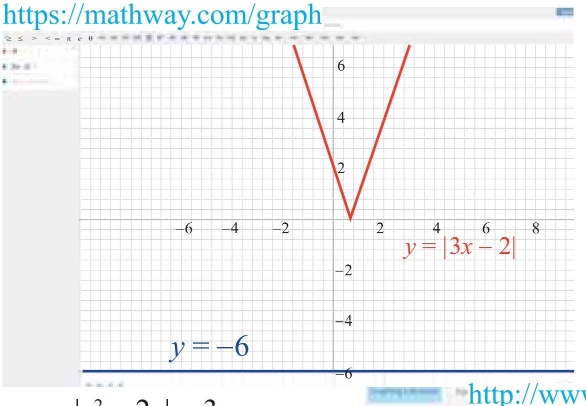
В учебнике были выбраны примеры разных степеней сложности и отличающиеся друг от друга по числу решений.

$|3x - 2| + 11 = 5$ $\quad |x - 3| = 6$ $\quad |x^2 - 2x| = 3$ $\quad |2x - 4| = 1 - 3x$

Модульные уравнения графическим способом можно решить с помощью: https://mathway.com/graph və http://www.meta-calculator.com/online, https://www.desmos.com/calculator.

Уравнение $|3x - 2| + 11 = 5$ перепишем в виде $|3x - 2| = -6$. Если ввести выражение вида $|3x - 2| = -6$, то графкалькулятор нарисует два графика не имеющих друг с другом не одной общей точки. Значит, решение этого уравнения-пустое множество.

https://mathway.com/graph



$|3x - 2| + 11 = 5$

$|3x - 2| = -6$

уравнения

$y = |3x - 2|$

$y = -6$

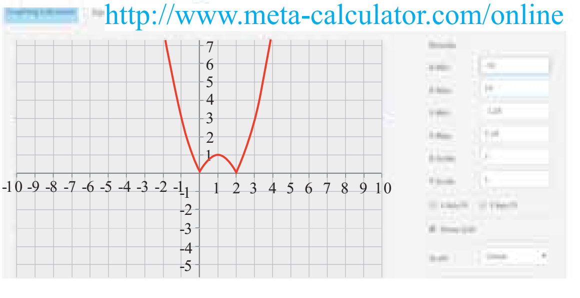
$|x^2 - 2x| = 3$

уравнения

$y = |x^2 - 2x|$

$y = 3$

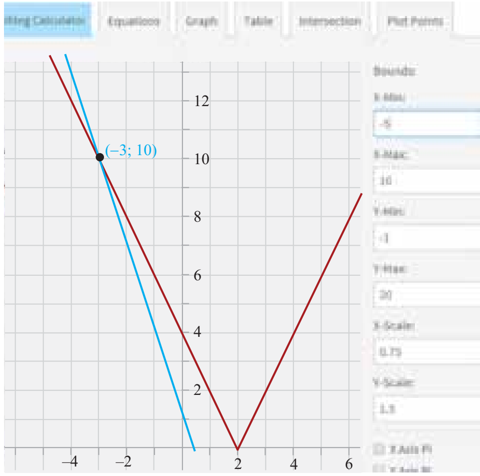
http://www.meta-calculator.com/online



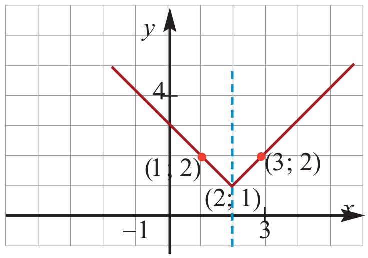
$$|2x - 4| = 1 - 3x$$

Функция введенная в графкалькулятор

$$y = |2x - 4|$$
$$y = 1 - 3x$$



Графики можно распечатать из графкалькулятора или же для какой-либо презентации сохранить файлами в памяти. Эти графики ученики могут построить с легкостью, как было показано на предыдущих уроках, параллельным переносом из графика функции $y = |x|$.



Также график функции $y = |x - 2| + 1$ можно построить по 3 точкам - точке вершины(2; 1) и 2 точкам симметричным относительно оси симметрии $x=2$

? Решения некоторых заданий данных в учебнике.

У.10. Решение. a) $|x^2 - 5| = -4$. Уравнение не имеет корней, поскольку модуль числа неотрицательно

b) $|x^2 - 5| = 4$

$x^2 - 5 = 4$ или $x^2 - 5 = -4$

$x^2 = 9$ или $x^2 = 1$,

$x = \pm 3$ или $x = \pm 1$.

Уравнение имеет 4 корня: $\{-3; -1; 1 : 3\}$

У.13. Сабухи и Камран по заданным вопросам в интернете проверили свои IQ (интеллектуальные способности). Сабухи говорит, что его IQ отличается от IQ Камрана на 15 баллов. IQ Камрана было оценено на 110 баллов. Представьте баллы, показывающие уровень способности Сабухи в виде уравнения, содержащей переменную под знаком модуля.

Решение: Обозначим через x баллы, показывающие IQ Сабухи. Тогда, согласно условию задачи число баллов Сабухи должно быть или на 15 баллом больше, или же на 15 баллов меньше числа баллов Камрана. То есть должно быть: $x = 110 + 15$ или $x = 110 - 15$

А это означает решение модульного уравнения

$$|x - 110| = 15$$

Рабочий лист № 5

Имя______ Фамилия_______ **Число_____**

● *Решает модульные уравнения алгебраическим способом.*

1) $|1 - 2z| + 6 = 9$

2) $4 - |1 - 2z| + 6 = 9$

3) $\frac{3}{4}|x| = 9$

4) $|u - 2| = -\frac{1}{2}$

5) $|x^2 - 16| = 0$

6) $|-2x| = 8$

7) $5 - \left|\frac{1}{2}x\right| = 3$

8) $\left|\frac{x}{2} + \frac{2}{5}\right| = 2$

9) $|2 - v| = -1$

10) $|x^2 - 2x| = 3$

11) $|2x - 2| = 9$

12) $|x^2 - 6| = 3$

13) $|7 + 3x| = x - 1$

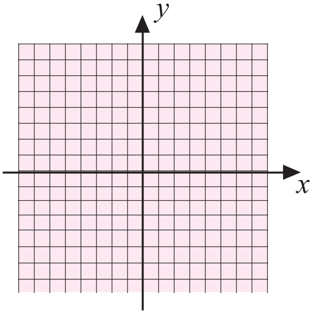
Рабочий лист № 6

Имя______ Фамилия_______ **Число_____**

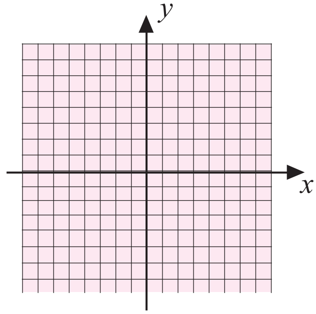
● *Решает модульные уравнения алгебраическим способом.*

Решите уравнения графическим способом.

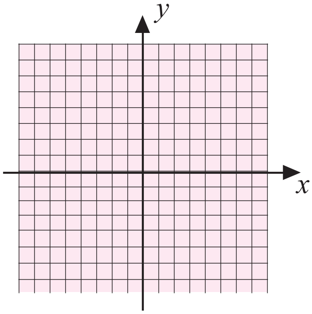
$|x| = 3$



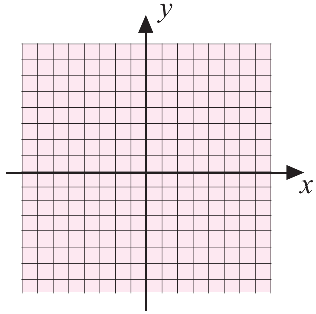
$|x| = 5$



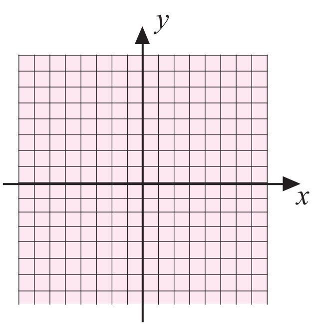
$|x - 2| = \frac{7}{2}$



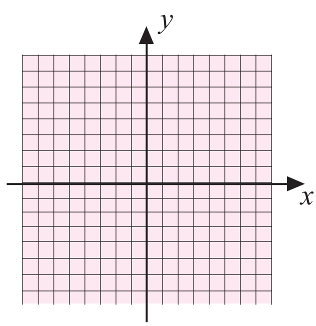
$|x - 5| = 3$



$|x + 2| = 4$



$|x + 4| = 2$



Урок 71-72. Учебник стр. 103-105. Иррациональные уравнения. 2 часа

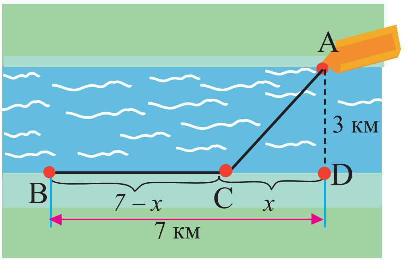
– решает иррациональные уравнения освобождая от радикал
– решает иррациональные уравнения вводя новую переменную
– решает уравнения, где переменная со степенью рациональным показателем
– решает задачи с применением иррациональных уравнений

Выполняется задачи обучения заданные в учебнике. Рекомендуется провести диагностическое оценивание по выпонению простых примеров на возведение в степень.
При решении иррациональных уравнений обращают внимание на следующее.
При возведении в четную степень обеих частей уравнения, множество допустимых значений переменной для нового уравнения может быть расширено. В результате некоторые из корней полученного уравнения могут не удовлетворять данному иррациональному уравнению. При возведении в четную степень обеих частей уравнения, необходимо проверить, удовлетворяют ли корни заданному уравнению или они посторонние, которые приобретены в ходе решений.
Можно проводить работу в группах, убедится учащийся на самом деле понимает этапы решения. Состовляется таблица где заданы математические и вербальные (словесные) записи, которые отражают шаги решения уравнений не по порядку. Каждой группе предоставляется таблица. Учащиеся восстанавливают последовательность решения и объяснение уравнения, вырезая строки таблицы и наклеивая их на чистый лист бумаги.

! При возведении обеих частей в квадрат равенство $a+b=c$ имеет вид $(a+b)^2=c^2$, а не как $a^2+b^2=c^2$

? Решения некоторых заданий данных в учебнике.

У.8. Рыбак планировал проплыть на лодке из пункта А, находящегося вблизи водохранилища, (шириной 3 км) в пункт С, а затем пройти пешком до пункта В. На противоположной стороне хранилища расстояние между пунктами D и В составляло 7 км. Скорость рыбака на лодке - 10 км/час, пешком до пункта В его скорость - 6 км/час. На весь путь был потрачен 1 час. Какой путь прошел рыбак?



Решение: Рыбак должен преодолеть расстояние равное сумме АС и СВ. Обозначим $CD = x$. $CB = 7 - x$, $AC = \sqrt{9+x^2}$.

Расстояние АС можно преодолеть $t_1 = \dfrac{AC}{10} = \dfrac{\sqrt{9+x^2}}{10}$ часа,

а расстояние СВ за $t_2 = \dfrac{CB}{6} = \dfrac{7-x}{6}$ Поскольку $t_1 + t_2 = 1$

Получим иррациональное уранение в виде: $\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{10} + \dfrac{7-x}{6} = 1$

Приведя это уравнение в форму: $\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{5} = \dfrac{x-1}{3}$

Возведя обе части в квадрат и упростив получим уравнение $8x^2 - 25x - 28 = 0$, отсюда находим $x_1 = -\dfrac{7}{8}$, $x_2 = 4$ здесь $-\dfrac{7}{8}$ посторонний корень, $x=4$ удовлетворяет уравнение.

При $x = 4$, $AC = \sqrt{9+4^2} = 5$ (км), $CB = 7 - 4 = 3$ (км). Значит рыбак преодолеет расстояние $5 + 3 = 8$ км.

Рабочий лист № 7

Уединением радикала иррациональные уравнения

Имя______ Фамилия_______ **Число_____**

1) Решите уравнения. Проверте решение

$\sqrt{x-9}=4$

$\sqrt{2x-3}=-4$

$\sqrt{x^2-9}=4$

$\sqrt{18-3x}=x$

$\sqrt{7z-2}=\sqrt{z+3}$

$3\sqrt{2x-1}+4=10$

$6+\sqrt{3x+1}=11$

$2+\sqrt{3y-5}=10$

$2-x+\sqrt{2x-1}=0$

$\sqrt{t-1}+\sqrt{t+4}=5$

$\sqrt{x-3}=\sqrt{x+4}-1$

$\sqrt{x-10}=1-\sqrt{x}$

2) Решите уравнения разными способами

$\sqrt{x^2+2x+1}=3$

$\sqrt{x^2-4x+4}=2x-1$

3) Решите уравнения вводя новую переменную.

$x-\sqrt{x}=12$

$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=6$

$\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}=2$

Рабочий лист № 8

Вводя новую переменную решите иррациональные уравнения

Имя______ Фамилия_______ **Число_____**

1) Определите допустимые значения переменной и решите уравнения.

$(2x-1)^{\frac{1}{3}}=3$

$x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}}=4$

$(x-3)^{\frac{1}{2}}=4$

$x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}=9$

$(x+4)^{\frac{1}{3}}=-1$

$x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{5}{2}}=0{,}25$

2) Решите уравнения вводя новую переменную.

$2x^{\frac{1}{2}}-9x^{\frac{1}{4}}+4=0$

$x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{4}}+2=0$

$2x^{\frac{2}{3}}-5x^{\frac{1}{3}}-3=0$

$3x^{\frac{4}{3}}+5x^{\frac{2}{3}}-2=0$

$t^{\frac{1}{2}}-2t^{\frac{1}{4}}+1=0$

$z^{\frac{1}{2}}-4z^{\frac{1}{4}}+4=0$

Урок 73-77. Учебник стр. 106-113. Система уравнений. 5 часа.

• Решает различными способами систему уравнений, в которой одно уравнение первой, а другое второй степени.
  - Графический способ
  - Способ подстановки
  - Почленное сложение (или вычитание)

• Число решений системы уравнений определяет по знаку дискриминанта.

• Решает разными способами систему уравнений, в которой оба уравнения второй степени.

1-ый, 2-ой час.

Графический способ решения систем уравнений является одним из удобных способов. Применяя навыки построения квадратичной и линейной функции, ученик может показать наглядно число решений системы.

Повторяются знания о графике функции $y = kx + b$.

1) Как изменяется расположение графика в четвертях в зависимости от знака “k”?

2) Как изменится это расположение в зависимости от знака “b” ?

3) Как изменение “k”повлияет на положение графика относительно осей координат.

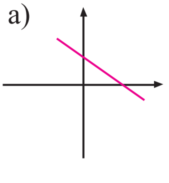
Рекомендуется заранее приготовить электронный плакат, который будет отражать в себе все обсуждения.

Рекомендуется использование графкалькуляторов, из интернет адресов, представленных на предыдущих уроках.

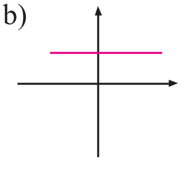
Ученики знакомы со способами сложения и подстановки решения систем. При применении этих алгебраических способов обращается внимание навыки эквивалентных преобразований.

По данным изображениям линейных функций определите равенство углового коэффициента отрицательному, положительному числу или нулю.

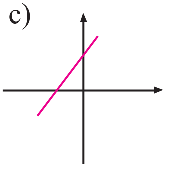
a)



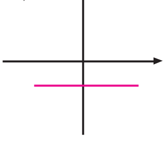
b)



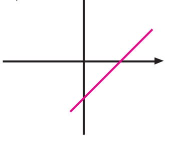
c)



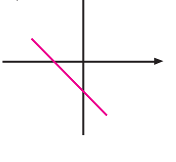
d)



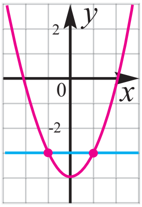
e)



f)

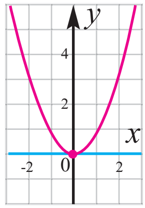


$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -3 \end{cases}$$



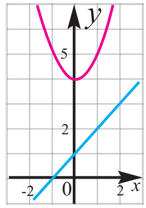
Прямая пересекает параболу в двух точках. Система имеет два решения

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$$



Прямая является касательной параболы. Имеет одно решение.

$$\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$$



Прямая не имеет общей точки с параболой. Нет решений.

? Решения некоторых заданий данных в учебнике.

У.12. Одно уравнение системы имеет вид: $y = x^2 - 6x - 10$. Другое уравнение, будучи линейным пересекает параболу в точках с абсциссами $x = 3$ и $x = 2$.
Решение. Напишите эту систему уравнений. Покажем уравнение прямой в виде $y = ax + b$. Тогда система уравнений будет:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x - 10 \\ y = ax + b \end{cases}$$

Чтобы определить a и b воспользуемся значениями $x = 2$ и $x = 3$. Из первого уравнения соответственно получим:
при $x = 2$, $y = 2^2 - 6 \cdot 2 - 10 = -18$
при $x = 3$, $y = 3^2 - 6 \cdot 3 - 10 = -19$
Учитывая эти значения во втором уравнении для нахождения a и b получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -18 = a \cdot 2 + b \\ -19 = a \cdot 3 + b \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a + b = -18 \\ 3a + b = -19 \end{cases}$$

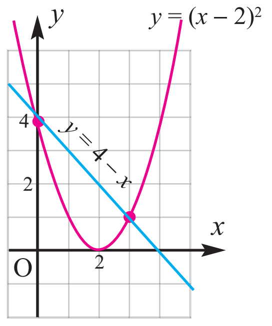
Почленно вычитая получим $a = -1$. А отсюда $2 \cdot (-1) + b = -18 \Rightarrow b = -16$. То есть искомая, система уравнений такова:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x - 10 \\ y = -x - 16 \end{cases}$$

3-й, 4-й час. Решается разными способами (альгебрическим сложением, подстановкой) система уравнений, где одно линейное, а другое второй степени

Учащиеся знакомы с решением системы линейных уравнений методами сложения и вычитания почленно. При применении этих алгебраических методов уделяется внимание насколько корректно учащихся выполняют эквивалентные преобразования.

У. 20. Решение. По условии задачи одна точка пересечения прямой $y = b - x$ с параболой $y = (x - 2)^2$ находится на оси ординат. Поскольку абсцисс точки на оси ординат равен нулю, $x = 0$, значит ординат одной точки параболы будет $y = (0 - 2)^2 = 4$. Значит точка (0; 4) является одной из точек пересечением прямой и параболы, отсюда ясно что, $b = 4$. Решая систему уравнений можно найти другую точку пересечений прямой и параболы.



$$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = (x - 2)^2 \end{cases}$$

А так же построив графики на одной координатной плоскости соответствующих функций можно найти другую точку пересечений прямой и параболы. Это точка - (3; 1)

У.22. а) Прямая $y = 4x + b$ и квадратичная функция $y = -3x^2 - 2x + 4$ не имеет общих точек. Какие значения может принять b?

Решение. Так как в точке пересечения графиков значения функций равны то получим равенство $-3x^2 - 2x + 4 = 4x + b$

$$-3x^2 - 6x + 4 - b = 0 \text{ или}$$

$$3x^2 + 6x + b - 4 = 0$$

Для того, чтобы точки пересечения не было дискриминант должен быть отрицательным:

$D = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (b - 4) < 0 \Rightarrow$

$36 - 12b + 48 < 0 \Rightarrow 12b > 84,\ b > 7$

То есть, при любых значениях "b" взятых из промежутка $(7; +\infty)$ прямая $y = 4x + b$ и парабола $y = -3x^2 - x + 4$ не имеют общих точек.

У.23. Уравнение прямой имеет вид $y = kx - 5$. При каком значении k эта прямая будет касательной к графику квадратичной функции $y = 3x^2 + 4x - 2$?

Решение. Для того чтобы прямая $y = kx - 5$ была касательной к параболе $y = 3x^2 + 4x - 2$, у них должна быть единственная общая точка. Поэтому после приравнения y-ов, полученное уравнение относительно x должно иметь одно решение. То есть дискриминант должен быть равен нулю.

$3x^2 + 4x - 2 = kx - 5 \Rightarrow$

$3x^2 + 4x - kx - 2 + 5 = 0$

$3x^2 + (4 - k)\,x + 3 = 0$

$D = (4 - k)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 0 \qquad (4 - k)^2 = 36$

$4 - k = \pm 6 \Rightarrow \qquad k_1 = 4 - 6 = -2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad k_2 = 4 + 6 = 10$

Значит к графику данной квадратичной функции при двух значениях k, $k = -2$ и $k = 10$ можно провести две касательные: $y = -2x - 5$ и $y = 10x - 5$.

5-й час. Выполняется задания на систему уравнения, где обе уравнения - второй степени. Основное внимание уделяется на графическое нахождения количества решений системы. Учащийся построив графики соответственно данным уравнениям наглядно можно определить число решений системы.

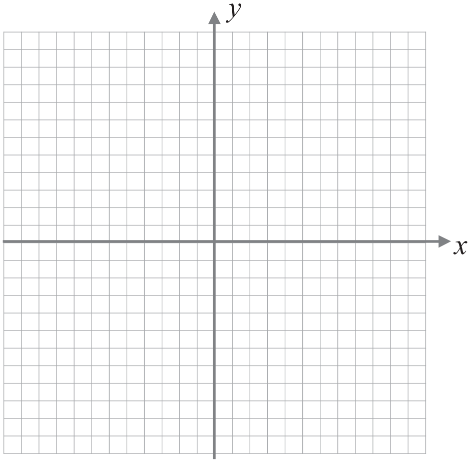
Рабочий лист № 9

Имя______ Фамилия_______ **Число_____**

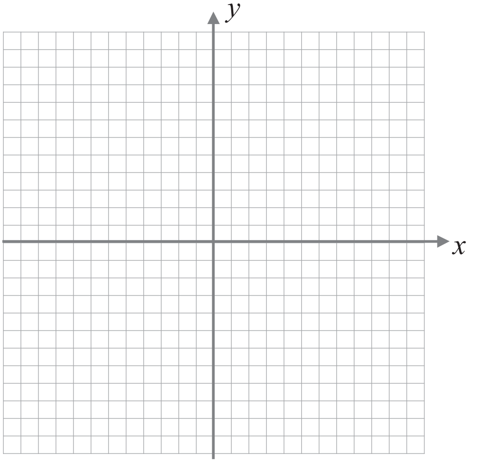
● *Решает систему графическим способом.*

Решите системы уравнений графическим способом.

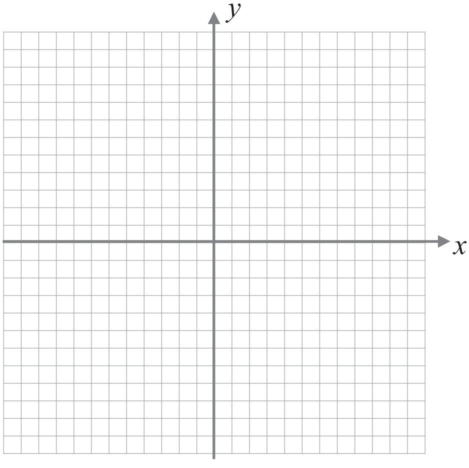
$$\begin{cases} y = x^2 + 4x - 5 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$



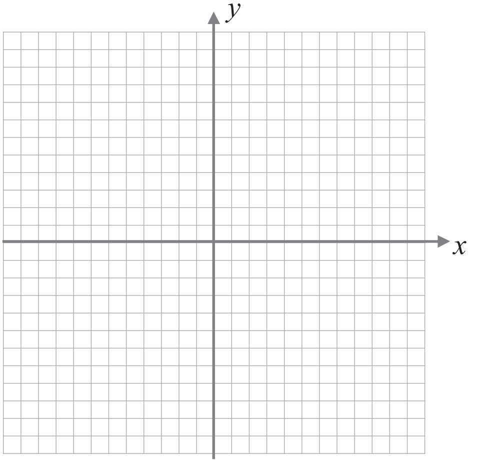
$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 1 \\ y + 2x = 6 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 3 \\ y - 4x = 3 \end{cases}$$



Урок 78-81. Учебник стр. 114-117. Решение задач, приводящее к системе уравнений. Обобщающие задания. 4 часа.

? Решения некоторых заданий данных в учебнике.

У.3. Решение. Сумму вложенную в банк с 4,5 % обозначим через x; а с 6%-через y. По условию задачи получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} y = 3x \\ 1{,}045x + 1{,}06y = 4225 \end{cases}$$

Применив способ подстановки, находим: $x = 1000$, $y = 3000$

У.5. Решение. Количество ниток из чистого шелка обозначим через x кг, а ниток содержащих 85% шелка через y кг, тогда $x + y = 120$. А для ниток с 96 % шелком получим

$$\frac{x + 0{,}85y}{x + y} = 0{,}96$$

Таким образом для нахождения x и y получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} x + y = 120 \\ x + 0{,}85y = 0{,}96(x + y) \end{cases} \Rightarrow \quad 0{,}04x = 0{,}11y,\ x = \frac{11}{4}y$$

Если в первом уравнении принять во внимание значение x, то получим

$$\frac{15}{4}y = 120 \Rightarrow y = \frac{4 \cdot 120}{15} = 32, \qquad x = \frac{11}{4} \cdot 32 = 88$$

Значит нужно взять 88 кг ниток чистого шелка и 32 кг ниток содержащих 85 % шелка.

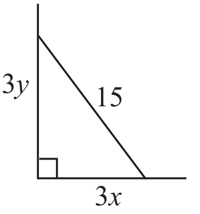
У.9. Решение. Пусть первой трубой бак наполняется за x минут, а второй наполняется за y минут. Согласно условию получим систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{12} = \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 25 \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} \frac{y + x}{xy} = \frac{1}{12} \\ x + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{50}{xy} = \frac{1}{12} \\ x + y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 600 \\ x + y = 50 \end{cases}$

Так как сумма положительных чисел 20 и 30 равна 50, а произведение равна 600, то получается, что первая труба наполняет бак за 20 минут, а вторая за 30 минут.

У.11. (стр. 117) Решение. Скорость первого тела,начинающего двигаться из вершины прямого угла обозначим через x, а скорость второго через y. Так как расстояние пройденное первым телом за 3 секунды, равно расстоянию, пройденному вторым телом за 4 секунды, то можно получить следующую систему уравнений:



$$\begin{cases}(3x)^2 + (3y)^2 = 15^2\\ 3x = 4y\end{cases}$$

$$\begin{cases}9x^2 + 9y^2 = 225\\ 3x = 4y\end{cases} \Rightarrow \quad \{16y^2 + 9y^2 = 225\,, \quad 25y^2 = 225$$

$y = 9$, $y = 3$, $3x = 4 \cdot 3 \Rightarrow x = 4$

Скорость первого тела 4м/сек, а второго 3м/сек.

У.14. (стр. 117) а) При каком значении a система уравнений $\begin{cases}y + 2x = a\\ y - x^2 = 1\end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение: Почленно вычитая уравнения получим $(y + 2x) - (y - x^2) = a - 1$. Отсюда, если дискриминант квадратного уравнения будет равен нулю, то данная система уравнений будет иметь единственное решение. Так как: $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - a) = 4 - 4 + 4a = 4a$ получим, что при $a = 0$ данная система уравнений имеет единственное решение. Действительно, при $a = 0$ получается система уравнений: $\begin{cases}y + 2x = 0\\ y - x^2 = 1\end{cases}$

Из 1-го уравнения получили $y = -2x$ и подставив во 2-е уравнение, получим $-2x - x^2 = 1$, $x^2 + 2x + 1 = 0$, $(x + 1)^2 = 0$, $x = -1$. Тогда $y = -2 \cdot (-1) = 2$. Решением системы будет $(-1; 2)$.

Таблица критерий суммативного оценивания по разделу 3.1

№	Критерии	Замечания
1.	Решает уравнения высших степеней разными способами.	
2.	Решает рациональные уравнения	
3.	Решает уравнения с переменными под знаком модуля	
4.	Решает иррациональные уравнения	
5.	Решает разными способами системы уравнений, состоящие из уравнений первой и второй степени.	
6.	Решает задачи составлением уравнений и систем уравнений.	

Урок 82. Задания суммативного оценивания по разделу 5

1. Доход издательства меняется в соответствии с функцией: $G(x) = -0{,}1x^2 + 5x$. Здесь x показывает количество проданных книг (в тысячах), $G(x)$ -соответствующую прибыль (в тысячах манат).

a) От продажи скольких книг издательство получило 8 тысячи манат прибыли?
b) Найдите максимальную прибыль издательство?
c) От продажи скольких книг издательство получило максимальную прибыль?

2. Решите уравнение: .

a) $x^3 + x^2 = 6x$ b) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 8) = 24$

3. Найдите произведение корней уравнения: $\dfrac{x-1}{x-2} = 5 - x$

4. Решите уравнение:

a) $|x^2 - 2x| = 8$ b) $\big||x-1| + 5\big| = 8$

5. Решите уравнение: $\sqrt{(x-2)^2} = x$

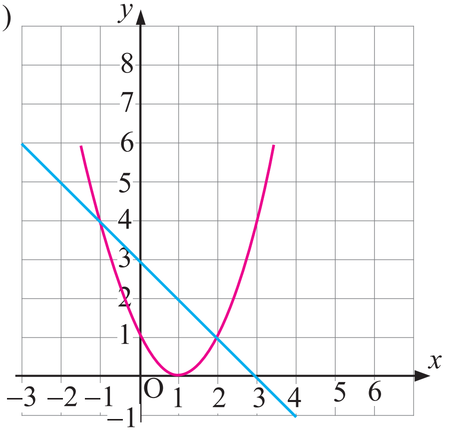
6. Найдите число точек пересечения графиков функций
$y = 2x + x^2$ и $y = x$

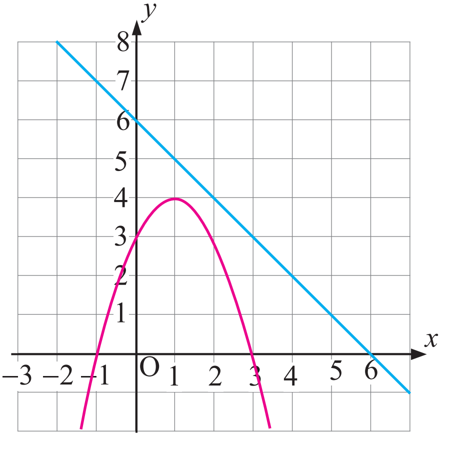
A) 1 B) 2 C) 3 D) 0

7. Найдите сумму абсцисс точек пересечения графиков функций
$y = x^2 - 2x$ и $y = 4$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 0

8. Напишите систему уравнений по графику.

1)


2)


9. В коробке лежат белые и черные шары. Количество белых шаров на 4 больше, чем белых. a) Если вероятность того, что наугад выбранный шар окажется белым, равна 0,6, сколько шаров в коробке? b) После того, как в коробку было добавлено несколько черных шаров, вероятность того, что наугад выбранный шар был черным, составила 0,6. Сколько черных шаров было добавлено в коробку?

10. Решите уравнение:

a) $\sqrt[4]{3x-2}=\sqrt{2}$ b) $(x-4)\cdot\sqrt{4-x^2}=0$

11. Из системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3{,}6 \\ xy=2 \end{cases}$ найдите разность: $x-y$.

12. Решите систему уравнений: $\begin{cases} (x-5)(y-3)=0 \\ x^2+y^2=22 \end{cases}$

13. Установите соответствие:

1) $\begin{cases} x^3+3x^2y=0 \\ y^3+3xy^2=27 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+xy=4 \\ y^2+xy=12 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-xy=2 \\ y^2-xy=7 \end{cases}$

A) $x+y=3$

B) $|x+y|=4$

C) $|x-y|=3$

14. Шагая по движущемуся вниз эскалатору весь путь пассажир спускается в метро за 90 секунд, а стоя за 171 секунду. За сколько секунд он спустится вниз в метро по недвигающемуся эскалатору?

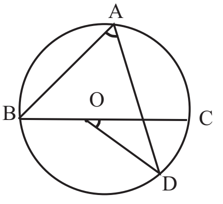
15. Две трубы, работая вместе наполняют бак за 36 минут. Если сначала первая труба наполнит первую половину бака, а затем вторая труба наполнит вторую половину бака, то бак наполнится за 75 минут. За какое время наполнится бак каждой трубой в отдельности?

Урок 83. Полугодовое суммативное оценивание.

1. Число $\sqrt[3]{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ покажите в виде степени с рациональным показателем.

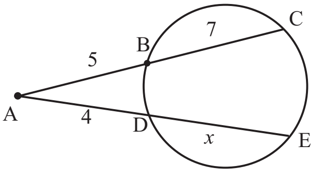
2. Сократите дробь $\dfrac{x-3x^{\frac{1}{2}}}{x-9}$.

3. O - центр окружности. Если $\angle DOC = 20°$, найдите $\angle A$.



A) 80° B) 70° C) 60° D) 45°

4. Если AB = 5 см, BC = 7 см, AD = 4 см и DE = x, найдите длину отрезка DE.

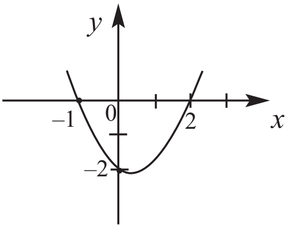


A) 11 см B) 6 см C) 5 см D) 12 см

5. Если параабола $y = x^2 + bx - 2$ проходит через точку A (2; 0), найдите b .

A) –1 B) –2 C) 2 D) 1

6. Какое уравнение является уравнением параболы данной на рисунке?



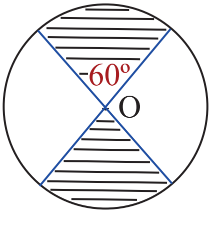
A) $y = (x-1)^2 - 2$ B) $y = (x-2)(x+1)$
C) $y = (x+1)^2 - 3$ D) $y = 2(x+1)^2 - 1$

7. В какой точке парабола $y = 2(x+1)^2 - 3$ пересекает ось Oy ?

A) (0; 1) B) (0; – 1) C) (0; 2) D) (0; – 2)

8. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 4x + 7$.

9. O - центр круга. Найдите площадь заштрихованной части, если радиус круга 6 см.



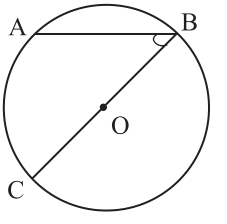
10. В системе уравнений $\begin{cases} x + xy + y = 9 \\ x - xy + y = 1 \end{cases}$ найдите значение выражения $x^2 + y^2$.

