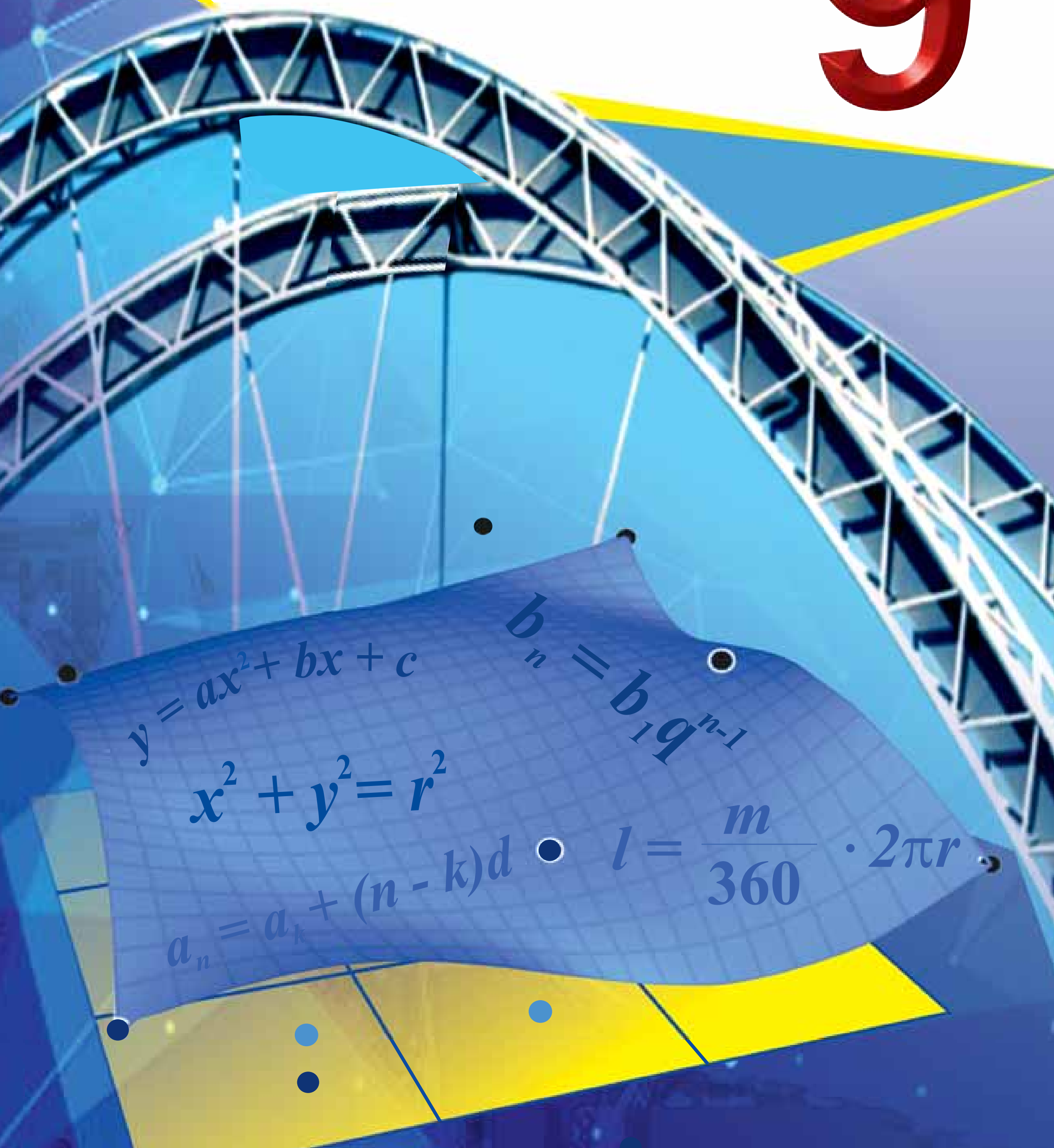
МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК

9



Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin,*
sözləri *Əhməd Cavadındır.*

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu!
Sinən hərbə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştaqdır!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!

ГЕЙДАР АЛИЕВ

ОБЩЕНАЦИОНАЛЬНЫЙ ЛИДЕР АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО НАРОДА

Найма Гахраманова
Магомед Керимов
Ильгам Гусейнов

Учебник по предмету

МАТЕМАТИКА

для 9-го класса

общеобразовательных школ

Замечания и предложения, связанные с этим изданием, просим отправлять на электронные адреса:
radius_n@hotmail.com и *derslik@edu.gov.az*.
Заранее благодарим за сотрудничество!

RADIUS

СОДЕРЖАНИЕ

1 Корень *n*-й степени. Степень с рациональным показателем.

В этом разделе вы научитесь

- Действиям над действительными числами и их свойствам
- Корню *n*-й степени и его свойствам
- Степени с рациональным показателем и ее свойствам

1-1 Действительные числа

Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел. Любое действительное число рациональное или иррациональное. Для множеств натуральных (N), целых (Z), рациональных (Q), иррациональных (I), действительных (R) чисел верны нижеприведенные соотношения:

$N \subset Z \subset Q \subset R$; $I \subset R$; $Q \cap I = \varnothing$; $Q \cup I = R$.

Любое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

R Действительные числа

→ **Q Рациональные числа**: $Q = \{\frac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in N\}$

→ **I Иррациональные числа**: $I = \{\ldots, -\sqrt{3}, \ldots, \sqrt{2}, \ldots, \pi, \ldots\}$

Q → **Z Целые числа**: $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Z → **N Натуральные числа**: $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Непериодическая бесконечная десятичная дробь представляет собой иррациональное число. Итак, любое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби.

Сумма, разность, произведение и отношение (делитель отличен от 0) двух действительных чисел является действительным числом.

В таблице даны свойства действий над действительными числами.

$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	Переместительный закон
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a\,b)\,c = a\,(bc)$	Сочетательный закон
$(a + b)\,c = a\,c + bc$		Распределительный закон
$a + (-a) = 0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1\ (a \neq 0)$	Наличие противоположного и обратного числа
$a + 0 = a$	$a \cdot 0 = 0,\quad a \cdot 1 = a$	Наличие нуля и единицы
$-(-a) = a$ $a + (-b) = a - b$ $a - (-b) = a + b$	$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -ab$ $(-a)\cdot(-b) = ab$ $a : (-b) = a\cdot(-\frac{1}{b}) = -\frac{a}{b}$	Свойства операций над отрицательными числами

Пример. Найдите сумму чисел обратного и противоположного числу $2-\sqrt{3}$.

Решение. Число обратное заданному $a = 2-\sqrt{3}$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})} = 2+\sqrt{3},$$

числитель и знаменатель умножаются на $(2+\sqrt{3})$

число противоположное : $-a = -(2-\sqrt{3}) = -2+\sqrt{3}$.

Тогда имеем: $\frac{1}{a} + (-a) = (2+\sqrt{3}) + (-2+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

Обучающие задания

1 Какие из данных действительных чисел являются натуральными, целыми, рациональными, иррациональными?

a) $\sqrt{16}$ b) $-\frac{9}{11}$ c) $1,(7)$ d) $\sqrt{8}$ e) $-\sqrt{9}$

2 В уравнении $x^2 = a$ вместо a запишите такое число, чтобы уравнение: a) имело два рациональных корня; b) имело два иррациональных корня; c) не имело действительных корней.

3 При каких значениях $n = 2; 3; 4; 5$ выражения $\sqrt{n}$ является рациональным числом?

4 Определите, значение какого выражения является рациональным или иррациональным числом.

a) $(\sqrt{7}+3)(\sqrt{7}-3)$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$ c) $(2-\sqrt{2})^2$

5 Напишите два таких иррациональных числа, чтобы их: a) сумма была рациональным числом; b) произведение было рациональным числом.

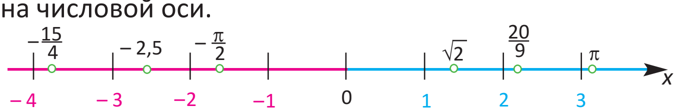
6 Найдите разность чисел обратного и противоположного данному числу.

a) $0,(3)$ b) $\sqrt{2}+1$ c) $2-\sqrt{3}$

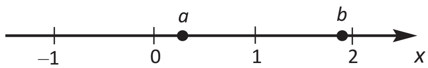
Числовая ось

Определение. Прямую линию с выбранными на ней началом отсчета, единичным отрезком и направлением называют числовой осью.

Каждой точке числовой оси соответствует одно определенное действительное число, и, наоборот, каждое действительное число можно изобразить точкой на числовой оси.



Для любых действительных чисел a и b верно только одно из соотношений: $a > b$, $a = b$, $a < b$. На числовой оси из двух различных действительных чисел точка, соответствующая большему, располагается правее.



точка a располагается левее точки b: $a < b$

Обычно вместо «точка, соответствующая числу a» говорят «точка a».

Между двумя действительными числами существует бесконечное число действительных чисел. Это можно ясно представить, выразив данные числа в виде бесконечной десятичной дроби. Например, из $\frac{1}{9} = 0,(1) = 0,111...$ и $\frac{1}{10} = 0,1 = 0,100...$ следует, что между этими числами может быть записано бесчисленное множество чисел таких как: 0,101; 0,1001; 0,10001; .... (число нулей каждой раз увеличивается на единицу.)

Для любого действительного числа a существует такое целое число m, при котором верно: $m \le a < m + 1$.

Пример. Между какими двумя последовательными целыми числами размещается число $a = 7 + \sqrt{2}$ на числовой оси ?

Решение. К каждой части неравенства $1 < \sqrt{2} < 2$ добавим 7 : $8 < 7 + \sqrt{2} < 9$. Значит, соответствующая заданному числу точка находится между 8 и 9.

Наибольшее целое число, не превосходящее данное число, называется целой частью этого числа, обозначается как $[a]$. Дробной частью числа называется разность между числом и его целой частью, обозначается как $\{a\}$:
$\{a\} = a - [a]$. Следует, что: $0 \le \{a\} < 1$.

Пример. Найдите целую и дробную части чисел. a) 7,2; b) –7,2

Решение. a) $[7{,}2] = 7$, $\{7{,}2\} = 7{,}2 - [7{,}2] = 7{,}2 - 7 = 0{,}2$

b) $[-7{,}2] = -8$, $\{-7{,}2\} = -7{,}2 - [-7{,}2] = -7{,}2 - (-8) = 0{,}8$

Обучающие задания

7 Укажите, между какими двумя последовательными целыми числами находятся на числовой оси данные числа.

$-\frac{9}{4}$	1,6	$\sqrt{5}$	$-0,(8)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{\pi}{4}$

8 Сравните числа:

a) $-2\sqrt{3}$ и $-\sqrt{9}$ b) $-\frac{7}{12}$ и $-\frac{7}{\sqrt{12}}$ c) $\sqrt{14}$ и 3 d) $\sqrt{\frac{8}{3}}$ и π

9 a) Есть ли наименьшее действительное число больше 0,63?
b) Запишите наибольшее действительное число в виде десятичной дроби, не используя цифру 9, которое меньше числа 0,9 .

10 Немат утверждает, что оба числа $-2 + \sqrt{3}$ и $-1 + \sqrt{2}$ расположены на отрицательной части числовой оси. Как вы думаете?

11 Какое из утверждений верно относительно данных чисел?

1) $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{\frac{3}{2}}$, $-\sqrt{2}$.

A: больше, чем -1
B: между -2 и -1

2) $\sqrt{\frac{36}{5}}$, $\sqrt{\frac{49}{8}}$, $\sqrt{\frac{81}{11}}$.

A: между 1 и 2
B: между 2 и 3

12 Расположите числа в порядке возрастания.

1) $-\sqrt{49}$; $-\sqrt{7}$; 0; $-\sqrt{51}$; $-6{,}8$ 2) $-\sqrt{8}$; $-3{,}1$; $\sqrt{15}$; $(-2)^2$; $-\sqrt{11}$

13 Напишите несколько: a) рациональных; b) иррациональных чисел, расположенных между числами $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$.

14 Найдите целую и дробную части чисел.

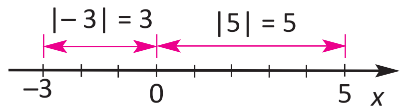
a) 2,3 b) –6,2 c) 2,(3) d) –2,(3) e) 2,1(6) f) $\sqrt{3}$ g) $\sqrt{5} + 1$

Абсолютная величина действительного числа

Определение. Абсолютной величиной (или модулем) действительного числа a называется само это число, если $a \geq 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

Абсолютная величина действительного числа показывает расстояние на числовой оси от точки, соответствующей этому числу, до начала отсчета.



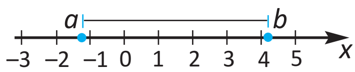
Примеры.

$|3| = 3$; $|-3| = -(-3) = 3$; $|0| = 0$; $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$

Свойства абсолютной величины

Свойства	Пример	Словесно
1. $\lvert a\rvert \geq 0$	$\lvert -3\rvert = 3 > 0$	*Абсолютная величина числа не является отрицательной.*
2. $\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	$\lvert 5\rvert = \lvert -5\rvert$	*Абсолютные величины взаимно противоположных чисел равны.*
3. $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert \cdot \lvert b\rvert$	$\lvert -2\cdot 5\rvert = \lvert -2\rvert \cdot \lvert 5\rvert$	*Абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин множителей.*
4. $\left\lvert \frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\left\lvert \frac{12}{-3}\right\rvert = \frac{\lvert 12\rvert}{\lvert -3\rvert}$	*Абсолютная величина частного равна частному абсолютных величин делимого и делителя.*

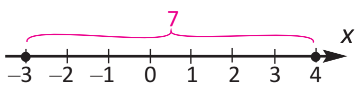
Расстояние между двумя точками числовой оси равно абсолютной величине разности их координат a и b то есть, $|a - b|$.



Внимание! $|a - b| = |b - a|$

Пример. Найдите расстояние на числовой оси между точками -3 и 4.

Решение. $|4 - (-3)| = |7| = 7$



Обучающие задания

15 Сравните числа.

a) $|-4|$ и $|4|$ b) $-(-3)$ и $|-3|$ c) $1 - \sqrt{2}$ и $|1 - \sqrt{2}|$

16 Вычислите.

a) $|-2,(2) - (-3)|$ b) $\left|-2\frac{1}{3} \cdot \left(-3\frac{6}{7}\right)\right|$ c) $\frac{|-4 \cdot (-3)|}{|-2|}$

17 Упростите.

a) $|\sqrt{2} - 3| + |\sqrt{2} - 1|$ b) $|\sqrt{3} - 1| + |\sqrt{3} + 1|$ c) $|\pi - 3| - |3 - \pi|$

18 Найдите расстояние между точками a и b.

a) $a = 2,(3)$; $b = 3,5$ b) $a = -\frac{2}{3}$; $b = 0,(3)$ c) $a = \sqrt{2} - 1$; $b = 3 + \sqrt{2}$

Числовые множества и формы их представления

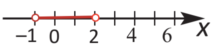
Множество, элементы которого являются действительными числами, называется числовым множеством. Числовые множества можно задавать в виде неравенств или в виде промежутков. Множество всех действительных чисел обозначается как $(-\infty; +\infty)$.