11. Найдите сумму корней уравнения: $\sqrt{(x-3)^2} - 1 = 2$

12. 1) Напишите уравнение окружности с центром в точке M(2; 1) и с радиусом $\sqrt{5}$.
2) Найдите точки пересечения окружности с осями координат.
3) Найдите площадь сектора с центральным углом 36° .

13. В окружности радиуса r, и центром O
$\angle BAC = 45°$. Найдите длину дуги BC .

A) $\dfrac{\pi r}{4}$ B) $\dfrac{\pi r}{3}$ C) πr D) $\dfrac{\pi r}{2}$



14. Решите уравнение:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2x - 1$$

15. При каком значении b прямая $y = 4x + b$ имеет с параболой $y = x^2$ имеет только одну общую точку?

16. Найдите медиану AM треугольника ABC, вершинами в точках:
A(–2; 0), B(0; 5), C(4; 1).

17. В коробке лежат белые и черные шары. Количество черных шаров на 4 больше, чем белых. a) Если вероятность того, что наугад выбранный шар окажется белым, равна 0,4, сколько шаров в коробке? b) После того, как в коробку было добавлено несколько белых шаров, вероятность того, что наугад выбранный шар был белым, составила 0,52. Сколько белых шаров было добавлено в коробку?

6 Многоугольники

Таблица планирования уроков по 6-му разделу

Стандарт содержания	Урок №	Тема	Число часов	Учебник стр.
3.1.1. Знает понятия ломанной и многоугольника, изображает правильный многоугольник. 3.1.2. Вписывает окружность в треугольник и описывает окружность около него. 3.1.4. Применяет свойства четырехугольника, вписанного в окружность и описанного около него при решении задач.	84	Многоугольники	1	118-120
	85-86	Сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника	2	120-122
	87-92	Вписанные и описанные многоугольники	6	123-131
	93-94	Площадь правильного многоугольника	2	132-136
	95-96	Обобщающие задания	2	137-138
	97	Задания суммативного оценивания по разделу 6	1	
		Всего	14	

Стандарты содержания

3.1.1. Знает понятия ломанной и многоугольника, изображает правильный многоугольник.
3.1.2. Вписывает окружность в треугольник и описывает окружность около него.
3.1.4. Применяет свойства четырехугольника, вписанного в окружность и описанного около него при решении задач.

Формирование ученических навыков

- *Называет многоугольник по числу сторон, определяет вогнутость или выпуклость;*
- *Решает задачи на сумму внутренних и внешних углов многоугольника;*
- *изображает правильный многоугольник, решает задачи на нахождение периметра и площади;*
- *Знает свойства многоугольников описанных и вписанных в окружность, применяет их при решении задач.*

Математический словарь

- Многоугольник
- Выпуклый многоугольник
- Вогнутый многоугольник
- Правильный многоугольник
- Неправильный многоугольник
- Площадь правильного многоугольника
- Внутренний угол многоугольника
- Внешний угол многоугольника
- Окружность вписанное в правильный многоугольник
- Окружность описанная около правильного многоугольника
- Радиус окружности описанной около правильного многоугольника
- Радиус окружности вписанной в правильный многоугольник
- Центр правильного многоугольника
- Апофема правильного многоугольника

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы
Интернет адреса:
www.mathopenref.com/polygonconcave.html

Урок 84. Учебник стр. 118-120. Многоугольники. 1 час

Выпуклые и вогнутые многоугольники
Рекомендуется заранее приготовить плакат отображающий различия выпуклого и вогнутого многоугольника.

Для того, чтобы ясно представить и сравнить выпуклые и вогнутые многоугольники рекомендуется использовать интернет адрес www.mathopenref.com/polygonconcave.html.

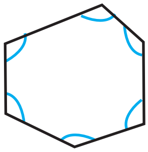
Обращается внимание на осознании каждым учеником понятий замкнутая фигура и незамкнутая фигура, многоугольники, не являющейся многоугольником плоская фигура, смежные стороны, соседние вершины, диагонали, внутренний и внешний угол

Эти понятия можно формировать заданиями из учебника типа У1, У2, У3, У4, У5

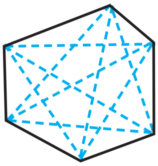
Можно вспомнить о конгруэнтности, провести опрос. Рекомендуется вспомнить конгруэнтность треугольников. Эти знания пригодятся ученикам при решении задач. Рекомендуется нарисовать в тетради рисунки отражающие различия выпуклого и вогнутого многоугольника. Внимание учеников должно быть направлено на проверку признаков для пятиугольника, шестиугольника, семиугольника и.т.д.

Образец плаката

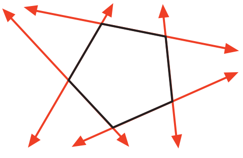
1. Каждый внутренний угол выпуклого многоугольника меньше 180°



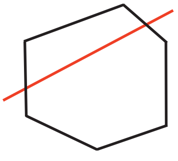
2. Все диагонали выпуклого многоугольника лежат внутри многоугольника



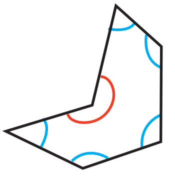
3. Выпуклый многоугольник целиком лежит в одной полуплоскости от прямой, содержащей любую его сторону.



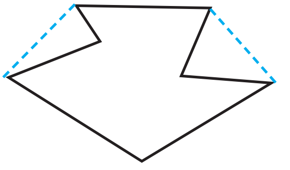
4. Любая прямая может пересечь максимум две стороны выпуклого многоугольника.



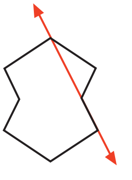
1. Хотя бы один из внутренних углов вогнутого многоугольника больше 180°



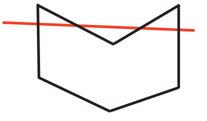
2. Вогнутый многоугольник имеет хотя бы одну “внешнюю” диагональ.



3. Продолжение хотя бы одной стороны вогнутого многоугольника проходит через внутреннюю область.



4. В зависимости от того через какую часть многоугольника проходит прямая, она может пересечь несколько сторон многоугольника. Прямая изображенная на рисунке, пересекает 4 стороны многоугольника.



Урок 85-86. Учебник стр.120-122. Сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника. 2 часа.

• Применяет теорему о внутренних углах многоугольника при решении задач.
• Применяет теорему о внешних углах многоугольника при решении задач;
• Решает задачи на нахождение внутреннего угла при данной вершине правильного многоугольника ;
• Решает задачи на нахождение внешнего угла при данной вершине правильного многоугольника.

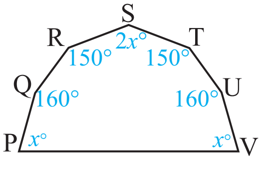
Объясняет теоремы о сумме внутренних и внешних углов многоугольника и о градусной мере угла при каждой вершине многоугольника. Выполняются задания данные в учебнике. По мере освоения каждым учеником определенных навыков - наблюдением ведется формативное оценивание. Рекомендуется воспользоваться заданиями данными в учебнике, рабочими листами данными в дополнительном пособии. Выполняются исследовательские задания данные в учебнике с увеличением сторон правильного многоугольника, наблюдается увеличение градусной меры каждого внутреннего угла, а градусная мера внешнего угла наоборот уменьшается. Чтобы убедиться поняли-ли ученики эту зависимость можно задать вопросы. Например, Кенуль говорит, что каждый внутренний угол 12-ти угольника равен 170°,18-ти угольника - 130°. Можете ли выобъяснить ошибку Кенуль не проводя никаких вычислений?

Рекомендуется решение нижеследующей задачи.

? Покажите, что не существует правильного многоугольника, с внутренним углом равным 123°. Задание выполняется по формуле градусной меры угла при одной вершине правильного многоугольника:

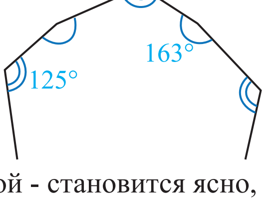
$$\frac{180°(n-2)}{n} = 123°;\ 180°n - 360° = 123°n;\quad 57°n = 360°;\ n = 6{,}3$$

Так как число сторон не целое число, то не существует правильного многоугольника с внутренним углом 123°.



У.17 а) Можно ли сказать, что этот многоугольник правильный. Выслушивается мнения. В правильном многоугольнике меры всех углов одинаковые. А в этом многоугольнике внутренние углы разной величины. Задачу можно решить применив теорему о сумме внутренних углов многоугольника. Сумма внутренних углов: $180° \cdot (7-2) = 900°$

$x + 2 \cdot 160° + 2 \cdot 150° + 2x + x = 900° \qquad 4x + 620° = 900° \qquad 4x = 280° \quad x = 70°$



У.17 b) Задачу можно решить двумя способами.

Как требуется в условии задачи применив сумму внешних углов многоугольника: Сумма внешних углов многоугольника равна 360°. Внешние углы соответствующие данным внутренним углам равны 55° и 17°. Если учесть, что углы 125° и 163° чередуются продолжаясь меняться один на другой - становится ясно, что число сторон и углов многоугольника - четное: $n = 2k$, $k = \frac{n}{2}$, то есть в k имеется к штук по 125°, и в k штук по 163°. Значит:

$\frac{n}{2} \cdot 55° + \frac{n}{2} \cdot 17° = 360°;\ 72° \cdot n = 360° \cdot 2;\ n = 10$. В этом многоугольнике 5 углов 125° и 5 углов по 163°. **Ответ:** Многоугольник имеет 10 сторон.

Рабочий лист № 1

• *Решает задачи на вычисление внутренних и внешних углов правильного многоугольника.*

Имя________Фамилия__________ Число_________

Сумма внутренних углов правильного многоугольника

Многоугольник	Число сторон	Число диагоналей исходящих из одной вершины	Число внутренних углов	Сумма внутренних углов	Величина одного внутреннего угла (в правильном многоугольнике)	Величина одного внешнего угла (в правильном многоугольнике)	Сумма внешних углов
Треугольник 							
Прямоугольник 							
Пятиугольник 							
Шестиугольник 							
Семиугольник 							
Восьмиугольник 							
Девятиугольник 							
Десятиугольник 							
n угольник							

Рабочий лист № 2

Имя_______ Фамилия_________ Число________

• *Вычисляет внутренние и внешние углы выпуклого многоугольника.*

1. Из нижеследующих суждений укажите верные и неверные.

a) Если число сторон многоугольника увеличить в два раза, градусная мера внешнего угла уменьшится в два раза.

b) Внешний угол восьмиугольника больше внешнего угла четырехугольника.

c) Если соединить последовательно середины сторон многоугольника, имеющего разные длины сторон, то получится многоугольник с конгруэнтными сторонами.

d) Четырехугольник с конгруэнтными сторонами-правильный четырехугольник.

e) Четырехугольник с конгруэнтными углами - правильный четырехугольник.

f) Треугольник с конгруэнтными сторонами правильный треугольник.

2. По данным условиям найдите, сколько сторон имеет правильный многоугольник:

1) Сумма внутренних углов которого равен 1980°

2) Каждый внешний угол которого равен 15°

3) Каждый внутренний угол которого равен 108°

4) Сумма внутренних углов которого равен 3600°

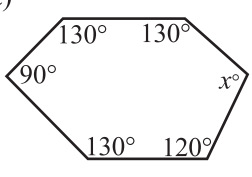
5) Каждый внешний угол которого равен 24°

6) Каждый внутренний угол которого равен 135°

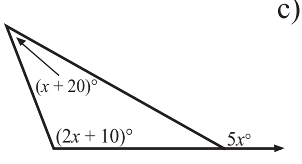
7) Каждый внутренний угол которого равен 160°

3. По данным на рисунке найдите неизвестные углы многоугольника.

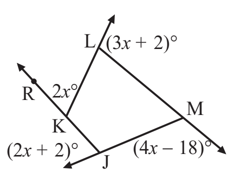
a)



b)



c)



Урок 87-92. Учебник стр. 123-131.
Вписанные и описанные многоугольники. 6 часа

• Изображает вписанные и описанные многоугольники ;

• При решении задач применяет теорему об определении центра окружности вписанный в треугольник и описанный около него;

• Радиусы вписанной и описанной окружностей выражает через стороны треугольника;

• Знает свойства четырехугольников вписанных в окружность и описанных около него и применяет их при решении задач;

• Радиус вписанной и описанной окружности выражает через стороны четырехугольника.

Необходимые первичные знания

■ Вспоминет знания о высотах, биссектрисах, медианах, срединных перпендикулярах и рисует соответствующие изображения;

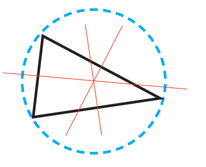
■ Виды и свойства параллелограма;

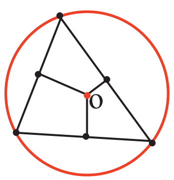
■ Свойства касательной к окружности.

1-й час. Объясняется определение описанного и вписанного многоугольника и ученики рисуют в тетрадях соответствующие изображения.

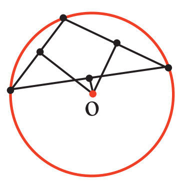
1. Исследуя тоеремы о центре вписанной и описанной окружности, выясняется, что в любой треугольник можно вписать и описать окружность.

2. Чтобы описать около треугольника окружность сначала рисуются серединные перпендикуляры к сторонан. Принимая за центр окружности точку пересечения серединных перпендикуляров, а любую вершину треугольника - за конец радиуса рисуется окружность. Эта окружность будет окружностью, описанной около треугольника. Центр окружности может быть внутри треугольника и может лежать на стороне треугольника.

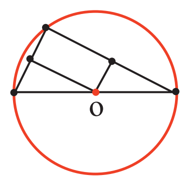




Остроугольный треугольник

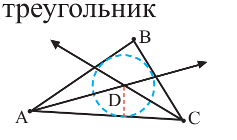


Тупоугольный треугольник



Прямоугольный треугольник

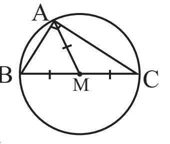
3. Чтобы в треугольник вписать окружность сначала нужно нарисовать биссектрисы его углов. Приняв за центр точку пересечения биссектрис из этой точки к любой стороне проведите высоту: Проведённую высоту приняв за радиус рисуется окружность. Эта окружность будет окружностью вписанной в данный треугольник.



“Если одна из сторон вписанного в окружность треугольника проходит через центр, значит этот треугольник прямоугольный”. Выполните задания **У.3.** и **У.4** на применение этого свойства.

? Решения некоторых заданий данных в учебнике.

У.4 Обращается внимание на создание связи между данными в задаче элементами треугольника и элементами окружности.



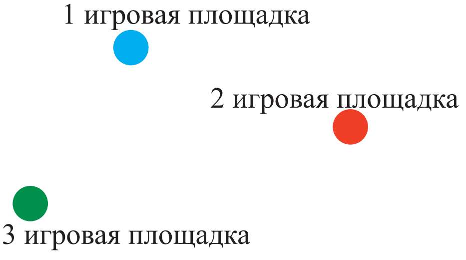
ΔABC прямоугольный треугольник	Сторона лежит на диаметре
$BC = 2\ AM = 20$ sm	Медиана треугольника является также и радиусом.
$AC^2 = BC^2 - AB^2$	По теореме Пифагора
$S = \frac{1}{2}\ AB \cdot AC$	По формуле площади треугольника

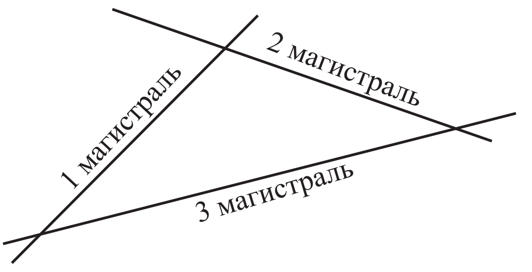
! Решая задачи относящиеся к реальным жизненным ситуациям обращается внимание на то, в каком случае решение требует нахождение центра вписанной окружности, а в каком описанной окружности.

Ученикам представляют два задания

1) Планируется соорудить столовую в парке таким образом, чтобы она находилась на одинаковом расстоянии от площадок для игры. Отметьте в плане место столовой.

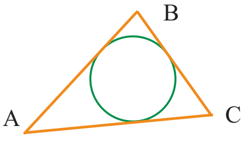
2) Планируется построить торговый центр расположенный на одинаковым расстоянии от трех магистральных дорог. Отметьте место торгового центра на плане.



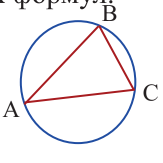


Обоснуйте свои мнения геометрическими свойствами.

2-й час. Рекомендуется подготовит плакат отображающий формулы для нахождения радиуса описанной окружности около треугольника и вписанной окружности в треугольник. Решается задачи с применением этих формул.



$$r = \frac{2S}{a + b + c}$$

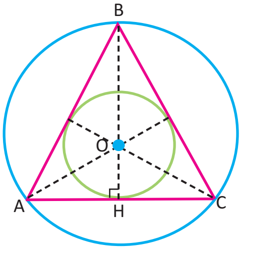


$$R = \frac{abc}{4S}$$

Здесь *a, b, c* - стороны треугольника, S площадь треугольника..
Формула Герона для вычисления площади треугольника. .

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ , p = \frac{a+b+c}{2}$$

? **У.8.а) Решение.** Исследуется центр окружности вписанной и описанной около равностороннего треугольника. Выясняется, что в этом случае центр вписанной и описанной окружностей совпадают. Это утверждение основывается геометрическими суждениями. Поскольку медианы равностороннего треугольника также является и высотой и биссектрисой треугольника, значит центры этих окружностей должны быть в одной точке, в точке пересечений медиан, которая делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины. Значит, BO : OH = 2 : 1.



Для радиусы вписанной и описанной окружности около равностороннего треугольника верны следующие формулы: r = OH= $\frac{1}{3}$·BH; R = OB = $\frac{2}{3}$ · BH

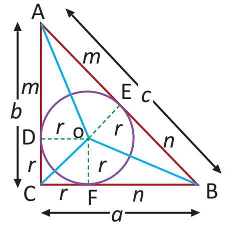
Как следствие отмечается что радиус описанной окружности около треугольника в два раза больше чем радиус вписанной.

У.9. Решение. а) Задача решается с применением свойств касателной к окружности . Выясняется, что на рисунке четрехугольник CDOF - квадрат. Принимая определенные обозначения пишется равенства:

$r + n = a$

$r + m = b$

$m + n = c$



Сложив эти равенства почленно можно получить формулу для радиуса вписанной окружности в прямоугольный треугольник. $r = \dfrac{a + b - c}{2}$

У.10. решение задачи выполняется согласно данной последвотельности в учебнике. Обобшается определения, теоремы, свойства использованные во время решения задачи.

1. Центр вписанной окружности в угол находится на биссектрисе этого угла. Это утверждение можно обосновывать тем, что любая точка на биссектрисе находится на равном расстоянии от сторон этого угла.
2. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам
3. Признаки подобия прямоугольных треугольников.

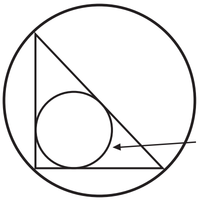
У.11. выполняется как общеклассный деятельность. Ученики находят формулу по данному указанию и применяют при решении задачи. Аналогично выполняются задачи **У.12.** və **У.14.** Ученики совместными обсуждениями находят формулу для радиуса описанной окружности около треугольника и применяют при решении задачи.

Рабочий лист № 3

Имя_______ Фамилия_________ Число________

• *Радиусы окружностей вписанных в треугольник и описанных около треугольника выражаются сторонами треугольника.*

На рисунке в прямоугольный треугольник вписана окружность и описана около нее

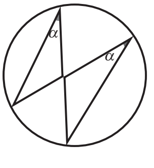


1) Напишите формулу зависимости сторон *a, b, c* прямоугольного треугольника (*c* гипотенуза) от радиусов вписанных окружностей.

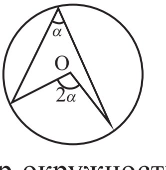
2) Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей, зная что стороны треугольника равны 5; 12; 13 единицам.

Напишите какими из указанных ниже теоремами вы пользовались.

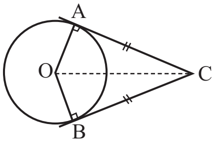
Вписанные углы соответствующие одной и той же дуге конгруэнтны.



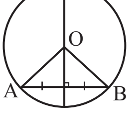
Угол, вписанный в окружность равен половине градусной меры соответствующей дуги или же половине градусной меры центрального угла.



Отрезки двух касательных, проведенных к окружности из одной и той же точки к точкам касания, конгруэнтны.



Если диаметр окружности перпендикулярен хорде, значит диаметр является серединным перпендикуляром хорды. (делит его пополам)



У.15. а) Найдите радиусы окружностей вписанной и описанной около треугольника сторонами 13 см, 14 см, 15 см

Решение: Сначала найдем площадь треугольника по формуле Герона.

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = 21,$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} =$$

$$= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 4^2 \cdot 7^2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84 \text{ (см}^2)$$

Радиус вписанной окружности:

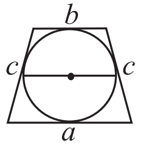
$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 84}{13+14+15} = \frac{2 \cdot 84}{42} = 4 \text{ (см)}$$

Радиус описанной окружности : $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8\dfrac{1}{8}$ (см)

3-4-й час. Исследуются свойства четырехугольников вписыванных в окружность и описанных около нее

У.20 b) Средняя линия: $\dfrac{a+b}{2}$

Равнобедренная трапеция описанная около окружности:

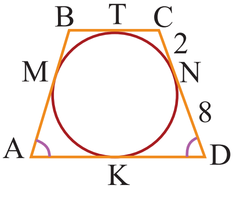


$$c + c = a + b \Rightarrow 2c = a + b; \quad c = \frac{a+b}{2}$$

То есть, средняя линия равна боковой стороне

У.21. Решение: а) По данным трапеция ABCD равнобокая: AB = CD = 10. Отрезки касательных, проведенных из одной точки конгруэнтны: DK = DN = 8. CT = CN = 2, Тогда BC = 4, AD = 16 и периметр трапеции

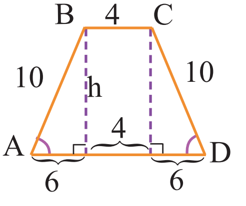
P = 4 + 16 + 10 + 10 = 40.



Проведем высоту трапеции как показано на рисунке. По теорему Пифагора имеем: $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту:

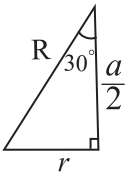
$$S = \frac{16+4}{2} \cdot 8 = 80$$



5-й, 6-й час. Исследуется возможности вписать или описать окружности около правильного n -угольника. Так же исследуется связь между сторонами правильного n-угольника и радиусами описанной и вписанной окружностей:. Ученики самостоятельно пишут эти формулы для случая, когда n =3; 4; 6.

D.26. 1.

$$R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}} \qquad r = \frac{a}{2\tan 60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$



Можно было бы воспользоваться тем, что в прямоугольном треугольнике катет лежащей против угла 30° равен половине гипотенузы.

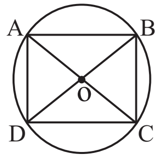
Рабочий лист № 4

Имя_______ Фамилия_________ Число________

● *Знает свойство четырехугольников вписанных в окружность и описанных около окружности и применяет в решении задач.*

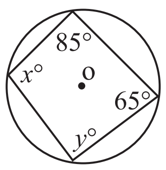
1) **Теорема.** Если в окружность вписан параллеллограм, то это прямоугольник.

Дано: AC и DB - диаметры.
O - центр окружности.
OA, OB, OD, OC - радиусы окружностей.

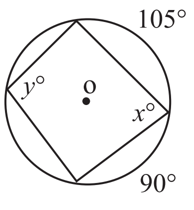


2) Найдите неизвестные углы.

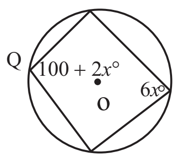
a)



b)

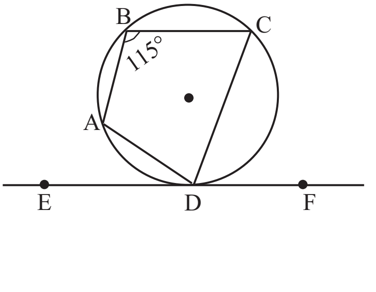


c)



3) **Дано:** $\smile AD = 60°$, $BC \parallel EF$
EF - касательная.

Найдите: $\angle ADC =$
$\angle CDF =$
$\angle C =$
$\angle A =$



Обратите внимание! Радиус окружности описанной около правильного треугольника в 2 раза больше радиуса окружности вписанного в этот треугольник.

2. Для правильного четырехугольника (квадрата) то есть для $n = 4$.

$$R = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad r = \frac{a}{2\tan 45^\circ} = \frac{a}{2}$$

Обратите внимание! Сторона правильного четырехугольника (квадрата) в два раза больше радиуса вписанного в этот четырехугольник.

3. Для правильного шестиугольника, то есть для $n = 6$

$$R = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a \qquad r = \frac{a}{2\tan 60^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Обратите внимание! Радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен стороне.

Решение задания **У.34** на построение проводится общокласным обсуждением.

Урок 93-96. Учебник стр. 132-138. Площадь правильного многоугольника. Обобщающие задания. 4 часа.

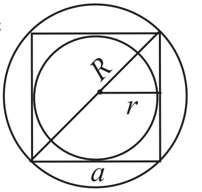
- Разделив правильный многоугольник на треугольники пишет формулу зависимости площади многоугольника от его периметра и апофемы.
- Применяя формулу площади правильного многоугольника решает разные задачи.
- Знает правило паркетирования и применяет при решении задач.

Моменты требующие внимания

Формулы $S = \frac{1}{2} nah$ или же $S = \frac{1}{2} Ph$ для вычисления площади правильного многоугольника выводится общеклассными обсуждениями.

Можно написать формулу для вычисления площади многоугольника, если известны его a) сторона; b) радиус вписанной окружности; c) радиус описанной окружности. Из-за сложности этих формул нет необходимости в их запоминании. Однако, отводится время для решения задач такого типа.

Площадь многоугольника можно вычислить, если известен радиус вписанной или описанной около многоугольника окружности, или же сторона.



Ученик понимает равенство апофемы радиусу вписанной окружности.

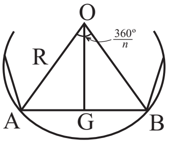
Ученик понимает, что соединив центр правильного многоугольника с его вершинами, можно получить n равносторонних конгруэнтных треугольников, и если найти площадь одного из этих треугольников, то можно найти площадь многоугольника. .Повторяются формулы для вычисления площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2} ah_a, \qquad S = \frac{1}{2} ab\sin\theta, \qquad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

По уровню знаний, ученикам, можно поручить вывести формулу радиуса вписанной в многоугольник и описанной около многоугольника окружности, площади многоугольника, зависимости периметра от соответствующего радиуса. Некоторые из них даны ниже как образцы.

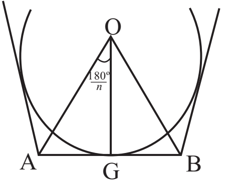
Формулы для вычисления площади правильного многоугольника:

Формула зависимости площади многоугольника вписанного в окружность от радиуса окружности.



$$S_n = \frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360^o}{n}$$

Формула зависимости площади многоугольника описанного около окружности от радиуса окружности:



$$S_n = n\, r^2 \tan \frac{180^o}{n}$$

Приняв радиус окружности $r = 1$, построив таблицу показывающую наименование многоугольника, число сторон, периметр и полупериметр - для определения числа π, можно повторить и с учениками исследование проведенное Архимедом. Для исследования таблица приведена на следующей странице.

а) Формула для вычисления периметра правильного многоугольника вписанного в окружность: $P = 2Rn \sin \frac{180^\circ}{n}$

b) Формула для вычисления периметра правильного многоугольника описанного около окружности: $P = 2rn \tan \frac{180^\circ}{n}$

Таблица для определения числа π

Таблица 1

Многоугольник	Число сторон	Угол	Периметр	*P*/2
Треугольник				
Квадрат				
Пятиугольник				
Шестиугольник				
Восьмиугольник				
Двенадцатиугольник				
24-угольник				
48-угольник				
96-угольник				

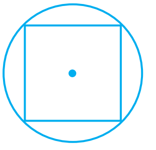
Формула для вычисления периметра правильного многоугольника вписанного в окружность: $P = 2Rn \sin \frac{180^\circ}{n}$

Рабочий лист № 5

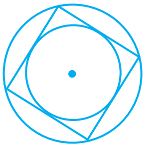
Имя_______ Фамилия_________   Число________

● *Радиусы окружностей вписанной в треугольник и описанной около треугольника выражает через сторону треугольника.*

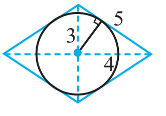
1. На рисунке около квадрата со стороной равной 2 см описана окружность. Найдите отношение площади соответствующего круга к площади квадрата.



2. На рисунке изображен квадрат вписанный в окружность с диаметром 12 см, а в квадрат вписана окружность. Найдите отношение площадей соответствующих кругов.



3. На рисунке изображен круг вписанный в ромб с диагоналями 6 см и 8 см. Найдите отношение площади ромба к площаади круга.



4. В лагере туристы соорудили 6 палаток таким образом, что соседние палатки были друг от друга и от костра на одинаковом расстоянии. Если они увеличат расстояние от палаток до костра в 2 раза, то как изменится площадь лагеря?

Для решения задачи воспользуйтесь рисунком.

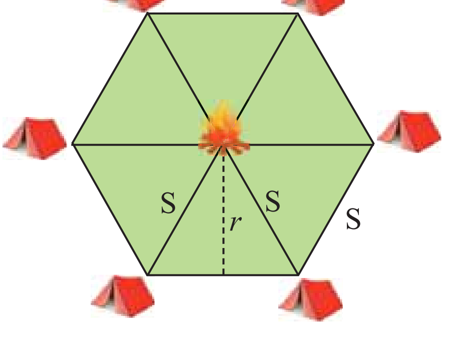


Таблица 2

Многоугольник	Число сторон	Угол	Периметр	$P/2$
Треугольник				
Квадрат				
Пятиугольник				
Шестиугольник				
Восьмиугольник				
Двенадцатиугольник				
24-угольник				
48-угольник				
96-угольник				

Периметр правильного многоугольника, описанного

около окружности: $P = 2rn\tan\dfrac{180^\circ}{n}$

Ученикам объясняется правило паркетирования. При построении фигур рядом друг с другом сумма углов с общей вершиной должна быть равна 360°. Это возможно лишь при использовании одинаковых фигур - ромба (квадрата), равностороннего треугольника и правильного шестиугольника.

Паркетирование, узоры из геометрических фигур, резьба по дереву занимают важное место в Исламском искусстве. В разных районах Республики можно встретить мечети и мавзолеи украшенные этими узорами. Рекомендуется дать ученикам в качестве проектной работы задание сфотографировать эти памятники и узоры на них, записать на компьютер, снова нарисовать их и определить геометрические свойства этих узоров.

? Методические рекомендации для выполнения некоторых заданий.

У.16. (стр. 136) Найдите отмеченный угол x.

Обратите внимание на правильность определения углов. Информацию о градусной мере каждой отмеченной точки ученики определяют общеклассными обсуждениями. Например, а) угол x является общевершинным углом с одним внутренним углом шестиугольника и одним внутренним углом восьмиугольника. $\angle x$ + угол при одной вершине правильного шестиугольника + угол при одной вершине правильного восьмиугольника = 360°

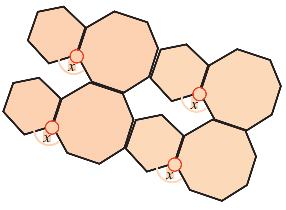
Угол при одной вершине правильного шестиугольника = $\dfrac{180(n-2)}{n} = 120°$

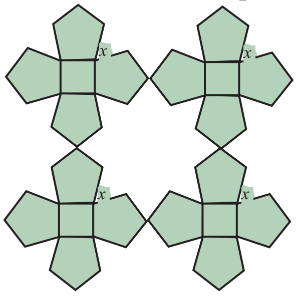
Угол при одной вершине правильного восьмиугольника = $\dfrac{180(n-2)}{n} = 135°$

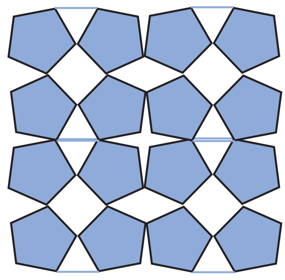
При выполнении заданий обращается внимание навыкам устного вычисления градусных мер этих углов.

$\angle x + 120° + 135° = 360° \qquad x = 105°$

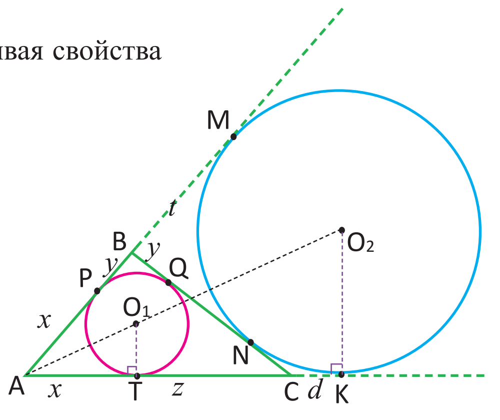
Решение заданий такого типа важно для решения многих практических дизайнерских задач. Ученики рисуют эти фигуры на компьютерах и повторяют их. Ученики понимают, что создание этими фигурами пустот определенного вида может быть использовано в паркетировании. Могут быть выполнены задания на вычисление углов полученных этими путотами. Эти навыки имеют огромное значение при выполнении гравировочных работ на камне или на дереве.







У.9. (стр. 138) **Решение.** а) Учитывая свойства касательной



$AP = AT = x$, $BP = BQ = y$,
Обозначив $CT = CQ = z$, по данным:
$x + y = 10$,
$y + z = 17$,
$x + z = 21$
Сложив почленно получаем:
$2(x + y + z) = 48$; $x + y + z = 24$.
Если учитывать $x + y = 10$ в последнем равенстве получаем $z = 14$; учитывая $y + z = 17$ получаем $x = 7$; учитывая $x + z = 21$ находим $y = 3$.
Значит, $AP = AT = 7$ (см), $BP = BQ = 3$ (см) $CT = CQ = 14$ (см).
b) Обозначив $BM = BN = t$, $CN = CK = d$, и учитывая, что $AM = AK$ и $BC = BN + CN$, то можно писать систему уравнений как $\begin{cases} t + d = 17 \\ 21 + d = 10 + t \end{cases}$
Решив систему находим, что $t = 14$, $d = 3$

Это значит, что $BM = 14$ (см), $CN = CK = 3$ (см).

c) Сначала найдем радиус вписанной окружности во внутрь ΔABC. Площадь треугольника сторонами 10 см, 17 см, 21 см по формуле Герона будет:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)} = 84\ (sm^2)$$

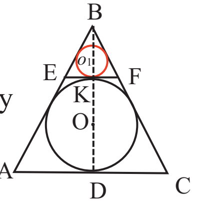
С помощью формулы для нахождения радиуса вписанной окружности

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 84}{10+17+21} = \frac{2 \cdot 84}{48} = 3{,}5\ (см)$$

По скольку $\Delta ATO_1 \sim \Delta AKO_2$, значит отношение сторон будет:

$$\frac{O_1T}{O_2K} = \frac{AT}{AK} \quad \text{отсюда} \quad \frac{3{,}5}{O_2K} = \frac{7}{24}, \quad O_2K = 12\ (см)$$

У.12. (стр.138) Центром окружности вписанного в треугольник является точка пересечения биссектрис углов. В равностороннем треугольнике биссектриса является также и медианой. По свойству медиан треугольника BO : OD = 2 : 1,
поэтому $r = OD = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3}h = \frac{\sqrt{3}}{6}$



Если EF - касательная к большей и к меньшей окружностей, то $\Delta ABC \sim \Delta EFB$. Так как $BK = KO = OD = r$, то $BK = \frac{\sqrt{3}}{6}$

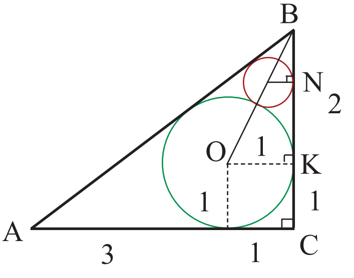
Меньшая окружность показанная в условии - это окружность вписанная в ΔEFB и так как в равностороннем треугольнике биссектриса является также и медианой, то по свойству медиан

$$r_1 = O_1K = \frac{1}{3}BK = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

У.12. с) Центры окружностей лежат на биссектрисе острого угла прямоугольного теугольника. Радиус окружности вписанной в прямоуголный треугольник.

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{3+4-5}{2} = 1$$

$OK = KC = 1 \qquad BK = 3 - 1 = 2$



Так как $\Delta BOK \sim \Delta BMN$ и $MN = x$, $BN = 2x$. Тогда $BM = x\sqrt{5}$, $BO = BM + MO = x\sqrt{5} + x + 1$. С другой стороны из ΔBOK по теореме Пифагора $BO = \sqrt{5}$. Тогда $x\sqrt{5} + x + 1 = \sqrt{5}$

$$x(\sqrt{5}+1) = \sqrt{5} - 1; \quad x = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-1} = \frac{5-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Таблица критерий большого суммативного оценивания по разделу 6.

№	Критерии	Замечания
1.	Многоугольники классифицирует по числу сторон, по вогнутости или выпуклости	
2.	Решает задачи на сумму внутренних и внешних углов многоугольника.	
3.	Изображает правильный многоугольник, решает задачи на периметр и площадь многоугольника	
4.	В треугольник вписывает окружность и окружность описывает около него.	
5.	Радиусы вписанной и описанной окружностей выражает через стороны треугольника и применяет при решении задач.	
6.	Знает свойства четырехугольника вписанного в окружность и описанного около окружности и применяет в решении задач.	
7.	Радиус вписанной в четырехугольник или описанной около нее окружности выражает через стороны четырехугольника.	

Урок 97. Задания суммативного оценивания по разделу 6

1. Найдите число сторон правильного многоугольника, в котором внутренний угол больше внешнего в 3 раза.

A) 6 B) 8 C) 7 D) 9

2. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если сумма внутренних углов равна 1620° ?

A) 11 B) 7 C) 9 D) 10

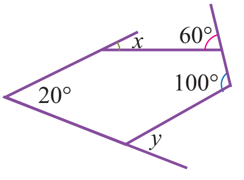
3. Сколько диагоналей имеет многоугольник, если число диагоналей исходящих из одной вершины равно 5.

4. Найдите отношение внутренного угла правильного 20-угольника к внешнему углу.

A) 9 B) 8 C) 7 D) 10

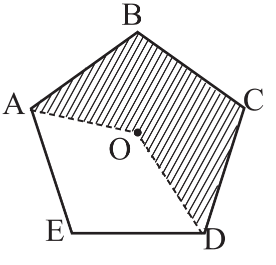
5. По рисунку найдите сумму $x + y$.

A) 40° B) 30° C)20° D) 60°



6. Точка O - центр правильного пятиугольника ABCDE. Площадь четырехугольника AODE равны 24 см². Найдите площадь пятиугольника ABCDE.

A) 36см² B) 48см² C) 24см² D) 60см²



7. Найдите апофему правильного многоугольника, площадь которого равна 180 см², а периметр 60 см.

8. Около окружности с радиусом 3 см описан правильный многоугольник с площадью 24 см². Найдите периметр этого многоугольника.

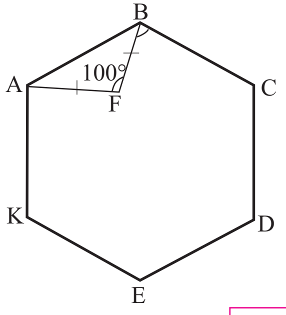
9. Установите соответствие:

1) правильный пятиугольник
2) правильный шестиугольник
3) правильный восьмиугольник

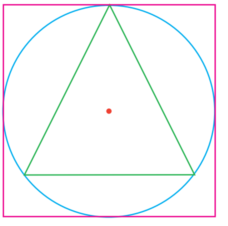
A) сумма внутренних углов равна 540° ;
B) сумма внутренних углов равна 1080°;
C) сумма внутренних углов равна 720°;
D) внутренний угол больше внешнего угла на 50%.

10. Найдите градусную меру самого большего внешнего угла шестиугольника, если внутренние углы относятся как 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 7 ?

11. ABCDEK - правильный шестиугольник. Зная, что $\angle AFB = 100°$, AF = FB, найдите $\angle FBC$ = ?



12. Периметр квадрата 24 см. В квадрат вписана окружность, а в окружность вписан треугольник. Найдите периметр треугольника.



13. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей в прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см.

A) 3 см и 2 см B) 5 см и 2 см C) 5 см и 3 см D) 4 см и 3 см

14. Пол киоска имеет правильную 12-угольную форму. Расстояние от центра до вершины 12-угольника - 4 метра.

1) Найдите площадь пола киоска.

2) Доски каждой с площадью 0,2 м^2 продаются по 10 штук в упаковках . Если известно, что 4% материала идет на отход, сколько таких упаковок доски нужно для пола киоска?

15. Установите соответствие.

1) пятиугольник	A) Из одной вершины исходят 6 диагоналей.
2) семиугольник	B) Из одной вершины исходят 4 диагоналей.
3) девятиугольник	C) Число всех диагоналей равно 5.
	D) Число всех диагоналей равно 14.

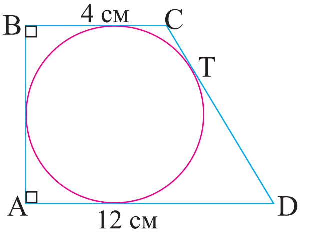
16. Найдите радиусы окружностей вписанной и описанной около равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

17. Во внутрь трапеции с основаниями 4 см и 12 см вписана окружность.

a) Найдите радиус окружности

b) Окружность точкой касания отрезки делит боковую сторону с большей длиной?

c) Найдите площадь трапеции.



7 Неравенства

Таблица планирования по 7 разделу.

<table>
<tr><th>Стандарты содержания</th><th>Урок №</th><th>Тема</th><th>Поуроч-ные часы</th><th>Учебник стр.</th></tr>
<tr><td rowspan="8">2.1.2. Записывает и решает данное предложение в виде системы двух линейных неравенств с одной переменной.
2.2.3. Решает квадратное неравенство.
2.3.1. Решает алгебраические неравенства методом интервалов.</td><td>98-100</td><td>Система линейных неравенств.
Совокупность неравенств</td><td>3</td><td>139-142</td></tr>
<tr><td>101-102</td><td>Неравенства с модулем</td><td>2</td><td>143-144</td></tr>
<tr><td>103-106</td><td>Квадратные неравенства</td><td>4</td><td>145-152</td></tr>
<tr><td>107-109</td><td>Метод интервалов</td><td>3</td><td>153-156</td></tr>
<tr><td>110-111</td><td>Иррациональные неравенства</td><td>2</td><td>157-158</td></tr>
<tr><td>112-113</td><td>Обобщающие задания</td><td>2</td><td>159-160</td></tr>
<tr><td>114</td><td>Задания суммативного оценивания по разделу 7</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Всего</td><td>17</td><td></td></tr>
</table>

Стандарты содержания

2.1.2. Записывает и решает данное предложение в виде системы двух линейных неравенств с одной переменной.
2.2.3. Решает квадратное неравенство.
2.3.1. Решает алгебраические неравенства методом интервалов.

Формирующие ученические навыки.

- *Систему неравенств отличает от совокупности неравенств и решает*;
- *Решает неравенства с модулем*;
- *Решает алгебраически и графически квадратные неравенства*;
- *Решает алгебраические неравенства методом интервалов*;
- *Решает иррациональные неравенства.*

Математический словарь

- линейное неравенство с одной переменной
- система неравенств
- совокупность неравенств
- неравенства с модулем
- квадратные неравенства
- метод интервалов
- иррациональные неравенства

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы, игровые карты
Граф калькулятор:
https://mathway.com/graph
http://www.meta-calculator.com/online,
https://www.desmos.com

Неравенства

В учебнике тема неравенств была рассмотрена в нижеследующих направлениях и для обчения было запланировано 17 часов.

Система линейных неравенств.
Совокупность неравенств.

Неравенства с модулем.

Квадратные неравенства.

Решение неравенств методом интервалов.

Иррациональные неравенства

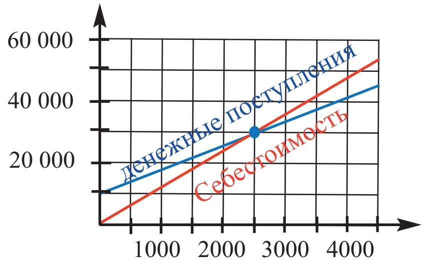
Предпочтение дается решению неравенств графическим способом. Рекомендуется систематически уделять внимание навыкам учеников изображать графики линейных либо квадратичной функций. Эти способности реализируется определением необходимых важных точек и технологическими способностями, графкалькулятором отмечая эти точки строит графики. Принимая во внимание все это для построения графика линейной функции координаты каких 2-х точек легко найти и достаточноли это для построения графика? Ведутся исследования вокруг этого вопроса, строятся примеры графиков линейных функций с разными знаками углового коэффициента. Исследуется деление координатной плоскости графиком линейной функции на две полуплоскости.

При решении неравенств с одной переменной ученик понимает требование определения значений x по графику соответственно заданному условию. А условие строится на значениях y.
Поэтому ученик должен соответственно ситуации уметь определять аргумент - независимую переменную (x), и функцию - зависимую переменную (y).

Задача. Один из туристических лагерей находится на высоте 300 м над уровнем моря, а другой -1500 м. Два туристических отряда начали одновременно двигаться навстречу друг-другу. Туристы из 1-го лагеря поднимаются, на высоту 3м за одну минуту, а туристы из 2-го лагеря спускается на 5 м, за минуту. Через сколько минут 1-ый отряд будет выше чем 2-ой?
Туристы отправившиеся в путь из первого лагеря минуту поднимаются на 3 метра, поэтому через x минут они будут на высоте $300 + 3x$.
А туристы отправившиеся в путь из второго лагеря за каждую минуту спускаются на 5 метров, поэтому через x минут они будут на высоте $1500 - 5x$.
Так как по условию 1-ый отряд выше второго, то можно написать следующее неравенство $300 + 3x > 1500 - 5x$
Отсюда имеем: $8x > 1200$, $x > 150$
То есть туристы,которые поднимаются вверх через 150 минут будут выше туристов,которые спускаются вниз.

Представление неравенства графическим способом широко используется при решении финансовых задач. По координатам точки пересечения графиков денежного поступления и себестоимости можно определить, начиная с какого момента появляется прибыль.

На рисунке даны графики денежного поступления и изменение себестоимости,в виде линейных функций. После продажи 2500 единиц затраты потраченные на себестоимость будут уже “возвращены”. Продажа 2501-ой единицы уже будет приносить доход.



Урок 98-100. Учебник стр. 139-142.
Система линейных неравенств. Совокупность неравенств. 3 часа.

- Связывает с помощью соединительного союза “и” неравенства, образующие систему неравенств.
- Связывает с помощью союза “или” группу неравенств, образующие совокупность неравенств.
- Представляет множество решений системы и совокупности неравенств.

! Ученики с 8-го класса знакомы с неравенствами связанными с соединительными союзами “и, или” и с их решениями. Например, нормальная температура тела должна быть между 35-37 градусами. Температурная норма для здорового человеческого тела: $35 < T < 37$
А какая температура тела показывает, что человек больной? Как можно выразить это неравенством? Человек считается больным, если температура тела ниже 35° или же равна 37° и если выше 37°. Это можно написать неравенством:
$T \geq 37$ или $T \leq 35$. А теперь, решим более сложные неравенства, соединяя их в систему с помощью соединительного союза “и”, используя фигурные скобки либо союзом “или” в совокупность неравенств с помощью скобки вида [.

Ученики исследуют возможность представления следующих неравенств в виде системы или же совокупности неравенств.

$7 < 4 + x < 8$
$-1 < 2x + 3 \leq 13$

$4x - 1 > 7$ или $5x - 1 < -6$
$2x + 3 < -1$ или $3x - 5 > -2$

Неравенства построенные соединительным союзом “и”.

$7 < 4 + x < 8$

$$\begin{cases} 4 + x < 8 \\ 4 + x > 7 \end{cases}$$

$-1 < 2x + 3 \leq 13$

$$\begin{cases} 2x + 3 \leq 13 \\ 2x + 3 > -1 \end{cases}$$

Неравенства построенные соединительным союзом “или”.

$4x - 1 > 7$ или $5x - 1 < -6$

$$\left[\begin{array}{l} 4x - 1 > 7 \\ 5x - 1 < -6 \end{array}\right. \quad \ldots \text{ и т.д.}$$

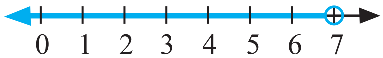
При анализе многих реальных жизненных и математических ситуаций требуется решить систему или совокупность неравенств. Ученики придумывают примеры на систему и совокупность.

Математическая ситуация. Если выражение состоит из нескольких корней с четными показателями корней, то каждое подкоренное выражения не может быть отрицательным. Если неравенство отражает условие отрицательности произведения двух многочленов, то это условие выполняется при противоположных знаках многочленов - это пример совокупности неравенств. Рекомендуется проводить с учениками обобщение такого типа примеров.

! Решением системы неравенств является пересечение множеств решений неравенств входящих в систему. А решением совокупности неравенств является объединение множеств решений неравенств, входящих в эту совокупность. Ученики, изображают решение геометрически на числовой оси. Эти навыки ученики приобрели в 8-ом классе.

Графическое изображение системы неравенств.

$x \geq 3$ 

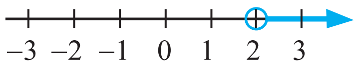
$x < 7$ 

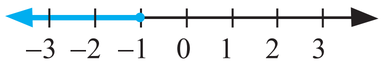
$3 \leq x < 7$ 

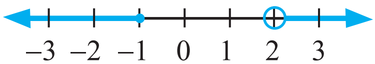
$\begin{cases} x < 7 \\ x \geq 3 \end{cases}$

Графическое представление совокупности неравенств

На числовой оси изображены действительные числа, которые больше 2-х или меньше - 1.

$x > 2$ 

$x \leq -1$ 

$x > 2$ или $x \leq -1$ 

$\left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$

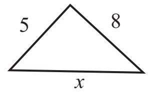
? **У.8.** Если к удвоенному произведению целого числа прибавить половину числа, то сумма будет меньше 92. Если же от удвоенного произведения этого числа отнять половину числа разность будет больше 53. Найдите это целое число.

Решение: $\begin{cases} 2x + \dfrac{x}{2} < 92 \\ 2x - \dfrac{x}{2} > 53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 36{,}8 \\ x > 35\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad x = 36$

У.9. Решение: По условию задачи $\begin{cases} 6{,}48 + 0{,}2x \leq (10{,}8 + x) \cdot 0{,}4 \\ 6{,}48 + 0{,}2x \geq (10{,}8 + x) \cdot 0{,}3 \end{cases}$

Решая эту систему неравенств, находим: $x \geq 10{,}8$ и $x \leq 32{,}4$. Значит, из второго раствора нужно перемещать не меньше 10,8 кг и не больше 32,4 кг.

У.10. Одна сторона треугольника равна 5 м, а другая 8 м. Скольким метрам может быть равна длина третьей стороны, если периметр треугольника меньше 22 м?



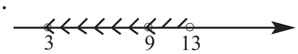
Решение:

$P = 5 + 8 + x < 22, \quad x < 22 - 13 < 9, \quad x < 19$

С другой стороны - сторона треугольника должна быть меньше суммы двух других сторон и больше модуля разности этих сторон:

$|5 - 8| < x < 5 + 8 \Rightarrow 3 < x < 13$

Из полученных этих двух неравенств получаем, что длина третьей стороны (в метрах) будет любое число взятое из промежутка (3; 9).



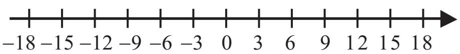
Рабочий лист № 1

- *Связывает с помощью союза “и” неравенства образующие систему неравенств;*
- *Связывает с помощью союза “или” неравенства, образующие совокупность неравенств;*
- *Представляет множества решений системы и совокупности неравенства.*

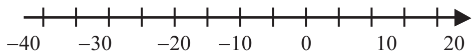
Имя________ **Фамилия**__________ **Число**________

Напишите неравенства в виде системы или совокупности, решите и представьте на числовой оси.

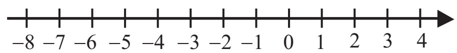
1) $x+9>6$ или $x\le -9$



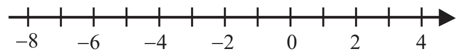
2) $x-2\le 8$ или $\frac{x}{7}>-5$



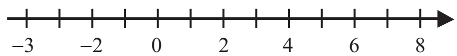
3) $4x<8$ или $\frac{x}{3}\le -2$



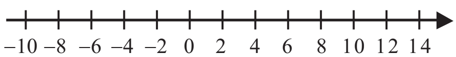
4) $x+11>9$ или $8x\ge -24$



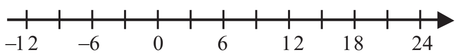
5) $\frac{x}{2}\le 1$ или $x+9>14$



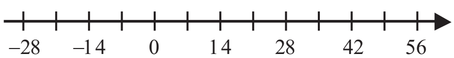
6) $-4<2x\le 16$



7) $3\le x-6<18$



8) $x\ge 0$ или $\frac{x}{2}>7$



Рабочий лист № 2

Имя_______   Фамилия_______   Число_______

● *Решает задачи при помощи системы и совокупности неравенств.*

Составьте неравенства по условиям задач данным ниже.

1) Каждый вид рыбы растет при определенной температуре. Для акул это температура между 18 и 22 градусами. Напишите неравенством температуру, при которой акулы не развиваются.

2) Примерно 20% от времени на сон уходит на размышление с закрытыми глазами. Если нормальное время сна составляет 7-8 часов, то сколько часов от времени на сон уйдет на размышление.

3) Сумма учетверенного произведения каких чисел с 8 расположено между числами 0 и 12?

4) Воспользуясь интернетом найдите размеры слоев земной атмосферы - тропосферы, стратосферы, мезосферы, термосферы, экзосферы и объясните функцию каждого слоя.
Напишите неравенства соответствующие размерам атмосферных слоев. Нижеследующий линк является для вас полезным источником.
Http://www.enchantedlearning.com/subjects/astronomy/planets/earth/atmosphere.shtml

5) Оценочные баллы Наргиз по биологии - 72, 82, 83 и 89. В качестве итоговой оценки выводится средней бал. Оценка C между 77-84 баллами. Получит ли Наргиз по биологии C?

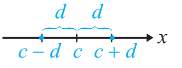
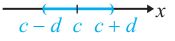
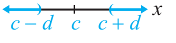
6) Произведение какого числа на 1,5 меньше нуля, больше минус трех или равен минус трем?

7) Магазин предлагает скидку на 30 манат на все цветные принтеры. Сеймур хочет купить цветной принтер. Цена принтеров меняется от 175 манат до 260 манат. В каком промежутке попадут цены после скидки?

Урок 101-102. Учебник стр. 143-144. Неравенства с модулем. 2 часа.

- Выражая неравенства с модулем в виде системы и совокупности неравенств, решает алгебраическим способом;
- Пользуясь графиком функции $y = |x|$ решает графически неравенства с модулем.

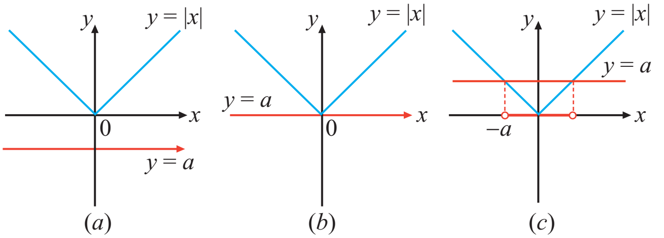
В таблице данной в учебнике исследуется как при различных видах модульных неравенств, пользуются системами и совокупностями неравенств. Чтобы лучше понять это, рекомендуется пользоваться геометрическими изображениями.

Математическая запись	***Это означает, что..***		
$\lvert x-c\rvert = d$	*расстояние между точками* x и c *равно* d.	$\{c-d;\ c+d\}$	
$\lvert x-c\rvert < d$	*расстояние между точками* x и c *меньше* d	$(c-d;\ c+d)$	
$\lvert x-c\rvert > d$	*расстояние между точками* x и c *больше* d.	$(-\infty;\ c-d) \cup (c+d;\ +\infty)$	

Рекомендуется исследовать решение модульных неравенств как показано ниже:

Решение неравенства $|x| < a$ в зависимости от знака a может быть разным.

1) $a < 0$ 2) $a = 0$ 3) $a > 0$



(*a*) (*b*) (*c*)

1) *Прямая* $y = a$ *расположена ниже оси абсцисс. Неравенство не имеет решений. Абсолютная величина не может быть отрицательным.*

2) *В этом случае прямая* $y = a$ *совпадает осью* x. *А функция* $y = |x|$ *не имеет такого значения, чтобы была бы ниже оси* x. *В этом случае неравенство не имеет решений*

3) *В этом случае прямая* $y = a$ *находится выше оси абсцисс и пересекает график функции* $y = |x|$ *в двух точках:* $-a$ *и* a. *График расположен на промежутке* $(-a;\ a)$ *ниже прямой* $y = a$ *Значит, это неравенство верно при* $-a < x < a$.

? Решения некоторых задач данных в учебнике.

У.1. а) $|5x+3| - 4 \geq 9$. Запишем данное неравенство в виде: $|5x+3| \geq 13$

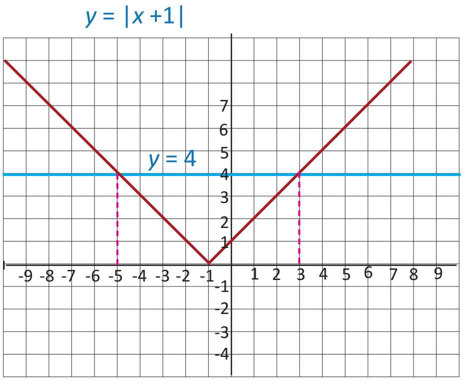
Решение неравенство $|5x+3| \geq 13$ приводится к решению совокупности: $\left[\begin{array}{l} 5x+3 \geq 13 \\ 5x+3 \leq -13 \end{array}\right.$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} 5x \geq 10 \\ 5x \leq -16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -3{,}2 \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -3{,}2] \cup [2;\ +\infty)$

В задании **У.3.** ученик понимает что график функции $y = |x + 1|$ строится смешением графика функции $y = |x|$ на 1 единицу налево. По графику функции $f(x) = |x + 1|$ определяет решение данного уравнения и неравенства не производя никаких вычислений.

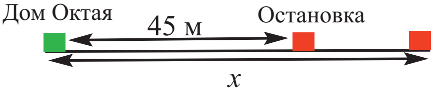


1) Решение уравнения $|x + 1| = 4$ определяется по абсциссам точек пересечения графиков функций. По клеткам видно, что этими точками являются $x = -5$ и $x = 3$

2) Неравенство $|x + 1| < 4$ верно при $-5 < x < 3$

3) А неравенство $|x + 1| > 4$ верно при $x < -5$ или же при $x > 3$. Множество решений: $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$. Как видно, задание выполняется при помощи навыков чтения графической информации. Поэтому рекомендуется, периодически уделять внимание графическому способу проверки решения

У.5. Автобусная остановка находится на расстоянии 45 м от дома Октая. Планируется переместить остановку от нынешнего местоположения на расстояние не более 30 м. Покажите неравенством расстояние от новой остановки до дома Октая.



Решение: Если расстояние от дома Октая до новой остановки равно x, тогда расстояние от новой до старой остановки будет $|x - 45|$. По условию это расстояние может быть не более 30. То есть $|x - 45| \leq 30$

У.6. b) решим неравенство $|w - 519{,}5| < 12{,}5$.

$-12{,}5 < w - 519{,}5 < 12{,}5$.

$507 < w < 532$

Так как длина световой волны удовлетворяет неравенство $507 < w < 532$, по таблице находим, что в этом случае при сгорании вещества получается зеленый свет.

Для того чтобы провести формативное оценивание навыков решения модульных неравенств приготавливаются карты с математической записью модульных неравенств, со словесной записью и с геометрическим изображением. Каждой группе выдается набор карт.

Члены группы приклеивают на белый лист бумаги в один ряд, карты выражающие одинаковые модульные неравенства.

Примеры игральных карт

$\lvert x + 5\rvert \leq 4$	**множество точек, расстояние которых от –5-ти меньше 4-х или равно 4-ем**	
$x - 5 > -4$ и $x - 5 < 4$	**множество точек, расстояние которых от 5-ти меньше 4-х**	
$\lvert x + 5\rvert \geq 4$	$x + 5 \leq -4$ или $x + 5 \geq 4$	
$\lvert x + 4\rvert \geq 5$	**множество точек, расстояние которых от –4-х больше 5 или равен 5.**	$x + 4 \leq -5$ или $x + 4 \geq 5$

Примеры игральных карт (продолжение)

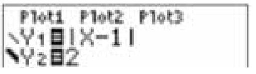
$\lvert 2x - 1\rvert \leq 7$	**Множество точек расстояние которых от $\frac{1}{2}$ - ой меньше $\frac{7}{2}$ -х, или равно $\frac{7}{2}$-х**	
$2x - 1 \leq -7$ или $2x - 1 \geq 7$	$\lvert 2x - 1\rvert \geq 7$	**Множество точек расстояние которых от $\frac{1}{2}$ - ой больше $\frac{7}{2}$, или равно $\frac{7}{2}$**
	$2x + 1 \leq -7$ или $2x + 1 \geq 7$	$\lvert 2x + 1\rvert \geq 7$
Множество точек расстояние которых от 2-х меньше 7, или равно 7.		$x - 2 \geq -7$ и $x - 2 \leq 7$

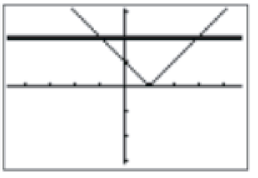
Рабочий лист № 3

Имя_______ **Фамилия**_______ **Число**_______

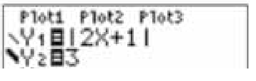
● *Модульные неравенства решает графическим способом используя график функции* $y = |x|$.

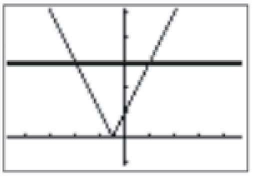
На рисунке даны записи на экране графкалькулятора и изображенные им графики. Напишите в соответствующих ячейках таблицы по каждой картине одно модульное уравнение, два модульных неравенства и их решение.

1.




Уравнение с модулем	Неравенство 1	Неравенство 2
Множество решений с интервалом	Множество решений с интервалом	Множество решений с интервалом
Графическое решение	Графическое решение	Графическое решение

2.




Уравнение с модулем	Неравенство 1	Неравенство 2
Множество решений с интервалом	Множество решений с интервалом	Множество решений с интервалом
Графическое решение	Графическое решение	Графическое решение

Урок 103-106. Учебник стр.145-152 Квадратные неравенства. 4 часа.

- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \leq 0$
- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c \geq 0$
- Решает задачи на квадратные неравенства.

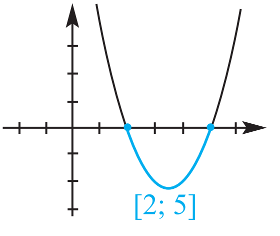
Данные неравенства решаются разными способами:
- графическим способом
- методом интервалов

Способы решения квадратных неравенств исследуются в той последовательности, в которых даны в учебнике. Рекомендуется одно и то же квадратное неравенство решить разными способами и сравнить решения. Эти задания удобны для работы в группах. Еще раз проверяются навыки построения графика квадратичной функции.

1-2-ой час. Графическое решение неравенства $x^2 - 7x + 10 \leq 0$:

Доводится до внимания, что выражение $x^2 - 7x + 10$ может принимать положительные, отрицательные значения и нуль. В данном неравенстве должны определить при каком значении x значение данного выражения меньше, либо равно нулю.

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x - 5)(x - 2) = 0$$
$$x = 5,\ x = 2$$



Осью симметрии будет прямая $x = 3{,}5$. Строится парабола. Нас интересует значения x, при которых выражение $x^2 - 7x + 10$ будет меньше либо равно 0. Из графика видно, что на отрезке [2; 5] это условие выполняется.

Задается вопрос: Определите по графику, при каких значениях x значение этого выражения будет положительным? Ответ ученика: При значениях $x < 2$ или при $x > 5$

Шаги решения квадратного неравенства:

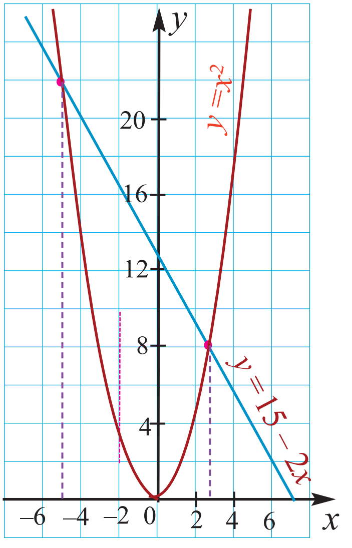
1. Постройте график функции $y = ax^2 + bx + c$ соответствующий неравенству.
2. Отметьте точки пересечения графика функции с осью абсцисс.
3. По графику определите при каких значениях аргумента x, значения функции y будут положительными, а при каких - отрицательными.
4. Выберите множество значений x, соответствующий неравенству.

Выполняются решение задач данных в учебники.

3-ий час. Обсуждается решение квадратных неравенств алгебраическим методом разложив левую часть на множители и по знаку неравенства исследуя возможные случаи. Решается квадратные неравенства построением графиков квадратичной и линейной функций в одной систем координат.

Решения некоторых задач данных в учебнике.

У.20. 1) а) 1) а) $x^2 \le 15 - 2x$



Для того, чтобы решить неравенство графически, в одной системе координат построим графики функций $y = x^2$ и $y = 15 - 2x$.

Как видно из графика при любом значении x из промежутка $[-5 ; 3]$ ордината точки на графике функции $y = x^2$ не больше соответствующей ординаты функции $y = 15 - 2x$. А это означает, что при всех значениях x из промежутка $[-5; 3]$ неравенство $x^2 \le 15 - 2x$ верно.

2) а) $x^2 \le 15 - 2x \Rightarrow x^2 - 15 + 2x \le 0$ или
$x^2 + 2x - 15 \le 0 \Rightarrow (x + 5)\,(x - 3) \le 0 \Rightarrow$
$x \in [-5 ; 3]$

У.24. Решение: $T(x) = 0,005x^2 - 0,23x + 22$

а) Если $x = 16$, то $T(16) = 0,005 \cdot 16^2 - 0,23 \cdot 16 + 22 = 23,28 - 36,8 = 19,6$.
То есть продолжительность реакции 16-ти летнего водителя 19,6 терций

b) $x = 35$, $T(35) = 0,05 \cdot 35^2 - 0,23 \cdot 35 + 22 = 20,75$
Продолжительность реакции 35-ти летнего водителя 20,75 терций

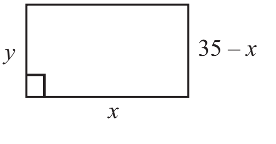
Проанализовав результаты пунктов а) и b) видим, что в продолжительность реакции водителей, в возрасти 16 и 35 лет, можно считать приблизительно равной.

У.26. Решение: $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$

а) Через сколько секунд мяч поднимется выше 16 м?
$-5t^2 + 20t + 1 > 16 \Rightarrow$
$-5t^2 + 20t - 15 > 0$ или
$t^2 - 4t + 3 < 0$ решим это неравенство.
Нули квадратного трехчлена в левой части неравенства $t_1 = 1$ и $t_2 = 3$. Приблизительно через 1 секунду от удара вверх и приблизительно через 3 секунды, когда возвращался на землю мяч окажется на высоте 16 м. При $t \in (1; 3)$ мяч будет на высоте выше 16 м.

b) В каком интервале времени мяч окажется на высоте не менее чем 1 метр?
Из неравенства $-5t^2 + 20t + 1 \ge 1$ получим $t^2 - 4t \le 0$. Корни уравнения $t^2 - 4t = 0$ числа 0 и 4. При $t \in [0; 4]$ имеем $t^2 - 4t \le 0$, т.е. в интервале времени $[0; 4]$ мяч окажется на высоте не менее чем 1 метр.

У. 28. Решение: $P = 2(x + y) = 70$, $x + y = 35$



$y = 35 - x$
$S = x \cdot y = x \cdot (35 - x) \ge 300$
$35x - x^2 \ge 300 \Rightarrow x^2 - 35x + 300 \le 0$
$x_{1,2} = 17,5 \pm 2,5$
$x_1 = 20$; $x_2 = 15$; $y_1 = 35 - 20 = 15$; $y_2 = 20$
$x^2 - 35x + 300 = (x - 20)\,(x - 15) \le 0$. Множество решений последнего неравенства промежуток $[15 ; 20]$.