Промежутки	Неравенства	На числовой оси
$(a;\ b)$	$a < x < b$	
$[a;\ b]$	$a \le x \le b$	
$[a;\ b)$	$a \le x < b$	
$(a;\ b]$	$a < x \le b$	
$(a;\ +\infty)$	$a < x$	
$[a;\ +\infty)$	$a \le x$	
$(-\infty;\ b)$	$x < b$	
$(-\infty;\ b]$	$x \le b$	
$(-\infty;\ +\infty)$	R (все действительные числа)	

1. Пример. Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству. Запишите в виде промежутков.

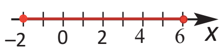
Решение.

a) $-1 < x < 2$



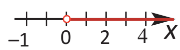
$(-1;\ 2)$

b) $-2 \le x \le 6$



$[-2;\ 6]$

c) $x > 0$

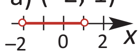


$(0;\ +\infty)$

2. Пример. Изобразите данный промежуток на числовой оси и представьте в виде неравенства.

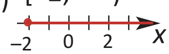
Решение.

a) $(-2;\ 1)$



$-2 < x < 1$

b) $[-2;\ +\infty)$



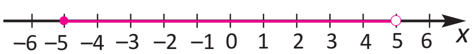
$x \ge -2$

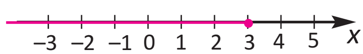
Обучающие задания

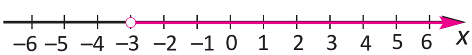
19 Запишите в виде промежутка множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству.

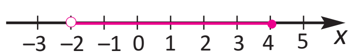
a) $x \le 2$ b) $-2 < x \le 5$ c) $-4 \le x \le -1{,}5$ d) $x \ge 10$

20 Запишите промежутки, изображенные на числовой оси.

a) 

c) 

b) 

d) 

21 Запишите неравенства, соответствующие утверждениям:

a) число n больше -1, но меньше 12;

b) число k не больше 3;

c) m неотрицательное число;

d) наименьшее значение a равна -10, а наибольшее 22;

e) b меньше 5, но не меньше -3.

Свойства объединения и пересечения числовых множеств

Некоторые свойства пересечения и объединения множеств подобны переместительным, сочетательным и распределительным свойствам сложения и умножения чисел.

1) $A \cup B = B \cup A$ 2) $A \cap B = B \cap A$

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

В частном случае, для любого множества A верны соотношения:

$$A \cup A = A \text{ и } A \cap A = A$$

Обучающие задания

22 Запишите объединение и пересечение промежутков.

Пример. $(-2; 4] \cup [0; 9] = (-2; 9]$; $(-2; 4] \cap [0; 9] = [0; 4]$

a) $(-2; 4] \cap [0; 9]$ b) $(-2; 4] \cup [0; 9]$ c) $(-\infty; +\infty) \cap [-\pi; 21)$

d) $(-\infty; 4] \cap (-1; +\infty)$ e) $[3; 4) \cup [4; 9)$ f) $(-\infty; 4] \cap (0; +\infty)$

23 Выполните действия.

a) $Q \cap Z$ b) $N \cup R$ c) $N \cup Z \cap Q$ d) $(-4,8; -3,5) \cap Z$

24 Изобразите данный промежуток на числовой оси, укажите рациональные и иррациональные числа, входящие в этот промежуток (используйте знак $\in$).

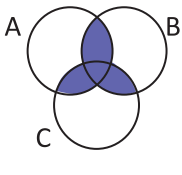
a) $[1; 5]$ b) $(-3; 0)$ c) $[-2; +\infty)$

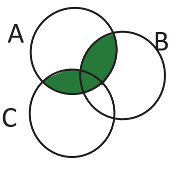
25 $A = [-2; 1]$, $B = [0; 3]$ и $C = [-1; 2]$ являются подмножествами множества действительных чисел R. Проверьте верность нижеследующих равенств, изобразив на числовой оси.

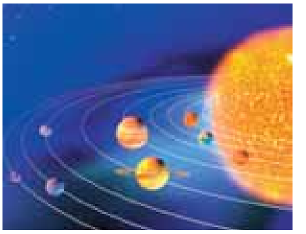
1) $A \cup B = B \cup A$; 2) $A \cap B = B \cap A$; 3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; 5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

26 Запишите множество, соответствующее закрашенной части.

1) 

2) 



Исследование. Расстояние планет до Солнца (в млн. миль) можно найти приблизительно, вычислив значение выражения $\sqrt[3]{6t^2}$. Здесь t – годы планет, выраженные числом земных суток. На Марсе один год планеты равен 687 земным суткам. Сколько приблизительно миль составляет расстояние от Марса до Солнца?

1-2 Корень *n*-й степени

Корнем *n*-й степени $(n \geq 2, n \in N)$ из числа a называется число b, n-я степень которого равна a (т.е. удовлетворяющее равенство $b^n = a$).

Например, корнем 5-й степени из числа 32 является 2, потому что $2^5=32$.

Корнем 4-й степени из числа 81 является 3 и –3, потому что $3^4=81$ и $(-3)^4=81$.

Во множестве действительных чисел существует единственный корень нечетной степени из любого числа, не существует корня четной степени из отрицательного числа, существуют ровно два корня четной степени из любого положительного числа, их модули равны, а знаки противоположны.

Определение. Арифметическим корнем n-ой степени из числа a $(a \geq 0)$ называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a. Обозначается $\sqrt[n]{a}$ и читается так: «корень n-й степени из числа a».

Показатель корня → n

Знак (радикала) корня → $\sqrt[n]{a}$ ← Подкоренное выражение

✓ *При* $n = 2$ корень называется квадратным, при $n = 3$ - кубическим.

Пример. $\sqrt[4]{81} = 3$, потому что $3^4 = 81$ и $3 > 0$

$\sqrt[3]{8} = 2$, потому что $2^3 = 8$ и $2 > 0$

Обратите внимание!
$\sqrt[4]{81} \neq -3$

Ясно, что при $n \geq 2$, $n \in N$ получим $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{1} = 1$.

Нахождение арифметического корня является операцией, обратной возведению в степень. Для неотрицательных чисел a и b записи $\sqrt[n]{a} = b$ и $b^n = a$ эквивалентны.

возведение в степень	извлечение корня
$4^3=64$	$\sqrt[3]{64} = 4$
$2^4=16$	$\sqrt[4]{16} = 2$

Положительный корень четной степени положительного числа a записывается как $\sqrt[n]{a}$, а взаимно противоположный отрицательный корень записывается как $-\sqrt[n]{a}$.

При $a > 0$ нечетной степени корень также положительный и согласно определению арифметического корня обозначается как $\sqrt[n]{a}$.

При $a < 0$ нечетной степени корень отрицательный и его также обозначают символом $\sqrt[n]{a}$. Корень отрицательного числа нечетной степени можно выразить арифметическим корнем противоположного числа той же степени.

Например, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$. Таким образом, если n четное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысль при $a \geq 0$ и оно является числом неотрицательным.

Если n нечетное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любых значениях a и приобретает значение одинакового знака с числом a.

✔ При всех значениях a, при которых выражения $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл, верно равенство $(\sqrt[n]{a})^n = a$

1. Пример. Вычислите: a) $(2\sqrt[4]{3})^4$; b) $(3\sqrt[3]{2})^3$; c) $(2\sqrt[5]{-3})^5$

Решение. a) $(2\sqrt[4]{3})^4 = 2^4\cdot(\sqrt[4]{3})^4 = 16\cdot 3 = 48$; b) $(3\sqrt[3]{2})^3 = 3^3\cdot(\sqrt[3]{2})^3 = 27\cdot 2 = 54$;

c) $(2\sqrt[5]{-3})^5 = 2^5\cdot(\sqrt[5]{-3})^5 = 32\cdot(-3) = -96$

✔ Отметим, что если $a > b > 0$ то, верно $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

2. Пример.

$$\sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{4};\quad \sqrt[4]{8} > \sqrt[4]{5};\quad \sqrt[5]{8{,}1} > \sqrt[5]{7{,}9}$$

Обучающие задания

1 Вычислите.

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{125}$ c) $\sqrt[4]{256}$ d) $\sqrt[3]{0}$ e) $\sqrt[4]{1}$

f) $\sqrt{0{,}64}$ g) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ h) $\sqrt[5]{-32}$ i) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$ j) $\sqrt[3]{0{,}064}$

2 Разделите на две группы: имеющие смысл и не имеющие смысла.

a) $\sqrt[5]{-27}$ b) $-\sqrt[8]{-19}$ c) $\sqrt[4]{(-2)^4}$ d) $\sqrt[4]{-12}$ e) $\sqrt[6]{(-3)(-7)}$

3 Найдите значения выражений.

a) $5\cdot\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2\cdot 13{,}5}$ c) $(4-\sqrt[3]{-64}):\sqrt[4]{16}$ d) $\sqrt{\sqrt{16}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ f) $\sqrt[4]{13+\sqrt[3]{27}}$ g) $\sqrt[3]{31-\sqrt[3]{64}}$ h) $\sqrt[3]{62+\sqrt[4]{16}}$

i) $\sqrt[4]{86-\sqrt[3]{125}}$ j) $\sqrt{7+\sqrt[3]{7+\sqrt[4]{1}}}$ k) $\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[5]{2\cdot\sqrt{256}}}$ l) $\sqrt[3]{\sqrt{16}+2\cdot\sqrt[5]{32}}$

4 Какие из чисел являются рациональными, а какие иррациональными?

a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{16}$ c) $\sqrt[3]{-64}$ d) $\sqrt[3]{4}$ e) $\sqrt[3]{\frac{5}{27}}$ f) $\sqrt[3]{0{,}027}$

5 Укажите несколько натуральных значений n, при которых значение выражения $\sqrt[3]{n}$ будет: a) рациональным числом; b) иррациональным числом.

6 С помощью калькулятора найдите приближенные значения выражений:

a) $\sqrt{10^3}$ b) $\sqrt[3]{16}$ c) $\sqrt[3]{5^2}$ d) $\sqrt[4]{6^3}$ e) $\sqrt[5]{27}$

7 Впишите знаки >, <, = в закрашенные квадраты.

a) $\sqrt{0{,}01}\ \square\ \sqrt[3]{0{,}001}$ b) $\sqrt{\frac{1}{4}}\ \square\ \sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ c) $\sqrt[3]{7}\ \square\ \sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt[3]{9}\ \square\ 2$ e) $\sqrt[3]{25}\ \square\ 3$

8 Расположите числа в порядке возрастания: a) $\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[3]{7}$; 2; $\sqrt[3]{1{,}2}$ b) $-\sqrt[3]{5}$; -2; $-\sqrt[3]{4}$; -3

9 Расположите числа в порядке убывания: a) $\sqrt[4]{17}$; $\sqrt[4]{15}$; 2 b) $\sqrt[5]{9}$; $\sqrt[5]{7}$; $\sqrt[5]{3}$

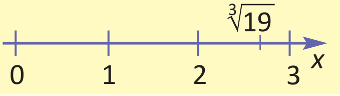
10 Определите знак разности. a) $\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}$ b) $\sqrt[4]{10}-2$ c) $\sqrt[3]{24}-3$

11 Определите приблизительное расположение данных чисел на числовой оси.

a) $\sqrt[3]{19}$ b) $\sqrt[3]{-20}$ c) $\sqrt[3]{30}$ d) $\sqrt[3]{36}$ e) $\sqrt[3]{\dfrac{63}{8}}$

Пример: $8 < 19 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{19} < \sqrt[3]{27}$, отсюда $2 < \sqrt[3]{19} < 3$.

То есть, число $\sqrt[3]{19}$ находится между 2 и 3.



12 Укажите, между какими двумя последовательными целыми числами находятся данное число.

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt[5]{28}$ d) $\sqrt[4]{0{,}7}$ e) $\sqrt[4]{15}$

13 Найдите целую часть числа.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{20}$ c) $\sqrt[5]{38}$ d) $\sqrt[4]{17}$ e) $-\sqrt[4]{17}$ f) $\sqrt[4]{17}-1$

14 Сначала найдите целую часть числа, а затем укажите его дробную часть.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{9}$ c) $\sqrt[4]{12}$ d) $\sqrt[5]{33}$ e) $\sqrt[3]{28}-2$

15 Вычислите: a) $(4\sqrt{3})^2$ b) $(5\sqrt[3]{2})^3$ c) $(-2\sqrt[4]{3})^4$ d) $(-2\sqrt[5]{4})^5$

16 При каких значениях переменной верно равенство?

a) $\sqrt[3]{x+1}=3$ b) $\sqrt[4]{x-1}=2$ c) $\sqrt[6]{x-7}=-1$ d) $\sqrt[5]{x-3}=-2$

17 Решите уравнения.

a) $x^3=64$ b) $x^6=-16$ c) $x^4=81$ d) $\dfrac{1}{8}x^4-2=0$ e) $\dfrac{1}{2}x^5+16=0$

Пример: 1) *Уравнение с нечетной степенью* $x^3=27$ *имеет единственный действительный корень:* $x=\sqrt[3]{27}=3$

2) *Уравнение* $x^4=-81$ *не имеет действительных корней, т.к. степень действительного числа с четным показателем не может быть отрицательным числом.*

3) *Уравнение* $x^4=16$ *имеет два действительных корня:*

$$x=\pm\sqrt[4]{16}, \quad x=\pm 2$$

Корень *n*-й степени из показателя *n*-й степени

1) Если n четное число, исходя из $a^n = |a|^n$, по определению арифметического корня следует: $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{|a|^n} = |a|$.

Примеры. $\sqrt[6]{(-\pi)^6} = |-\pi| = \pi$, $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$; $\sqrt[8]{(x-1)^8} = |x-1|$

2) Если n нечетное число, для любого a верно равенство $\sqrt[n]{a^n} = a$

Примеры. $\sqrt[3]{7^3} = 7$, $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$, $\sqrt[7]{x^7} = x$, $\sqrt[3]{(x-1)^3} = x-1$

18 Вычислите: a) $3\sqrt[4]{(-2)^4}$ b) $\sqrt[6]{(-8)^2}$ c) $2\sqrt[3]{(-4)^3}$ d) $\sqrt[4]{(-3)^4} + \sqrt[3]{(-3)^3}$

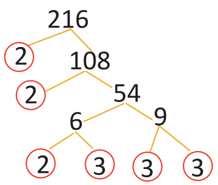
19 Упростите: a) $\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[5]{x^5}$ $(x > 0)$ b) $\sqrt[4]{x^4} + \sqrt[5]{x^5}$ $(x < 0)$

c) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} + \sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^4}$ d) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}-3)^3} + \sqrt[4]{(\sqrt{2}-3)^4}$

20 Упростите выражение $\sqrt[3]{(x-1)^3} + \sqrt{x^2-4x+4}$ при $1 < x < 2$.