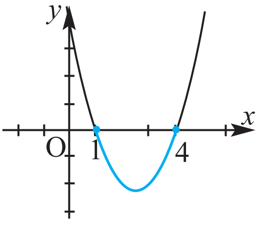
У. 29. Решение: $\dot{I} = \dfrac{m}{h^2}$. Здесь İ- индекс массы, m -масса человека (кг), h рост (м).
а) Каким должен быть масса человека с ростом 1 м 50 см, чтобы индекс массы был меньше 24. Учитывая сказанное имеем:

$$\frac{m}{h^2} < 24, \qquad h = 1{,}5 \text{ метр} \Rightarrow m < 24 \cdot 2{,}25, \qquad m < 54 \text{ кг}.$$

Урок 107-109. Учебник стр. 153-156.
Метод интервалов. 3 часа

- *решает алгебраические неравенства методом интервалов.*

По графическому решению квадратного уравнения ученики представляют свои суждения. Например, прислушиваются к мнению учеников по графическому решению неравенства $x^2 - 5x + 4 < 0$. Как видно, соответствующая парабола пересекает Ox в точках с абсциссами 1 и 4. С этими точками пересечений числовая ось разделена на 3 интервала, каждый из которых сохраняет знак функции постоянным, и в этих интервалах знак функции можно определить, выбрав любую пробную точку из этого интервала. На основании этих суждений обосновывается решение квадратного неравенства методом интервалов.



Последовательность решения неравенств алгебраическим методом

1. Если, возможно, упростите данное неравенство (освободите от скобок и дроби).
2. Оставьте в левой части неравенства многочлен, а в правой нуль.
3. Разложите левую часть на множители.
4. Найдите граничные точки.
5. Граничные точки отметьте на числовой оси.
6. Их каждого множества образованного граничными точками выберите одну пробную точку и проверьте неравенство.

Решим данное неравенство записывая в виде $(x-1)(x-4) < 0$.

Интервалы:	$(-\infty; 1)$	$(1; 4)$	$(4; +\infty)$	
Проверочное число:	-4	3	10	**Условие : <0**
$x-1$	-5	2	9	
$x-4$	-8	-1	6	
$(x-1)(x-4)$	$+$	$-$	$+$	**Условие : <0**
		$(1; 4)$		

Затем исследуется примеры на чередования знаков произведения в интервалах наглядным способом. В 3-м часе, отведенном на эту тему, выполняются задания, связанные с решением рациональных неравенств методом интервалов.

У.9. (стр. 156) **Решение. а)** Если стоимость одного стола примем x манат, то число проданных за недело столов будет $120 - x$. Тогда недельная прибыль будет $p(x) = (120 - x) \cdot x - 1800 - 10(120 - x)$. Упростив имеем: $p(x) = -x^2 + 130x - 3000$. Решим неравенство $-x^2 + 130x - 3000 > 0$

$x^2 - 130x + 3000 < 0$; $(x - 30)(x - 100) < 0$

Применяя метод интервалов, получим что решением неравенства будет промежуток (30; 100). Проверкой можно убедится, что при значениях вне этого промежутка торговля Гейдара будет убыточной.

b) выделив полный квадрат $p(x) = -x^2 + 130x - 3000 = -(x - 65)^2 + 1225$ находим, что при цены одного стола 65 манат максимальная прибыль будет 1225 манат, в этом случае за неделю будет продано 55 столов.

Урок. 110-113. Учебник. 157-160. Иррациональные неравенства. Обобщающие задания. 4 часа

● *Приводит решение иррациональных неравенств к решению эквивалентных неравенств или систем неравеств.*

Рассматривается решение простых иррациональных неравенств.

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод сведения исходного неравенства к равносильной системе рациональных неравенств или совокупности таких систем. При решении иррациональных неравенств следует помнить, что при возведении обеих частей неравенства в нечетную степень всегда получается неравенство, равносильное исходному неравенству. Если же обе части неравенства возводить в четную степень, то следует обратить особое внимание на множество допустимых значений переменного.

Решения некоторых задач данных в учебнике.

У.3. d) $\sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} > 2$

Решение. Находим ОДЗ по неравенствам $x - 3 \geq 0$ и $1 - x \geq 0$

Как видно система $\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases}$ неравенств не выполняется не при каких значениях переменной.

Значит, решением данного неравенства является пустое множество.

У.5. a) $\sqrt[3]{x-1} > 2$

Решение. С возведением обе части в 3-ю степень решение данного неравенства приводится к решению эквивалентного равенства $x - 1 > 8$, отсюда находим $x > 9$.

У.7. (стр. 159). Пусть I число x, II число y, тогда $x + y = 20$ и $y = 20 - x$

$$x^2 + y^2 < 208 \Rightarrow x^2 + (20 - x)^2 < 208$$

$2x^2 - 40x + 400 - 208 < 0$; $2x^2 - 40x + 192 < 0 \Rightarrow 8 < x < 12 \Rightarrow -8 > -x > -12$;

$-12 < -x < -8$ прибавим на обе части 20:

$$20 - 12 < 20 - x < 20 - 8 \Rightarrow$$

$$8 < 20 - x < 12 \Rightarrow 8 < y < 12$$

Ответ: если один из двух чисел 9, другой будет 11, или оба числа будут 10.

Рабочий лист № 4

Имя_______ **Фамилия**_______ **Число**_______

- *Решает квадратные неравенства разными способами.*

1. Решите квадратные *неравенства* алгебраическим способом.

1) $x^2 + x - 20 \leq 0$

2) $x^2 - 3x - 54 < 0$

3) $x^2 - 5x - 14 > 0$

4) $2x^2 - 4x - 30 \geq 0$

5) $3x^2 - 6x - 9 \geq 0$

6) $2x^2 + 9x - 5 < 0$

2. Разложите на множители, по знаку множителей определите множество решений.

a) $x^3 + 3x \leq 18$
b) $x^2 + 3 \geq -4x$
c) $4x^2 - 27x + 18 < 0$
d) $-6x \geq x^2 - 16$

3. Решите неравенства воспользуясь графиком соответствующей функции.

a) $x^2 + 14x + 48 \leq 0$
b) $x^2 \geq 3x + 28$
c) $-7x^2 + x - 6 \geq 0$
d) $4x\,(x^2 - 1) > 63$

Таблица критериев суммативного оценивания по разделу 7

№	Критерии	Замечания
1.	Решает графическим способом линейные неравенства	
2.	Различает и решает систему неравенств и совокупность неравенств	
3.	Решает алгебраическим и графическим способом неравенства с модулем	
4.	Решает алгебраическим и графическим способом квадратные неравенства	
5.	Решает методом интервалов алгебраические неравенства	
6.	Решает простые иррациональные неравенства	

Урок 114. Задания суммативного оценования по разделу 7.

1. Найдите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству. $|x-1| < 3{,}2$.

2. Напишите неравенство $-6 < x < 6$ с помощью знака модуля .

A) $|x| = 6$ B) $|x| \geq 6$ C) $|x| < 6$ D) $|x| \leq 6$

3. Решите неравенство $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2x-3} \geq 0$.

A) $(1{,}5; +\infty)$ B) $(-\infty; 1{,}5)$ C) $[1{,}5; +\infty)$ D) $(-\infty; 1{,}5]$

4. Найдите количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству:

$$\begin{cases} 5x-2 \geq 2x+7 \\ 4x+2 \geq 5x-10 \end{cases}$$

5. Найдите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству: $\dfrac{9-x^2}{|x+2|} \geq 0$

A) 0 B) 3 C) 1 D) 2

6. Решите неравенство: $x^2 > x^3$.

A) $(-\infty; 1]$ B) $(-\infty; 1)$ C) $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$ D) $(1; +\infty)$

7. При каком наибольшим значении “b” число 4 будет принадлежать множеству решений неравенства $2x^2 + bx - 54 \leq 0$?

8. При каких значениях a трехчлен $ax^2 - 4ax + 4$ принимает только положительные значения при любом x?

A) $(0; 2)$ B) $(0; 1)$ C) $(-1; 0)$ D) $(1; +\infty)$

9. Решите неравенство $\dfrac{x^2+4}{x} \leq 4$:

A) $(-\infty; 0) \cup \{2\}$ B) $[2; +\infty)$ C) $(-\infty; 2]$ D) $(-\infty; 2)$

10. При каком значении “b” уравнение $2x^2 + bx + 2 = 0$ не имеет действительных корней ?

11. При каком значении “k” уравнение $3x^2 + kx + 3 = 0$ имеет два различных корня?

12. Решите: a) $|2x - 1| \leq 3$; b) $\big||x + 1| - 3\big| < 4$

13. Одна сторона треугольника 6 см, другая 9 см. Чему может быть равно наибольшее и наименьшее целое значение третьей стороны (в сантиметрах), если периметр треугольника меньше 25 см?

14. Зависимость высоты мяча после удара (в метрах) от времени t (в секундах) задается формулой $h(t) = -5t^2 + 20t$.
a) На какой секунде мяч будет на высоте более 15 м над землей?
b) На какой секунде мяч будет на высоте менее 15 м над землей?

15. Установите соответствие.

1. $x^2 < 9$	a) наименьшее целое решение равно 0.
2. $x^2 < 9x$	b) наименьшее целое решение равно 1.
3. $x^2 \leq 3x$	c) наибольшее целое решение равно 3.
	d) сумма целых решений равно 0.

16. Решите неравенство $\dfrac{1}{x-1} \leq 1$.

17. Решите неравенства

a) $\sqrt{2x-3} < 1$ b) $\sqrt{3-x} \geq 2$

8 Векторы

Таблица планирования по 8 разделу.

Стандарты	Урок №	Тема	Число часов	Учебник стр.
3.1.5. Применяет в математических и физических задачах понятие вектора на плоскости, правила сложения, вычитания и умножения вектора на число 3.2.1. Знает понятия параллельного переноса на плоскости и применяет его для преобразования фигур. 3.2.2. Знает понятие преобразование движения и получает две конгруэнтные фигуру преобразованием движения. 4.1.1. Преобразовывает производные единицы измерений друг в друга. 4.2.1. Проверяет соответствие полученных результатов при помощи практических измерений. .	115	Векторы	1	162-163
	116-117	Векторы на декартовой координатной плоскости	2	164-166
	118-119	Направление вектора, Угол наклона. Тригонометрические отношения и компоненты вектора	2	167-170
	120-123	Сложение и вычитание векторов. Сложение векторов, заданных компонентами	4	171-178
	124- 125	Умножение вектора на число. Действия над векторами, заданными компонентами	2	179-181
	126-129	Параллельный перенос. Движение и конгруентные фигуры,	4	182-187
	130-131	Обобщающие задания	2	188-189
	132	Задания суммативного оценивания по разделу 8	1	
		Всего	18	

Стандарты содержания

3.1.5. Применяет в математических и физических задачах понятие вектора на плоскости, правила сложения, вычитания и умножения вектора на число.

4.1.1. Преобразовывает производные единицы измерений друг в друга.

4.2.1. Проверяет соответствие полученных результатов при помощи практических измерений.

Формирующие ученических навыков

- *Различает скалярные и векториальные величины;*
- *Рисует вектор по данному направлению и данной длине;*
- *Определяет модуль и направление вектора по заданным измерениям;*
- *Изображает вектор на координатной плоскости;*
- *Выражает вектор компонентами.*
- *Определяет длину и направление вектора.*
- *Разными способами складывает и высчитывает векторы;*
- *Решает задачи на умножение вектора на число;*
- *Решает разные задачи на векторы;*
- *Размеры нарисованного изображения с определенным масштабом, приводит в соответствие к реальным, согласно данному масштабу.*

Словарь:

Вектор, коллинеарные векторы, начальная точка, конечная точка, направление вектора, стандартное положение, модуль вектора, параллельные векторы, равные векторы, противоположные векторы, ноль-вектор, компоненты вектора, результирующий вектор

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

Интернет-адреса:
http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/WindTunnel/Activities/vectors.html

Урок 115. Учебник стр. 162-163 Векторы

Мотивация. В информации о погоде мы слышим информацию нижеследующего содержания.

Завтра температура воздуха будет +13 градусов, будет дуть северо-западный ветер со скоростью 15 км/час.

Как вы думаете, почему в прогнозе о температуре дается одна единица измерения, а о скорости ветра две? Ученики используя знания по физике, отвечают на этот вопрос.

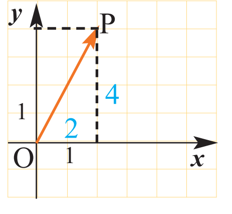
Ученики высказывают мнения о том, являются ли скалярными или векториальными величинами: пройденный путь, перемещение, температура, скорость, ускорение, различные виды сил - сила тяжести, сила притяжения, сила трения, гравитационная сила и др. давление, масса и др. Доводится до внимания, что масса и вес различные физические величины. Например, массу своего тела определяют с помощью весов. В это время масса находится под воздействием силы (гравитационная сила) , направленнего к центру Земли с ускорением 9,8 м/сек^2. Так как гравитационная сила на разных планетах разная, то и вес меняется. Модуль вектора и его направления исследуются на определенных физических величинах.

Отмечается важность последовательности букв, которыми обозначены начало и конец вектора. Например, обозначение $\overrightarrow{AB}$ означает, что A - начало вектора, а B - конец, то есть вектор направлен от точки A в точку B.
А вектор $\overrightarrow{BA}$ наоборот, направлен от точки B в точку A.
В задании **У.3.** ученик определяет модуль вектора по числу клеток. В центре внимания держится то, как выполняется практическое задание всеми учениками. Эти навыки имеют важное значение и для последующих уроков. На всех запланированных уроках на векторы применяются навыки изображения вектора по данной модулю и направлению и наоборот, измеряя линейной и транспортиром по данному изображению вектора – определение направления и модуля.

https://trigonometry.wikispaces.hcpss.org/Unit+1+Geometric+Vectors
ttp://www.mathwarehouse.com/vectors/
http://www.analyzemath.com/vector_calculators/magnitude_direction.html
http://www.onlinemathlearning.com/vector-subtraction.html
http://www.onlinemathlearning.com/vector-addition.html
http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/WindTunnel/Activities/vectors.html

Урок 116-117. Учебник стр.164-166.
Векторы на декартовой координатной плоскости. 2 часа

- По координатам изображает вектор на координатной плоскости;
- Понимает, что вектор состоит из вертикальных и горизонтальных компонентов;
- Запись вектора компонентами объясняет изображением на координатной плоскости;
- Понимает существование бесконечного числа векторов с одинаковыми компонентами в зависимости от координат начальной точки;
- Применяя формулу расстояния между двумя точками находит модуль вектора;
- Решает разные задачи на компоненты вектора.

а)


Исследуются задания данные в учебнике. При выражении вектора, изображенного на координатной плоскости компонентами, обращается внимание на масштаб на осях x и y, масштабы могут быть даны по разному. Запись вектора $\overrightarrow{OP}$, показанного на рисунке компонентами, будет: $\overrightarrow{OP}\langle 2; 4\rangle$

Задания охватывают навыки записи вектора компонентами, вычисления расстояние между двумя точками, а также по данным компонентам и данным координатам начала или конца определение неизвестной координаты. Даны образцы решений задач разных типов, приведенных в учебнике. Рекомендуется выполнение этих образцов учениками в классе письменно.

Дополнительно можно решить задачи на применение компонентов вектора и теоремы Пифагора.

Эти задачи были даны в Рабочем листе № 1.

Рабочий лист № 1

Имя______ Фамилия___________ **Число _____________**

● *Выражает вектор компонентами.*

1. По следующим данным выразить вектор компонентами.

a) Скорость 35 м/сек, на восток

b) Скорость 12 м/сек, на запад

c) Скорость 8 м/сек, на север

d) Перемещение 8 м на юг

2. Айдын пройдя 20 км из дому на север, затем 15 км на восток дошел до озера. Вычислите расстояние от дома Айдына до озера по его перемещению.

Урок 118-119. Учебник стр. 167-170. Направление вектора. Угол наклона. Тригонометрические отношения и компоненты вектора. 2 часа

• Для вычисления направления вектора использует тригонометрические отношения.

• Выражая через тангенс находит соответствующий угол.

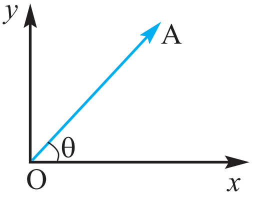
• Направление вектора определяет по углу образованному положительным направлением оси Ox;

• Решает задачи на направление вектора.

• Компоненты вектора выражает тригонометрическими отношениями;

• Воспользуясь тригонометрическими отношениями решает задачи на векторы.

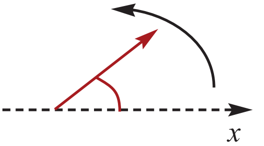
Задачи на направление вектора, во многих случаях определяются указанием положения вектора, которое называется стандартным положением вектора. Вектор стандартного положения - это вектор, начальной точкой которого является начало координат. За направление вектора принимается угол, образованный положительным направлением оси Ox. На рисунке OA - стандартный вектор.



В заданиях учебника, для определения направления вектора пользуются такими понятиями как:

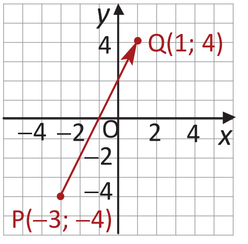
1) Направо, налево, вверх, вниз, запад, восток, север, юг, что используют в ежедневной жизни.

2) По стандартному положению, то есть по углу образованного с осью Ox.



? Задачи были даны на выражение разных направлений вектора и на взаимные преобразования между этими формами выражения.

У.13 а) Определите модуль и направление вектора.
Решение: Напишем вектор $\overrightarrow{PQ}$ компонентами:



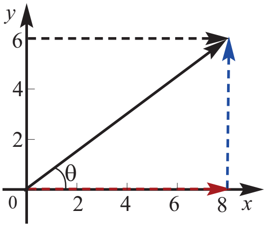
$\overrightarrow{PQ} = \langle 1-(-3);\ 4-(-4)\rangle = \langle 4;\ 8\rangle$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

$\tan\theta = \dfrac{8}{4} = 2 \qquad \theta \approx 64^{\circ}$

При нахождение компонентов вектора, а также в задачах на определение равнодействующего вектора широко используется тригонометрические отношения. Если движение выражается одним вектором, то воспользуясь прямоугольным треугольником, компоненты легко выразить тригонометрическими отношениями.

Перемещение по оси x:	$\cos\theta = \dfrac{d_x}{d}$	$d_x = d\cos\theta$
Перемещение по оси y:	$\sin\theta = \dfrac{d_y}{d}$	$d_y = d\sin\theta$

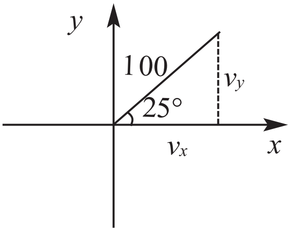


У.20. Решение: $\sin 25^{\circ} = \dfrac{v_y}{100}$ $\qquad \cos 25^{\circ} = \dfrac{v_x}{100}$

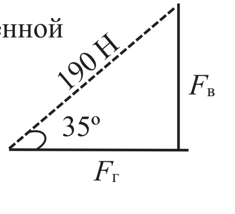
Отсюда:

$v_y = 100 \cdot \sin 25^{\circ} \approx 0{,}4226 \cdot 100 = 42{,}26$ (км/час)

$v_x = 100 \cdot \cos 25^{\circ} \approx 0{,}9063 \cdot 100 = 90{,}63$ (км/час)



У.23. Решение: Горизонтальная компонента силы приложенной Гюльнар $F_г = 190 \cdot \cos 33^{o} \approx 190 \cdot 0{,}84 = 159{,}35$ Н
вертикальная компонента
$F_в = 190 \cdot \sin 33^{o} \approx 190 \cdot 0{,}54 \approx 103{,}48$ Н

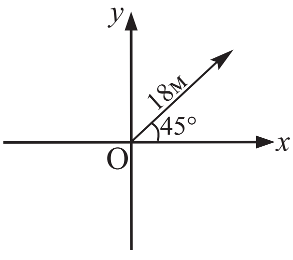


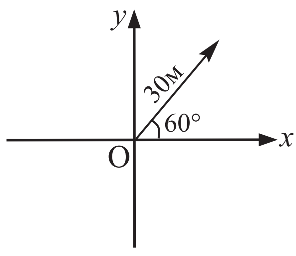
Рабочий лист № 2

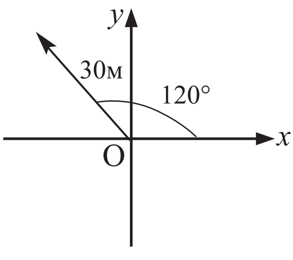
Имя______ Фамилия____________ Число _____________

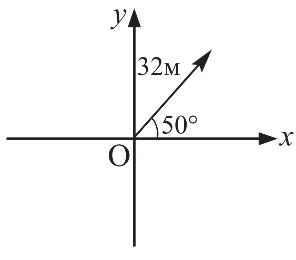
- Направление вектора определяет по углу образованному положительным направлением оси *Ox*.

1) Напишите векторы с компонентами.



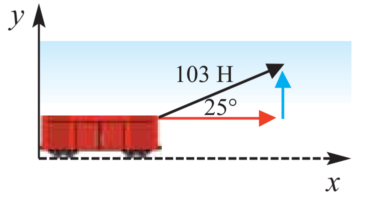






2) Найдите горизонтальную и вертикальную компоненту скорости самолета.

3) Найдите горизантальную и вертикальную компоненту силы, приложенной к вагону.



Урок 120-123. Учебник стр.171-178. Сложение и вычитание векторов. Сложение векторов, заданных компонентами. 4 часа

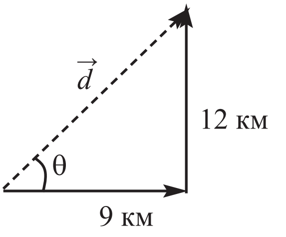
• Для сложения и вычитания векторов пользуется
- графическим способами;
- Правилом треугольника (правило многоугольника);
- Правилом паралелограмма.

• Используя компоненты вектора складывает их;
• При сложении векторов применяет свойство действия сложения;
• Решает задачи на сложение векторов.

! 1. Первоначально выполняется сложение коллинеарных векторов. Ученик должен с помощью линейки измерить длины данных векторов, определить модуль и направление результирующего вектора. Отмечается важность выполнения измерения с малой погрешностью, правильного определения направления результирующего вектора .

Задания **У.1** ясно показывает роль направления, сложения и вычитания векториальных величин в реальных ситуациях. В игре с веревками были применены две силы с противоположными направлениями (и эти силы состоят из суммы сил отдельных игроков). В какую сторону сила тяги будет большей, перемещение всех остальных игроков будет в этом же направлении. Особое внимание уделяется навыком графического изображения вектора по модулю и направлению. Это, наряду с развитием пространственных представлений, создает возможность наглядно представить себе складываемые векторы и модуль результирующего вектора. Остаются во внимании навыки выбора учеником для данных измерений. Рекомендуется устно провести проверку с несколькими образцами. Например, как выберете масштаб, чтобы изобразить графически перемещение в 1000 км, силу в 10 Н, скорость 60 км/час?

Ученики понимают, что сложение и вычитание коллинеарных векторов похожи на правила сложения и вычитания над числами. Правила сложения неколлинеарных векторов объясняется графическими и в центре внимания остаётся уровень выполнения всеми учениками.



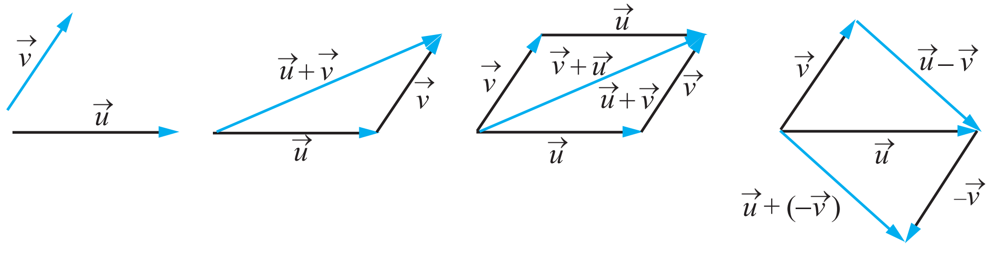
Правило треугольника. Объясняется, что невозможно найти равнодействующего вектора, показывающего движение 9 км на восток и 12 км на север, по правилу сложения целых чисел. Этот вектор - вектор соединяющий начальную точку с конечной точкой движения, и его длину можно найти применив геометрические свойства.

1. Для того, чтобы найти модуль равнодействующего, применяем теорему Пифагора: $d = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$
2. Направление определяем тригонометрическим отношением.
$\tan\theta = 12/9 \quad \theta \approx 80°$

Равнодействующий вектор показывает изменение места конечной точки по отношению к начальной на 15 км в направлении северо-востоко (под углом наклона 80°).

При сложении векторов геометрическими способами - правилам треугольника или правилом параллелограмма очень важно обратить внимание на направление векторов. Не имеет значение какой вектор нарисован первым, а какой вторым. Потому, что при сложении векторов верны свойства сложения.

Сложении векторов **Вычитание векторов**



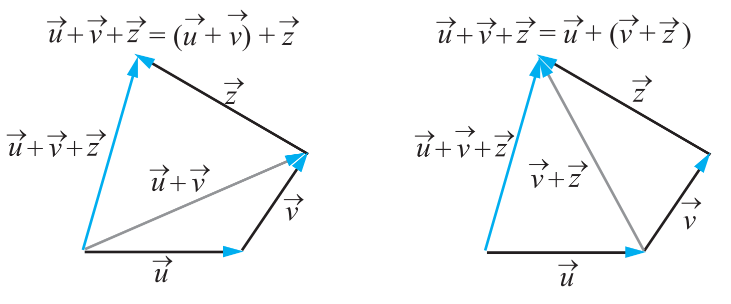
Рассматривается сложение и вычитание векторов по правилу треугольника и паралеллограма.

До сведения учеников доводится выполнение сложения векторов графически путем измерения. Чтобы сложить векторы заданные изображением:

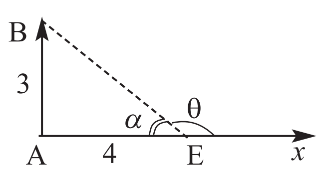
- мы должны измерить каждый из них
- соответственно этим изображениям, рисуем измеренные векторы, соединяя конечную точку одного вектора с начальной точкой другого.
- соединяем начальную и конечную точки.

Равнодействующий вектор выражает изменение конечной точки относительно начальной модулем и направлением.

сложение несколь-ких векторов



? Решения некоторых заданий, данных в учебнике

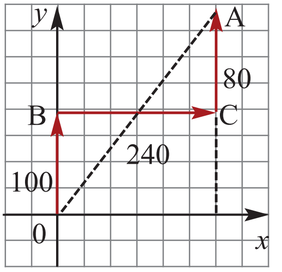


У.6. **Решение:** a) $\vec{EA}+\vec{AB}=\vec{EB}$

$|\vec{EB}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\tan\alpha=\frac{3}{4}=0{,}75 \quad \alpha\approx 37^\circ,\ \theta\approx 143^\circ.$

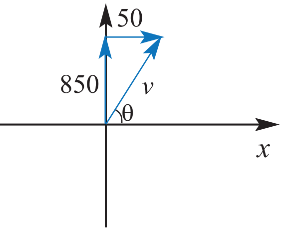
b) Премещение всадника: 5•100 = 500 м.



У.7. Расстояние OA найдем по теореме Пифагора.
$|OA| = \sqrt{240^2 + 180^2} = 300$ м.
Отдалился от начальной точки на 300 м.

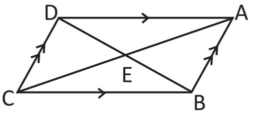
Определим угол наклона:
Поскольку $\tan\theta = \dfrac{180}{240} = 0{,}75$ с помощью калькулятора находим $\theta \approx 36{,}9°$.

У.10.а) (стр.175). Самолет летит по направлению севера со скоростью 850 км/час. Как изменится скорость и направление самолета под воздействием западного ветра со скоростью 50 км/час? Нарисуйте, покажите.



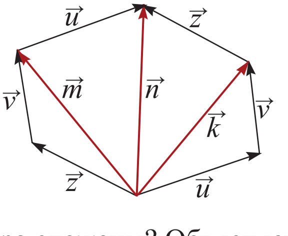
Решение. Под действием западного ветра направление движения меняется. Реальная скорость самолета состоит из суммы двух компонентов - скорости 850 км/час по направлению севера (y) и скорости 50 км/час в западном направлении ветра (x).
$|v| = \sqrt{850^2 + 50^2} \approx 865$ км/час
$\tan\theta = \dfrac{850}{50} = 17 \qquad \theta \approx 81\,°$

Применение свойств сложения к векторам исследуется на графических изображениях



У.13. (Стр.176) Решение: a) $\vec{AE} + \vec{EB} = \vec{AB}$
d) $\vec{AB} - \vec{DB} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$
k) $\vec{AB} - \vec{CB} - \vec{DC} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$
Вычитание векторов приводится к сложению противоположным вектором.

У.14. Векторы, нарисованные красным цветом, замените различными способами на сумму векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и покажите свойства действия сложения над векторами.



Задается вопрос: Как можно определить, какие вектора сложены? Объясняется, что это можно определить, показав начальные и конечные точки векторов.

1. Слева по направлению часовой стрелки последовательно построены векторы $\vec{z}, \vec{v}, \vec{u}$ таким образом, что конец одного является началом другого, а их равнодействующий вектор это вектор $\vec{n}$.
$\vec{z} + \vec{v} + \vec{u} = \vec{n}$. С другой стороны, если посмотреть по направлению против часовой стрелки увидим, что $\vec{n} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{z}$. Отсюда $\vec{u} + \vec{v} + \vec{z} = \vec{z} + \vec{v} + \vec{u}$. А это показывает верность переместительного свойства сложения.

2. Если рассмотреть картинку слева по направлению часовой стрелки, то увидим, что конец вектора $\vec{z}$ является началом вектора $\vec{v}$. Сумму этих векторов показывает вектор $\vec{m}$. $\vec{z}+\vec{v}=\vec{m}$. Конец вектора $\vec{m}$ является началом вектора $\vec{u}$.

Сумма этих векторов - равнодействующий вектор $\vec{n}$.

$\vec{n}=\vec{m}+\vec{u}$ или $\vec{n}=\vec{u}+(\vec{z}+\vec{v})$.

Аналогично, если рассмотреть векторы справа в направлении против стрелки:

$\vec{k}=\vec{u}+\vec{v}$; $\vec{n}=\vec{k}+\vec{z}$, значит, $\vec{n}=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{z}$

Если принять во внимание свойство группировки, то получим:

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{z}=\vec{u}+(\vec{z}+\vec{v})$.

То есть, слагаемые в любой последовательности можно заменить их суммой.

Сложение нескольких неколлинеарных векторов выполняется следующими шагами.
1. Компоненты x и y каждого вектора определяются через тригонометрические отношения.
2. Все компоненты в направлении оси Ox суммируются. Эти суммы - компоненты x и y, равнодействующего вектора.
3. Модуль равнодействующего вектора вычисляется по теореме Пифагора.
4. Угол наклона вектора вычисляется тригонометрическими отношениями.

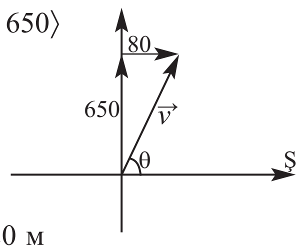
У.17. (стр.178) Решение. Скорость самолета $\vec{v_1}=\langle 0; 650\rangle$

скорость ветра $\vec{v_2}=\langle 80; 0\rangle$

Конечная скорость самолета: $\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}=\langle 80; 650\rangle$

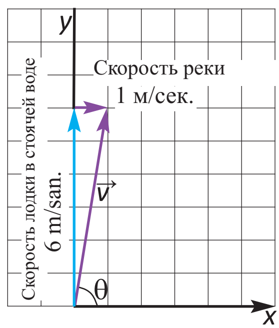
$|\vec{v}|=\sqrt{80^2+650^2}\approx 655$ (км/час)

$\tan\theta=\dfrac{650}{80}=8{,}125;\ \ \theta\approx 83^\circ$



У.18. Лодка находится на берегу реки шириной в 120 м под углом 90°к берегу. Скорость лодки в стоячей воде 6 м/сек, скорость течения реки 1м/сек: a) сколько времени потребуется лодке, чтобы переплыть реку? b) на сколько метров течение реки снесет лодку вниз от места назначения? c) под каким углом по отношению к берегу будет двигаться лодка?

Решение. Координатную плоскость выберим как показано на рисунке.



Скорость лодки в неподвижной воде: $\vec{v_1}=\langle 0; 6\rangle$

скорость течения реки: $\vec{v_2}=\langle 1; 0\rangle$

Конечная скорость лодки: $\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}=\langle 0; 6\rangle+\langle 1; 0\rangle=\langle 1; 6\rangle$

$|\vec{v}|=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}\approx 6{,}08$ м/сек

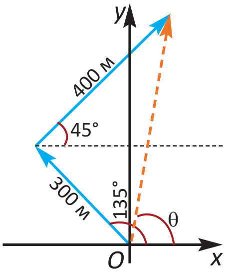
a) Если ширина реки -120 м, то время лодки перехода реки будет:

$t=120:6=20$ сек.

b) Перемещение лодки под воздействием течении реки в 20 секунд будет $20\cdot 1=20$ м по направлении теченнии реки.

c) $\tan\theta=6$, $\theta\approx 80{,}6^\circ$ Лодка будет двигаться приблизительно под углом $80{,}6^\circ$ относительно побережья.

У.19. Лыжник проделал путь сначала 300 м под углом 135º, а потом 400 м под углом 45º. Определите вектор перемещения лыжника.



Решение:

$|d_1| = 300 \quad d_{1x} = -300 \cdot \cos 45^\circ = -150\sqrt{2}$

$d_{1y} = 300 \cdot \sin 45^\circ = 150\sqrt{2}$

$|d_2| = 400 \qquad d_{2x} = 400 \cdot \cos 45^\circ = 200\sqrt{2}$

$d_{2y} = 400 \cdot \sin 45^\circ = 200\sqrt{2}$

$d_x = -150\sqrt{2} + 200\sqrt{2} = 50\sqrt{2}; \quad d_y = 150\sqrt{2} + 200\sqrt{2} = 350\sqrt{2}$

$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(50\sqrt{2})^2 + (350\sqrt{2})^2} = 500$ (м)

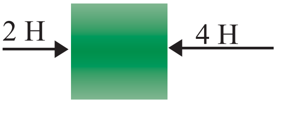
$\tan\theta = \dfrac{d_y}{d_x} = 7; \ \theta \approx 81{,}9^\circ$

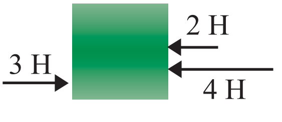
Рабочий лист № 3

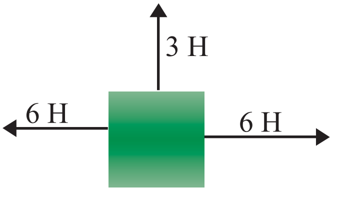
Имя______ **Фамилия**____________ **Число** ______________

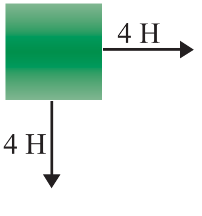
- *Определяет равнодействующий вектор коллинеарных и неколлинеарных векторов.*

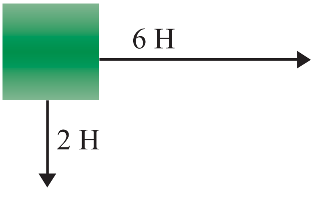
Выберите масштаб. Представьте графически равнодействующую силу. Определите модуль и направление.











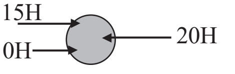
Рабочий лист № 4

Имя______ Фамилия___________ **Число_____________**

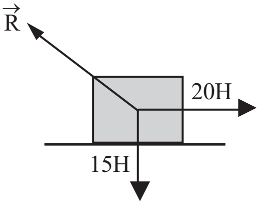
● *Определяет равнодействующий вектор коллинеарных и неколлинеарных векторов.*

1. На данном рисунке слева на тело действуют силы в 15 Н и 10 Н, а с права в 20 Н.

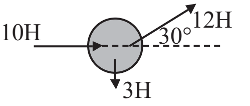
Чему равна равнодействующая сил, действующих на тело?



2. Тело находится в покое под действием трёх сил. Если сила, направленная направо равна 20 Н, а сила направленная вниз будет равна 15 Н, то определите направление и модуль силы R.



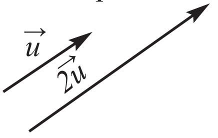
3. Имеются три силы, действующие на тело: слева в 10 Н, снизу - в 3 Н и сила 12 Н, под углом наклона 30°. Найдите вертикальную и горизонтальную компоненты результирующего этих сил.



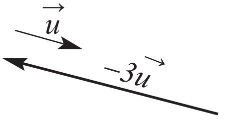
Урок 124-125. Учебник стр. 179-181 Умножение вектора на число. Действия над векторами, заданными компонентами. 2 часа

Умножение какого нибудь вектора на скалярное число объясняется на примерах, выбирая положительное целое, отрицательное целое, и дробные числа.

1) Изображен вектор $2\vec{u}$, полученный увеличением длины вектора $\vec{u}$ в 2 раза. Эти векторы одинаково направленные.



2) На рисунке изображен вектор $(-3\vec{u})$, полученный умножением длины вектора $\vec{u}$ на (-3). эти векторы противоположно направленные



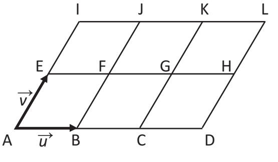
Отмечается справедливость свойств действия умножения при умножении вектора на число. Здесь опять- таки обращается внимание на то,что данный вектор и вектор полученный после умножения на число изображаются одинаковом масштабе.

Другими словами, рекомендуется выполнять умножение вектора на число наблюдая графические изображения. Ученик предлагает и убеждается, нарисованными изображениями, что вектор $2\vec{u}$ в два раза длиннее вектора $\vec{u}$, а вектор $\vec{u}$ в два раза короче вектора $2\vec{u}$.

У.1. Решение:

a) $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = 2\vec{u}$

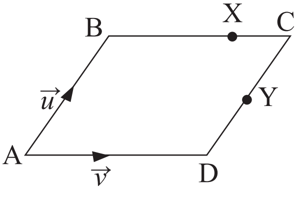
d) $\vec{LI} + \vec{LE} = -4\vec{u} - \vec{v}$



У.5. Решение.

2) $\vec{AX} = \vec{AB} + \vec{BX} = \vec{u} + \dfrac{3}{4}\vec{v}$

3) $\vec{BY} = \vec{BC} + \vec{CY} = \vec{v} - \dfrac{1}{2}\vec{u}$



У.1. (стр. 181). Решение.

a) По скольку $\vec{u} = \langle 2; 3\rangle$, $\vec{v} = \langle -4; 5\rangle$ то $2\vec{u} = \langle 4; 6\rangle$, $3\vec{v} = \langle -12; 15\rangle$.

Получаем: $2\vec{u} + 3\vec{v} = \langle 4 + (-12); 6 + 15\rangle = \langle -8; 21\rangle$

У.5. (стр. 181). Решение.

Точка $C(x; y)$ делит отрезок AB в отношении AC : CB = 1: 2. Поскольку векторы $\vec{AC}$ и $\vec{CB}$ являются коллинеарными векторами.

$\vec{AC} = \langle x + 3; y - 1\rangle$, $\vec{CB} = \langle 6 - x; 7 - y\rangle$ и по условии $2 \cdot \vec{AC} = \vec{CB}$

получаем: $\langle 2x + 6; 2y - 2\rangle = \langle 6 - x; 7 - y\rangle$

Равенства соответствующих координат выразим через уравнений

$2x + 6 = 6 - x$ и $2y - 2 = 7 - y$ и находим $x = 0$, $y = 3$. Ответ: C(0; 3)

Урок 126-131. Учебник стр. 182-189. Параллельный перенос. Движение и конгруэнтные фигуры. Обобщающие задания. 6 часов

Стандарты содержания

3.2.1. Знает понятия параллельного переноса на плоскости и применяет его для преобразования фигур.
3.2.2. Знает понятие преобразование движения и получает две конгруэнтные фигуру преобразованием движения.

Формирующие ученические навыки

- *Демонстрирует понимание свойств параллельного переноса на изображениях или же рисованием изображения;*
- *Понимает осуществление параллельного переноса определенным вектором;*
- *В результате преобразования движения - параллельного переноса, поворота, отражения преобразовывает фигуру в конгруэнтную с ней фигуру демонстрирует при решении задач;*
- *Представляет разницу гомотетического преобразования с параллельным переносом, поворотом, отражением;*
- *Преобразование движения представляет на координатной плоскости.*

Словарь

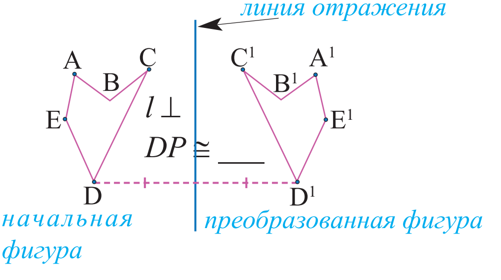
параллельный перенос
вектор параллельного переноса
поворот
угол поворота
отражение
линия отражения
конгруэнтные фигуры
подобные фигуры
коэффициент гомотетии

Дополнительные ресурсы

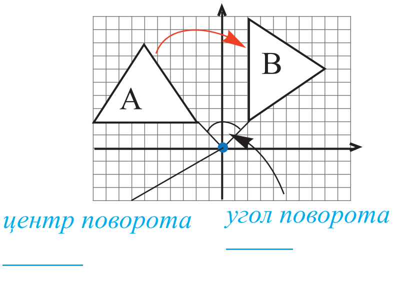
Рабочие листы
Ресурсы из интернета:
www.khanacademy.org/math/geometry/transformations

Основные свойства параллельного переноса объясняются с помощью обучающего блока данного в учебнике. Рисуются рисунки. Для изучения преобразования движения имеется много интернет-ресурсов. www.khanacademy.org/math/geometry/transformations .

Основные свойства отражения (симметрии):
1. Фигура полученная отражением конгруэнтна исходной фигуре ;
2. Линия отражения - это серединный перпендикуляр отрезка, соединяющего любые две точки начального и конечного положения фигуры.



Особенности движения поворота:
- Определяет угол поворота, центр поворота и направление поворота.
- Центр поворота может быть внутри и вне фигуры. В любом случае центр поворота остается постоянным (неподвижным);
- При повороте исходная фигура и преобразованная фигура - конгруэнтны;
- При повороте на 360° преобразованная фигура совпадает с исходной фигурой.



Понимает, что при паралельном переносе на координатной плоскости точка с координатами $(x; y)$ переходит в точку с координатами $(x + a; y + b)$.

По данным и виду движению записывает новые координаты вершин фигур

Пример. Параллельный перенос: на 2 единицы влево и на 1 единицу вниз
Q (0; −1), D(−2; 2), V(2; 4), J(3; 0)
Q'(−2; −2), D'(−4; 1), V'(0; 3), J'(1; −1)

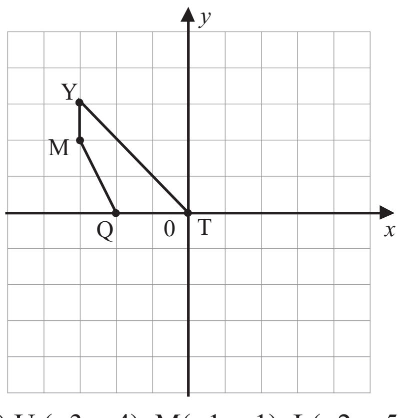
1) Параллельный перенос: на 5 единицы вверх
U(−3; −4), M(−1; −1), L(−2; −5)

2) Параллельный перенос: на 3 единицы вниз
R(−4; −3), D(−4; 0), L(0; 0), F(0; 3)

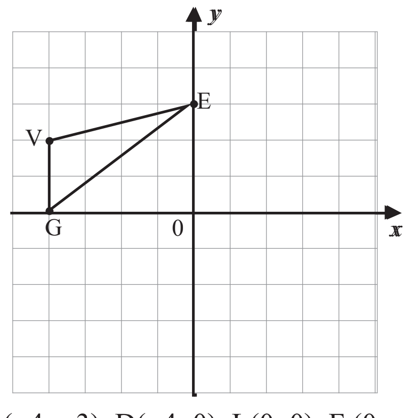
3) Параллельный перенос: на 3 единицы вправо и на 2 единицы вверх.
D (−4; 1), A(−2; 5), S (−1; 4), N (−1; 2)

4) Параллельный перенос: на 3 единицы налево и 4 единицы вверх.
Z (−4; −3), İ (−2; −2), V(−2; −4)

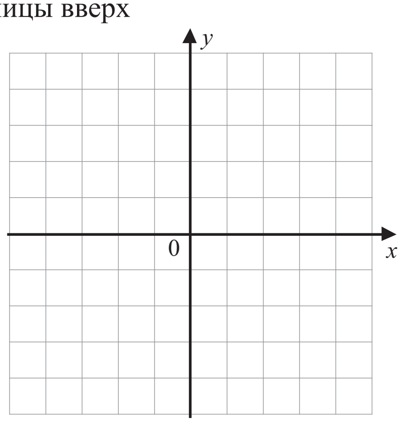
5) Параллельный перенос: на 4 единицы направо и 4 единицы вверх



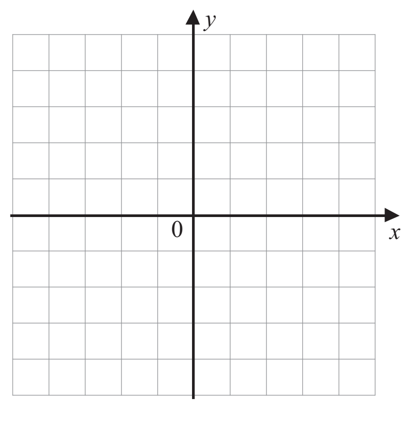
6) Вектор параллельного переноса $\langle -2; 1 \rangle$



7) U (−3; −4), M(−1; −1), L(−2; −5)
Параллельный перенос: на 4 единицы вверх



8) R (−4; −3), D(−4; 0), L(0; 0), F (0; −3)
Параллельный перенос: на 3 единицы вниз



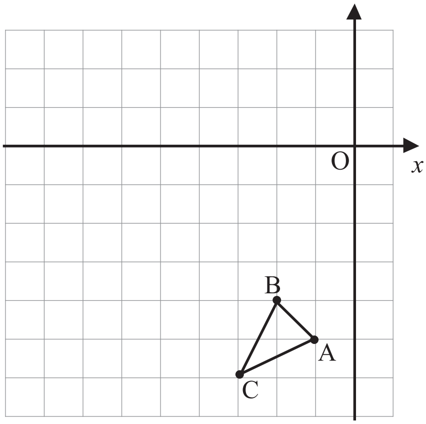
Рабочий лист № 1

Имя________ Фамилия___________ **Число __________**

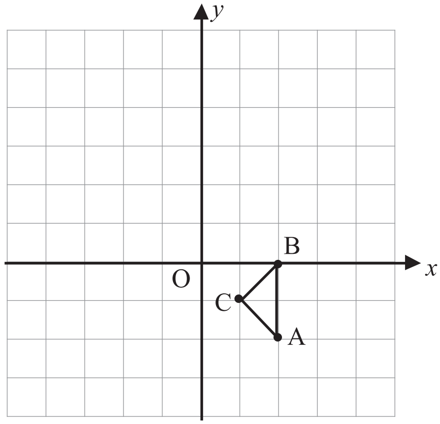
● *Понимает, что параллельный перенос осуществляется при помощи вектора.*

Изобразите требуемое движение на рисунке.

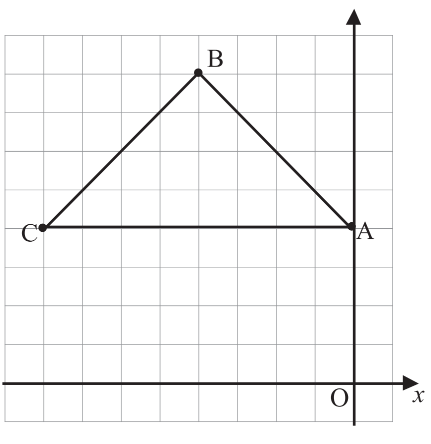
1. Отраженио относительно прямой $x = -2$, а затем параллельный перенос на вектор $\vec{v}\langle -2; 7\rangle$



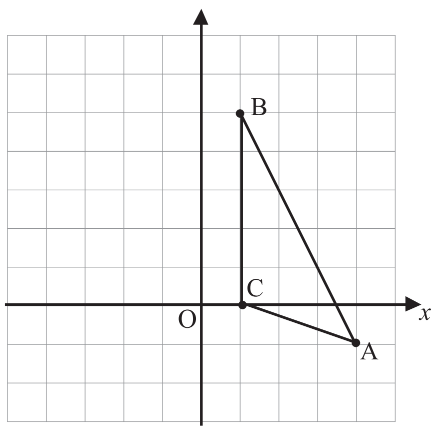
2. Отражение относительно прямой $y = 0$, а затем поворот против часовой стрелки на 90° вокруг точки O(0; 0)



3. Гомотетическое преобразование с центром O(0; 0) и коэффициентом гомотетии $k = 1/2$, затем параллельный $\vec{v}\langle -3; 2\rangle$ и отражение относительно прямой $y = 3$



4. Отражение относительно прямой $y = 1$, затем параллельный перенос на вектор $\vec{v}\langle -1; 2\rangle$ и поворот по часовой стрелке на 90° вокруг точки O(0; 0)

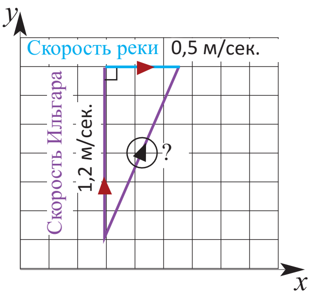


? Решение некоторых задач заданных в учебнике

У.5. (стр.188) Ильгар плывет по реке в перпендикулярном направлении к берегу со скоростью 1,2 м/сек. Если скорость течения реки 0,5 м/сек, а ширина 60 метров, найдите:

a) время за которое Ильгар переплывет реку;
b) расстояние, которое переплывет Ильгар.
c) под каким углом по отношению к берегу Ильгар переплывет реку?

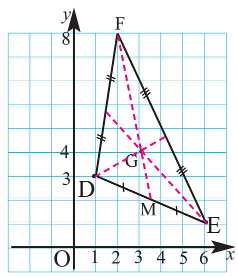
Решение:



Скорость,с которой плывёт Ильгар $\vec{v_1} = \langle 0;\ 1,2 \rangle$
Скорость течения реки $\vec{v_2} = \langle 0,5;\ 0 \rangle$
Конечная скорость Ильгара:
$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} = \langle 0;\ 1,2 \rangle + \langle 0,5;\ 0 \rangle = \langle 0,5;\ 1,2 \rangle$
$|v| = \sqrt{0,5^2 + 1,2^2} = \sqrt{1,69} \approx 1,3$ м/сек

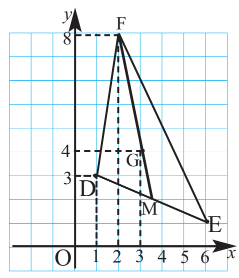
a) Ильгар переплывет реку за $t = 60:1,2 = 50$ сек.
b) Ильгар будет плыть со скоростью 1,3 м/сек в течении 50 сек. на дистанцию $50 \cdot 1,3 = 65$ м.
c) угол наклона: $\tan\theta = \frac{1,2}{0,5} = 2,4;\quad \theta \approx 67,4^\circ$

У.8. (стр. 188) Точка пересечения медиан называется центром тяжести треугольника. Точки D (1; 3) и E (6; 1) являются вершинами треугольника ΔDEF, G(3; 4) - показывает центр тяжести. Определите вершины F.



Точку пересечения прямой FG со стороной треугольника DE обозначим через M. Точка M- средняя точка DE.

$$x_m = \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{1+6}{2} = 3,5 \qquad y_m = \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$$



M (3,5; 2)
По свойству медиан FG : GM = 2 : 1
Пусть F $(x; y)$, тогда
$\overrightarrow{FG} = \langle 3 - x\ ;\ 4 - y \rangle = 2\,\langle 0,5\ ;\ -2 \rangle$

Отсюда $\begin{cases} 3 - x = 1 & x = 2 \\ 4 - y = -4 & y = 8 \end{cases}$ Ответ : F (2 ; 8)

Таблица критерий суммативного оценивания по разделу8

№	Критерии	Замечения
1	Различает векториальные, скалярные и безымянные величины	
2	Рисует вектор в данном направлении и по данной длине	
3	Измерениями определяет модуль и направление вектора	
4	Изображает вектор на координатной плоскости	
5	Вектор выражает компонентами	
6	Определяет длину и направление вектора	
7	Разными способами складывает и вычитает векторы	
8	Решает задачи на умножение вектора на число	
9	Решает разные задачи на векторы	
10	Изображает движения на координатной плоскости	

Урок 132. Задания суммативного оценивания по разделу 8

1. Найдите координаты точки B, если известно: A(–3; 7) и $\overrightarrow{AB} = \langle 8; -11\rangle$.

2. Даны точки A (3; – 2) и B (5 ; 4). Напишите вектор $\overrightarrow{AB}$ компонентами.

3. В ΔABC даны AB =15, BC = 20, ∠B = 90°. Найдите $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$.

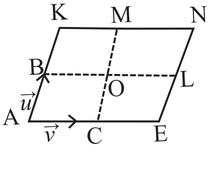
4. Известно, что векторы $\vec{u}\langle 4 ; k + 1\rangle$ и $\vec{v}\,(k – 1; 6)$ коллениарны. Найдите k.

5. Вычислите длину вектора $\vec{u}\langle -5; 12\rangle$.

6. Даны точки A (5; 2, B (8; 7), C (1; 3). Найдите координаты точки D, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

7. Напишите компоненты вектора $\overrightarrow{AB}$ и вычислите длину, если начало находится в точке A (–1; 3), а конец - B (5; 5).

8. Рисунок состоит из конгруэнтных паралелограмов. Если $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, то выразите векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AL}$, $\overrightarrow{NE}$ через $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

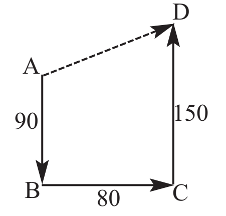


9. Если $\vec{u} = \langle 3;\ 2\rangle$ və $v = \langle -2;\ 1\rangle$. Напишите векторы с компонентами
a) $2\,\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} + 2\vec{v}$ b) $3\vec{u} + 4\vec{v}$

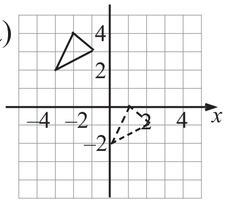
10. Скорость катера в стоячей воде равна 4 м/сек. Ширина реки равна 60 м, скорость течения 0,8 м/сек. 1) Найдите скорость катера.
a) по течению
b) против течения
2) a) на сколько градусов изменится направление движения, если катер начнет двигаться перпендикулярно течению реки.
b) за сколько секунд катер переплывет реку?

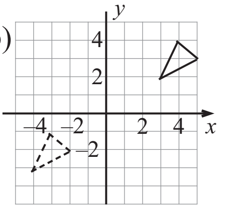
11. Точка движется под действием силы F = 40 H углом наклона 30˚. Найдите горизонтальную и вертикальную компоненты этой силы.

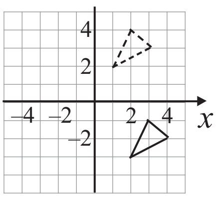
12. Туристы, двигаясь 90 м на юг, 80 м на восток и еще 150 м на север дошли до озера. Найдите расстояние от лагеря до озера. Выразите вектор $\overrightarrow{AD}$ через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

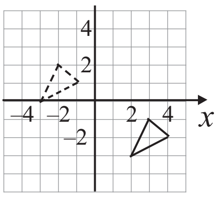


13. На каком из рисунков изображен параллельный перенос на вектор $\langle -5;\ 3\rangle$. Нарисуйте этот рисунок в тетрадь.

a)


b)


c)


d)


14. a) Точка A (–2; 4) преобразуется в точку A′ в результате отрожения относительно оси абсцисс. Найдите координаты точки A′.
b) В какую точку переходит точка D (4; 3) при повороте на 90° против часовой стрелки вокруг начала координат?
c) Точка E (–4; 3) преобразуется в точку E′ параллельным переносом, по вектору $\vec{u}\langle 3;\ -1\rangle$. Найдите координаты точки E′.

15. Точка A (3; –2) перешла в точку A_1 с движением отражения относительно оси абсцисс, точка A_1 перешла в точку A_2 с поворотом на 90 ° против часовой стрелки вокруг начала координат, точка A_2 перешла в точку A_3 параллельным переносом, по вектору $\langle 3;\ 1\rangle$. Нарисуйте изображение каждого движения и запишите координаты точек.

9 Числовые последовательности

Таблица планирования по 9-му разделу

Стандарты содержания	Урок	Тема	Часы	Учебник стр.
2.1.3. Применяет свойства последовательностей, арифметической и геометрической прогрессий при решении задач. 1.2.5. Применяет формулы процентов в решении практических задач (банковские операции, изменение цены продажи).	133-134	Числовые последовательности	2	190-193
	135-138	Арифметическая прогрессия. Формула n-го члена арифметической прогрессии. Свойства арифметической прогрессии	4	194-200
	139-140	Сумма n-го первых членов арифметической прогрессии	2	201-204
	141-144	Геометрическая прогрессия Формула n-го члена геометрической прогрессии .Свойства геометрической прогрессии	4	205-210
	145-146	Сумма n- первых членов геометрической прогрессии	2	211-213
	147	Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии	1	214-215
	148-149	Обобщающие задания	2	216-217
	150	Задания суммативного оценивания по 9-му разделу	1	
		Всего	18	

Стандарты содержания

2.1.3. Применяет свойства последовательностей, арифметической и геометрической прогрессий при решении задач.
1.2.5. Применяет формулы процентов в решении практических задач (банковские операции, изменение цены продажи).

Навыки учеников

- *Для числовых последовательностей пишет рекуррентную формулу и формулу n -го члена.*
- *Для арифметической прогрессии пишет рекуррентную формулу и формулу n -го члена.*
- *Применяет формулу суммы n-первых членов арифметической прогрессии.*
- *Решает задачи на нахождение членов, числа членов и разности арифметической прогрессии;*
- *Пишет рекуррентную формулу и формулу n -го члена.*
 геометрической прогрессии;
- *Решает задачи на нахождение суммы членов, членов, знаменателя и числа членов геометрической прогрессии.*

Словарь

числовая последовательность, член числовой последовательности, *n*-ый член последовательности, рекуррентная формула, формула общего члена, арифметическая прогрессия, сумма *n* первых членов арифметической прогрессии, среднее арифметическое, геометрическая прогрессия, сумма *n* первых членов геометрической прогрессии, среднее геометрическое, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Дополнительные ресурсы Рабочие листы, интернет-адреса:

https://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_number
www.ixl.com/math/precalculus/find-a-recursive-formula

Урок133-134. Учебник стр. 190-193 Числовые последовательности. 2 часа

Мотивация. Задание исследования используется в качестве мотивации. Ученики высказывают мнения по поводу правила построения апельсинов. Есть ли связь с номером каждого ряда сверху вниз и с числом апельсинов этого ряда.

1.	2.	3.	4.	5.
1	4	9	16	25

Число апельсинов каждого слоя равняется квадрату соответственного номера слоя

Записывается формула для определения числа апельсинов любого слоя, построенных по этому правилу.
1, 4, 9, 16 .... Эти числа называются квадратными числами.

Обучение. Для обучения, рекомендуется задавать задания в нижеследующей последовательности.
1. В следующих последовательностях установите правило и определите следующий член..

a) 1, 3, 5, 7, 9, ... b) 2, 5, 8, 9, ...
c) 1, 4, 9, 16, ... d) 0, 3, 8, 15, ...

! Доводится до сведения учеников, что члены арифметической прогрессии могут менятся постоянной разностью, а также по определенному правилу.
Рассматриваются нижеследующие примеры:

a) 5, 8, 11, 14 ...
 3 3 3

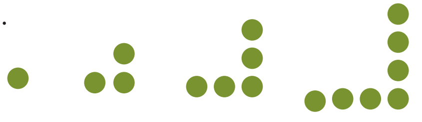
b) 1, 3, 7, 11, ...
 2 4 5

До сведения учеников доводится, что числовые последовательности задаются следующим образом:
- выражением каждого следующего члена предыдущим определенным правилом изменения последовательности

- выражением каждого члена в зависимости от своего порядкового номера (например, квадратные числа, как при построении треугольника из апельсинов), т.е. формулой n-го члена.

✓ Ученикам может быть задан вопрос: “Определите правило изменения членов нижеследующих последовательностей и напишите формулу для записи любого члена”. a) 3, 6, 9, 12 ... b) 1, 3, 5, 7, ... c) 3, 5, 7, ...
Ученики, определив правило изменения каждого члена по предыдущему, выражают члены последовательности таким образом: $a_2 = a_1 + 3$, $a_3 = a_2 + 3$, ... и т.д.

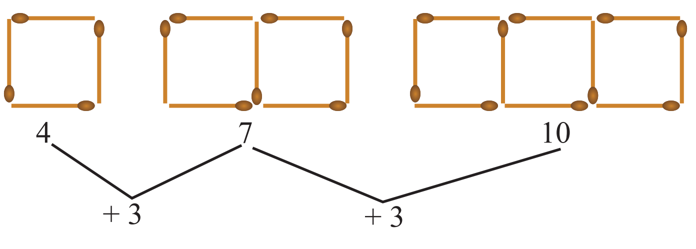
✓ Последовательности могут быть заданы и моделью. Нарисуйте следующую модель. Из скольких кругов будет состоять последовательность на 10-ом, 18-ом шагу модели.

 ...

? Решение некоторых заданий данных в учебнике.

У.6. В последовательности заданной формулой $a_n = n^2 - 8n$
есть ли член равный: a) 20; b) 48; c) –15; d) 0; e) 4
Если есть, чему равен номер этого члена?
Решение: a) $n^2 - 8n = 20$ $n^2 - 8n - 20 = 0$ $(n-10)(n+2) = 0$
$n = 10$, $n = -2$. Так как $10 \in N$, то у данной последовательности есть член равный 20 и этот член a_{10} .
e) Так как корни уравнения $n^2 - 8n = 4$ не натуральные числа, то у последовательности $a_n = n^2 - 8n$ нет члена равного 4.

У.7. Число спичек на каждом шагу выражается числом.



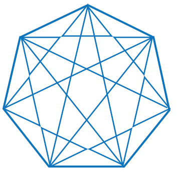
Как видно на каждом шагу число спичек увеличивается на 3 значит в счетном составе спичек есть коэффициенты числа 3 : $4 = 3 \cdot 1 + 1$; $7 = 3 \cdot 2 + 1$; $10 = 3 \cdot 3 + 1$; $? = 3 \cdot 4 + 1$ (13), и т.д. Значит, на любом шагу число спичек можно вычислить с помощью формулы $a_n = 3n + 1$

! Для формирования навыков создания новой числовой последовательности самым выгодным способом являются пользование уравнениями линейных функций. Например, к утроенному произведению числа прибавьте два. Членами этой последовательности созданная правилом $3n + 2$ будут числа 5, 8, 11, 14, ... и т.д. А теперь обратим внимание на навыки определения формулами последовательностей, которые могут выражены уравнениями линейных функций.

Например, в последовательности 21, 27, 33, 39, 45, разность каждого члена с предыдущим равна 6. Запишем каждый член как $6n + b$. По первому члену можно определить что число $b = (21 - 6)$, то есть $b = 15$. Значит, любой член этой последовательности можно найти по правилу $6n + 15$. Ученикам демонстрирует последовательности, как показано ниже и предлагают определить правило изменения последовательности. Устными вычислениями ученики определяют эти правила. Задания могут быть выполнены и как групповая работа.

- 7, 12, 17, 22, 27, … $\quad 2 + 5n$
- 100, 115, 130, 145, 160, … $\quad 15n + 85$
- 2,5; 4,5; 6,5; 8,5; 10,5; … $\quad (4n + 1)/2$
- –12, –7, –2, 3, 8, … $\quad 5n - 17$
- 4, –2, –8, –14, –20, … $\quad 10 - 6n$

! Формулу, показывающую зависимость числа диагоналей от числа сторон многоугольника, определяют написав последовательность.



Число сторон:	1	2	3	4	5	6	7	. . .
Число диагоналей:	0	0	0	2	5	9	14	. . .

1. Невозможно провести диагональ из данной вершины к соседним вершинам многоугольника. Значит, число вершин из которых можно провести диагонали будет $n - 3$.

2. Если учесть, что многоугольник имеет n вершин. Тогда число диагоналей будет $n(n - 3)$.

3. Однако диагональ, исходящая из одной вершины охватывает и другую вершину, учитывая, что одна диагональ считается дважды, общее число делим на 2. Число диагоналей можно найти по правилу $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

У.13.

3. $$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2}, & \text{если } a_n - \text{четное число;} \\ 3a_n + 1, & \text{если } a_n - \text{нечетное число;} \end{cases}$$

По условию, если a_1 четное число, то нужно воспользоваться I формулой, если же a_1 нечетное число, то II формулой . Если $a_1 = 11$, то воспользуемся формулой $a_{n+1} = 3a_n + 1$.

$a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 11 + 1 = 33 + 1 = 34$. Тогда $a_3 = \dfrac{a_2}{2} = \dfrac{34}{2} = 17$

$a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \cdot 17 + 1 = 52$ и т.д.

Рабочий лист № 1

Имя_______ **Фамилия**__________ **Число** _________

• *Для числовой последоваетльности пишет рекурентную формулу и формулу n -го члена.*

1. Принимая во внимание изменение членов последовательности линейной зависимостью, напишите формулой правило изменения последовательности.

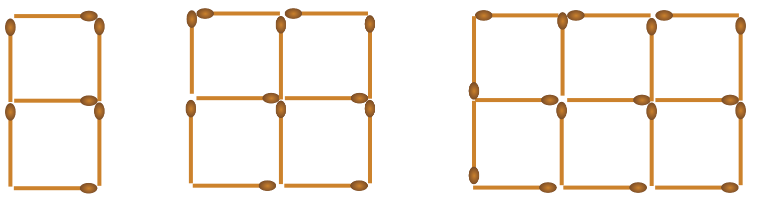
a) 4, 8, 12, 16, 20, ...
b) 5, 10, 15, 20, 25, ...
c) 11, 21, 31, 41, 51, ...
d) 7, 9, 11, 13, 15, ...
e) 5, 9, 13, 17, 21, ...
f) 20, 19, 18, 17, 16, ...
g) 50, 44, 38, 32, 26, ...
h) 22, 25, 28, 31, ...
i) 8, 7, 6, 5, 4, ...
j) –4, 0, 4, 8, 12, ...
k) 7, 12, 17, 22,27, ...
l) 3, –2, –7, –12, ...

2. Напишите последовательность изменения числа спичек, которую используют для создания фигур.

• Для того, чтобы найти число используемых спичек в фигуре с любым номером, определите правило и напишите формулой.

• Сколько спичек будет в 10-ой фигуре, созданной по этому правилу?

1 Фигура 2 Фигура 3 Фигура



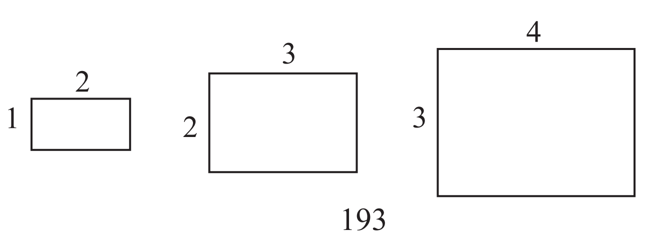
7 штук 12 штук 17 штук

3. Измерения сторон прямоугольника изменяются по правилу данному на рисунке.

Определите правило, выражающее зависимость площади прямоугольника от номера последовательности.

Найдите площадь 8-ой фигуры, измерения сторон которого изменяются по этому правилу.

1. 2. 3.

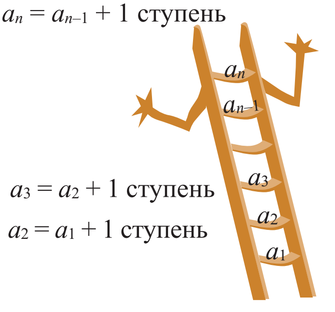


Урок 135-138. Учебник стр. 194-200. Арифметическая прогрессия. Формула *n*-го члена арифметической прогрессии. Свойства арифметической прогрессии. 4 часа

- Определяет правило изменения арифметической прогрессии;
- Для арифметической прогрессии пишет рекуррентную и аналитическую формулу;
- Применяет формулу суммы *n* членов арифметической прогрессии;
- Знает и применяет свойства членов арифметической прогрессии;
- Решает задачи на нахождение членов, числа членов, суммы членов, разности арифметической прогрессии.
- Решает реальные жизненные задачи на арифметическую прогрессию.

www.ixl.com/math/precalculus/find-a-recursive-formula

! Обсуждениями объясняется правило изменение арифметической прогрессии. Ученикам поручается самостоятельно написать прогрессии,отвечающие условиям.
Построить возрастающие и убывающие арифметические прогрессии:
С положительными целыми числами
С отрицательными целыми числами
С дробными числами
С десятичными дробями



Ученики понимают, что для составления арифметической прогрессии должны определить первый член и разность прогрессии и поэтому для создания каждой прогрессии начинают с определения этих показателей.
Ученик пишет последовательно несколько членов числовой последовательности, а также любой член последовательности.