Прикладные задания

21 Распределите простые множители чисел на три одинаковые группы, запишите в виде куба какого-либо числа и найдите кубический корень.

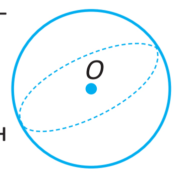


$216 = 2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3 = (2\cdot3)\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot3) = 6^3$; $\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{6^3} = 6$

1) 216 2) 512 3) 729
4) 1728 5) 2744 6) 5832

22 1) Найдите площадь полной поверхности куба с объемом 2197 м³.
2) Найдите отношение длин ребер кубов, имеющих объемы 42 см³ и 336 см³.

23 **Геометрия.** Объем шара с радиусом r вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



a) Найдите радиус шара, объем которого равен 288π см³
b) Найдите радиус шара (в метрах), объем которого равен 528 м³. Ответ округлите с точностью до сотых.

24 Расплавив два железных куба с ребрами 3 см и 4 см, получили один куб. Найдите приближенное значение длины ребра полученного куба в сантиметрах. Результат округлите до десятых.

25 **Биология.** Высоту дерева можно найти приблизительно вычислив значение выражения $35\sqrt[3]{d^2}$. Здесь d - диаметр ствола дерева (в метрах), h - его высота. Чему приблизительно равна высота дерева с диаметром ствола 1,1 м?

26 Выполните задание - исследование на странице 12. Полученный результат сравните с информацией из разных источников.

Свойства корня n-й степени

Свойства корня n-ой степени

Здесь $a \geq 0$, $b \geq 0$ действительные числа, $m \geq 2$, $n \geq 2$ и k натуральные числа

Математическая запись	Свойства	Примеры
1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	Корень n-й степени из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней n-й степени множителей.	$\sqrt[3]{27 \cdot 64} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$	Корень из дроби n-й степени с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен отношению корней n-й степени числителя и знаменателя.	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[kn]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^m}$	Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится.	$\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[3]{x^2}$
4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	Чтобы возвести корень в степень, достаточно возвести в эту степень подкоренное выражение.	$(\sqrt[3]{8})^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
5. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	Для извлечения корня из корня подкоренное выражение сохраняется, перемножаются степени корней.	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5}$

Обучающие задания

27 Вычислите значение выражения.

a) $\sqrt{25 \cdot 64}$ b) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ c) $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$ d) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{625}}$ e) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32} \cdot 243}$

28 Вычислите значение выражения.

Пример. $\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{54 \cdot 32} = \sqrt[3]{27 \cdot 2 \cdot 32} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$

a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{200}$ b) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{27}$ c) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$ d) $\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{98}$

e) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{13,5}$ f) $\sqrt[4]{80} \cdot \sqrt[4]{125}$ g) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{162}$ h) $\sqrt[5]{81} \cdot \sqrt[5]{96}$

29 Если прочесть справа налево тождества, заданные в свойстве 1 и в свойстве 2, то получатся правила умножения и деления корней с одинаковыми показателями. Вставьте пропущенные слова, чтобы дополнить правила.

1) Чтобы перемножить корни с .... показателями, нужно .... подкоренные выражения, а показатель корня ....

2) Чтобы разделить корни с .... показателями, нужно разделить .... , а показатель корня ....

30 Вычислите. a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$ d) $\dfrac{4\sqrt{10}}{\sqrt{0,1}}$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{3\sqrt[3]{3}}$

31 Вычислите. a) $\sqrt[4]{32 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 27}$ b) $\sqrt[4]{8 \cdot 3} \cdot \sqrt[4]{2 \cdot 27}$ c) $\sqrt[5]{16 \cdot 9} \cdot \sqrt[5]{2 \cdot 27}$

32 Дополните нижеследующее доказательство тождества $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Утверждение	Обоснование
1. $a \geq 0$, $b \geq 0$	1. Дано
2. $\sqrt[n]{a} \geq 0$, $\sqrt[n]{b} \geq 0$	2. ....
3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geq 0$	3. ....
4. $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n$	4. Степень произведения ....
5. $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b$	5. ....
6. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	6. ....

33 Вычислите значение выражения.

a) $(\sqrt{8} - \sqrt{4,5}) \cdot \sqrt{2}$ b) $(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}) \cdot \sqrt[3]{4}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{512} - \sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt[5]{486} - \sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$

e) $(\sqrt[4]{8} - 2 \cdot \sqrt[4]{0,5}) \cdot \sqrt[4]{2}$ f) $(\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} + 2 \cdot \sqrt[3]{16}) : \sqrt[3]{2}$ g) $(\sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{121,5}) \cdot \sqrt[5]{2}$

34 Вычислите.

a) $\sqrt[3]{9 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{9 + \sqrt{17}}$ b) $\sqrt[4]{10 - \sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10 + \sqrt{19}}$ c) $\sqrt[5]{7 - \sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7 + \sqrt{17}}$

35 Вычислите.

a) $(\sqrt[6]{8})^2$ b) $(\sqrt[4]{4})^2$ c) $-3 \cdot (\sqrt[4]{9})^2$ d) $(\sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{8})^2$

36 Сравните значения данных выражений:

a) $\sqrt{\sqrt{81}}$ и $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ и $\sqrt[6]{64}$ c) $\sqrt{\sqrt[4]{2^8}}$, $\sqrt[4]{\sqrt{2^8}}$ и $\sqrt[8]{2^8}$

37 Во сколько раз число $\sqrt[3]{\dfrac{5}{64}}$ больше числа $\sqrt[3]{\dfrac{5}{512}}$?

38 a) Найдите площадь прямоугольника с длиной $\sqrt[4]{8}$ м и шириной $\sqrt[4]{2}$ м.
b) Найдите обьем прямоугольного параллелепипеда с заданными размерами: $\sqrt[3]{6}$ см, $\sqrt[3]{9}$ см, $\sqrt[3]{4}$ см.

39 Покажите на примерах, что свойства 1 и 2 верны и для отрицательных чисел *a* и *b*, если *n* нечетное число.

40 Упростите выражения при положительных значениях переменных.

a) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$ b) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}$ c) $\left(\sqrt[6]{x^2}\right)^3$ d) $\left(\sqrt[4]{a^2}\right)^2$

e) $\left(\sqrt{ab}\right)^3\cdot\sqrt{a^3b^3}$ f) $\sqrt[4]{z^2}\cdot\sqrt[4]{81z^6}$ g) $\sqrt[3]{a^3}\cdot\left(\sqrt[4]{a}\right)^4$ h) $\left(\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{y}\right)^2\cdot\sqrt[3]{x^{-1}}$

41 Упростите.

a) $\dfrac{\sqrt{x^3y^5}}{\sqrt{x^5y^3}}$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{a^5b^{10}}}{\sqrt[4]{ab^2}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{n^4m}}{\sqrt[3]{nm^4}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{x^6z^3}}{\sqrt[4]{x^2z^3}}$

42 Упростите выражения при положительных значениях переменных.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$ d) $\sqrt[9]{x^6}$ e) $\sqrt[2n]{a^{4n}}$

f) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}}$ g) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{c^5}}$ h) $\sqrt[5]{\sqrt{n}}$ i) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{z^{12}}}$ j) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{y^6}}$

43 Освободите от корня. Запишите в виде многочлена.

a) $\sqrt[3]{(a+2)^6}$ b) $\sqrt[4]{(x-3)^8}$ c) $\sqrt[3]{(x^2-1)^3}$ d) $\sqrt[4]{(x^2+2)^4}$

Вынесение множителя из-под знака корня

При вынесении множителя из-под знака корня применяются свойства корней и формулы $\sqrt[n]{a^n}=|a|$ (если *n* четное), $\sqrt[n]{a^n}=a$ (если *n* нечетное).

Пример. Вынесите множитель из-под знака корня:

a) $\sqrt[3]{54}$ b) $\sqrt[3]{a^5b^6}$ c) $\sqrt[4]{48a^6}$

Решение. a) $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[3]{a^5b^6}=\sqrt[3]{a^3b^6a^2}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^6}\cdot\sqrt[3]{a^2}=ab^2\sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt[4]{48a^6}=\sqrt[4]{16\cdot 3\cdot a^4\cdot a^2}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{3a^2}=2|a|\sqrt[4]{3a^2}$

44 Вынесите множитель из-под знака корня.

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt[3]{24}$ c) $\sqrt[4]{32}$ d) $\sqrt[5]{128}$ e) $\sqrt[3]{\dfrac{108}{250}}$

45 Упростите выражения при положительных значениях переменных.

a) $\sqrt{16x^3}$ b) $\sqrt[3]{27a^5}$ c) $\sqrt[6]{64a^7}$ d) $\sqrt[3]{54a^5b^7}$ e) $\sqrt{\dfrac{81a^2b^4}{3b}}$

46 Определите допустимые значения переменной (ДЗП) и упростите.

a) $\sqrt{36x^3}$ b) $\sqrt[4]{36x^5y^8}$ c) $\sqrt[5]{8xy^7}\cdot\sqrt[5]{16x^6}$ d) $\sqrt[3]{4y^3z}\cdot\sqrt[3]{2y^2z^4}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{x^6y^8}{x^3y^4}}$ f) $\dfrac{\sqrt[5]{x^9y}}{\sqrt[5]{x^3y^8}}$ g) $\sqrt{\dfrac{9x^3}{32y^4}}$ h) $\sqrt[4]{x^3y\cdot\dfrac{\sqrt[4]{16x^4y}}{\sqrt[4]{y}}}$

47 Упростите выражение вынесением общего множителя за скобки.

a) $2\sqrt[5]{y}+7\sqrt[5]{y}$ b) $-\sqrt[4]{x}+2\sqrt[4]{x}$ c) $\sqrt[5]{64x^8}-x\sqrt[5]{2x^3}$ d) $\sqrt[3]{16y^4}-3y\sqrt[3]{2y}$

Внесение множителя под знак корня

Для внесения множителя под знак корня используются формулы $|a|=\sqrt[n]{a^n}$ (если n четное), $a=\sqrt[n]{a^n}$ (если n нечетное) и свойства корней n-ой степени. Любой множитель возведением в нечетную степень можно ввести под знак корня той же степени. Положительный множитель возводится в четную степень и вносится под знак корня той же степени. Если множитель отрицательный, то сначала его представляют в виде произведения положительного числа и -1, после чего положительный множитель вносится под знак корня четной степени, а знак "–" оставляют перед знаком корня.

Пример. Внесите множитель под знак корня.

a) $2\sqrt[3]{5}$ b) $-2\sqrt[4]{5}$ c) $a\cdot\sqrt[4]{-\dfrac{3}{a^3}}$

Решение. a) $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{8\cdot5}=\sqrt[3]{40}$

b) $-2\sqrt[4]{5}=-1\cdot2\sqrt[4]{5}=-\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{5}=-\sqrt[4]{80}$ c) $a\cdot\sqrt[4]{-\dfrac{3}{a^3}}=-\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{-\dfrac{3}{a^3}}=-\sqrt[4]{-3a}$

$a<0$

48 Внесите множитель под знак корня.

a) $3\sqrt[3]{2}$ b) $2\sqrt[4]{2}$ c) $3\sqrt[4]{5}$ d) $-2\sqrt[4]{3}$ e) $-2\sqrt[5]{2}$ f) $x\sqrt[3]{3}$ g) $a\sqrt[5]{2}$

49 Внесите множитель под знак корня. Укажите ДЗП.

a) $x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2}{x}}$ b) $x\cdot\sqrt[4]{\dfrac{3}{x}}$ c) $2c\cdot\sqrt[3]{\dfrac{3}{4c}}$ d) $\dfrac{2}{x}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x^5}{8}}$ e) $c\cdot\sqrt[4]{-\dfrac{3}{c}}$

50 Сравните числа. a) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{3}$ b) $2\sqrt[3]{3}$ и $3\sqrt[3]{2}$ c) $2\sqrt[4]{3}$ и $3\sqrt[4]{2}$

51 Определите знак разности. a) $\sqrt[6]{2}-\sqrt[3]{10}$ b) $\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}$ c) $\sqrt[4]{5}-\sqrt[6]{7}$

52 Приведите корни к одинаковым показателям, а затем выполните действие.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt[6]{8}:\sqrt[4]{2}$ d) $\sqrt[3]{x}:\sqrt[5]{x}$

53 Вычислите значение выражения.

a) $\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}$ b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$

54 Упростите. a) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$ b) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

55 Упростите, применяя свойства корня.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6b^3}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}\ (a\geq 0)$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}\ (a\geq 0)$

56 Какое из равенств верно если $a<0$.

a) $\sqrt[5]{a^5}=a$ b) $\sqrt[5]{a^5}=-a$ c) $\sqrt[4]{a^4}=-a$ d) $\sqrt[6]{a^6}=|a|$

57 Расположите числа в порядке возрастания:

a) $\sqrt{2}$; $\sqrt[6]{4}$; $\sqrt[3]{3}$. b) $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{5}$. c) $\sqrt{3}$; $\sqrt[4]{8}$; $\sqrt[3]{6}$.

58 Освободите знаменатель от иррациональности.

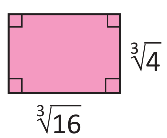
Пример. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{3}{\sqrt[3]{2^2}}=\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

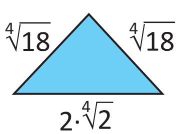
a) $\dfrac{9}{\sqrt[4]{27}}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{8}}$ d) $\dfrac{10}{\sqrt[4]{125}}$

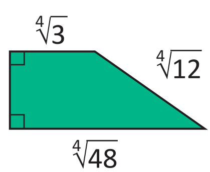
59 Выполните действия.

a) $\dfrac{\sqrt[4]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{5}-4}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{5}+4}}{\sqrt[3]{0,5}}$

60 По данным на рисунке найдите площади фигур.

a) 

b) 

c) 

Исследование. 1) Сравните значения выражений $\sqrt[3]{2^6}$ и $2^{\frac{6}{3}}$.
2) Верно ли равенство $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, если число m делится на натуральное число n? Приведите еще один пример.
3) Как вычислить значение выражения $a^{\frac{m}{n}}$, если число m не делится на n без остатка?

1-3 Степень с рациональным показателем

Определение: Если a – положительное число, а $\frac{m}{n}$ – дробное число (здесь m – целое, n – натуральное число, $n \geq 2$), то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Примеры. $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$; $2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{-3}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

Т.к $\sqrt[n]{0^m} = 0$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) при $m > 0$, то $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Степень с дробным показателем для отрицательного числа не рассматривается. Например, выражение $(-4)^{\frac{1}{2}}$ не имеет смысла.