! Рекомендуется уделить внимание занятиям по созданию последовательности применяя технологию. Рекомендуется с помощью программы "Excel" вводя формулу изменения построить электронную таблицу показывающую позицию члена, номер последовательности и сам член.

	A	B
1		
2	1	= A2 · 3 + 7
3	= A2 + 1	= A3 · 3 + 7
4	= A3 + 1	= A4 · 3 + 7
5	= A4 + 1	= A5 · 3 + 7
6	= A5 + 1	= A6 · 3 + 7
7	= A6 + 1	= A7 · 3 + 7
8	= A7 + 1	= A8 · 3 + 7
9	= A8 + 1	= A9 · 3 + 7
10	= A9 + 1	= A10 · 3 + 7

	A	B
1		
2	1	10
3	2	13
4	3	16
5	4	19
6	5	22
7	6	25
8	7	28
9	8	31
10	9	34

! Ученики обращают внимание на различие числовой последовательности и арифметической прогрессии.

Например а) 1, 3, 7, 11, ... с) 1, 4, 9, 16, ... - это числовые последовательности заданные определенным правилом, однако так как в этих последовательностях нет постоянной разности, то они не являются арифметической прогрессией.

? Методические рекомендации и решения некоторых заданий данных в учебнике.

У.5. b) –6; –2; 2; …

Решение: Рекурентное правило: $a_1 = -6$ və $a_2 = -2$, $d = a_2 - a_1 = -2 - (-6) = 4$

$a_{n+1} = a_n + d \Rightarrow a_{n+1} = a_n + 4$, $a_1 = -6$

Формула общего члена: по формуле $a_n = a_1 + (n-1)d$ и $a_1 = -6$, $d = 4$ получим,

$a_n = -6 + 4(n-1) = 4n - 10$

$a_n = 4n - 10$

У.8. **Решение:** Если между числами 4 и 40 добавить еще 4 числа, то арифметическая прогрессия будет состоять из 6 членов: 4; a_2; a_3; a_4; a_5; 40.

$a_1 = 4$, $a_6 = 40$. Воспользуемся формулой $d = \dfrac{a_n - a_k}{n - k}$:

$$d = \frac{a_6 - a_1}{6-1} = \frac{40-4}{5} = \frac{36}{5} = 7{,}2$$

$a_2 = a_1 + d = 4 + 7{,}2 = 11{,}2$ $\quad a_3 = a_2 + d = 11{,}2 + 7{,}2 = 18{,}4$

$a_4 = a_3 + d = 18{,}4 + 7{,}2 = 25{,}6$ $\quad a_5 = a_4 + d = 25{,}6 + 7{,}2 = 32{,}8$

У.10. Для каких членов арифметической прогрессии –40; –37; … выполняется условие: a) $a_n > 0$, b) $a_n < 0$?

Решение: a) Для выполнения условия $a_n > 0$ напишем формулу зависимости a_n от n:

В формуле $a_n = a_1 + (n-1)d$ $\quad a_1 = -40$, $d = a_2 - a_1 = -37 - (-40) = 3$

$a_n = -40 + 3(n-1) > 0$.

$3(n-1) > 40 \Rightarrow$

$3n > 43 \Rightarrow n > 14\frac{1}{3}$

n – натуральное число и больше $14\frac{1}{3}$. Поэтому при $n \geq 15$, будет $a_n > 0$.

У.13. a) Покажите, что последовательность заданная формулой $x_n = 2n - 5$ является арифметической прогрессии. Найдите первой член и разность этой прогрессии.

Решение. Найдем разность $(n+1)$-го и n-го членов.

$x_{n+1} - x_n = (2(n+1) - 5) - (2n - 5) = 2n + 2 - 5 - 2n + 5 = 2$. Как видно, для любого значения n разность $(n+1)$-го и n-го членов, то есть разность двух соседних членов постоянная (в этом случае равна 2). Значит, последовательность заданная формулой $x_n = 2n - 5$ - арифметическая прогресия с разностью равной 2, то есть $d = 2$. Первый член этой прогрессии $x_1 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$.

У.18. a) a_1 ; a_2; a_3

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 12 \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 28 \end{cases} \quad a_1 = ?;\ a_2 = ?;\ a_3 = ?$$

$a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 12 \Rightarrow 3a_1 + 3d = 12 \Rightarrow a_1 + d = 4$

$a_1 + d = a_2 = 4$.

Учитывая последнее равенство, получим:

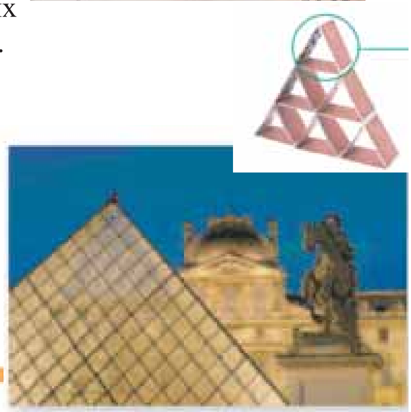
$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 8 \\ a_1 \cdot a_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 1, \text{ то} \quad a_3 = 7 \\ a_1 = 7, \text{ то} \quad a_3 = 1. \end{matrix}$$

Итак последовательность чисел 1; 4; 7 удовлетворяет условию данной задачи.

Обучение арифметической прогрессии рекомендуется проводить взаимосвязано с линейной функций. И линейная функция, и арифметическая прогрессия отражают постоянное изменение. Последовательность - это линейная функция определенная на множестве натуральных чисел. На занятиях можно исследовать схожие и отличительные черты этой связи. У.21, У.22, У.27. (стр. 180). Важно развивать исследовательские способности, увидеть эти закономерности при определенных изменениях над рисунками, реальными объектами, в реальных жизненных ситуациях. Ученик может применять свойства последовательностей над числами. Однако в реальных жизненных ситуациях могут быть трудности в создании связи. Поэтому рекомендуется отдать предпочтение заданиям, где проблема задана текстом, таблицей, картиной, моделью.

В задаче **У.30** доводится до сведения последовательные изменения в архитектуре. Рекомендуется нарисовать картину к задаче про архитектуру. Для того, чтобы украсить грани конструкции в виде пирамиды используются различные узоры, правило паркетирования. Ученики наблюдают эти изменения в архитектуре увиденных разных зданий, фотографируют и определяют правило.

Пирамида при входе в музей Лувр в Париже.



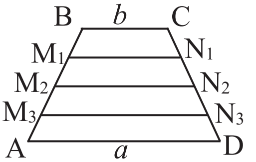
У.39. (стр. 200). По теореме Фалеса, если параллельные прямые пересекающие стороны угла отсекают на одной стороне угла равные отрезки, то и на другой стороне отсекают равные отрезки.
$BM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3A \Rightarrow CN_1 = N_1N_1 = N_2N_3 = N_3D$
А это позволяет определить, что отрезки, M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 являются средними линиями соответствующих трапеций. С легкостью можно увидеть, что отрезок M_2N_2 средняя линия трапеции ABCD :

$$M_2N_2 = \frac{BC + AD}{2} = \frac{6 + 18}{2} = 12 \text{ см}$$

Также можно показать, что отрезок M_1N_1 является средней линией трапеции M_2BCN_2, а отрезок M_3N_3 - средней линией трапеции AM_2N_2D. Тогда:

$$M_1N_1 = \frac{M_2N_2 + BC}{2} = \frac{6 + 12}{2} = 9 \text{ см}$$

$$M_3N_3 = \frac{M_2N_2 + AD}{2} = \frac{18 + 12}{2} = 15 \text{ см}$$



Таким образом: $M_1N_1 = 9$ см; $M_2N_2 = 12$ см; $M_3N_3 = 15$ см. То есть отрезки M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 образуют арифметическую прогрессию. Отметим, что если добавить сюда длины верхнего и нижнего оснований трапеции, то длины всех указанных параллельных отрезков образуют последовательность членов арифметической прогрессии: 6; 9; 12; 15; 18.

У.40. Если $\div \frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}$. По свойству арифметической прогрессии имеем:

$$\frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{2}; \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{b}{c} + \frac{b}{a} = b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) = b \cdot \frac{2}{b} = 2$$

У.42. Известно, что a, b, c образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что последовательность $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, тоже образует арифметическую прогрессию. По свойству арифметической прогрессии $b = \frac{a + c}{2}$.

Покажем, что верно равенство: $a^2 + ac + c^2 = \dfrac{a^2 + ab + b^2 + b^2 + bc + c^2}{2}$

Примем во внимание, что $b = \dfrac{a + c}{2}$ и

упростим выражение $\dfrac{a^2 + ab + b^2 + b^2 + bc + c^2}{2}$.

$$\frac{a^2 + ab + b^2 + b^2 + bc + c^2}{2} = \frac{a^2 + b(a + c) + 2b^2 + c^2}{2} =$$

$$= \frac{a^2 + \frac{a + c}{2}(a + c) + 2\left(\frac{a + c}{2}\right)^2 + c^2}{2} = \frac{2a^2 + (a + c)^2 + (a + c)^2 + 2c^2}{4} =$$

$$= \frac{4a^2 + 4ac + 4c^2}{4} = a^2 + ac + c^2$$

Что и требовалось доказать.

Рабочий лист № 2

Имя_______ **Фамилия**__________ **Число** _________

• *Решает задачи на нахождение членов, числа членов и разности арифметической прогресии.*

1. Найдите отмеченные члены арифметической прогрессии.

a) $1; 4; 7; \ldots, (a_{10})$

b) $-8; -6; -4; \ldots; (a_{12})$

c) $8; 4; 0; \ldots; (a_{20})$

d) $-20; -15; -10; \ldots; (a_7)$

e) $40; 30; 20; \ldots; (a_{16})$

f) $-6; -8; -10; \ldots; (a_{11})$

g) $2; 2\frac{1}{2}; 3; \ldots; (a_{20})$

h) $6; 5\frac{3}{4}; 5\frac{1}{2}; \ldots; (a_{12})$

i) $-7; -6\frac{1}{2}; -6; \ldots; (a_{13})$

j) $0; -5; -10; \ldots; (a_{15})$

2. По арифметической прогрессии $k, \frac{2k}{3}, \frac{k}{3}, 0, \ \ldots$

a) найдите a_6 .

b) найдите a_n.

c) если $a_{20} = -16$, найдите k.

Урок 139-140. Учебник стр. 201-204

Сумма *n*- первых членов арифметической прогрессии. 2 часа.

- Применяет формулу n - первых членов арифметической прогресии ;
- Формулу сумму n - первых членов арифметической прогресии применяет в задачах реальных жизненных ситуаций.

На примере 5, 8, 11, 14, . . . объясняется смысл "**сумма *n*-первых членов**". Высказывание сумма членов прогрессии имеет в виду 5 + 8 + 11 + 14 + ... и используется для нахождения суммы n-первых членов арифметической прогрессии.

Для вышепоказанной арифметической прогрессии:

$S_1 = t_1$	$S_2 = t_1 + t_2$	$S_3 = t_1 + t_2 + t_3$	$S_4 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$
$S_1 = 5$	$S_2 = 5 + 8$	$S_3 = 5 + 8 + 11$	$S_4 = 5 + 8 + 11 + 14$
	$S_2 = 13$	$S_3 = 24$	$S_4 = 38$
	сумма первых 2-х членов	сумма первых 3-х членов	сумма первых 4-х членов

Вывод двух разных записей формулы суммы n-первых членов арифметической прогрессии проводится коллективно.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \qquad\qquad S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)\,d) \cdot n}{2}$$

Решаются разные задачи по данным - суммы n-первых членов , первого члена, разости, по числу членов арифметической прогрессии.

Для диагностического определения знаний, могут быть заданы вопросы нижеуказанного типа. (также могут быть даны рабочие листы, охватывающие вопросы этого типа)

В арифметической прогрессии $S_{10} = 100$, $a_1 = 1$ и $d = 2$. Как можно, не пользуясь формулой найти сумму первых 11-ти членов прогрессии.

Поняв, что можно добавить к этой сумме 11-ый член, приблизительно можно ответить правильно. Как указано внизу. $S_{11} = S_{10} + a_{11}$

Из формулы $a_{11} = a_1 + (n-1)d$ можно найти a_{11}: $a_{11} + 10 \cdot 2 = 21$.

Тогда $S_{11} = 100 + 21 = 121$.

Решение некоторых заданий данных в учебнике.

Сумма *n* - первых членов арифметической прогрессии.

У.44. $a_n = 2n - 3$ $a)\ S_{15} = ?$ $b)\ S_n = ?$

По данным находим: $a_1 = 2\cdot 1 - 3 = -1$, $a_{15} = 2\cdot 15 - 3 = 27$

$$a)\ S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{-1 + 27}{2} \cdot 15 = 13 \cdot 15 = 195$$

$$b)\ S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{-1 + 2n - 3}{2} \cdot n = \frac{2n - 4}{2} \cdot n = (n-2) \cdot n = n^2 - 2n$$

Замечание: С **помощью формулы** $S_n = n^2 - 2n$ можно проверить правильность ответа в пункте а) $n = 15 \Rightarrow S_{15} = 15^2 - 2\cdot 15 = 225 - 30 = 195$.

У.46. Решение: c) Найдем сумму натуральных чисел меньших 100 и делящихся на 3: Последовательность чисел делящихся на 3 задается формулой $a_n = 3n$. Согласно условию $1 \le a_n < 100$, $1 \le 3n < 100$, $\frac{1}{3} \le n \le 33\frac{1}{3}$.
Значит в арифметической прогрессии заданной формулой $a_n = 3n$ мы должны найти сумму первых 33-х членов. Так как:
$a_1 = 3$, $a_{33} = 99$, то $S_{33} = \frac{3+99}{2} \cdot 33 = 1683$

У.48. Решение: $a_1 = 7$, $d = 1{,}5$, S_{5-11} - ?

$$S_{11} = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{S_4} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11}}_{S_{5-11}}$$

$$S_{11} = S_4 + S_{5-11} \Rightarrow S_{5-11} = S_{11} - S_4$$

Значит для того, чтобы найти S_{5-11} нужно найти S_{11} и S_4.

$$S_{11} = \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 11 = \frac{14+15}{2} \cdot 11 = 14{,}5 \cdot 11 = 159{,}5$$

$$S_4 = \frac{2a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = \frac{14+15}{2} \cdot 4 = 18{,}5 \cdot 2 = 37$$

$$S_{5-11} = 159{,}5 - 37 = 122{,}5$$

У.51. Решение:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

Если вычтем почленно эти равенства, то получим: $a_n = S_n - S_{n-1}$.
b) $S_n = 2n^2 + n$, $a_5 = ?$ $a_{11} = ?$
По формуле $a_5 = S_5 - S_4 = 2 \cdot 5^2 + 5 - (2 \cdot 4^2 + 4) = 55 - 36 = 19$
$a_{11} = S_{11} - S_{10} = 2 \cdot 11^2 + 11 - (2 \cdot 10^2 + 10) = 11\,(22 + 1) - 10\,(20 + 1) = 11 \cdot 23 -$
$- 10 \cdot 21 = 253 - 210 = 43$

У.53. Найдите сумму.
Решение: a) $1 + 2 + 3 + \ldots. + n$
$a_1 = 1$, $a_n = n \Rightarrow 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n\,(n+1)}{2}$
b) $2 + 4 + 6 + \ldots. + 2n = 2\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2 \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} = n\,(n+1)$
c) $1 + 3 + 5 + \ldots. + (2n - 1) = \frac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n \cdot n = n^2$

У.57. a) $1 + 4 + 7 + \ldots. + x = 70$, x – ?
Решение: $a_1 = 1$, $d = 3$, $a_n = x$, $S_n = 70$
$a_n = a_1 + (n - 1)\,d = 1 + 3\,(n - 1) = x \Rightarrow 3\,(n - 1) = x - 1 \Rightarrow$
$n - 1 = \frac{x-1}{3}$, $n = \frac{x+2}{3}$

$$S_n = \frac{1+x}{2} \cdot n = \frac{1+x}{2} \cdot \frac{x+2}{3} = 70 \Rightarrow (x + 1)\,(x + 2) = 70 \cdot 6 = 420$$

$x^2 + 3x + 2 = 420$
$x^2 + 3x - 418 = 0 \Rightarrow x_1 = 19$, $x_2 = -22$. Так как $x > 0$, то $x = -22$ не удовлетворяет условию задачи. Значит, $x = 19$

Рабочий лист № 3

Имя_______ Фамилия__________ Число _________

● *Применяет формулу n - первых членов арифметической прогрессии .*

1. По данным найдите требуемое.

a) 1; 3; 5; . . . ; (S_8)

b) 2; 5; 8; . . .; (S_{10})

c) 10; 7; 4; . . .; (S_{20})

d) −8; −7; −6; . . .; (S_{14})

e) −2; 0; 2; . . .; (S_{18})

f) −20; −16; −12; . . .; (S_5)

g) 40; 35; 30; . . .; (S_6)

h) 12; 11; 10; 9; . . .; (S_{11})

i) −8; −5; −2; . . .; (S_{12})

2. Найдите сумму пяти членов арифметической прогрессии, если первый член равен 6, а разность –3 .

3. Задана арифметическая прогрессия: 25 + 19 + 13 + . . .,
Сумма скольких первых членов этой прогрессии равна –20 ?

4. Найдите 15-ый член и сумму первых 15-ти членов арифметической прогрессии, первые три члена которой равны 1; 4 и 7.

5. Найдите 12-ой член и сумму первых 12 членов арифметической прогрессии, первые три члена которой равны –22; – 19; –17.

6. Первый член арифметической прогрессии равен −7, а разность прогрессии $\frac{1}{2}$. Сумма скольких первых членов этой прогрессии равна 52,5 ?

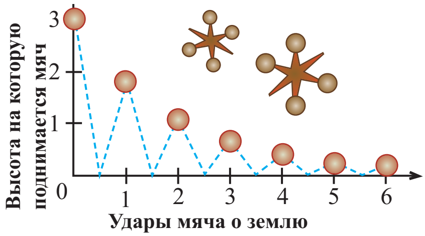
Урок 141-144. Учебник стр. 205 -210. Геометрическая прогрессия Формула *n*-го члена геометрической прогрессии. Свойства геометрической прогрессии. 4 часа

- Определяет правило изменения членов геометрической прогрессии;
- Для геометрической прогрессии пишет рекуррентную формулу и формулу *n* -го члена;
- Применяет формулу суммы *n членов* геометрической прогрессии ;
- Знает и применяет свойства членов геометрической прогрессии;
- Решает задачи на нахождение суммы членов, членов, числа членов, знаменателя геометрической прогрессии;
- Решает реальные жизненные задачи на геометрическую прогрессию.

Объяснение определения геометрической прогрессии осуществляется при помощи последовательностей,как являющихся геометрической прогрессией, так и нет.

Последовательность b_n, первый член которой отличен от нуля, и каждый член начиная, со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же отличное от нуля число q, называется **геометрической прогрессии**. Другими словами, в геометрической прогрессии, начиная со второго отношение каждого члена к предыдущему остается постоянным. Например, $2, 2\cdot 3, 2\cdot 3\cdot 3, 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3, \ldots$ или $2\cdot 3^0, 2\cdot 3^1, 2\cdot 3^2, 2\cdot 3^3, \ldots$ или, по определению, т.к в последовательности 2, 6, 18, 54,.... отношения $6 : 2 = 18 : 6 = 54 : 18 = \ldots$ равны, то последовательность является геометрической прогрессией.

Записывается последовательность, соответствующая задаче в исследовательском задании. Первый раз мяч поднимается на высоту 3 м, а затем каждый раз поднимается на высоту равную 60 % предыдущей высоты.



1. $3 \cdot (0{,}6)^0$
2. $3 \cdot 0{,}6 = 3 \cdot (0{,}6)^1$
3. $(3 \cdot 0{,}6)\cdot 0{,}6 = 3 \cdot (0{,}6)^2$
4. $(3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6) \cdot 0{,}6 = 3 \cdot (0{,}6)^3$ . . .

Значит, при перемещении мяча в любой момент времени высота определяется: $h_n = 3 \cdot (0{,}6)^{n-1}$

Связь, между последовательностью ударов о землю и высотой, на которую поднимается мяч меняется по правилу геометрической прогрессии. В этой прогрессии, первый член равен 3, а знаменатель 0,6. Геометрическая прогрессия может быть конечной и бесконечной.

Рекурентная формула геометрической прогрессии:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

Формула *n*-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \qquad q \neq 0$$

Решаются задания на применение этих формул. С целью диагностического оценивания ученикам могут задаваться вопросы как показано ниже:

1) Определите, являются ли последовательности геометрическими прогрессиями.

- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$
- $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$
- $1, -3, -9, -27, 81, \ldots$

2) Определите 7-ой член геометрической прогрессии.
512, –256, 128, –64, . . .

Определяется знаменатель прогрессии.

$$-\frac{256}{512} = -\frac{1}{2}$$

Для того, чтобы определить члены прогрессии, нужно первый член, то есть 512 умножить на $-\frac{1}{2}$ - с последовательно меняющимися показателями степени:

$$b_1 = 512 \qquad b_2 = 512 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \qquad b_3 = 512 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \qquad b_4 = 512 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$b_7 = 512 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = 8$$

Ученики обращают внимание на знаки членов прогрессии. Так как знаменатель прогрессии отрицательный, то начиная со второго знаки членов прогрессии чередуются в зависимости от четности или нечетности показателя степени.

? Решение некоторых заданий данных в учебнике.

У.9. (стр. 208) f) Если $b_1 = 3$, $b_5 = 48$, то найдите q = ? b_7 = ?

Решение: Из формулы $b_5 = b_1 \cdot q^4$ найдем $q^4 = \frac{b_5}{b_1} = \frac{48}{3} = 16$

$q = \pm 2$

$b_7 = b_5 \cdot q^2 = 48 \cdot 4 = 192$

У.16. Решение: Найдем гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами 12 см и 16 см: $c = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$. Периметр данного треугольника $P_1 = 12 + 16 + 20 = 48$ см. Периметр треугольника образованного средней линией данного треугольника равен: $P_2 = \frac{P_1}{2} = 24$ см. Периметры треугольников построенных таким образом на каждом шагу уменьшаются в два раза, то есть последовательность периметров образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$ тогда, $P_6 = P_1 \cdot q^5 = 48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 48 \cdot \frac{1}{32} = 1{,}5$ см

У.22. Решение: а) по условию задачи при 1-ом поиске количество элементов делится пополам.

$b_1 = \frac{2048}{2} = 1024.$

Поиск продолжается по тому же правилу: $b_2 = \frac{2024}{2} = 512$ и т.д.

Как видно, $q = \frac{1}{2}$ и число элементов n-го поиска в банке равно

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{10} \cdot 2^{1-n} = 2^{11-n}$

То есть $b_n = 2^{11-n}$

b) $b_n = 1 \Rightarrow 12^{11-n} = 1 = 12^o \Rightarrow 11 - n = 0,\ n = 11$

Рабочий лист № 4

Имя_______ Фамилия__________ Число _________

● *Для геометрической прогрессии пишет рекурентную формулу и формулу n-го члена.*

1) –1 ; 6 ; –36 ; 216 ; ...

2) –1 ; 1 ; 4 ; 8 ; ...

3) 4 ; 16 ; 36 ; 64 ; ...

4) –3 ; –15 ; –75 ; –375 ; ...

5) –2 ; –4 ; –8 ; –16 ; ...

6) 1 ; –5 ; 25 ; –125 ; ...

1. Напишите первые 5 членов по эксплиситной формуле геометрической прогрессии.

$b_n = 3^{n-1}$

$b_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$b_n = -2{,}5 \cdot 4^{n-1}$

$b_n = -4 \cdot 3^{n-1}$

2. По рекурентной формуле геометрической прогрессии определите знаменатель, первые 5 членов и формулу n-го члена.

$b_n = b_{n-1} \cdot 2$
$b_1 = 2$

$b_n = b_{n-1} \cdot (-3)$
$b_1 = -3$

$b_n = b_{n-1} \cdot 5$
$b_1 = 2$

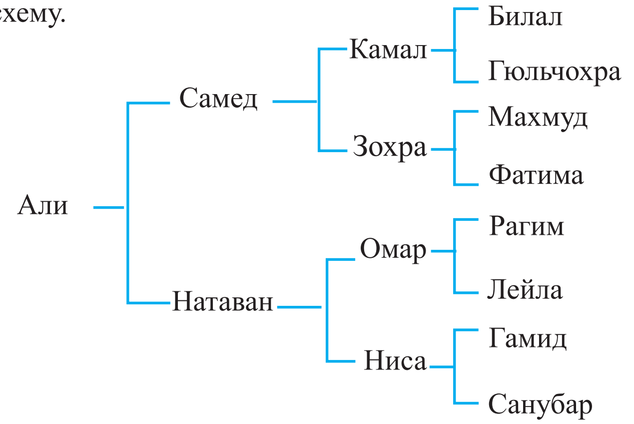
$b_n = b_{n-1} \cdot 3$
$b_1 = -3$

Урок 145-146. . Учебник стр. 211-213.
Сумма *n*-первых членов геометрической прогрессии. 2 часа

- Применяет сумму n-первых членов геометрической прогрессии;
- Применяет сумму n-первых членов геометрической прогрессии в задачах реальных жизненных ситуациях.

Исследуется задача про дерево поколении, данная в учебнике.

Нахождение числа прабабушек и прадедушек при помощи дерев поколения - это занятие раскрывающее, неожиданную информацию. Ученики исследуют данную схему.



Поколения	Число родителей	Поколения	Число родителей
1	2	5	30 + 32 = 62
2	2 + 4 = 6	6	62 + 64 = 126
3	6 + 8 = 14	7	126 + 128 = 254
4	14 + 16 = 6	8	254 + 256 = 510

В 1-ом поколении $4 - 2 = 2$ или $2^2 - 2 = 2$

В 2-ом поколении $8 - 2 = 6$ или $2^3 - 2 = 6$

В 3-ем поколении $16 - 2 = 14$ или $2^4 - 2 = 14$ и т.д.

В 20-ом поколении число родителей будет: $2^{20} - 1 = 1\,048\,575$

В 21-ом поколении число родителей будет:

$$2^{21} - 2 = 2\,097\,150$$

В 22-ом поколении число родителей будет примерно столько же сколько жителей в большем городе. Например, численность населения в Баку составляет примерно 2 миллиона 180 тысяч, а в Гяндже - примерно 324 тысячи.

Сумму членов геометрической прогрессии можно представить так:

$$-\begin{array}{l} S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots\ldots\; b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1} \\ qS_n = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots\ldots\; b_1q^{n-1} + b_1q^n \end{array}$$

умножим на q и почленно вычтем

$$S_n - qS_n = b_1 - b_1q^n$$

$$S_n(1-q) = b_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = \frac{b_1(1-q^n)}{(1-q)} \qquad S_n = \frac{b_nq - b_1}{q-1}, \qquad (q \neq 1)$$

Выполняются задания данные в учебнике с применением суммы и членов геометрической прогрессии. При нахождении числа членов геометрической прогрессии ученики, вынуждены решать уравнения вида $r^n = a$ и при этом нужно обратить внимание на способы нахождения n. Например, рассмотрим уравнение $4^n = 4096$. Это уравнение ученик может решить способом подбора. Результат $4^4 = 256$ намного меньше 4096-ти, проверим 4^6. $4^6 = 4096$, $4^n = 4^6$, $n = 6$

У.33. а) Упростите, если $x \neq 1$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

Решение: Так как, $b_1 = 1$, $q = x$, получим: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \dfrac{b_1(x^5-1)}{x-1} = \dfrac{x^5-1}{x-1}$

В зависимости от уровня класса рекомендуется решение следующей задачи.

Сумма n первых членов прогресии задана формулой: $\div\div S_n = 3 - 3^{1-n}$, $b_1 - ?$ $q - ?$

$$n = 1,\ S_1 = b_1 = 3 - 3^{\circ} = 3 - 1 = 2$$

$$n = 2,\ S_2 = b_1 + b_2 = 3 - 3^{1-2} = 3 - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$b_1 + b_2 = 2\frac{2}{3} \Rightarrow b_2 = \frac{2}{3}$$

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

То есть в данной прогрессии $b_1 = 2$, $q = \dfrac{1}{3}$.

? Решение некоторых заданий данных в учебнике.

У.38. Приняв во внимание условие задачи, чтобы найти число животных показанных на картинке нужно вычислить сумму геометрической прогрессии.

$b_1 = 1$, $q = 4$

$$1 + 4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 = \frac{1\cdot(4^5-1)}{4-1} = \frac{1}{3}\cdot(4^5-1)$$

Если Фаррух захотел бы найти число конечностей животных, то полученную сумму он должен был умножить на 4.

$$4\cdot\frac{1}{3}(4^5-1) = \frac{4}{3}(4^5-1) = \frac{4}{3}(2^{10}-1) = \frac{4}{3}\cdot 1023 = 4\cdot 341 = 1364$$

То есть число конечностей равно 1364.

Урок 147-149. Учебник стр. 214- 217. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Обобщающие задания. 3 часа

Изменение членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии исследуется на заданном практическом задании. На нескольких примерах, сложением конечного числа членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, исследуется возможность определения суммы её членов.

Например, $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$

$S_1=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $S_2=S_1-\frac{1}{4}$ $\qquad$ $S_3=S_2-\frac{1}{8}$ $\qquad$ $S_4=S_2-\frac{1}{8}$

$S_1=0{,}5$ $\qquad$ $S_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ $\qquad$ $S_3=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ $\qquad$ $S_4=\frac{3}{8}-\frac{1}{16}$

$S_1=\frac{1}{4}$ $\qquad$ $S_3=\frac{3}{8}$ $\qquad$ $S_4=\frac{5}{16}$

$S_1=0{,}25$ $\qquad$ $S_3=0{,}375$ $\qquad$ $S_4=0{,}3125$

Следующий член: $\frac{1}{32}$

$S_5=S_4+\frac{1}{32}$

$S_5=\frac{5}{16}+\frac{1}{32}$

$S_5=\frac{1}{32}$

$S_5=0{,}34375$

Следующий член: $-\frac{1}{64}$

$S_6=S_5-\frac{1}{64}$

$S_3=\frac{11}{32}-\frac{1}{64}$

$S_6=\frac{21}{64}$

$S_5=0{,}328125$

Определив сумму некоторого числа первых членов прогрессии замечаем, что сумма то увеличивается, то уменьшается. Однако эта сумма бесконечно приближается к числу $\frac{1}{3}$.

Вопрос открытого типа. Напишите две бесконечно убывающие прогрессии, сумма членов которых равна 4.

Нужно выбрать знаменатель прогрессии $|q|<1$.

Пусть $q=-0{,}25$ и $q=0{,}5$. $S=\frac{b_1}{1-q}$

1) $4=\frac{b_1}{1-(-0{,}25)}$, $b_1=5$

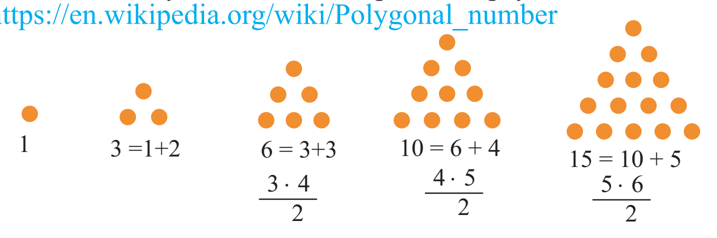
$5-\frac{5}{4}+\frac{5}{16}-\frac{5}{64}+\ldots$

2) $4=\frac{b_1}{1-0{,}5}$, $b_1=2$

$2+1+0{,}5+0{,}25, \ldots$

? **У.3. (стр. 216)** На рисунке изображены треугольные числа,в виде последовательности кружочков. Как видно кружочки даны в таком количестве, что на каждом шагу их можно выстроить в треугольном виде.

https://en.wikipedia.org/wiki/Polygonal_number



Для того, чтобы любое число выразить в треугольнике виде (смоделировать) можно воспользоваться формулой $\frac{n(n+1)}{2}$. Например, число кружков на 7- ом шаге или 7-ой член последовательности треугольных чисел равен:

$$\frac{7(7+1)}{2} = 28.$$

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots$$

У.14. (стр. 217). Решение: Так как сторона квадрата равна 6 см, тогда длина отрезка, соединяющего середины его сторон, то есть сторона второго квадрата равна $3\sqrt{2}$ см, сторона следующего квадрата будет равна 3 см. Продолжая таким образом получим:

стороны: 6 ; $3\sqrt{2}$; 3 ...   площади : 36 ; 18 ; 9 ; . . .

Найдем сумму $36 + 18 + 9 + \ldots$

$S_1 = 36$, $S_2 = 18$, $q = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. Поэтому $S = \frac{36}{1 - \frac{1}{2}} = 72$ (см^2)

У.16.(стр. 217). В арифметической прогрессии с целыми числами $a_3 = 11$, а сумма первых 8 членов больше 72-х, но меньше 80. Найдите a_2.

Решение: По условию $\begin{cases} a_3 = 11 \\ 72 < S_8 < 80 \end{cases}$ Отсюда получим: $\begin{cases} a_1 + 2d = 11 \\ 72 < \frac{a_3 + a_8}{2} \cdot 8 < 80 \end{cases}$

Из 2-го условия системы получим $18 < a_3 + a_8 < 20$. Так как члены - целые числа, то: $a_1 + a_8 = 19$.

Таким образом из системы уравнений: $\begin{cases} a_1 + 2d = 11 \\ a_1 + a_8 = 19 \end{cases}$, получим $\begin{cases} a_1 + 2d = 11 \\ 2a_1 + 7d = 19 \end{cases}$

1-ое уравнение этой системы умножим на –2, и сложим со 2-ым. Получим: $3d = -3$, $d = -1$. $a_1 = 13$. Тогда $a_2 = a_1 + d = 13 + (-1) = 12$

У.19. (стр. 217) Найдите сумму.

а) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \ldots$

Решение: Обозначим $S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \ldots$ (1)

Обе части этого равенство умножим на $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{4}{3^5} + \ldots \quad (2)$$

Вычтем почленно (1) и (2):

$$S - \frac{1}{3}S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \ldots$$

$\frac{2}{3}S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}}$ и отсюда находим $S = \frac{3}{4}$.

Рабочий лист № 5

Имя_______ Фамилия__________ **Число _________**

● *Применяет формулу суммы n-первых членов геометрической прогрессии ;*

1. 1, 3, 9, 27, . . . Найдите число n, если сумма n-первых членов геометрической прогрессии равна 364.

2. Найдите сумму членов прогрессии.

a) 729 − 243 + 81 − 27 + ... (12 членов)

b) 7 + 14 + 28 + 56 + ... + 7168

3. Найдите первый член прогрессии, если её знаменатель равен 3, а сумма 5-ти первых членов равна 968.

4. Найдите сумму бесконечно убивающей геометрической прогрессии.
1029 − 147 + 21 − 3 + ...

5. Найдите знаменатель бесконечно убивающей геометрической прогрессии, если первый член равен 38, а сумма равна 76.

6. Найдите b_9, S_6 в прогрессии
4; 12; 36; 108; .. .

7) Найдите b_8, S_5, если дана последовательность
−2; 6; −18; 54; ...

Таблица критериев суммативного оценивания по 9-му разделу

№	Критерии	Замечания
1.	Для числовых последовательностей пишет рекуррентную формулу и формулу общего члена	
2.	Пишет рекуррентную формулу и формулу общего члена для арифметической прогрессии	
3.	Применяет формулу суммы n первых членов арифметической прогрессии	
4.	Решает задачи на нахождение членов, числа членов, суммы членов и разности арифметической прогрессии	
5.	Пишет рекуррентную формулу и формулу общего члена для геометрической прогрессии	
6.	Решает задачи на нахождение членов, суммы членов, знаменателя и числа членов геометрической прогрессии.	
7.	Решает задачи на применение формулы бесконечно убывающей геометрической прогрессии	

Урок 150 Задания суммативного оценивания по 9-му разделу

1. Какую числовую последовательность выражает последовательность чисел 4, 12, 36, 108, ... ?

a) $a_n = 4 + 3n$
b) $a_n = 3 + 4n$
c) $a_1 = 4,\ a_n = 3a_{n-1},\ n \geq 2$
d) $a_1 = 3,\ a_n = 4a_{n-1},\ n \geq 2$

2. Напишите первые шесть членов числовой последовательности заданной формулой $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$

3. Если a_n арифметическая прогрессия, то будут ли последовательности:
a) $a_1, a_3, a_5, a_7; \ldots$ b) $a_1+1,\ a_2+1,\ a_3+1, \ldots$ арифметическими прогрессиями?

4. Найдите первые пять членов последовательности заданной условием $a_1 = 7$ и рекурентной формулой: $a_{n+1} = a_n - 3$

5. a) Если от суммы 5 первых членов арифметической прогрессии отнять сумму 4-х первых членов, то чему будет равна полученная разность?
b) Докажите справедливость равенств: $a_4 = S_4 - S_3$, $a_6 = S_6 - S_5$ $a_n = S_n - S_{n-1}$.

6. Какая из последовательностей, которая может быть записаная согласно условию задачи не будет арифметической прогрессией?
a) Али каждый день ходит пешком 5 км. Он думает увеличивать это расстояние на 0,8 км ежедневно.
b) Стоимость одного круга езды на лошади равен 4 манат. Джафар, на сегодня выделил для тренировки 60 манат.
c) Мардан купил автомобиль за 25000 манат. Когда через год Мардан хотел продать автомобиль, он был оценен в 21000 ман., а еще через год в 18500 манат.
.

7. Первые члены арифметической прогрессии отмечены на координатной плоскости. Координаты двух из них (3; 11) и (6; 23). Какое из следующих выражений является формулой, для нахождения любого члена этой арифметической прогрессии ?

a) $a_n = 6n - 3$ b) $a_n = 3n + 11$ c) $a_n = 4n - 1$ d) $a_n = 1 + 4n$

8. По следующим данным найдите формулу n-го члена геометрической прогрессии.

$9, -6, 4, -\frac{8}{3}, \ldots$

9. Сумма какой бесконенчой геометрической прогрессии равна –5?

A) $-6 - 1{,}2 - 0{,}24 - 0{,}048 - \ldots$ B) $-6 + 1{,}2 - 0{,}24 + 0{,}048 - \ldots$

C) $6 - 1{,}2 + 0{,}24 - 0{,}048 + \ldots$ D) $6 + 1{,}2 + 0{,}24 + 0{,}048 + \ldots$

10. Найдите сумму:

$$8 - 6 + 4{,}5 - 3\frac{3}{8} + \ldots$$

11. Мяч ударяется о землю с высоты 4 метра. Каждый раз, когда мяч ударяется о землю, он поднимается до 60% своей предыдущей высоты. В общей сложности сколько метров составляет высот на которые мяч поднялся?

12. Тело которое двигается по прямой на первой секунде преодолел 4 м, а в каждом последующем секунде на 2 м больше чем предыдущем.

a) Найдите расслоение пройденное телом за первый 10 секунд?

b) За сколько времени тело пройдет расстояние в 52 метрах?

13. Какая сумма будет в банке через 5 лет, если в банк вложили 10 000 манатов с 2%-м годовым доходом?

14. Найдите сумму восми первых членов арифметической прогрессии, если $a_3 + a_6 = 7$.

15. Числа a; b; 16 образуют геометрическую прогрессию, а числа a; b; 12 арифметическую прогрессию. Найдите числа a и b.

16. Сумма n первых членов арифметической прогрессии задана формулой $S_n = n^2 + 2n$. Найдите 3-ий член этой прогресси.

17. Числа x; $x + 3$; $x + 9$ являются последовательными членами геометрической прогрессии. Запишите следующий член этой прогрессии.

10 Представление информации. Комбинаторика. Вероятность

Таблица планирования по 10 разделу

Содержательные стандарты	Урок №	Тема	Часы	Учеб. стр.
5.1.1. Читает и анализирует данные, представленные в виде таблицы, диаграммы, гистограммы или графика. 5.1.2. Классифицирует статистические данные по определённым свойствам. 5.1.3. Определяет правильность статической информации. 5.1.4. Строит таблицу частот и диаграммы, на основе вариантов полученных данных. 5.2.1. Различает виды выборок и решает простые комбинаторные задачи. 5.2.2. Прогнозирует возможность событий на основе статической информации. 5.2.3. Решает простые задачи на вероятность с помощью комбинаторики.	151-152	Таблица распределения частот. Относительная частота	2	218-222
	153-154	Гистограмма частот. Полигон частот	2	222-225
	155-156	Среднее арифметическое по распределению частот	2	226-227
	157-159	Комбинаторика	3	228-234
	160-161	Решение задач на вычисление вероятности.	2	235-240
	162-163	Обобщающие задания по разделу	2	241-242
	164	Задания суммативного оценивания по 10-му разделу.	1	
	165-171	Обобщающие задания	7	243-249
	172	Задания суммативного оценивания за год.	1	
		Всего	22	

Стандарты содержания

5.1.1. Читает и анализирует информации данные в виде таблицы, диаграммы, гистограммы или в графическом виде
5.1.2. Статические информации классифицирует по определенным свойствам.
5.1.3. Определяет правильность статических информаций.
5.1.4. Возникшие на основе статических информаций создает таблицу частоты вариантов и строит диаграмму.
5.2.1. Различает виды выборок и решает простые комбинаторные задачи.
5.2.2. Прогнозирует возможность событий на основе статической информации.
5.2.3. Решает простые задачи на вероятность с помощью комбинаторики.

Навыки учащихся

Группирует информацию, разделяя её на классы, и составляет таблицу частот;
- *составляет таблицу частот, охватывающую относительную частоту;*
- *представляет частоту и относительную частоту данных в виде гистограммы;*
- *представляет данные в виде полигона частот;*
- *вычисляет среднее арифметическое по распределению частот*
- *определяет по данным число пермутаций и комбинезонов*
- *вычислияет вероятность событий*

Словарь

Таблица частот, относительная частота, середина интервала,гистограмма частот, полигон частот, среднее арифметчсекое для группированных данных, комбинаторика, пермутация, комбинезон, не зависимые события,зависимые события, несовместные события

Доп. ресурсы

Рабочие листы и интернет адреса

https://www.rcsdk12.org/cms/lib/NY01001156/Centricity/Domain/6165/A.S.5.FrequencyHistogramsBarGraphsandTables.pdf

https://www.youtube.com/watch?time_continue=19&v=NejITeFOgrA&feature=emb_logo

Урок 151-152. Учебник стр. 218-222. Таблица распределения частот. Относительная частота. 2 saat

Стандарты. 5.1.1. и 5.1.4.

Навыки учеников: Группирует информацию, разделяя её на классы, и составляет таблицу частот;
- составляет таблицу частот, охватывающую относительную частоту класса;

Мотивация. Демонстрируются две таблицы отражающие данные, как показано ниже. В какие группы можно объединить эти данные? Можно ли определить количество информации, соответствующей каждой группе?

Цвет обуви				
голубой	белый	красный	черный	белый
красный	черный	белый	белый	ореховый
черный	голубой	черный	голубой	белый

Размеры проданных спорт. футболок						
XL	L	M	L	M	S	L
M	XL	M	XL	M	L	L
M	S	S	M	L	XL	L

Выслушиваются мнения учащихся. В таблицу об обуви записывают информацию о цвете(голубой, белый, красный, черный, коричневый), количестве пар обуви данных цветов (при помощи чёрточек) и соответствующего числа (частоты). До сведения учащихся доводится, что очень важно записывать название таблицы.

Цвета	Черточка	Число
голубой		

Аналогично, формируется таблица данных о размерах спортивных футболок.

А как можно сгруппировать информации, если база информации состоит из множества числовых информаций? Изучается правило, по которому систематизируется множество данных , представленных в учебнике.

Рекомендуется, чтобы число классов было от 5 до 12. Также, для определения количества классов, вводится правило 2^k. Например, если множество состоит из 38 элементов, то соответственно $2^k > 38$. Значит, если $2^5 = 32$, то количество классов равно не 5, а 6.

Для анализа множества данных используется такой показатель, как - ***относительная частота***. Эти понятия объясняются на примере, представленном в учебнике.

Рабочий лист № 1

Имя ________ Фамилия____________ **Число_________**

● **Группирует множество данных, разделяя его на классы.**

Следующие данные показывают баллы, которые набрали 50 учащихся по предмету математика при оценивании по 100-бальной шкале.

43,	88,	25,	93,	68,	81,	29,	41,	45,	87,
34,	50,	61,	75,	51,	96,	20,	13,	18,	35,
25,	77,	62,	98,	47,	36,	15,	40,	49,	25,
39,	60,	37,	50,	19,	86,	42,	29,	32,	61,
45,	68,	41,	87,	61,	44,	67,	30,	54,	28.

a) Сгруппируйте данные в 10 классов b) Сгруппируйте данные в 5 классов.

Классы	Черточка	Число

Классы	Черточка	Число

Урок 153, 154. Учебник стр. 222-225
Гистограмма частот. Полигон частот 2 часа

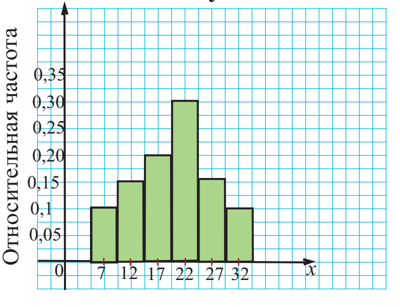
Навыки ученика.
• представляет информацию (данные) в виде таблицы частот и гистограммы частот
• представляет информацию в виде полигон частот;
• представляет статистические показатели согласно базе данных

Середина интервала (этот показатель в литературе иногда называют средней точкой) вычисляется как среднее арифметическое наибольшего и наименьшего значений (предельных значений) интервала и довольно часто используется в графических представлениях (гистограмма, полигон частот).

Исследуется гистограмма и правило построения полигона распределения. Самая выгодная форма представления данных сгруппированных по определенным категориям, интервалам - это гистограмма. Она создает наиболее ясное визуальное представление о распределении информации. Ученики, в определенной степени, уже владеют навыками построения гистограммы и представления информации. Здесь рекомендуется направить внимание учащихся на то, чтобы они научились представлять и анализировать **гистограммы относительных частот.**

Класс	Частота	Середина интервала	Относительная частота
5-9	4	7	4 : 40 = 0,1
10-14	6	12	6 : 40 = 0,15
15-19	8	17	8 : 40 = 0,2
20-24	12	22	12 : 40 = 0,3
25-29	6	27	6 : 40 = 0,15
30-34	4	32	4 : 40 = 0,1
	Всего: 40		Всего: 1

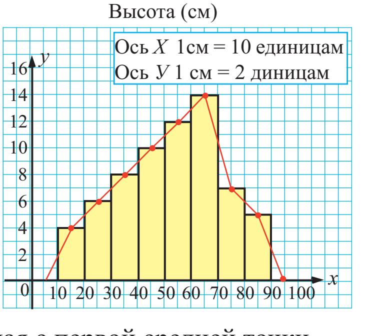
Высота кустов



Этапы построения полигона частот, при помощи гистограммы

1. Строится гистограмма частот (или относитель ных частот)
2. Отмечаются средние точки верхних сторон прямоугольников, образующих столбцы (это средняя оценка класса).
3. Для того чтобы построить полигон частот определяются средние точки двух мнимых нулевых класса. Одна из них - средняя точка мнимого класса, расположенного слева от первого столбца, другая- средняя точка мнимого столбца, расположенная справа от последнего столбца.
4. Средние точки последовательно соединяются , начиная с первой средней точки.

Высота (см)



Класс	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
Частота	4	6	8	10	12	14	7	5

Рабочий лист № 2

Имя________**Фамилия**____________ **Число**_________

• **Строит развернутую таблицу частоты, охватывающую относительную частоту класса.**

1. Данную информацию сгруппировав в 6-ти классах составьте таблицу охватывающую класс, середину интервала частоту и относительную частоту. Деньги потраченные за книги студентами за один семестр:

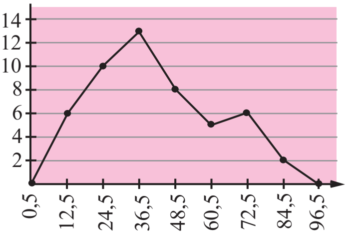
91	472	279	199	142	273	189	248	101	102
375	486	249	530	376	190	398	188	269	240
130	489	266	43	30	127	354	84	188	341

	Всего:		Всего:	

2. На основании информации данной в таблице составьте таблицу охватывающую такие показатели как середина интервала, частота, относительная частота.

Время (мин)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
Число разговоров по телефону	7	10	23	11	8	5

Представление информации по полигону частот. Полигон частот является многоугольником, ограниченным осью абсцисс. По этому графику можно визуально проследить диапазон возрастания и убывания данных и сравнить отдельные части данных.



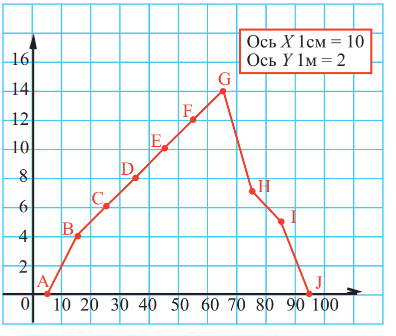
По данным графика в учебнике, учащиеся представляют различную информацию.

Например, число пользователей возрастает до значения 36,5 минут, после этого значения их число идёт на убыль.

Одновременное построение полигона частот по средней точке и частоте.

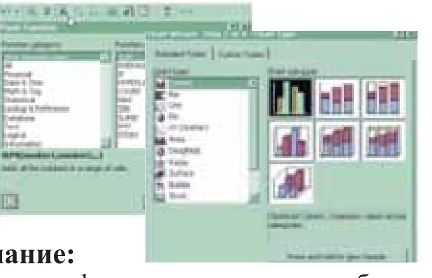
Класс	Середина интервала	Частота
0 –10	5	0
10 – 20	15	6
20 – 30	25	4
30 – 40	35	8
40 –50	45	10
50 – 60	55	12
60 – 70	65	14
70 – 80	75	7
80 – 90	85	5
90 –100	95	0

На координатной плоскости из таблицы отмечаются и последовательно соединяются точки A (5; 0), B (15; 4), C (25; 6), D (35; 8), E (45; 10), F (55; 12), G (65; 14), H (75; 7), I (85; 5) и J (95; 0).



Многоугольник ABCDEFGHIJ - это полигон частот данной информации.

Для построения графика частот рекомендуется воспользоваться программой EXCEL. Чтобы представить статистическую информацию, в меню İNSERT FUNCTİON можно выбирать диалоговое окно PASTE İNSERT FUNCTİON, а также можно в меню CHART WIZARD сразу выбрать форму графика.



Моменты, на которые нужно обратить внимание:

Достоинства и недостатки таких форм распределения информации таких как: таблица частот, гистогамма и полигон частот, можно обобщить, как показано ниже.

Таблица частот. Достоинство: информацию можно передставить в различных графических формах, существует возможность для определения таких статистических показателей как среднее арифметическое, медиана, мода.

Недостатки: Невозможно ясно представить распределение частот (отсутствие визуальности).

Гистограмма. Достоинство: удобна для того, чтобы представить непрерывную, а также сгруппированную дискретную информацию. По графику можно визуально определить медиану и моду. Недостатки: При построении графика возникает трудность определение границ классов.

Полигон частот. Достоинство. Создает условие для сравнения частот. Возможно на одном графики построить полигон, соответствующий различным данным и сравнить их. Например, рост мальчиков и девочек

Недостатки : Невозможно проводить статистические вычисления.

Рабочий лист № 3

Имя ________ Фамилия____________ Число__________

● *Представляет информацию частотой и гистограммой относительных частот.*

1. a) По таблице вычислите относительные частоты.

Возраст (год)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
Число людей	6	11	25	31	18	12	6

b) По таблице постройте гистограмму и полигон относительных частот.

2. По данным изобразите гистограмму и полигон относительных частот.

Рост:	120 – 124	125 – 129	130 – 134	135 – 139	140 – 144
Частота:	10	40	70	65	15

Определите по графику:

a) Количество людей, у которых рост ниже 130 см?

b) Количество людей, у которых рост выше 134 см?

Урок 155-156. Учебник стр. 226-227.
Среднее арифметическое по распределению частот. 2 часа.

Стандарты содержания. 5.1.1. Читает и анализирует информацию данную в виде таблицы, диаграммы, гистограммы или графика.
5.1.2. Классифицирует статистическиую информациию по определенным признакам.
5.1.3. Определяет справедливость статистической информации.
5.2.2. Прогнозирует возможность возникновения событий на основе статистической информации.

Навыки учеников:
- вычисляет среднее арифметическое соответствующее сгруппированной информации;
- дает прогноз основанный на данных.

1-ый час. Повторяется правило вычисления среднего арифметического. Например, для чисел 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4 среднее арифметическое вычисляется как

$(1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4) / 7$.

1. Эту запись можно написать используя распределительное свойство умножения таким образом:

$(1+1+2+3+4+4+4)\cdot(1/7)=(1/7)\cdot 1 + (1/7)\cdot 1+(1/7)\cdot 2+ (1/7)\cdot 3 + (1/7)\cdot 4 + (1/7)\cdot 4 + (1/7)\cdot 4$.

Теперь, мы записали заданные числа с определенным коэффициентом. Обратите внимание, что сумма коэффициентов равна 1, т.е. 7 штук по (1/7).

2. Сгруппируем подобные множители.

$(2\cdot 1 + 2 + 3 + 3\cdot 4)/7 = (2/7)\cdot 1 + (1/7)\cdot 2 + (1/7)\cdot 3 + (3/7)\cdot 4$.

Каждый коэффициент показывает, какую часть данное число (нельзя допускать повторение чисел) составляет от общего множества чисел. Этот подход, обращает внимание учащихся на правило нахождения среднего арифметического в разных ситуациях, т.е. помогает его обобщить.

Одновременно уделяется внимание таким первичным навыкам как: вычисления процента от числа, нахождение среднего арифметического.

$$\bar{x} = \frac{\sum(x \cdot p)}{\sum p}$$ знак $\sum$ показывает сумму и считается как “сигма”.

Делается упор на умение проговаривать формулу словами.
Если все коэффициенты равны, то для нахождения среднего арифметического, используют уже известное до сегодняшнего дня простое правило.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

Изучение последовательности нахождения среднего арифметического для, сгруппированных в таблицу распределения, данных вместе с учащимися.

Рабочий лист № 4

Имя ________ Фамилия____________ Число_________

● *Заполните таблицы нахождения среднего арифметического соответствующих сгруппированных данных.*

Число жителей поселка

Возраст	Число
0-9	57
10-19	68
20-29	36
30-39	55
40-49	71
50-59	44
60-69	36
70-79	14
80-89	8

Классы	Середина интер-вала	Частота	$x \cdot f$
		$n =$	$\sum =$

Время разговора одного человека в течениии года по телефону(в мин.)

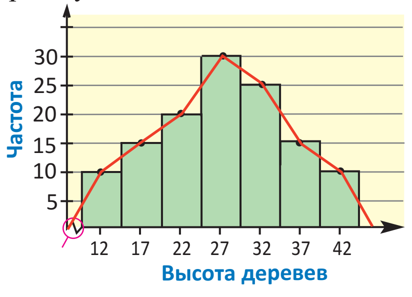
Продолжитель-ность звонка	Число
1-5	12
6-10	26
11-15	20
16-20	7
21-25	11
26-30	7
31-35	4
36-40	4
41-45	1

Классы	Середина интер-вала	Частота	$x \cdot f$
		$n =$	$\sum =$

Решение не которых задач данных в учебнике

У. 10. Решение.
найдем середину каждого интервала и поместим в новый столбец таблицы. Относительная частота - отношение частоты к общему числу данных. Так как
10 + 15 + 20 + 30 + 25 + 15 + 10 = 125
делим значение частоты на 125 находим относительную частоту и добавляем соответствующий столбик в таблицу. Поместив середину интервала на горизонтальном оси, а значение частот на вертикальном, строим гистограмму.

Высота деревев			
Классы	середина	Частота	Относительная частота
10-14	12	10	0,08
15-19	17	15	0,12
20-24	22	20	0,16
25-29	27	30	0,24
30-34	32	25	0,20
35-39	37	15	0,12
40-44	42	10	0,08
		Всего: 125	Сумма: 1



На столбиках гистограмму отметим серединную точку и последовательно содиняя их стороится полигон частот.

У 16. а) Найдите средний балл игроков по набранным очкам в компьютерной игре.

Очки	Число игроков
1–10	2
11–20	5
21–30	6
31–40	4
41–50	3

Решение.
а) Найдем средний балл игроков согласно набранным в компьютерной игре очкам. Добавим столбец в данную таблицу, показывающий середина интервала.
1) Определим среднюю точку (x) каждого интервала и запишим их в соответствующий столбик таблицы.
2) Найдем сумму частот
2 + 5 + 6 + 4 + 3 = 20
3) Вычисляем сумму произведений середины каждого интервала (x) и частоты (f): 5,5·2 + 15,5·5 + 25,5·6 + + 35,5·4 + 45,5·3 = 520
4) вычислим среднее арифметическое:
520 : 20 = 26

Классы	Середина (x)	Частота (f)	Частота × Середина
1–10	5,5	2	11
11–20	15,5	5	77,5
21–30	25,5	6	153
31–40	35,5	4	142
41–50	45,5	3	136,5
		$\sum f = 20$	$\sum(x \cdot f)=520$

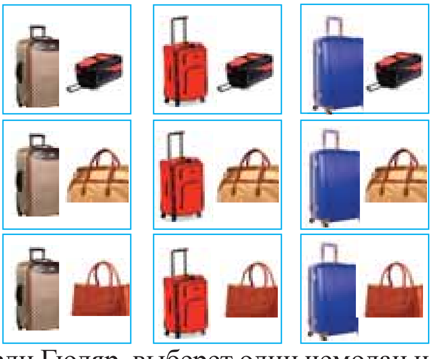
Урок 157-159 Учебник стр. 228-234. Комбинаторика. 3 часа

5.2.1. Различает виды выборок и решает простые комбинаторные задачи.
- применяет принцип умножения, для определения числа возможных событий;
- определяет число пермутаций и комбинезонов, в зависимости от расположению элементов множества;
- решает задачи на вероятность используя формулу пермутации;
- решает задачи на вероятность используя формулу комбинезона.

Мотивация. Гюляр отправляется на отдых. У нее есть 3 разные дорожные сумки и 3 разных чемоданы.
1) Сколько вариантов выбора у нее есть, если она хочет взять с собой один или сумку или чемодан? 2) Сколько вариантов выбора у нее есть, если она хочет взять с собой и сумку и чемодан. ?

Если Гюляр выберет или сумку или чемодан, то число возможных вариантов будет 3 + 3 = 6.

На данном примере ещё раз рссматриваются фундаментальные принципы сложения и умножения подсчёта ввозможных вариантов.



Если Гюляр, выберет один чемодан и одгу сумку то число разных вариантов будет $3 \times 3 = 9$

Пермутация. Рассмотрим способ подсчета вариантов на примере следующих задач.
Задача 1. Эльдар готовит табличку, с номером для велосипеда. У него есть краски - белого, черного, желтого цветов. Эльдар хочет табличку покрасить одним цветом, а цифры на ней другим. Сколько вариантов у него есть? (6 вариантов)

1. Черная доска, белые цифры	2. Черная доска, желтые цифры
3. Белая доска, желтые цифры	4. Белая доска, черные цифры
5. Желтая доска, белые цифры.	6. Желтая доска, черные цифры

Задача 2. У Сябы 3 вида цветов - фиалки, гвоздики, ромашки. Сяба хочет поставить в вазу два вида цветов. Сколько у нее есть выборов?
фиалки, гвоздики фиалки, ромашки гвоздики, ромашки

Ученики должны представить разницу между двумя задачами. Если один из элементов обозначим через A, другой через B, то в первом случае AB и BA отличаются друг от друга. Потому что, один из них отражает цвет доски, а другой цвет цифр. Во втором случае разницы между комбинациями AB и BA, нет потому что каждый из них отражает вид цветов в вазе,

Замечание! Задача, представленная в качестве мотивации в учебнике относится к пермутации и учитываются все возможные перестановки с участием всех n -элементов из n. Упорядоченный набор, в котором используются r элементов из n элементов множества называется аранджеман. На самом деле, по выбору и размещению r элементов из n, аранджеман также является пермутацией. Учитывая, то что в учебной литературе Европы, Турции и США используют только одно понятие, в учебник было включено только понятие пермутации.

Пермутацией называется каждый из разных возможных вариантов размещения элементов множества в требуемой ситуации. $_nP_n = n!$ (1). Формула (1) показывает число наборов, образованных перестановками элементов n -элементного множества, то есть число пермутаций. Например, один человек - Азер- одни набор, двое Азер и Камал, АК и КА - два разных набора, а Азер, Ильгар, Фидан: АИФ, АФИ, ИАФ, ИФА, ИФА, ФИА могут образовать $3 \times 2 = 6$ наборов.

При определении числа пермутаций имеет значение последовательность элементов. Число k перестановок из n -элементов в определенном порядке, не допуская повторения, записывется как число $_nP_k$ пермутаций и равно: $_nP_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ (2)

Число пермутаций, с повторениями равно: $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}$ $n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$ (3)

Соответственно ситуации задачи могут быть решены с применением формулы пермутации (3). Рассмотрим некоторые ситуации, в которых к набору постановлены особые условия.

1. Число r элементных пермутаций из n элементов, при условии присутствия данного элемента во всех наборах: $r \cdot {}_{n-1}P_{r-1}$

Из 6 учеников должны выбрать троих - председателя, заместителя и секретаря. Себа обязательно должна быть выбрана на одну из этих должностей. Значит, остались 5 человек и две должности $_5P_2$. Себа сама может быть избрана тремя способами. Число вариантов выбора $3 \cdot {}_5P_2 = 3 \cdot 5 \cdot 6 = 90$.

2. Число r элементных пермутаций из n элементов при условии отсутствия одного элемента: $_{n-1}P_r$

3. Число пермутаций из n элементов при условии, m элементов будут стоять рядом: $m! \times (n - m + 1)!$

4. Число пермутаций из n элементов при условии, m элементов не будут стоять рядом: $n! - m! \times (n - m + 1)!$

5. Число пермутаций из n элементов с условием что какие-либо k элементы будут под данным номером: $_{n-k}P_{n-k} \times {}_kP_k$

Задача. Сколько различных перестановок получится из буква имени Симузер, при условии, что: а) ни одна гласная не была бы рядом; b) гласные всегда были бы на чётных местах (2-ая,4-ая,6-ая буква). **Решение:**

В имени Симузер 7 букв три из которых гласные. Подойдем к задаче с противоположной стороны. Представим, что все гласные записаны подряд. В этом случае 3 гласные рассматриваются как один элемент. Число элементов и согласные + 1место гласной = 5 элементов, число всевозможных размещений будет равно 5!.3 гласные, меняясь между собой местами, дают 3!. Общее число размещений будет $3! \cdot 5! = 720$. Это число вариантов, когда гласные записаны подряд. Так как число букв в имени 7, то общее число пермутаций равно 7! . Тогда, число пермутаций, когда гласные не расположены рядом = общее число пермутаций - число пермутаций когда все гласные рядом = $7! - 3! \cdot 5! = 5040 - 720 = 4320$.

b) В ряду построения 7 букв есть 4 нечетных и 3 четных места. Число построеий гласных букв в 3-х четных $_3P_3$, согласных $_4P_4$, а число общего построения: $_3P_3 \cdot {}_4P_4$. Задачи такого типа занимают важное место в вопросах GMAT, SAT. Поэтому рекомендуется изучать задачи, с различными ситуациями.

Исследуются ситуации на комбинезон. Ученики устно представляют различные ситуации, в которых построение не имеет значения.Например, как выбрать 2 салата из 8 видов или как выбрать трехзначное число для кода и т.д.

$$ {}_nC_к = \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad {}_nC_k = \frac{{}_nP_k}{k!} $$

Объясняется формула комбинезона. Из-за удобства при вычислении чаще всего пользуются формулой, связанной с пермутацией. Во многих ситуациях элементы и их комбинезоны состоят из 2-3 различных элементов. Рассмотрим следующую задачу.

Задача. В группе альпинистов из 25 челове 15 мужчин и 10 женщин. Сколько существуют возможных вариантов групп, состоящих из 3 мужчин и 2 женщин?

Решение: 3 мужчин из 15 ${}_{15}C_3$. способами, 2 женщин из 10 можно выбрать ${}_{10}C_2$ способами. Тогда по принципу умножения число возможных групп будет:

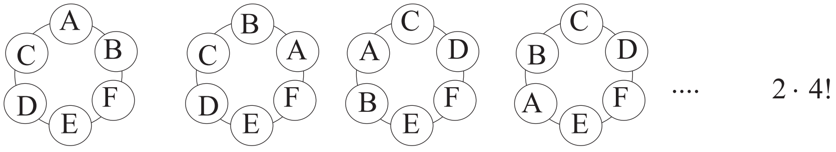
$$ {}_{15}C_3 \times {}_{10}C_2 = \frac{{}_{15}P_3}{3!} \cdot \frac{{}_{10}P_2}{2!} $$

Рекомендуется, решать задания такого типа соответственно уровню знаний учащихся. Примеры некоторых задач вместе с решениями приведены ниже .

Некоторые типы комбинаторных задач

Задача 1. Сколькими способами можно рассадить 6 человек за круглый стол, если А и В не захотят сидеть рядом?

Решение: Существует $(n-1)!$ вариантов, чтобы рассадить 6 человек за круглый стол. В этом случае существует $(6-1)! = 5!$ вариантов. Однако, в условии задачи А и В не хотят сидеть радом. Для того, чтобы решить задачу, найдем число вариантов, когда А и В будут сидеть рядом. В этом случае рассмотрим АВ как один элемент. Тогда число всех вариантов будет не 5!, а уже 4!. Здесь появляются два варианта по рассаживанию В справа или слева от А и их общее число будет $2 \cdot 4!$



Если эти варианты вычесть из общего число вариантов, тогда число вариантов рассаживания 6 человек вокруг круглого стола с условием, что А и В не будут сидеть рядом будет:

$$ 5! - 2 \cdot 4! = 120 - 48 = 72 . $$

Задача 2. Из 4 врачей, 3 инженеров и 5 ученых нужно выбрать делегацию, в которой 3 ученых, 2 врача и 1 инженер. Сколькими вариантами можно это сделать?

Из 3 учёных из 5 можно ${}_5C_3$ способами, 2 врача из 4 можно выбрать ${}_4C_2$, способами, и наконец 1 инженера из 3 ${}_3C_1$ способами. Число вариантов составит: ${}_5C_3 \times {}_4C_2 \times {}_3C_1 = 10 \times 6 \times 3 = 180$

Задача 3. В коробке 2 белых, 3 черных и 4 красных шара. Если из коробки вытащить 3 шара, то сколько существует возможных вариантов, что хотя бы один из них черный? Возможные варианты:1 черный + 2 другого цвета или 2 черных + 1 другого цвета или 3 черных. Число комбинаций: $({}_3C_1 \times {}_6C_2) + ({}_3C_2 \times {}_6C_1) + {}_3C_3$
Задачи такого типа имеют важное значение при вычислении вероятность по статической информации и в задачах прогнозирования.
Задачи, в которых используются и пермутации и комбинезоны:
Из 20 учащихся в организацию должны выбрать президента, вице -президента, секретаря и четырёх членов совета. Сколькими способами можно это сделать?

Здесь важно из какого ряда выбирают 3 учеников (президент, вице-президент, секретарь). ${}_{20}P_3 = 6840$. Членов совета выбирают уже из оставшихся 17 и здесь последовательность выбора уже не имеет значения, то есть получим ${}_{17}C_4 = 2380$.
по принципу умножения общее число вариантов равно: ${}_{20}P_3 \times {}_{17}C_4 = 16\,279\,200$.
Внимание учеников обращается на определение типа комбинаций, к которой относится ситуация в задаче, а именно,что требуется в задаче, нахождение числа пермутаций или числа комбинезонов? Для развития навыков решения таких задач, рекомендуется в качестве домашнего задания рабочие листы, с задачами данными в пособии для учителей.

Урок 160-163. Учебник стр. 235-242
Решение задач на вычисление вероятности. Обобщающие задания. 4 часа.

Стандарты содержания. 5.2.3. Решает простые задачи на вероятность с помощью комбинаторики.

■ Демонстрирует навыки вычисления вероятности событий с применением пермутации и комбинезона:
- вычисляет пермутации в соответствии с числом возможных событий;
- вычисляет комбинезон в соответствии с числом возможных событий;
- определяет число благоприятных событий различными способами;
- находит вероятность события;

■ Находит вероятность событий соответствующих различным ситуациям:
- независимые события;
- зависимые события;
- несовместимые события.