Обучающие задания

1 Замените корнем степень с рациональным показателем.

a) $5^{\frac{2}{3}}$; $3^{\frac{3}{4}}$; $8^{-\frac{3}{4}}$; $9^{0,25}$ b) $x^{\frac{2}{3}}$; $y^{1,5}$; $8^{-0,5}$; $c^{-2,5}$ c) $3x^{\frac{1}{2}}$; $(8y)^{\frac{1}{3}}$; $(4c)^{-0,5}$

2 Замените арифметический корень степенью с рациональным показателем.

a) $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[5]{7^3}$ b) $\sqrt[5]{a^3}$; $\sqrt[6]{b^5}$; $\sqrt[3]{2x}$; $\sqrt[8]{2x^3}$

3 Вычислите.

a) $100^{\frac{1}{2}}$ b) $9^{-\frac{1}{2}}$ c) $8^{1\frac{1}{3}}$ d) $27^{\frac{1}{3}}$ e) $81^{\frac{3}{4}}$ f) $2 \cdot 125^{\frac{1}{3}}$

g) $25^{\frac{1}{2}} \cdot 0,001^{\frac{1}{3}}$ h) $8^{\frac{2}{3}} - 27^{\frac{1}{3}}$ i) $16^{\frac{1}{4}} + 32^{\frac{1}{5}}$

4 Лятиф и Севиль вычислили значения выражения $(-8)^{\frac{1}{3}}$ следующим образом:
Лятиф: $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$. **Севиль:** $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$.
Сравнивая результаты, объясните, почему степень с дробным показателем для отрицательного числа не рассматривается.

5 Вычислите. a) $\left(27^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ b) $\left(8^{\frac{2}{3}} + 9^{\frac{3}{2}} + 125^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

6 Лала и Анвер вычислили на калькуляторе $4{,}1^{2{,}5} \approx 34{,}0376557653$ и объяснили это вычисление таким образом:

Объяснение Лалы: если записать $4{,}1^{2{,}5} = 4{,}1^{2\frac{1}{2}} = 4{,}1 \cdot 4{,}1 \cdot \dfrac{4{,}1}{2}$, то получится приблизительно 34.

Объяснение Анвера: $4{,}1^{2{,}5} = 4{,}1^{\frac{5}{2}}$. Это является квадратным корнем из произведения 5 множителей, каждый из которых равен 4,1.

Какое из объяснений верно?

7 Сравните числа.

a) $5^{\frac{1}{2}}$ и $3^{\frac{1}{2}}$ b) $0{,}1^{\frac{1}{2}}$ и $0{,}2^{\frac{1}{2}}$ c) $3^{\frac{1}{2}}$ и $3^{\frac{1}{3}}$ d) $4^{\frac{1}{3}}$ и $4^{\frac{1}{4}}$

8 При каких значениях переменной выражение имеет смысл?

a) $x^{\frac{1}{3}}$ b) $\sqrt[3]{x}$ c) $(x-1)^{-\frac{1}{4}}$ d) $(x+1)^{\frac{2}{3}}$

Свойства степени с рациональным показателем

Свойства степени с целым показателем справедливы и для степени с рациональным показателем при положительном действительном основании. В таблице приведены свойства степени с рациональными показателями. Здесь *a и b* положительные действительные числа, *p* и *q* рациональные числа.

Название	Форма записи	Пример
Произведение степеней	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 5^2 = 25$
Степень степени	$(a^p)^q = a^{pq}$	$(3^{\frac{5}{2}})^2 = 3^{\frac{5}{2}\cdot 2} = 3^5 = 243$
Степень произведения	$(ab)^p = a^p b^p$	$(16 \cdot 9)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 3 = 12$
Степень с отрицательным показателем	$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$	$36^{-0{,}5} = \dfrac{1}{36^{0{,}5}} = \dfrac{1}{(6^2)^{0{,}5}} = \dfrac{1}{6}$
Степень с нулевым показателем	$a^0 = 1$	$213^0 = 1$
Отношение степеней	$\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$\dfrac{4^{\frac{5}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} = 4^2 = 16$
Степень отношения	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$	$\left(\dfrac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{27^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{3}{4}$

Докажем, что $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, если $p = \dfrac{m}{n}$, $q = \dfrac{k}{l}$ (n и l – натуральные числа, m и k – целые числа).

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{nk}{nl}} = \sqrt[ln]{a^{ml}} \cdot \sqrt[ln]{a^{nk}} = \sqrt[ln]{a^{ml} \cdot a^{nk}} = \sqrt[ln]{a^{ml+nk}} = a^{\frac{ml+nk}{nl}} =$$
$$= a^{\frac{ml}{nl}+\frac{nk}{nl}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}} = a^{p+q}$$

Остальные свойства доказываются аналогичным способом.

Обучающие задания

9 Представьте в виде степени с рациональным показателем.

a) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}}$ b) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$ c) $b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}$ d) $a^{0,8} \cdot a^{-5,1} \cdot a^{7,3}$

10 Упростите.

a) $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{1}{3}}$ b) $y : y^{\frac{2}{3}}$ c) $a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{2}{3}}$ d) $c^{1,2} : c^{-0,8}$

11 Упростите, применяя свойства степени с рациональным показателем.

a) $(a^{\frac{5}{7}})^{1,4}$ b) $(m^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$ c) $(b^{0,8})^{0,5}$

d) $(c^{0,7})^{0,5} \cdot c^{0,15}$ e) $y^{\frac{5}{6}} \cdot y^{\frac{2}{3}} : y^{-0,5}$ f) $(a^{-\frac{3}{4}})^{\frac{5}{9}} \cdot a^{\frac{5}{12}}$

12 Вычислите.

a) $2 \cdot 4^{0,4} \cdot 4\sqrt[5]{2}$ b) $4^{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt[6]{2}$ c) $25^{0,7} \cdot 5^{0,4}$ d) $3^{0,2} \cdot 3^{-0,25} \cdot 3^{\frac{4}{5}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}}$

13 Найдите значение выражения.

a) $(81 \cdot 16)^{\frac{1}{4}}$ b) $(\frac{1}{8} \cdot 27^{-1})^{\frac{1}{3}}$ c) $(0{,}01 \cdot \frac{1}{49})^{-\frac{1}{2}}$ d) $(\frac{49}{144})^{\frac{1}{2}}$

14 Упростите. a) $(125x^6)^{\frac{2}{3}}$ b) $(27x^3)^{\frac{1}{3}}$ c) $(64c^6)^{-\frac{1}{3}}$ d) $(\frac{1}{81}x^8)^{-\frac{1}{4}}$

15 Представьте в виде квадрата ($x > 0$): x; x^8; $x^{\frac{1}{4}}$; $x^{-\frac{1}{3}}$

16 Представьте в виде куба ($a > 0$): a; a^6; $a^{\frac{1}{4}}$; $a^{-\frac{1}{3}}$; $\sqrt{a}$

17 Выразите нижеследующее выражение через a, если $234^{\frac{1}{2}} = a$

a) $2{,}34^{\frac{1}{2}}$ b) $0{,}0234^{\frac{1}{2}}$ c) $23400^{\frac{1}{2}}$

18 Выразите переменную x через a, если $x > 0$, $a > 0$.

a) $a = x^{\frac{1}{2}}$ b) $a = x^{-\frac{1}{3}}$ c) $a = x^{\frac{2}{3}}$

19 Решите уравнения. a) $x^{\frac{1}{2}} = 3$ b) $x^{-\frac{1}{3}} = 2$ c) $x^{\frac{3}{5}} \cdot x^{1,4} = 9$

Пример. $x^{\frac{2}{3}} = 4$. Обе стороны возведем в степень $\frac{3}{2}$: $(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}}$; $x = 8$

20 Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем.

a) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}$ b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$ c) $\sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x \cdot \sqrt{x}}}$

21 Упростите.

a) $x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[3]{x}$ b) $\dfrac{c^{0,4}\cdot\sqrt[5]{c}}{\sqrt{c}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[5]{x^2}}}{x^{-\frac{1}{5}}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{x^{\frac{1}{6}}\cdot\sqrt[3]{x^2}}}{x^{-\frac{1}{8}}}$

22 Упростите.

a) $(x^{\frac{1}{2}}-3)\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}$ b) $(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})\cdot(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})$ c) $(y^{\frac{1}{3}}-1)\cdot(y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+1)$

23 Представьте в виде суммы.

a) $(c^{\frac{3}{4}}+2c^{\frac{1}{4}})^2-4c$ | b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}-(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})^2$ | c) $(c^{\frac{2}{9}}-1)(c^{\frac{4}{9}}+c^{\frac{2}{9}}+1)\cdot(c^{\frac{2}{3}}+1)$

Пример. $(1-a^{\frac{1}{2}})^2+2\cdot a^{0,5}=1^2-\cancel{2\cdot1\cdot a^{\frac{1}{2}}}+(a^{\frac{1}{2}})^2+\cancel{2\cdot a^{0,5}}=1+a.$

24 Разложите на множители.

a) $b+b^{\frac{1}{2}}$ b) $(ab)^{\frac{1}{3}}-(ac)^{\frac{1}{3}}$ c) c^2-3 d) $a-b$, $(a>0, b>0)$

e) $x^{\frac{1}{2}}-4$ f) $x^{\frac{1}{3}}+8$ g) $x^{\frac{2}{3}}-9$ h) $y-27$, $(y>0)$

25 Сократите дробь.

a) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$ b) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}-3}{x-9}$ c) $\dfrac{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b}{a-b}$ d) $\dfrac{b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{6}}}$

26 Упростите и найдите значение выражения при данном значении переменной:

a) $\dfrac{a-4a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}}-2a^{\frac{1}{2}}}$, $a=81$ b) $\dfrac{c^{\frac{1}{2}}-4c^{\frac{1}{6}}}{c^{\frac{1}{3}}-2c^{\frac{1}{6}}}$, $c=64$

27 Докажите, что значение выражения не зависит от переменной.

a) $\dfrac{(9^n-5\cdot9^{n-1})^{\frac{1}{2}}}{(27^{n-1}-19\cdot27^{n-2})^{\frac{1}{3}}}$ b) $\dfrac{(8^{n-2}-7\cdot8^{n-3})^{\frac{1}{3}}}{(5\cdot16^{n-1}+16^{n-2})^{\frac{1}{4}}}$

Прикладные задания

28 По формуле $r=\left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{n}}-1$ можно посчитать на сколько процентов повышалась цена продукта каждый раз, если первоначальная его цена P стала A после n раз проведенных подорожаний на r% при каждом увеличении цены.

Первоначально предложенная продажная цена модели автомобиля была 20000 манатов. После повышения на один и тот же процент ежегодно в течение 3-х лет его цена стала 26620 манатов. На сколько процентов повышалась цена автомобиля каждый год?

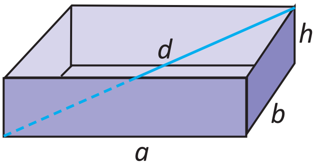
29 В составе чая, кофе и шоколада есть кофеин. С помощью выражения $100\cdot(0{,}5)^{\frac{n}{5}}$ можно вычислить количество кофеина (в %), оставшегося в организме человека после употребления через *n* часов.

1) Сколько процентов кофеина остается в организме человека после употребления чая через:

a) $\frac{1}{2}$ часа; b) 1,5 часа?

2) Через сколько часов количество оставшегося в организме кофеина будет 50%?

30 Длину диагонали коробки в форме прямоугольного параллелепипеда, показанного на рисунке, можно найти по формуле $d = (a^2 + b^2 + h^2)^{1/2}$



a) Найдите длину диагонали коробки, если ее длина a = 12 см, ширина b = 9 см, высота h = 8 см.

b) Найдите высоту (h) коробки, если ее длина a = 4 см, ширина b = 3 см, диагональ d = 13 см.

31 Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями $2^{\frac{1}{3}}$ см, $4^{\frac{1}{3}}$ см, $8^{\frac{1}{3}}$ см. Сравните объем данного параллелепипеда с объемом куба, ребро которого $6^{\frac{1}{4}}$ см.

32 **Биология.** По результатам исследований биологов “площадь поверхности” (см²) млекопитающих приближенно можно вычислить по формуле $S \approx k \cdot m^{2/3}$. Здесь m – масса живого существа в граммах, k – постоянный коэффициент, принятый для каждого живого существа. В таблице задан коэффициент k для некоторых живых существ из класса млекопитающих.

Название	Мышь	Кошка	Собака	Корова	Кролик	Человек
Коэффициент (k)	9,0	10,0	11,2	9,0	9,75	11,0

Сколько квадратных сантиметров составляет поверхность кожи:
a) кошки массой 2 кг; b) собаки массой 12 кг; c) кролика массой 6 кг?

33 1) Начертите квадрат. Задайте площадь таким числом, чтобы периметр был: a) рациональным числом; b) иррациональным числом.

2) Начертите куб. Задайте объем таким числом, чтобы площадь полной поверхности была: a) рациональным числом; b) иррациональным числом.

34 Найдите требуемую величину по данным формулам:

a) Найдите m, при $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{g}}$ b) Найдите b, при $c = \sqrt{1 + \frac{a^3}{b^3}}$

c) Найдите a, при $d = (a^2 + b^2 + h^2)^{1/2}$ d) Найдите A, при $r = \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$

Обобщающие задания

1 Найдите значение выражения.

a) $(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{0,5})\cdot\sqrt[4]{2}$ b) $(\sqrt[3]{108}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{32}):\sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$

2 Расположите числа в порядке возрастания.

a) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[15]{30}$ b) $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[10]{25}$, $\sqrt[6]{3\cdot\sqrt[5]{3}}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

3 Освободите знаменатель дроби от иррациональности.

a) $\frac{12}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\frac{6}{\sqrt[5]{8}}$ c) $\frac{6}{\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{2}}$ d) $\frac{9}{\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{3}}$

4 При каких значениях переменной выражение имеет смысл?

a) $\sqrt[8]{x-3}$ b) $\sqrt[5]{x-1}$ c) $\sqrt[4]{2-x}$ d) $\sqrt[6]{-x}$

5 При каких значениях переменной равенство верно?

a) $2x^3-1=15$ b) $0,5x^4+1=9$ c) $(x-1)^3+1=9$

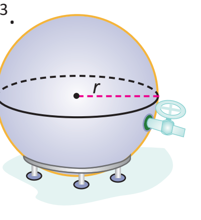
d) $\sqrt[3]{2x-4}=2$ e) $\sqrt[4]{3x+4}=1$ f) $(x+2)^{\frac{1}{3}}=2$

6 Объем шара радиусом r вычисляется по формуле $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

a) Вычислите радиус шарообразного бака обьемом $4,5\ \pi$ м³.

b) Сколько приблизительно метров составляет радиус шарообразного бака при обьеме $7,2$ м³ ?

Результат округлите до десятых.



7 Внесите множитель под знак корня.

a) $2\sqrt[4]{3}$ b) $-3\sqrt[4]{2}$ c) $a\sqrt[4]{3}$, $a>0$ d) $a\sqrt[4]{3}$, $a<0$ e) $c\sqrt[4]{\frac{2}{c}}$ f) $c\sqrt[4]{-\frac{2}{c}}$

8 Вычислите. a) $\frac{4-3\sqrt{2}}{(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8})^2}$ b) $\frac{\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}}{\sqrt{3-\sqrt{8}}}$

c) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}}{\sqrt[6]{2+\sqrt{3}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{4-\sqrt{15}}}{\sqrt{4-\sqrt{15}}\cdot\sqrt[3]{4+\sqrt{15}}}$

e) $(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4})\cdot(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{16})$ f) $\sqrt[4]{8+\sqrt{60}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

9 Упростите.

a) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{b^3\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{b}+\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[6]{b}+\sqrt[3]{b}}$

d) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}}+5}{25-a^{\frac{1}{3}}}$ e) $\dfrac{b-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$ f) $\dfrac{\sqrt[4]{x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x}\cdot x^{\frac{1}{8}}}}{\sqrt[12]{x}}$

10 Установите соответствие для равенств.

1. $\sqrt[4]{a^4}=a$
2. $\sqrt[3]{a^3}=-a$
3. $\sqrt[6]{a^6}=|a|$

A) верно при любых значениях a.
B) верно при $a\geq 0$.
C) верно только при $a=0$.

11 Упростите выражение при $a<0$: $a^2\cdot\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{a^9}-2\sqrt[4]{a^{12}}$

12 Найдите $(\sqrt[8]{3}+1)\cdot(\sqrt[4]{3}+1)\cdot(\sqrt{3}+1)$, если $\sqrt[8]{3}=a+1$

13 Найдите значение выражения.

a) $(\frac{x}{3}+1)(\frac{x^2}{3}-x+3)$; при $x=\sqrt[3]{3}$

b) x^3+3x; *при* $x=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$

14 На банковском счету сумма P (в манатах) была конвертирована в сумму A при ежегодном доходе r % в течение t лет . По формуле вычисления сложных процентов получим $A=P(1+r)^t$.

a) Обоснуйте что, процент годового прироста можно вычислять по формуле $r=\left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{t}}-1$.

b) Если депозит на банковском счету 2000 ₼ в течение 2 лет вырос до суммы 2332,8 ₼, каков был процент годового прироста?

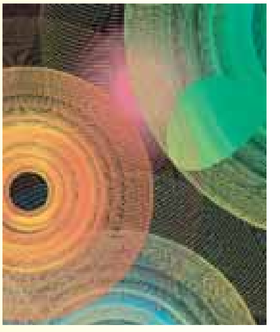
c) Депозит на банковском счету 4000 ₼ в течение 3 лет вырос до суммы 4630,5 ₼. Посчитайте процентную ставку, примененную банком.

15 **Биология.** Массу мозга млекопитающих животных можно найти приблизительно, вычислив значение выражения $0{,}01\sqrt[3]{m^2}$. Здесь m – масса тела животного в килограммах. Найдите массу мозга:

a) собаки массой 27 кг; b) полярного медведя массой 200 кг.

Ответ напишите в граммах и округлите до единиц.

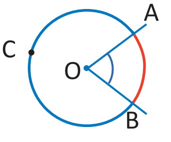
2 Окружность



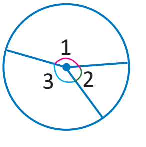
В этом разделе вы научитесь

- Вычислять градусную меру и длину дуги
- Теоремам о хордах окружности
- Углам, вписанным в окружность
- Углам между секущими и касательными к окружности
- Свойствам касательных к окружности
- Теоремам о длинах отрезков секущих окружность

2-1 Центральный угол. Дуга окружности

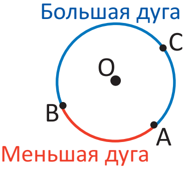


Центральный угол. Угол, вершина которого находится в центре окружности, называется центральным углом.
Точка O - центр окружности, $\angle AOB$ центральный угол.
При проведении нескольких радиусов окружности, сумма всех центральных углов, не имеющих общих внутренних точек, равна 360°. Например, по данным на рисунке:

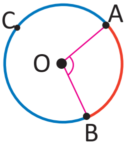


$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$$

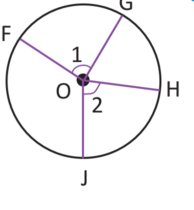
Дуга окружности. Две точки лежащие на окружности делят ее на две дуги: большую дугу (мажорная дуга) и меньшую дугу (минорная дуга).
Если точки являются концами диаметра, то каждая дуга является полуокружностью.



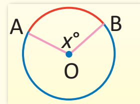
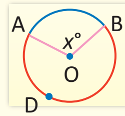
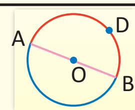
На рисунке $\smile AB$ меньшая дуга, $\smile ACB$ большая дуга (для различения дуг при необходимости будем обозначать их 3-мя буквами).
Если точка C является какой-либо точкой дуги AB, то
$\smile ACB = \smile AC + \smile CB$.



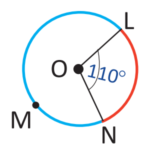
Дугу окружности можно измерять в градусах. Градусная мера дуги равна градусной мере соответствующего центрального угла: $\smile AB = \angle AOB$



В окружности конгруэнтным центральным углам соответствуют конгруэнтные дуги и наоборот.
Если $\angle 1 \cong \angle 2$, то $\smile FG \cong \smile HJ$
Если $\smile FG \cong \smile HJ$, то $\angle 1 \cong \angle 2$.

Дуги окружности и их величины		
Дуги	Величины	
Минорная дуга, меньшая дуга	Градусная мера минорной дуги меньше 180° и равна градусной мере соответствующего центрального угла. $\smile AB = \angle AOB$	
Мажорная дуга, большая дуга	Градусная мера мажорной дуги больше 180° и ее значение равно разности 360° и соответствующей минорной дуги. $\smile ADB = 360° - \smile AB$	
Полуокружность	Градусная мера полуокружности равна 180° $\smile ADB = 180°$	

Пример. O - центр окружности. Если $\angle LON = 110°$, найдите градусную меру $\smile LMN$.

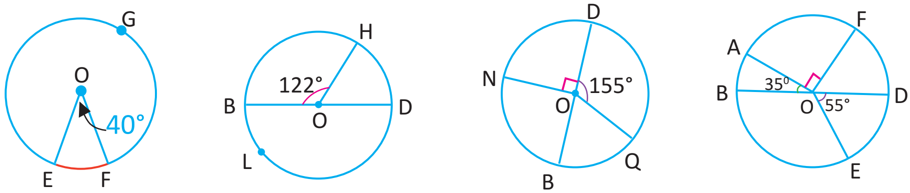


Решение. $\smile LN$ – минорная дуга: $\smile LN = \angle LON = 110°$

$\smile LMN$ – мажорная дуга : $\smile LMN = 360° - 110° = 250°$

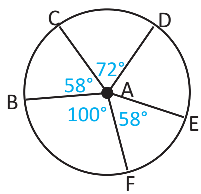
Обучающие задания

1 По рисунку запишите названия минорной дуги, мажорной дуги и полуокружности. Определите их градусные меры.
O - центр окружности, BD - диаметр.

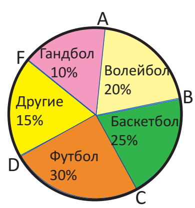


2 Определите градусную меру дуг в окружности с центром A. Какие дуги конгруэнтны?

1. $\smile BC$ и $\smile EF$
2. $\smile BC$ и $\smile CD$
3. $\smile CD$ и $\smile DE$
4. $\smile BFE$ и $\smile CBF$



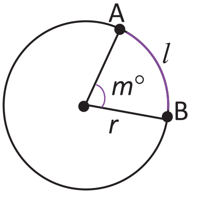
3 Найдите градусные меры дуг, соответствующих данным на диаграмме.



Длина дуги

Какую часть составляет центральный угол от всей окружности, такую же часть длина дуги составляет от длины всей окружности.

Длина дуги в 1° равна $\frac{1}{360}$ части длины окружности.



Длина дуги, соответствующей центральному углу с градусной мерой $m°$, составляет $\frac{m}{360}$ части длины окружности:

$$\boldsymbol{l = \frac{m}{360} \cdot 2\pi r}$$

Длина дуги выражается единицами измерения длины (мм, см, м, и т.д.)

1. **Пример 1.** Длина окружности равна 72 см. Найдите длину дуги, соответствующей центральному углу 45°.

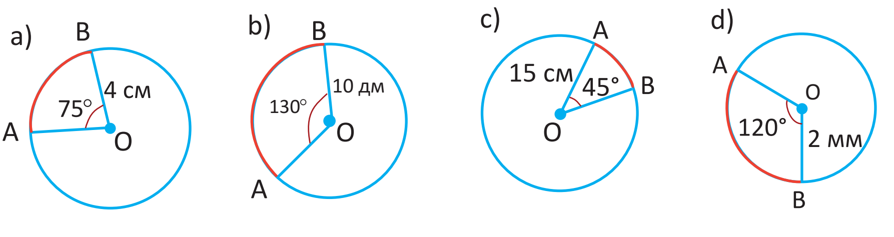
Решение. Так как центральный угол 45° составляет $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$ часть полного угла, то длина искомой дуги: $l = \frac{1}{8} \cdot 72 = 9$ (см)

2. **Пример 2.** Найдите длину дуги, соответствующей центральному углу 72° в окружности радиусом 15 см. Ответ округлите до сотых.

Решение. Подставляя значения $m = 72$, $r = 15$ в формулу длины дуги находим: $l = \frac{72}{360} \cdot 2\pi \cdot 15 = 6\pi \approx 18{,}85$ (см)

Обучающие задания

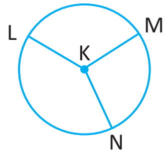
4 По данным рисунка найдите длину дуги AB. Результат округлите до сотых. O - центр окружности.



5 Найдите длину дуги, зная радиус окружности и градусную меру центрального угла.

a) $r = 3$, $m = 45°$ b) $r = 7$, $m = 80°$ c) $r = 8$, $m = 120°$

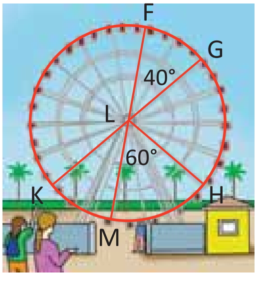
6 Окружность с радиусом 5 единицы разделена на дуги точками L, M и N в отношении 5 : 3 : 4. Найдите: a) градусные меры; b) длины этих дуг.



7 Длина минутной стрелки часов 20 см. Найдите длину дуги, которую очертит конец минутной стрелки с 12:00 до 12:30?

8 Диаметр карусели FM равен 30 м. По данным рисунка найдите длину дуг.

1) ⌣FG	5) ⌣FKH
2) ⌣MF	6) ⌣GHM
3) ⌣GH	7) ⌣MKG
4) ⌣MH	8) ⌣HGF



2-2 Свойства хорды

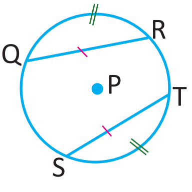
Теорема о конгруэнтных хордах

Теорема 1. Хорды, стягивающие конгруэнтные дуги окружности, конгруэнтны.

Если ⌣QR ≅ ⌣ST , то QR ≅ ST

Обратная теорема 1. Дуги, стягиваемые конгруэнтными хордами окружности, конгруэнтны.

Если QR ≅ ST, то ⌣QR ≅ ⌣ST



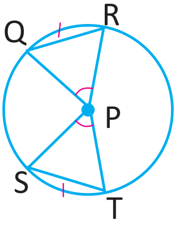
Обучающие задания

1 a) Изучите доказательство теоремы 1. Обозначив соответствующие точки другими буквами, напишите доказательство теоремы заново.

Доказательство теоремы 1: Если ⌣QR ≅ ⌣ST, то QR ≅ ST

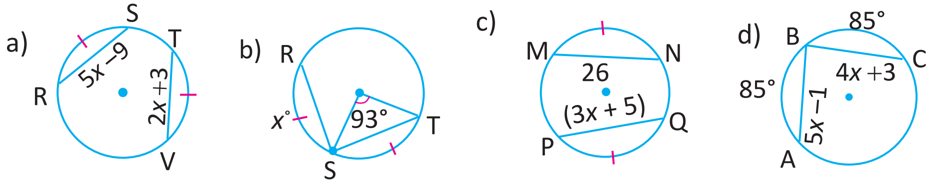
Начертите радиусы PQ, PR, PS, PT окружности.

Утверждение	Обоснование
1. ⌣QR ≅ ⌣ST	1. Дано.
2. ∠QPR ≅ ∠SPT	2. Центральные углы, соответствующие конгруэнтным дугам.
3. PQ ≅ PR ≅ PS ≅ PT	3.Радиусы окружности конгруэнтны.
4. ΔQPR ≅ ΔSPT	4.Конгруэнтность треугольников по признаку СУС.
5. QR ≅ ST	5. Соответствующие стороны конгруэнтных треугольников.

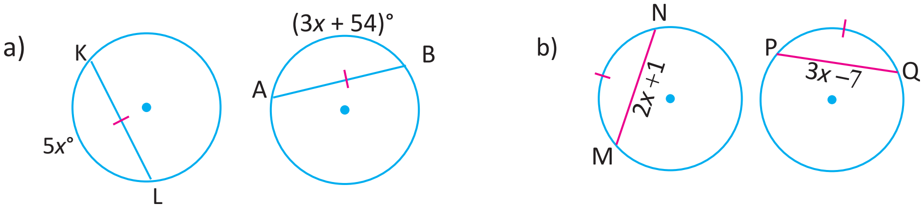


b) Аналогичным способом докажите обратную теорему 1.

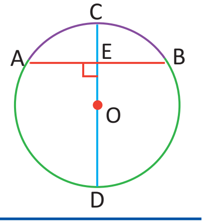
2 По данным рисунка найдите переменную x. Центр окружности обозначен точкой.



3 Найдите переменную x, если окружности конгруэнтны.



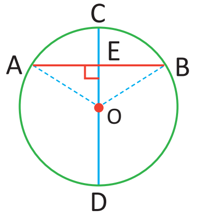
Теорема о серединном перпендикуляре хорд



Теорема 2. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и соответствующую дугу пополам.

Если $CD \perp AB$, то $AE \cong EB$ и $\smile AC \cong \smile CB$

Доказательство теоремы 2.

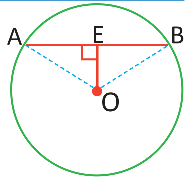


Дано: O – центральный угол, CD - диаметр и $CD \perp AB$.
Докажите: $AE \cong EB$, $\smile AC \cong \smile CB$,
Начертите радиусы OA и OB окружности.

Утверждение	Обоснование
1. $AB \perp CD$	1. Дано.
2. $\angle AEO$ и $\angle BEO$ прямоугольные.	2. Перпендикулярные прямые пересекаются под прямым углом.
3. $OA \cong OB$	3. Радиусы окружности конгруэнтны.
4. $\Delta AOE \cong \Delta BOE$	4. Конгруэнтность прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе.
5. $AE \cong BE$	5. Соответствующие стороны конгруэнтных треугольников.
6. $\angle AOE \cong \angle BOE$	6. Соответствующие углы конгруэнтных треугольников.
7. $\smile AC \cong \smile CB$	7. Соответствующие дуги конгруэнтных центральных углов конгруэнтны.