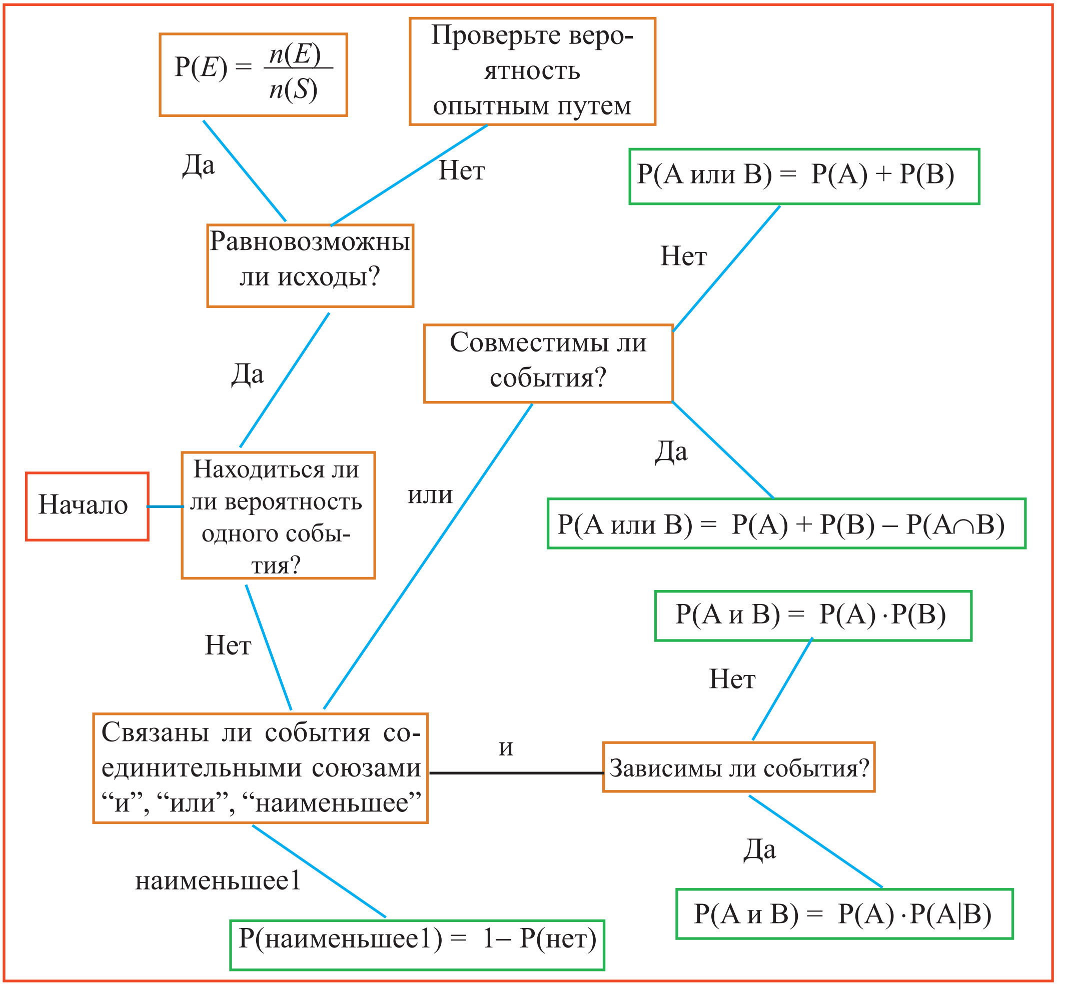
Ученик должен понимать, как определить число возможных событий с помощью комбинезона и пермутации. При этом он уметь определять число n(E) благоприятных событий и число n(S) всех возможных событий для вычисления вероятности по формуле $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$. В зависимости от ситуации, каждое количество он должен определить по формуле пермутации или комбинезона и уметь применять принцип умножения.

Задача. Из 52 карт на столе случайным образом, не возвращаю обратно, вытягиваются 2 карты. Найдите вероятность того, что эти карты являются тузами.

1. Число всех возможных событий (пермутаций) ${}_{52}P_2$.
2. Число благоприятных событий: ${}_{4}P_2$. Потому что в колоде имеются 4 туза.
3. Вероятность событий$= \dfrac{{}_{4}P_2}{{}_{52}P_2} = \dfrac{4\cdot 3}{52\cdot 51} = \dfrac{1}{221}$

Рассматриваются задачи данные в учебнике.

Задачи на вероятность. Задания в учебнике преследуют цель обобщения пройденных до сих пор ситуаций на вероятность, проверку навыков решения задач и развития учащихся по данной теме. Эти ситуации можно исследовать с помощью следующего алгоритма.



Решение некоторых задач данных в учебнике.

У.3. Вюгар, Яшар, Лейла, Илаха и Тогрул в соревновании по шахматам между собой набрали различные очки.
Найдите число всевозможных вариантов занявших I и II места.
Решение. I место может занять один из шести шахматистов 6 разными способами, II-е место - из оставшихся пяти шахматистов 5 разными способами. По принципу умножения число возможных вариантов занявших I и II места будет $6\cdot5= 30$.

У.6. Сколько пятизначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?
Решение. I способ. Первую цифру числа можно выбрать 4 способами, вторую цифру 4 способами, третью цифру 3 способами, четвёртую цифру 2 способами, пятую (последнюю) цифру 1 способом. По принципу умножения получим, согласно данному условию можно составить $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ пятизначных чисел.
II способ. $5! – 4! = 120 – 24 = 96$

У.9. Сколькими разными способами можно построить в ряд группу из 8 школьников, при условии чтобы Лала и Эльмир стоят рядом?
Решение. Если Лала и Эльмир будут стоять рядом, то число пермутаций из 7 элементов будет 7! А так как Лала и Эльмир тоже могут меняться между собой местами 2! раз.то число различных построений будет $2! \cdot 7!$

У.13. d) Сколько слов с разными произношениями можно получить переставляя буквы в слове ПАРАБОЛА.
Решение: $$\frac{8!}{3!\cdot1!\cdot1!\cdot1!\cdot1!\cdot1!} = \frac{3!\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{3!} = 6720$$

У.20.
Решение: Так как У Фидан 6 рабочих костюма, то в понедельник она может надеть их 6-ю разными способами. Если она будет надевать каждый день разные костюмы, тогда во вторник они наденет один из 5-и оставшихся костюмов. По принципу умножения число разных выборов будет:

$${}_6P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

У.23. Сколькими разными способами могут покинуть автобус трое пассажиров на 5 остановках, при условии, что на каждой остановке выходит не более одного пассажира?

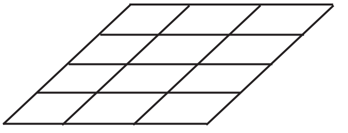
Решение: ${}_5P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Действительно, один из пассажиров может выйти на одной из пяти остановок 5 разными способами, другой на четырёх остановках 4 способами, третий на оставшихся трёх остановках 3 способами По принципу умножения число разных способов равно $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

У.36. На окружности отмечены 8 точек. Сколько треугольников можно построить с вершинами в этих точках?

Решение: Если любые три точки из 8 соединить отрезками, то получится треугольник. Число разных треугольников будет:

$$ {}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56. $$

У.37. Сколько паралеллограмов можно сосчитать на картине?



Решение: На рисунке показано пересечение 4 параллельных прямых с 5 параллельными прямыми. Пересечением любых двух горизонтальных прямых из 4-х, с двумя наклонными прямыми из 5-ти, образуется паралеллеограмм. По принципу умножения число различных паралеллелограммов будет $ {}_4C_2 \cdot {}_5C_2 = 6 \cdot 10 = 60$.

У.39. Сколько разных групп из трёх человек можно составить из 4 мальчиков и 5 девочек, так чтобы в группе была хотя бы одна девочка?

Решение: Одну девочку из 4 можно выбрать ${}_4C_1$ способами, двух других членов для группы из 3 человек можно выбрать из пяти мальчиков ${}_5C_2$ пособами. Значит, число групп из трёх человек, в составе которой будет хотя бы одна девочка равно: ${}_4C_1 \cdot {}_5C_2 + {}_4C_2 \cdot {}_5C_1 + {}_4C_3 = 74$.

У.40. В урне 5 белых и 3 красных шаров. Сколькими разными способами можно вынуть из урны 3 шара так, чтобы 2 из них были белыми, а 1 красным?

Решение: Два шара из 5 белых можно вытащить ${}_5C_2$ способами, один шар из 3 красных ${}_3C_1$ способами. Число разных вариантов будет ${}_5C_2 \cdot {}_3C_1 = 10 \cdot 3 = 30$.

У. 1. (стр. 237) Определите совместные или несовместные события и вычислите вероятность.

2) При бросании одной кости: а) P(1 или 5);

а) Событие P(1 или 5) - это нахождение вероятности совместных событий. Вероятность выпадения 1 равно $\frac{1}{6}$; и вероятность выпадения 5-ти тоже равна $\frac{1}{6}$.
Вероятность выпадения 1 или 5 равно:

$$ P(1 \text{ или } 5) = P(1) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} $$

У8. Решение. В урне $5 + 4 = 9$ шаров. Сначала найдем вероятность того, что среди вытащенных шаров нет синий (событие E\`). Количество воможных исходов: ${}_9C_3 = \frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3} = 84$, количество благориятных исходовә ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$ , тогда вероятность события будет: $P(E`) = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$.
Тогда веротность того что хотя бы один из этих шаров будет синего цвета P (E) будет $P(E) = 1 - P(E`) = 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$

У12. Решение. $3 + 2 = 5$ человек может стоять в ряду $5! = 120$ способом. Если мальчики будут стоять рядом, то число разных расположений (рядов) будет $4! \cdot 2! = 48$. Вероятность соответствующего события будет: $P = \frac{48}{120} = \frac{2}{5} = 0{,}4$

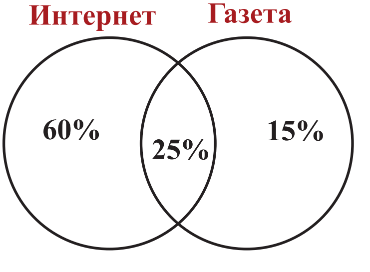
У14. Решение. В урне $8 + 5 = 13$ шаров. Вероятность того что первый вытащенный шар будет красного цвета - $\frac{8}{13}$. Так как первый вытащенный шар красный в урне из 12 шаров 5 - желтого цвета. Тогда вероятность того что 2-й шар будет желтым будет: $\frac{5}{12}$. По формуле для вычеслиния вероятностей зависимых событий можно найти что $P(\text{крас., желт.}) = \frac{8}{13} \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{39}$

У18. Решение. $5k + 4k = 45$; $9k = 45$; $k = 5$. Значит, в урне $5\cdot5=25$ шаров, $4 \cdot 5 = 20$ зеленых шаров. Число возможных исходов ${}_{45}C_2$,
число благоприятных исходов: ${}_{25}C_2$. Вероятность события:

$$P(\text{желт., желт.}) = \frac{{}_{25}C_2}{{}_{45}C_2} = \frac{\frac{25\cdot24}{1\cdot2}}{\frac{45\cdot44}{1\cdot2}} = \frac{10}{33}$$

У.17. (стр. 227) Результат опроса “Из каких источников вы получаете последние новости?” следующий: 85% из интернета, 40 % из газет, 25 % из обеих источников Представьте информацию диаграммой Вена. Если среди респондентов случайно выберут одного, найдите соответствующую вероятность: a) Люди, которые обретают информацию не из газеты, а из интернета. b) Люди, которые обретают информацию из обеих источников.

Решение. Ученики поместив соответствующую информацию в диаграмме Эйлера-Вена определяют какой процент приобретает информацию только из интернета, а какой процент людей из обеих источников.



a) $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ b) $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

Рабочий лист № 5

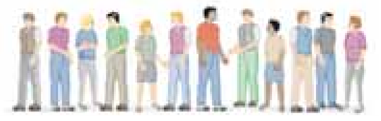
Имя ________ Фамилия____________ **Число_________**

● *Определяет число пермутаций.*

1) Айтен, используя буквы своего имени, хочет написать пин код из четрыех букв. Сколько вариантов есть у Айтен?

2) 12 человек выстроились в ряд для того, чтобы сделать фотографию.
Сколько возможных вариантов соответствует условию:
a) Сардар и Гасан хотят стоять рядом;
b) Сардар и Гасан не хотят стоять рядом.

Сардар Гасан



3) Что больше?

1) $_8P_6$, или $_6P_2$ 2) $_9P_7$, или $_9P_2$ 3) $_{10}P_3$, или $_8P_4$

4) Эльшан хочет придумать пароль из семизначного числа. Сколько у него возможных вариантов?

5) Из 24 учеников, собирающихся в экспедицию нужно выбрать троих. Один из них должен найти лагерь, другой должен заняться хозяйственными делами, а третий должен подготовить календарный план. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

6) Найдите значение *n,* если $_nP_r = 210$ и $r = 3$, .

7) Вычислите.

$\dfrac{_5P_3}{_5P_2} =$ $\dfrac{_7P_3}{_7P_2} =$

$\dfrac{_4P_3}{_4P_2} =$ $\dfrac{_8P_6}{_8P_3} =$

Рабочий лист № 6

Имя ________ Фамилия____________ **Число_________**

● *Решает задачи используя формулы пермутации и комбинезона.*

Задачи на комбинезон и пермутации

Определите к какому типу комбинаторных задач относится следующие задачи. Заключите соответствующее слово в кавычки и решите её.

1) Для приготовления пирога Натаван хочет использовать два продукта из следующих 5: грибов, сыра, помидор, курицы, яиц. Сколько вариантов выбора у нее есть?

Пермутация, комбинезон

2) Учитель Махира по биологии говорит, что тот кто при оценивании ответит на 15 вопросов из 20, тот будет иметь хороший результат. Сколько таких возможных вариантов существует?

Пермутация, комбинезон

3) Код парковки велосипеда состоит из 4 цифр. Найдите число кодов.

Пермутация, комбинезон

4) Ясемен планирует на летних каникулах прочитать 9 книг. Она хочет отобрать первые три книги. Найдите количество возможных вариантов?

Пермутация, комбинезон

5) Не производя вычислений, объясните равенство числа сочетаний 2-х элементов из 10-ти и 8-х элементов из 10-ти и обобщите равенство ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$.

Рабочий лист № 7

Имя ________ Фамилия____________ **Число_________**

● *Решает задачи используя формулу пермутации.*

Комбинезон, пермутация, вероятность

Классный руководитель должен выбрать трёх членов в школьный совет из 3 мальчиков и 5 девочек случайным образом.
a) Сколькими вариантами могут быть выбраны члены совета?
b) Какова вероятность, что все три члены совета будут мальчиками?
c) Найдите вероятность того, что ни один мальчик не будет членом совета.

Сколько трехзначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 2, 4, 5, 6?
Найдите вероятность того, что случайно выбранное число будут нечетным.

В урне 6 белых и 5 черных шаров. Какова вероятность, что из 3-х вытащенных шаров два шара окажутся белыми? Допишите и вычислите
Учтите: Общее число событий: ${}_{11}C_{\_}$
Возможное число благоприятных событий: ${}_{6}C_{\_} \times {}_{\_}C_{1}$

$P(E) =$ ______

Известно, что из 12 мониторов, поступивших в магазин для продажи три с браком, однако, не известно какие именно. Специалист сначала выделил пять из них для проверки.
a) Сколько возможных вариантов выбора он имеет в 5 таких группах?
b) Сколько возможных вариантов выбора группы с неисправным монитором у него есть?
c) Чему равна вероятность того, что все три бракованные мониторы в первой группе?

Таблица критериев суммативного оценивания по 6-му разделу

№	Критерии	Замечания
1.	Разделяя множество данных по классам группирует и составляет таблицу частот.	
2.	Представляет информацию в виде гистограмм частот и относительной частоты.	
3.	Дает прогноз соответствующий информациям.	
4.	Вычисляет среднее арифметическое соответственно сгруппированной информации.	
5.	Определяет число пермутаций в зависимости от порядка расположения элементов множества.	
6.	Решает задачи с применением формулы вычисления пермутации и комбинезона.	
7.	Решает задачи на вероятность	

Урок 164. Задания суммативного оценивания по 6-му разделу.

1. Среди населения был произведен опрос о том, что сколько, приблизительно, денег они тратят ежедневно на продукты. Приведённые ниже данные, являются выборкой полученных результатов.

35	10	30	25	75	10	30	20	20	10	40
50	40	30	60	70	25	40	10	60	20	80
40	25	20	10	20	25	30	50	80	20	

a) Составьте таблицу отражающую показатели класса информации, средней оценки класса, частоты, относительной частоты.
b) Составьте гистограмму частоту
c) Составьте гистограмму относительнх частот.
d) Найдите среднее арифметическое.

2. Вычилите.

a) ${}_6P_3$ b) ${}_5C_3$ c) $\frac{9!}{6!}$

3. Напишите какая из задач относится к нахождению числа пермутаций, а какая - к нахождению комбинезона? Решите их.

Какую ситуацию более точно отражает выражение ${}_8C_3$?
a) Для мытья волос в парикмахерской предлагают 8 видов шампуня и 3 вида бальзама. В скольких разных вариантах могут быть использованы шампунь и бальзам при мытье волос?
b) У Рашада 8 цветных карандашей. Сколькими разными вариантами он может выбрать 3 карандаша?
c) Для личного PİN- кода были использованы 4 буквы и 4 цифры. Сколько существуют разных вариантов?

4. Сколько существует различных способов расположения букв в слове “ВЕКТОР”, при условии что буквы В и Т не стоят рядом.

A) 720 B) 240 C) 480 D) 250

5. Сколькими разными способами можно разделить семь разных игрушек между тремя детьми.

a) ${}_7C_3$ b) ${}_7P_3$ c) 3^7 d) 7^3

6. Буквы A, B, C,M, Ö, F, G, H, Ə и K собраны в мешочек.

a) Сколькими вариантами можно вытащить две буквы?

b) Какова вероятность, что оба эти буквы гласные ?

7. В целях рекламы фирма представляет покупателям рубашки трёх цветов с изображенными на них логотипами. 25 % покупателей выбрали красный цвет, 60% голубой и 15 % черный. Какова вероятность, что случайно выбранный покупатель выберет красную или черную рубашку?

8. Бросается одна игральная кость. Какова вероятность, что выпадет нечетная цифра или цифра больше 4.

9. Бросается одна игральная кость. Какова вероятность, что выпадет цифра 2 или 5?

10. На круге отмечено 6 точек. Сколько треугольников можно построить с вершинами в этих точках?

11. В коробке 4 белых и 3 черных шара. Наугад берутся 2 шара. Найти:

а) Вероятность того, что обе шары белые

б) Вероятность того, что обе шары черные

в) Вероятность того, что шары разного цвета

12. Сколько разных групп по 3 человека можно сформировать из 4 мальчиков и 3 девочек, по крайней мере, по 1 девочке в каждой?

13. В коробке лежат шары с буквами A и N. Количество шаров с надписью A на 2 больше, чем количество шаров с надписью N.

1) Если вероятность выпадения буквы A на случайно выпавшем шаре составляет 0,6, сколько шаров в коробке?

2) Из коробки последовательно выташили 3 шара каждый раз возвращая их обратно, какова вероятность того, что буквы последовательно записывая буквы на шарах в тетрадь получим слово «ANA» ?

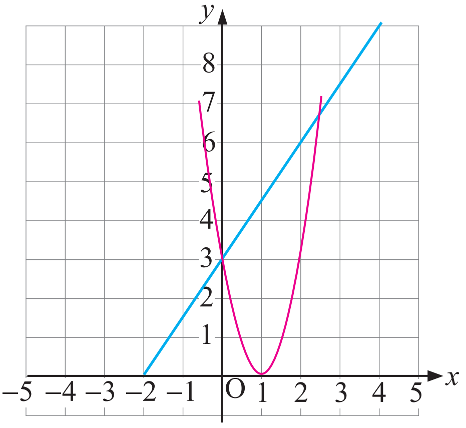
3) Из ящика вытащили наугад и сложили в ряд 3 шара. Какова вероятность того что, буквы написанные на этих шарах образуют слово “ANA”

Урок 165-171. Учебник стр. 243-249. Обобщающие задания. 7 часов

Задания, охватывают курс математики 5-9 классов, в которых могут быть рассморены заново темы: действия над рациональными числами, отношение, процент, подобие фигур, конгруэнтность и другие.

Решение некоторых задач данных в учебнике.

У2. Решение.



1) При $x = 0$ вычислим значение функции $y = 3(x-1)^2$: $y = 3(0-1)^2 = 3$

Значит парабола $y = 3(x-1)^2$ пересекается с осью ординат в точке (0; 3).

2) По условии прямая $y=kx+b$ проходит через точки (–2; 0) и (0; 3). Найдем угол коэффициента этой прямой:

$$k = \frac{3-0}{0-(-2)} = 1{,}5$$

в уравнении $y = kx + b$ подставим $k = 1{,}5$ и поскольку (–2; 0) или (0; 3) находятся на прямой $y = 1{,}5x + b$, отсюда можно писать: $0 = 1{,}5 \cdot (-2) + b$, $b = 3$

Уравнение прямой будет в виде $y = 1{,}5x + 3$.

3) Точки пересечения параболы и прямой можно найти решая систему уравнений. $\begin{cases} y = 3(x-1)^2 \\ y = 1{,}5x + 3 \end{cases}$ Используя метод подстановки решим систему:

$3(x-1)^2 = 1{,}5x + 3$, $3x^2 - 6x + 3 - 1{,}5x - 3 = 0$,

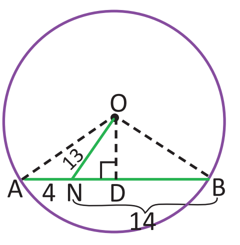
$3x^2 - 7{,}5x = 0$, $3x(x - 2{,}5) = 0$

Получаем, что решение системы является $x=0$ или $x = 1{,}5$.

При $x = 0$ находим с помощью системы $y = 3$. Значит одной из точек пересечений является данная точка (0;3).

Подставив $x = 2{,}5$, находим $y = 1{,}5 \cdot 2{,}5 + 3 = 6{,}75$. Значит еще одной точкой пересечений прямой и параболы является точка: (2,5; 6,75)

У5. Решение.



Начертим радиусы OA, OB и высоту OD в треугольнике ΔAOB.

Поскольку ΔAOB равносторонный высота OD есть и медиана.

Так, как AB = AN + NB = 4 + 14 = 18 находм, что AD = DB = 9. Отсюда ND = 5

По теореме Пифагора от ΔNDO можно найти OD:

$OD = \sqrt{ON^2 - ND^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

По теореме Пифагора от ΔAOD-находим AO:

$AO = \sqrt{OD^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$

Радиус окружности: 15 единиц.

D10. Решение.

Перепишем систему уравнений нижеуказанном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{S}{x+y}=3 \\ \dfrac{S}{x-y}=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{S}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x-y}{S}=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{S}+\dfrac{y}{S}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x}{S}-\dfrac{y}{S}=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Сложив почленно находим: $\dfrac{2x}{S}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{x}{S}=\dfrac{4}{15}$

и вычитывая почленно находим $\dfrac{2y}{S}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{y}{S}=\dfrac{1}{15}$

Тогда, получим $\dfrac{S}{x}=\dfrac{15}{4}$, $\dfrac{S}{y}=15$ и $\dfrac{S}{x}+\dfrac{S}{y}=\dfrac{15}{4}+15=\dfrac{75}{4}=18\dfrac{3}{4}$

У18. Решение.

1) Если обозначим количество зеленых шаров через x, то количество желтых шаров будет $4x$. После того что, вытащили половину желтых шаров в урне останется $2x$ желтых шаров. По условии $2x=x+2$, отсюда находим $x=2$. Значит в урне были 2 зеленых и $4\cdot2=8$ желтых шаров. Количество всех шаров будет $2+8=10$.

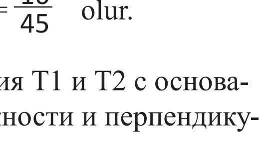
2) Из 10 шаров наугад вытаскивается 2 шара. Число возможных исходов будет . ${}_{10}C_2=\dfrac{10\cdot9}{1\cdot2}=45$.

a) Количество благоприятных исходов того, что обе шары были желтыми ${}_{8}C_2=\dfrac{8\cdot7}{1\cdot2}=28$. В этом случае вероятность можно найти как Р(ж; ж) = $\dfrac{28}{45}$

b) Количество благоприятных исходов для события того что наугад вытащенные шары будут разного цвета по принципу умножения будут $2\cdot8=16$. Вероятность этого случая можно вычислить как Р (разн. цвета) = $\dfrac{16}{45}$ olur.

У 20. Решение. Отрезок, который соединяет точки касания T1 и T2 с основаниями трапеции и окружности, является диаметром окружности и перпендикулярен к основаниям.

Прямая T_1T_2 является осью симметрии данной равнобокой трапеции, ясно, что в этом случае отрезок MK и основания трапеции - параллельны По свойству касательных $CT_1=CK=4$, $DT_2=DK=16$. Нарисуем $CN \parallel T_1T_2$.



Пересечение MK с T_1T_2 обозначим через F, а пересечение с CN через E. ясно, что, $FE=T_2N=CT_1=4$.

Поскольку $\Delta CEK \sim \Delta CND$ (признак УУ) получим:

$$\frac{CK}{CD}=\frac{EK}{ND}$$

Отсюда, учитывая $CK=4$, $CD=20$, $ND=12$ можно найти, что

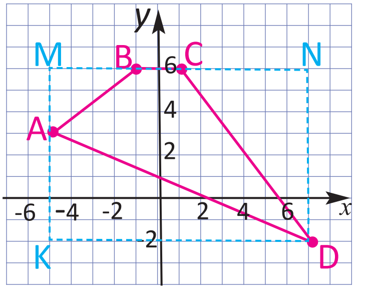
$$\frac{4}{20}=\frac{EK}{12}, \quad EK=2{,}4$$

Тогда $FK=FE+EK=4+2{,}4=6{,}4$; $MK=2\cdot6{,}4=12{,}8$

У27. Решение. По данным на рисунке напишем координаты вершин:

A(–5; 3), B(–1; 6), C(1; 6), D(7; –2)

Через вершины четырехугольника начертим вертикальные и горизонтальные линии как на рисунке. Считая клетки и применяя теорему Пифагора находим:



По ΔABM $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

ΔAKD-dən $AD = \sqrt{12^2 + 3^2} = 13$

ΔCND-dən $CD = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Учитывая BC = 2 находим периметр четырехугольника:

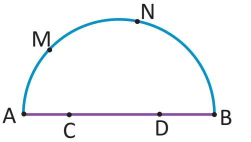
$$P = AB + BC + CD + AD = 5 + 2 + 13 + 10 = 30$$

От площади четырехугольника MNDK если вычесть площади треугольников ΔAMB, ΔCND, ΔAKD , останется площадь четырехугольника ABCD

Поскольку $S_{MNDK} = 12 \cdot 8 = 96$, $S_{AMB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$, $S_{CND} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$,

$S_{AKD} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30$, то будет $S_{ABCD} = 96 - (6 + 24 + 30) = 36$.

У45. Решение.



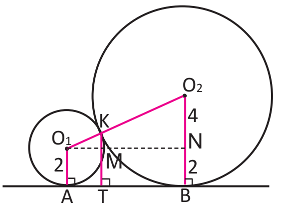
1) Если точки M и N - две вершины треугольника, для третьей вершины имеется 4 возможные варианты. Эти варианты: одна из точек A, C, D, B.

2) Если 2 вершины треугольника находится на диаметре AB, 3-й вершиной может быть или точка M или же точка N. Отмеченной на диаметре из 4-х точек 2 можно выбрать ${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ способом (здесь, не имеет разницы , выбраны ли точки C и D или же D и C).

Тогда по принципу умножения находим что, число возможных треугольников будет $2 \cdot 6 = 12$.

3) Согласно данным, чтобы найти число возможных треугольников по принципу сложения мы должны сложить возможные варианты 1-го и 2-го пункта: $4 + 12 = 16$ **Ответ:** можно построить16 треугольников.

У53. Решение.



Начертим $O_1N \parallel AB$. Ясно, что

$O_1O_2 = O_1K + KO_2 = 2 + 6 = 8$

Поскольку $BN = O_1A = MT = 2$ нходим

$O_2N = 6 - 2 = 4$.

Так, как $\Delta O_1MK \sim \Delta O_1NO_2$ по отношениям соответствующих сторон можно найти KM.

$$\frac{KM}{O_2N} = \frac{O_1K}{O_1O_2}; \quad \frac{KM}{4} = \frac{2}{8}, \quad KM = 1$$

Тогда получается, что $KT = KM + MT = 3$.

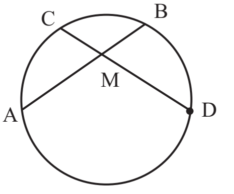
Урок 172. Годовое суммативное оценивание

1. Определите знак разности $3\sqrt[3]{2} - 6\sqrt{2}$.

2. Вычислите значение выражения.

$$(\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}) : \sqrt[3]{2}$$

3. CM = 4 см , MD = 9 см , AM = 6 см. Найдите BM.



4. Точка A (2 ; 3) лежит на параболе $y = x^2 + 4x + c$. Покажите точку вершины и постройте параболы.

5. Если абсцисса вершины параболы $f(x) = x^2 + bx + 6$ равна 1, то найдите $f(2)$.

A) – 3 B) 2 C) 6 D) –6

6. a) Около окружности с радиусом 3 см описан многоугольник, периметр которого равен 12 см. Найдите площадь этого многоугольника.

b) Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей в треугольник со сторонами 5; 5; 6.

7. Установите соответствие.

1) пятиугольник	A) Из одной вершины исходят 5 диагоналей.
2) шестиугольник	B) Из одной вершины исходят 3 диагоналей.
3) восьмиугольник	C) Число всех диагоналей равно 9.
	D) Сумма внутренних углов равна 720°.

8. Найдите сумму 20-ти первых членов арифметической прогрессии, если $a_2 + a_{19} = 10$.

A) 120 B) 200 C) 100 D) 180

9. Решите уравнения.

a) $\left||x-2|+3\right| = 5$ b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ c) $(x^2 + 4x) \cdot \sqrt{x-1} = 0$

10. Если в геометрической прогрессии $b_2 = 6$, $b_5 = 48$, найдите сумму 6 первых членов

11. Найдите длину медианы AM треугольника с вершинами в точках A (1 ; – 3) , B (3 ; 6) , C (– 5 ; 2) .

12. Точки A (2 ; 12) и B (6 ; 8) конечные точки диаметра.

a) Напишите уравнение окружности b) Вычилите длину окружности.

13. Найдите сумму целых чисел удовлетворяющие неравенства $|x-1| < 3{,}2$

14. Решите неравенство. $(1-\sqrt{2})(x^2 - 3x + 2) \geq 0$

15. При каком наибольшем целом значении b число 3 является решением неравенства $x^2 + bx - 30 < 0$?

16. Одна сторона треугольника равна 4 см, другая 7 см. Если периметр треугольника меньше 19 см, то найдите наибольшее и наименьшее целое значение третей стороны (в сантиметрах) треугольника.

17. Найдите длину вектора $2\vec{u} - \vec{v}$, если $\vec{u} = \langle 2; -1 \rangle$ и $\vec{v} = \langle -1; 2 \rangle$.

18. Найдите расстояние от точки $A = (1;\ 2)$ до центра окружности $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 5$

19. Сколько разных слов можно составиь переставляя буквы в слове "ХАЗАР" ?

20. В коробке 4 белых и 2 черных шара. Найдите вероятность того, что вытянутые случайным образом 2 шара окажутся обе белыми.

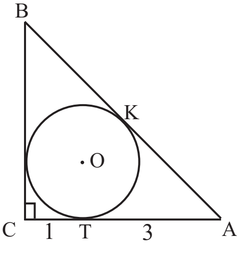
21. $\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} = 5 \\ y + \dfrac{1}{x} = 10 \end{cases}$ по системе уравнений найдите $\dfrac{x}{y}$

22. По данным о возрасте участников похода найдите средний возраст.

Возраст	Число
14-18	8
18-22	10
22-26	8
26-30	4

23. Дан вектор $\overrightarrow{AB} = \langle 8; -11 \rangle$. Найдите координаты точки B, если известно что, начало находится в точке $A(-3; 7)$.

24. При каких значениях k, длина вектора $\vec{u} = \langle k; 3 \rangle$ равна 5.



25. В ΔABC даны $\angle C = 90^\circ$, $CT = 1$, $AT = 3$. найдите периметр треугольника.

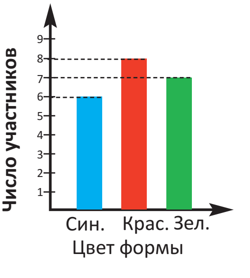
A) 8 B) 12 C) 10 D) 14

26. Школьники участвуют в соревнованиях в спортивных формах голубого, красного и зеленого цветов. Данные о количестве участников в соответствии с цветом формы представлены на барграфе.

Найдите вероятность того, что:

1) Случайно выбранный участник выступает в форме зеленого цвета.

2) Случайно выбранные два участника оба выступают в форме зеленого цвета.



BURAXILIŞ MƏLUMATI

RİYAZİYYAT 9

Ümumtəhsil məktəblərinin 9-cu sinfi üçün
Riyaziyyat fənni üzrə dərsliyin (qrif nomrəsi 2020-070)

Metodik vəsaiti

Rus dilində

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər:	**Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova** **Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov** **İlham Heydər oğlu Hüseynov**
Məsləhətçi:	**Çingiz Qacar**
İxtisas redaktoru:	**Əbdürrəhim Quliyev** **Tariyel Talıbov**
Tərcüməçi:	**Güllü Həsənova**
Dizayner:	**Fuad Qəhrəmanov**
Korrektor:	**Tərlan Qəhrəmanova**

Hesab-nəşriyyat həcmi: 13,5. Fiziki həcmi: 15 çap vərəqi.
Formatı: 70×100 1/16. Kəsimdən sonrakı ölçüsü: 165x240.
Səhifə sayı: 240. Şriftin adı və ölçüsü: Times New Roman: 11-12 pt.
Ofset kağızı. Ofset çapı. Sifariş __. Tiraj: 621. Pulsuz. Bakı – 2020

Əlyazmanın yığıma verildiyi və çapa imzalandığı tarix:

Çap məhsulunu hazırlayan və istehsal edən:
Radius MMC (Bakı, Binəqədi şossesi, 53)

PULSUZ