Следствие 1. Прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная хорде, делит эту хорду и стягиваемые ею дуги пополам.
Следствие 2. Центр окружности расположен на серединном перпендикуляре хорды. Серединный перпендикуляр хорды проходит через центр окружности.

Пример. Найдите расстояние от центра до хорды длиной 30 единиц в окружности радиусом 17 единиц.

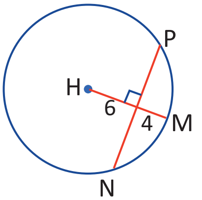


Решение. Если $OE \perp AB$, то $AE = EB = 30 : 2 = 15$. Из ΔAOE по теореме Пифагора имеем:
$OE^2 = OA^2 - AE^2 = 17^2 - 15^2 = 64$, $OE = 8$

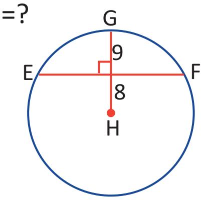
Обучающие задания

4 Найдите длину хорды по данным рисунка. H - центр окружности.

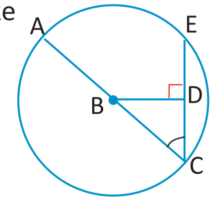
a) NP =?



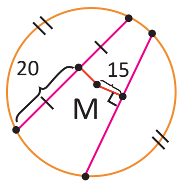
b) EF =?



5 Диаметр окружности с центром в точке B равен 30 единицам, $\angle ACE = 45°$.
Найдите:
a) Длину отрезка BD;
b) Длину отрезка DC;
c) Длину хорды CE.



6 По данным рисунка найдите радиус окружности.
M - центр окружности.

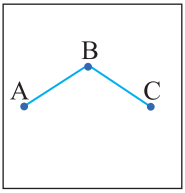


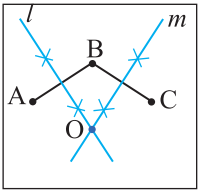
7 Построение окружности через три точки, не лежащие на одной прямой. Исследуйте шаги построения и выполните в тетради.

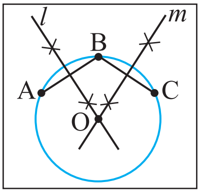
1. Отметьте три точки A, B, C, которые не лежат на одной прямой. Начертите отрезки AB и BC.

2. Проведите серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC. Обозначьте точку пересечения этих перпендикуляров буквой O.

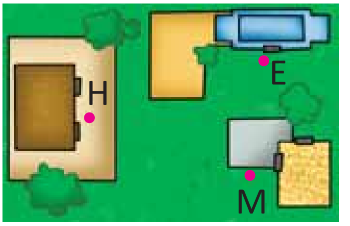
3. Поскольку OA = OB = OC точки A, B, C находятся на одинаковом расстоянии от точки O. Проведите окружность с радиусом OA. O - центр окружности





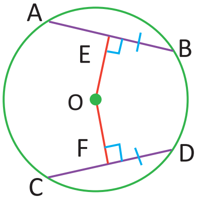


8 Фирма, занимающаяся программным обеспечением и технической поддержкой, оказывает услуги фирмам H, M и E и планирует арендовать новое офисное здание. Перечертите план в тетрадь и разместите на плане новый офис фирмы так, чтобы он находился на одинаковом расстоянии от всех трех фирм.



Теорема о хордах, находящихся на одинаковом расстоянии от центра окружности

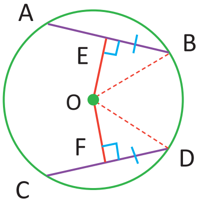
Теорема 3. Конгруэнтные хорды окружности находятся на одинаковом расстоянии от центра окружности.



Если $AB \cong CD$ $OE \perp AB$ $OF \perp CD$, то $OE \cong OF$

Обратная теорема 3. Хорды, находящиеся на одинаковом расстоянии от центра окружности, конгруэнтны.

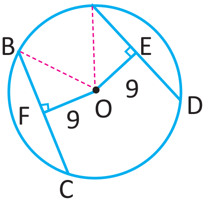
Доказательство теоремы 3



Дано: Окружность с центром O, $AB \cong CD$
$OE \perp AB$ $OF \perp CD$
Докажите: $OE \cong OF$

Доказательство (текстовое): Прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная хорде, делит хорду и стягивающую ею дугу пополам. OE и OF - серединные перпендикуляры конгруэнтных хорд AB и CD. $EB \cong FD$, так как они являются половиной конгруэнтных хорд. Начертим радиусы окружности OB и OD: $OB \cong OD$. Прямоугольные треугольники, ΔOEB и ΔOFD конгруэнтны (по катету и гипотенузе). Так как OE и OF являются соответствующими сторонами данных треугольников, то они конгруэнтны: $OE \cong OF$. Теорема доказана.

Пример. Хорды AD и BC находятся на одинаковом расстоянии от центра окружности: OE=OF=9. Если радиус окружности равен 41 единице, то найдите AD и BC.



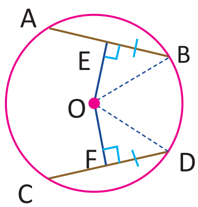
Решение: Так как хорды AD и BC находятся на одинаковом расстоянии от центра, то они конгруэнтны: $AD \cong BC$.
Начертим радиусы OA и OB. Поскольку $OE \perp AD$ и $OF \perp BC$ то ΔAEO и ΔBFO прямоугольные треугольники.
Для ΔAEO по теореме Пифагора получаем:
$AE^2 + OE^2 = OA^2$; $AE^2 + 9^2 = 41^2$;
$AE^2 = 1600$; $AE = 40$; $AD = 2AE = 2 \cdot 40 = 80$
Так как $AD \cong BC$, то $BC = 80$.

Обучающие задания

9 **Докажите обратную теорему 3 самостоятельно.**

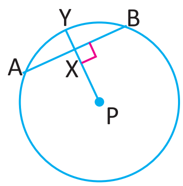
Дано: Окружность с центром O, OE $\cong$ OF, OE $\perp$ AB, OF $\perp$ CD **Докажите:** AB $\cong$ CD.

План доказательства: Используйте конгруэнтность треугольников.

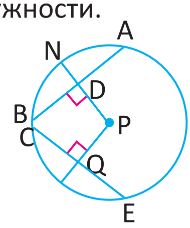


10 Найдите требуемое по данным и рисунку. P - центр окружности.

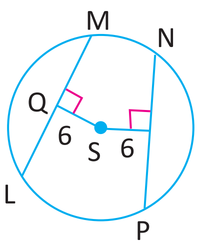
a) **Дано:** PY = 13,
AB =10.
Найдите: BX = ?;
PX = ?



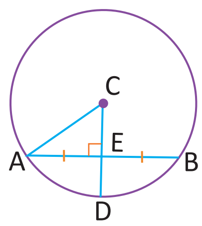
b) **Дано:** PD = 10
PQ = 10
QE = 24
Найдите: AB = ?,
PN = ?



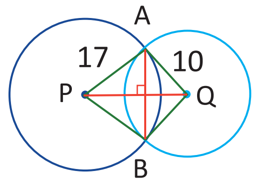
11 a) **Дано:** S - центр окружности.
LM = x + 8 и PN = 2x
Найдите: радиус окружности.



b) **Дано:** Окружность с центром C. CD$\perp$AB
AB = 8 см
CD = 5 см
Найдите: CE



12 Окружности с центром P и с центром Q пересекаются в точках A и B. Найдите PQ, если AP =17, AQ = 10, AB = 16.



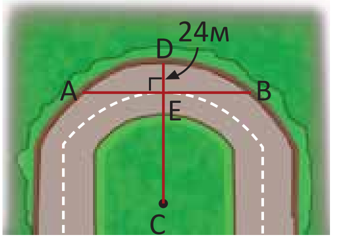
13 В окружности с радиусом 5 см найдите расстояние между двумя параллельными хордами длиной 6 см и 8 см. Сколько решений имеет задача?

14 Решите задачу, начертив соответствующие рисунки.

a) Диаметр окружности 30 см, а длина хорды 18 см. На каком расстоянии от центра окружности находится хорда?
b) Хорда длиной 12 см находится на расстоянии 8 см от центра окружности. Найдите радиус окружности.
c) Диаметр окружности 52 см, расстояние от центра окружности до хорды 10 см. Найдите длину хорды.

15 **Вопрос открытого типа.** 1) Начертите неравные хорды окружности и их серединные перпендикуляры. Какая из хорд ближе к центру: большая или меньшая?

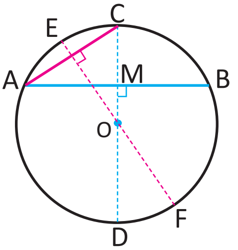
2) Начертите две окружности с разными радиусами. В каждой окружности проведите равные хорды и покажите центральные углы, соответствующие минорным дугам этих хорд. Какой из центральных углов больше? Изложите свою мысль.



16 Кривая часть дороги ($\smile$ADB) является частью окружности с центром C и радиусом 120 м. Найдите длину отрезка AB, если длина DE равна 24 м.

17 **Как найти центр окружности?**

Выполнив нижеуказанные шаги, вы можете ответить на этот вопрос.

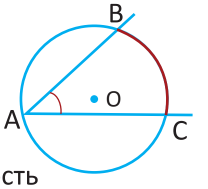


1) Начертите хорду AB.
2) Начертите перпендикулярный диаметр CD к хорде AB, который делит ее пополам в точке M.
3) Начертите хорду AC и ее серединный перпендикуляр EF, являющийся также диаметром окружности.
4) Отметьте точку пересечения диаметров CD и EF.

Точка O находится на равном расстоянии от точек A,B,C (обьясните). Значит, точка O - центр окружности.

2-3 Угол, вписанный в окружность

Определение. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется углом вписанным в окружность. Дуга, соответствующая углу, вписанному в окружность, называется дугой, на которую опирается этот угол.

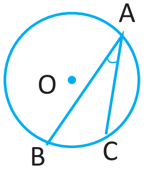


На рисунке $\angle$BAC является углом, вписанным в окружность с центром O, а BC – дуга, на которую опирается этот угол.

Ниже показаны три разных угла, вписанных в окружность.

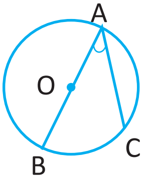
Центр окружности лежит вне вписанного угла:

1.



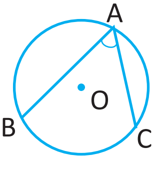
Центр окружности лежит на стороне вписанного угла:

2.

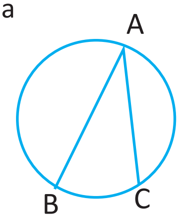


Центр окружности лежит внутри вписанного угла:

3.

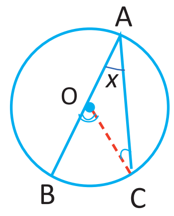


Теорема 1. Градусная мера угла, вписанного в окружность, равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

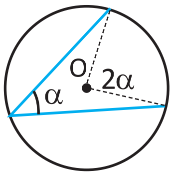


$$\angle BAC = \frac{\smile BC}{2}$$

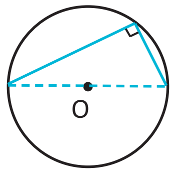
Доказательство (текстовое). Теорему докажем для случая, когда центр окружности лежит на стороне вписанного угла. Начертим радиус OC. Исходя из того, что OA и OC – радиусы окружности, ΔAOC – равнобедренный треугольник. Значит, $\angle A = \angle C$. Так как $\angle BOC$ является внешним углом ΔAOC, то $\angle BOC = \angle A + \angle C$. Если примем, что $\angle A = \angle C = x$, то $\angle BOC = 2x$. Так как градусные меры центрального угла и опирающейся на него дуги равны, то $\smile BC = \angle BOC = 2x$. Следовательно, $\angle BAC = \frac{\smile BC}{2}$. Запишите доказательство теоремы в виде двухстолбчатой таблицы.



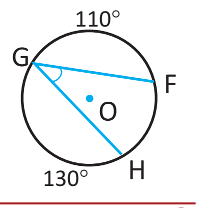
Следствие 1. Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.



Следствие 2. Угол, вписанный в окружность и опирающийся на диаметр (полуокружность), является прямым углом.



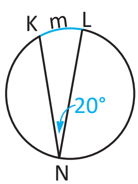
Пример. Дуги окружности $\smile GF = 110°$, $\smile GH = 130°$. Найдите градусную меру угла FGH.

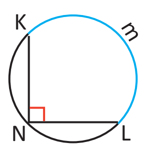


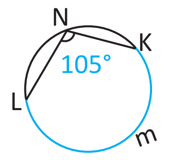
Решение. Поскольку $\smile FH = 360° - (110° + 130°) = 120°$, то найдем: $\angle FGH = \frac{\smile FH}{2} = \frac{120°}{2} = 60°$

Обучающие задания

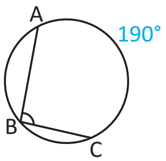
1 Найдите градусную меру дуги, на которую опирается угол.

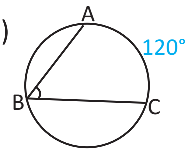
a) 

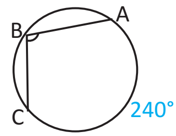
b) 

c) 

2 Найдите градусную меру вписанного угла, опирающегося на заданную дугу окружности.

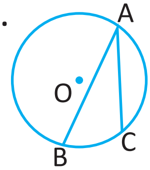
a) 

b) 

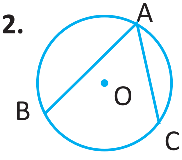
c) 

3 Доказательство теоремы 1 дано для второго случая на странице 37. Докажите эту теорему для 1-го и 3-го случаев вписанного угла.

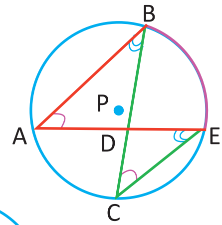
1.



2.

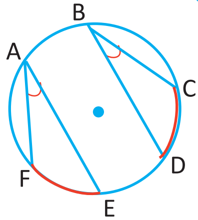


Конгруэнтные углы, вписанные в окружность



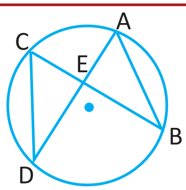
Следствие 3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, конгруэнтны.
$\angle EAB \cong \angle BCE$, $\angle ABC \cong \angle AEC$.

Следствие 4. Вписанные углы, опирающиеся на конгруэнтные дуги, конгруэнтны.
Если $\smile FE \cong \smile CD$ то, $\angle FAE \cong \angle DBC$



Обучающие задания

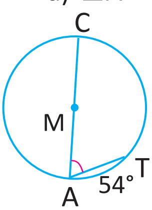
4 **Дано:** $CD \cong AB$
Докажите: $\Delta CDE \cong \Delta ABE$
План доказательства: Воспользуйтесь признаком УСУ конгруэнтности треугольников .

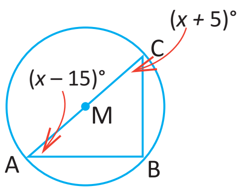


5 По данным рисунка найдите требуемое.

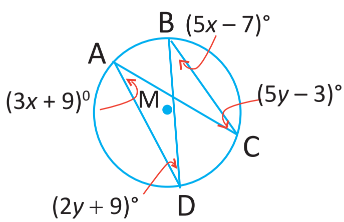
1) M - центр окружности,
AC - диаметр.

a) $\angle A$ b) $\smile CB$

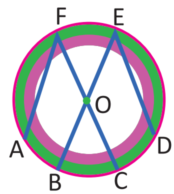




2) $\angle D$, $\angle B$



6 Во многих случаях в качестве коммерческих знаков используют логотипы в форме круга. На рисунке изображен логотип, дизайн которого состоит из двух вписанных и центральных углов.
a) Напишите названия этих углов.
b) Найдите $\angle AFC$ и $\angle BED$, если $\smile AC \cong \smile BD$, $\smile AF = 90°$, $\smile FE = 45°$, $\smile ED = 90°$.

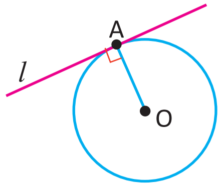


7 Окружность разделена четырьмя точками в отношении $3:4:5:6$. Найдите углы четырехугольника с вершинами в этих точках.

2-4 Касательная к окружности

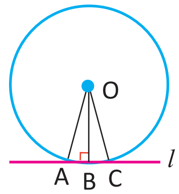
Определение. Прямая, имеющая одну общую точку с окружностью, называется касательной.

Теорема 1. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.



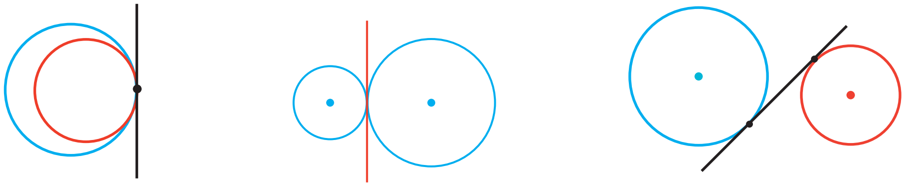
Прямая l касательная к окружности.
$l \perp AO$

Обратная теорема (признак касательной): Прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку, является касательной окружности.



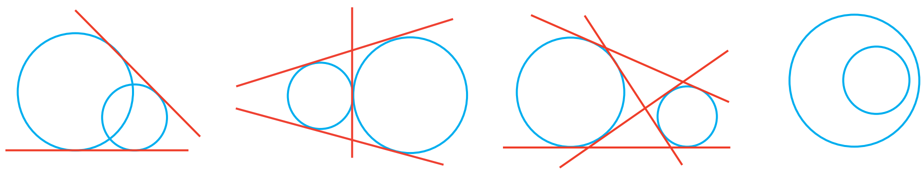
Доказательство теоремы 1. Если прямая l – касательная к окружности, значит, она имеет единственную общую точку с окружностью. Допустим, что прямая l не перпендикулярна радиусу OA. Проведем $OB \perp l$ и на прямой l выделим отрезок $AB = BC$. Тогда $OC = OA = r$, так как $\Delta AOB \cong \Delta COB$ по признаку СУС. Значит, точка C также находится на окружности. То есть прямая l имеет с окружностью две общие точки, что противоречит условию. Значит, $l \perp OA$.

Прямая, касающаяся обеих окружностей, называется общей касательной этих окружностей. Окружности, касаясь друг друга изнутри или извне, могут иметь общую касательную в одной точке. Также окружности могут касаться одной касательной в разных точках.



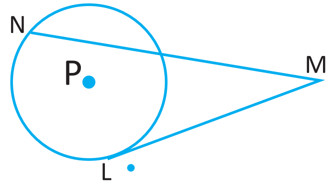
Две окружности могут иметь несколько общих касательных, или вообще не иметь общих касательных.

Имеет 2 общие касательных *Имеет 3 общие касательных* *Имеет 4 общие касательных* *Не имеет общих касательных*

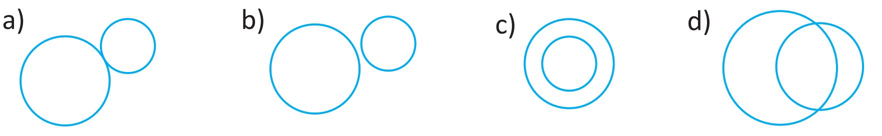


Обучающие задания

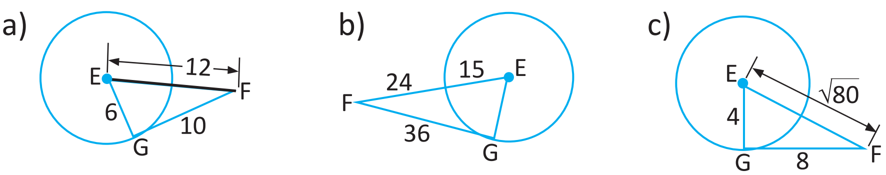
1 Согласно рисунку объясните: почему MN нельзя назвать касательной к окружности с центром P, а ML можно назвать касательной?



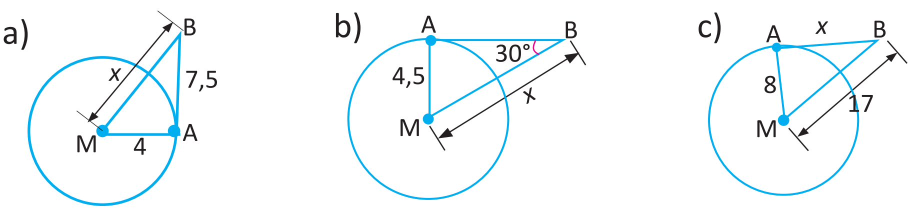
2 Нарисуйте окружности в тетради. Начертите их общие касательные. Отметьте окружности, не имеющие общих касательных.



3 По какому рисунку можно сказать, что отрезок GF является касательной к окружности? Чтобы ответить на этот вопрос, запишите теорему, обратную теореме Пифагора и примените ее к решению задачи. Точка E является центром окружности.

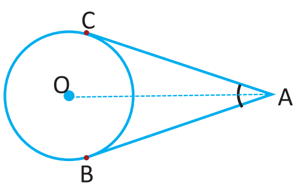


4 Найдите *x*, зная, что AB является касательной к окружности. Точка M-центр окружности.



Свойства касательных, проведенных к окружности из одной точки

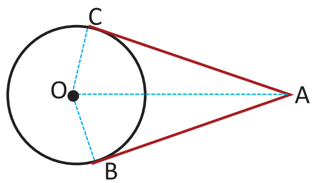
Теорема 2. Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки - конгруэнтны и центр окружности находится на биссектрисе угла, образованного касательными.



Точки B и C являются точками касания касательных, проведенных из точки A.
Точка A - центр окружности.
$AB \cong AC$, $\angle BAO \cong \angle CAO$.

Обучающие задания

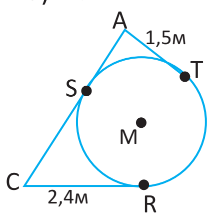
5 Докажите теорему 2.



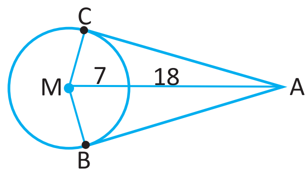
Дано: AB и AC – отрезки касательных, проведенных к окружности (с центром O) из точки A.
Докажите: $AB \cong AC$, $\angle BAO \cong \angle CAO$.
План доказательства: Начертите радиусы окружности OB и OC и отрезок AO. Используйте конгруэнтность соответствующих треугольников.

6 На рисунке из точки вне окружности (с центром M) проведены касательные к окружности. Исходя из данных на рисунке найдите неизвестные величины.

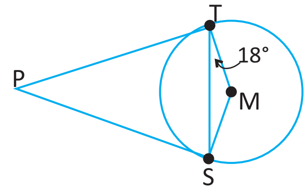
a) $AC = ?$



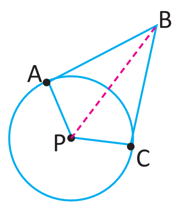
b) $AB = ?$



c) $\angle TPS = ?$



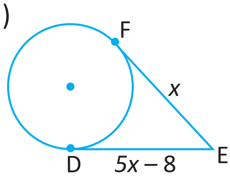
7 Из точки B проведены касательные к окружности с центром P. Запишите, на каком основании верно каждое из данных утверждений.



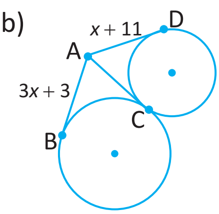
a) $BA \cong BC$
b) $PA \cong PC$
c) $\Delta PAB \cong \Delta PCB$
d) $\angle ABC + \angle APC = 180°$

8 Из точки вне окружности проведены касательные к окружности. По данным рисунка найдите переменную *x*.

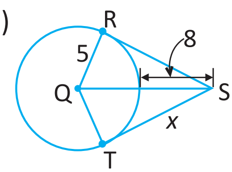
a)



b)

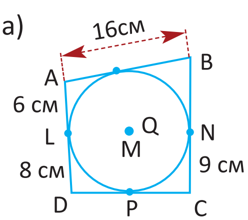


c)

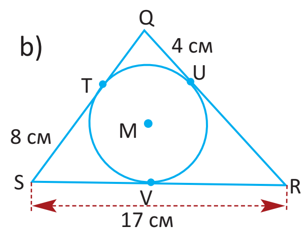


9 По данным рисунка найдите длины сторон многоугольников и их периметр.

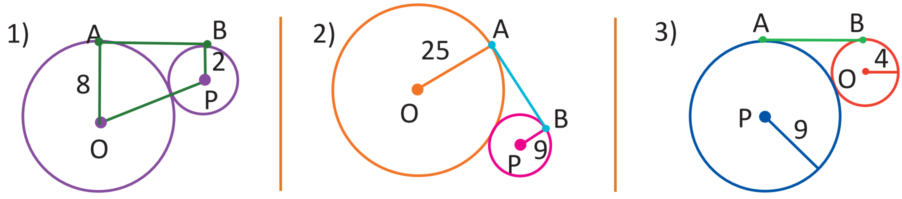
a)



b)

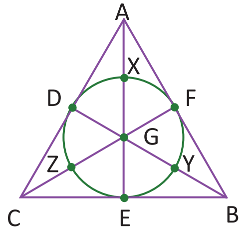


10 AB – общая касательная окружностей с центром O и P, которые касаются извне. Найдите длину отрезка AB.

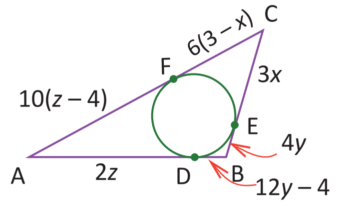


11 По данным рисунка найдите периметр ΔABC.

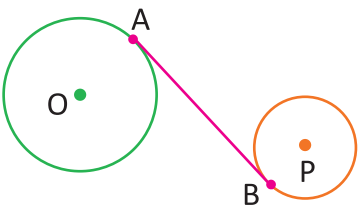
a) BY = CZ = AX = 2,5
диаметр окружности EX = 5



b)

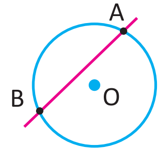


12 AB – общая касательная к окружностям с центром O и P. Радиусы окружностей соответственно равны 15 см и 12 см. Найдите длину отрезка AB, если OP = 36 см.



2-5 Углы, образованные касательными и секущими

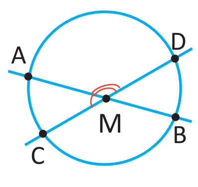
Определение. Прямая, имеющая две общие точки с окружностью, называется секущей окружности.



Углы между двумя секущими

Вершина угла находится внутри окружности

Теорема 1. Если вершина угла, образованного двумя секущими, находится внутри окружности, то градусная мера угла равна полусумме величин дуг, на которые опирается этот угол и угол противоположный данному.



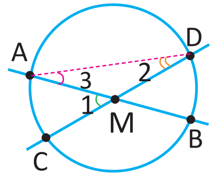
$$\angle AMC = \frac{\smile AC + \smile DB}{2} \qquad \angle AMD = \frac{\smile AD + \smile BC}{2}$$

Обучающие задания

1 Завершите доказательство теоремы в тетради.
Дано: AB и CD – секущие окружности.

Докажите: $\angle 1 = \dfrac{\smile AC + \smile DB}{2}$

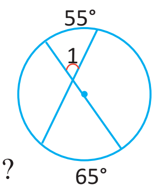
Начертите хорду AD окружности.



Утверждение	Обоснование
1. $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$	1. $\angle 1$ является .... углом ΔAMD
2. $\angle 2 = \dfrac{\smile AC}{2}$	2. ....
3. $\angle 3 = \dfrac{\smile DB}{2}$	3. ....
4. $\angle 1 = \dfrac{\smile AC + \smile DB}{2}$	4. ....

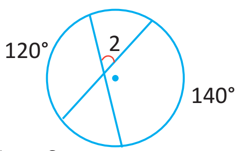
2 По данным рисунка найдите требуемое.

a)



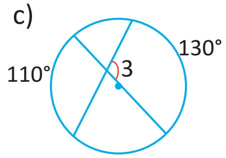
$\angle 1 = ?$

b)



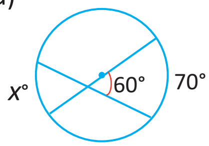
$\angle 2 = ?$

c)



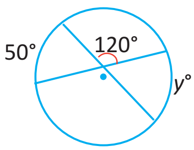
$\angle 3 = ?$

d)



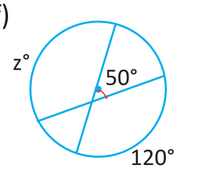
$x = ?$

e)



$y = ?$

f)

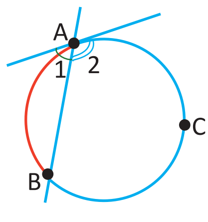


$z = ?$

Углы между касательной и секущей

Вершина угла находится на окружности

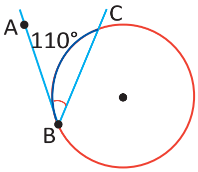
Теорема 2. Если вершина угла, образованного касательной и секущей, находится на окружности, то градусная мера угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.



$\angle 1 = \dfrac{\smile AB}{2}$ $\quad\angle 2 = \dfrac{\smile ACB}{2}$

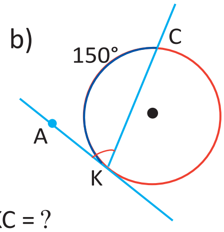
3 По данным рисунка найдите угол между касательной и секущей.

a)



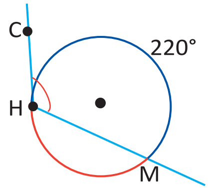
$\angle ABC = ?$

b)



$\angle AKC = ?$

c)

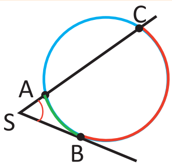
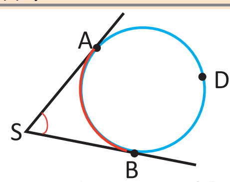
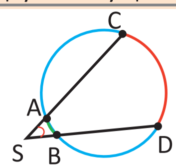


$\angle CHM = ?$

Углы, образованные касательной и секущей

Вершина угла находится вне окружности

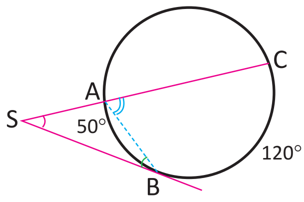
Теорема 3. Градусная мера угла, образованного секущей и касательной, двумя касательными, двумя секущими окружности (если вершина угла находится вне окружности), равна половине разности градусных мер больших и меньших дуг, находящихся между сторонами угла.

1. Угол, образованный касательной и секущей	2. Угол, образованный двумя касательными	3. Угол, образованный двумя секущими
 $\angle S = \frac{\smile BC - \smile AB}{2}$	 $\angle S = \frac{\smile ADB - \smile AB}{2}$	 $\angle S = \frac{\smile CD - \smile AB}{2}$

Пример. По данным рисунка найдите градусную меру $\angle C$.

Решение. По теореме 3:

$$\angle S = \frac{\smile BC - \smile AB}{2}$$



Действительно, если провести хорду AB, поскольку $\angle CAB$ - внешнеий угол ΔASB, то получим: $\angle CAB = \angle S + \angle ABS$. Отсюда находим:

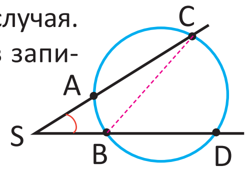
$$\angle S = \angle CAB - \angle ABS = \frac{\smile BC}{2} - \frac{\smile AB}{2} = \frac{120^\circ - 50^\circ}{2} = 35^\circ$$

Обучающие задания

4 Завершите доказательство теоремы для третьего случая. Доказательство теоремы для 1-го и 2-го случаев запишите самостоятельно.

Дано: SC и SD секущие окружности.

Докажите: $\angle S = \dfrac{\smile CD - \smile AB}{2}$

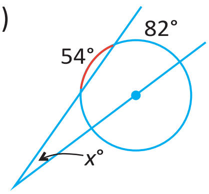


Доказательство с помощью таблицы, состоящей из 2-х столбцов.Начертите хорду CB.

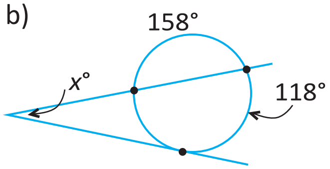
Утверждение	Обоснование
1. $\angle CBD = \angle CSB + \angle SCB$	$\angle CBD$ внешний угол ΔSBC
2. $\angle CBD = \dfrac{\smile CD}{2}$	2. ....
3. $\angle SCB = \dfrac{\smile AB}{2}$	3. ....
4. $\angle CSB = \angle CBD - \angle SCB$	4. ....
5. $\angle CSB = \dfrac{\smile CD - \smile AB}{2}$	5. ....

5 К окружностям проведены касательные и секущие. Найдите требуемый угол или дугу, обозначенные через *x*.

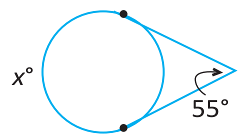
a)



b)

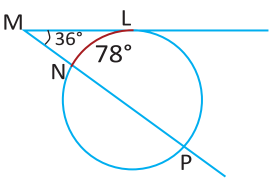


c)

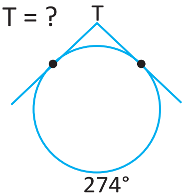


6 К окружностям проведены касательные и секущие. Найдите требуемое.

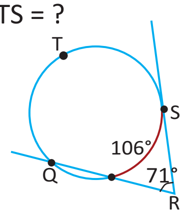
a) $\smile LP = ?$



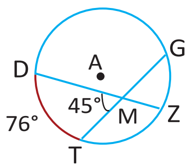
b) $\angle T = ?$



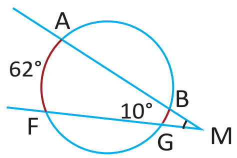
c) $\smile QTS = ?$



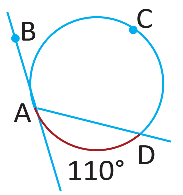
d) $\smile GZ = ?$



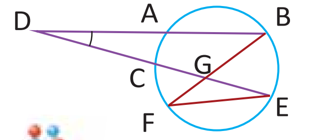
e) $\angle AMF = ?$



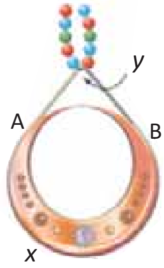
f) $\angle DAB = ?$



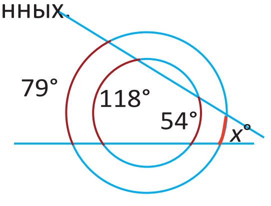
7 **Дано:** $\smile AB = 108^0$, $\smile FE = 118^0$, $\angle EGB = 52^\circ$ $\angle EFB = 30^\circ$
Найдите: a) $\smile AC$ b) $\smile CF$ c) $\angle EDB$



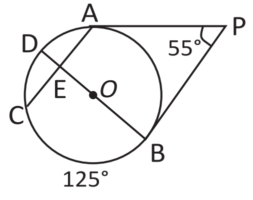
8 Нити, на которые подвешен медальон в форме круга, являются касательными к медальону. Найдите градусную меру угла, образованного нитями медальона, если дуга *x* равна 220°.



9 На рисунке изображены концентрические окружности. Найдите *x*, исходя из данных.

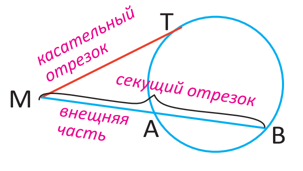


10 **Дано:** PA и PB касательные, BD - диаметр. $\angle APB = 55^0$, $\smile CB = 125^0$
Найдите: a) $\smile AB$ b) $\angle DEC$ c) $\smile AD$ d) $\angle PBD$ e) $\angle PAC$

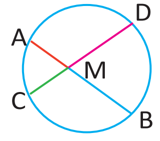


2-6 Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности

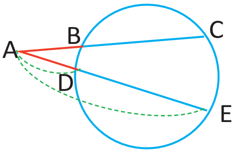
Если из точки вне окружности проведены касательная и секущая, соответствующие отрезки будем называть следующим образом:
MT - касательный отрезок
MB - секущий отрезок
MA - внешняя часть секущего



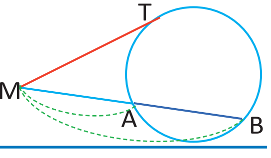
Теорема 1. При пересечении двух хорд, произведение отрезков одной хорды, полученных точкой пересечения, равно произведению отрезков второй хорды. $AM \cdot MB = CM \cdot MD$



Теорема 2. Если из точки вне окружности проведены секущие, то произведение каждого секущего отрезка на ее внешнюю часть постоянно. $AC \cdot AB = AE \cdot AD$



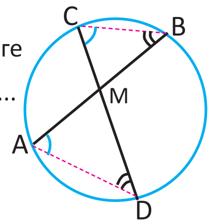
Теорема 3. Если из одной точки к окружности проведены касательная и секущая, то квадрат отрезка касательной равен произведению секущего отрезка на ее внешнюю часть. $MT^2 = MA \cdot MB$



Обучающие задания

1 Завершите доказательство **теоремы 1.**

Утверждение	Обоснование
1. $\angle A \cong \angle C$	1. ___________ к одинаковой дуге
2. $\angle D \cong \angle B$	2. _____________ к одинаковой ...
3. $\Delta AMD \sim \Delta CMB$	3. ....
4. $\dfrac{AM}{CM} = \dfrac{MD}{MB}$	4. ....
5. $AM \cdot MB = CM \cdot MD$	5. ....

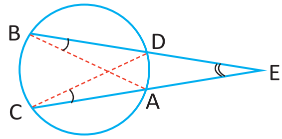


2 Согласно данным рисунка запишите заново **теорему 2** и докажите ее.

Дано: EB и EC секущие.

Докажите: $EB \cdot ED = EC \cdot EA$

План доказательства: Воспользуйтесь подобием ΔABE и ΔDCE.

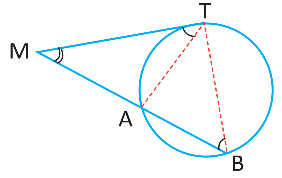


3 Докажите **теорему 3**.

Дано: MT касательная, MB секущая к окружности.

Докажите: $MT^2 = MA \cdot MB$

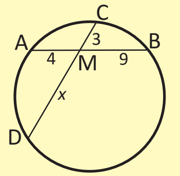
План доказательства: Воспользуйтесь подобием ΔMTA и ΔMBT



4 Рассмотрите примеры. Найдите x, исходя из данных на рисунке.

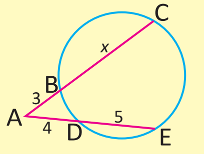
Пример. Хорды окружности AB и CD пересекаются в точке M. Если $AM = 4$, $MB = 9$, $CM = 3$, то найдите MD.

Решение. По теореме 1: $AM \cdot MB = CM \cdot MB$.
Подставим данные: $4 \cdot 9 = 3 \cdot MD$. Отсюда, $MD = 12$.

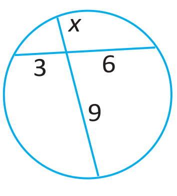


Пример. По данным рисунка найдите длину хорды BC.

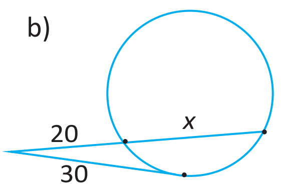
Решение. По теореме 2: $AD \cdot AE = AB \cdot AC$.
Подставив данные, получим:
$4 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot (3 + x)$, $x = 9$



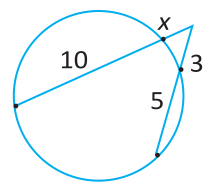
a)



b)

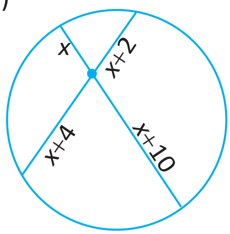


c)

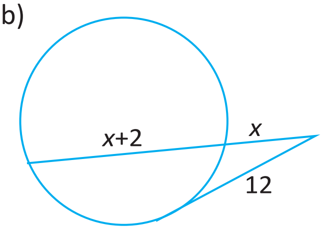


5 Найдите *x*, исходя из данных на рисунке.

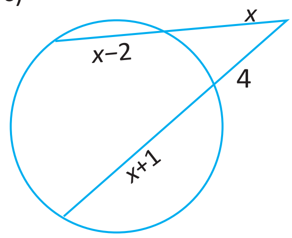
a)



b)

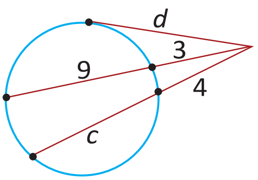


c)

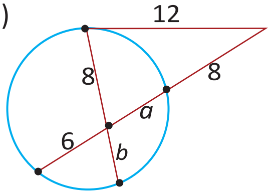


6 На рисунке даны касательная и секущие, найдите значение переменных.

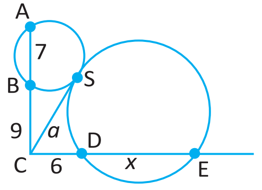
a)



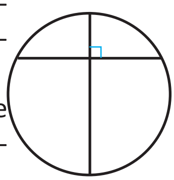
b)

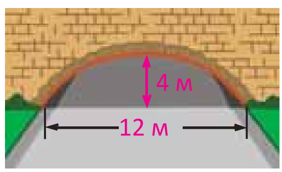


c)

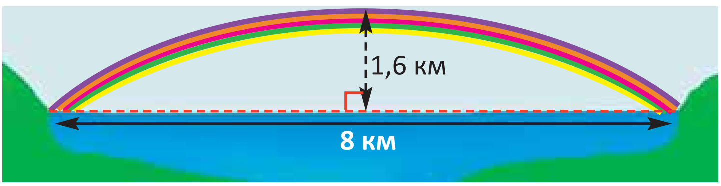


7 По данным на плане туннеля найдите радиус окружности, содержащей дугообразную часть.
Указание: для решения запишите измерения на соответствующем схематическом изображении.





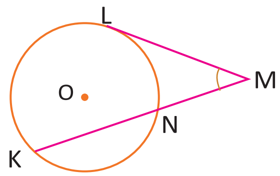
8 На самом деле радуга – это окружность. Мы видим только какую-то ее часть – дугу. По данным рисунка найдите:
a) радиус окружности, содержащий дугу радуги;
b) длину окружности радуги.



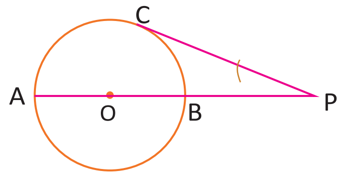
9 **Измерение.** Лейла стоит на расстоянии 4 м от дерева, а Кянан стоит у подножья дерева. Расстояние между Лейлой и Кянаном 5 м. Изобразите эту ситуацию схематически и найдите диаметр дерева.
Указание. На схеме отрезок, соединяющий точки нахождения Лейлы и Кянана, примите за касательную к окружности.

Обобщающие задания

1 **Дано:** ML – касательная к окружности с центром O, MK– секущая.
$\smile LN : \smile NK : \smile KL = 3 : 4 : 5$
Найдите: $\angle LMK$

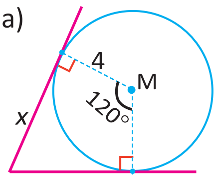


2 **Дано:** PC – касательная к окружности с центром O, PA – секущая, проходящая через центр O.
$\smile AC : \smile CB = 7 : 2$
Найдите: $\angle CPA$

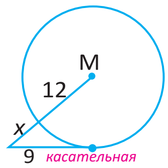


3 Найдите переменную, исходя из данных на рисунке (M– центр окружности).

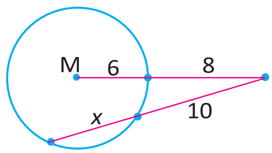
a)



b)

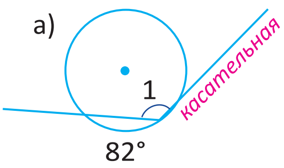


c)

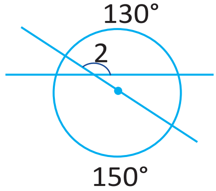


4 Найдите градусную меру углов, отмеченных цифрами.

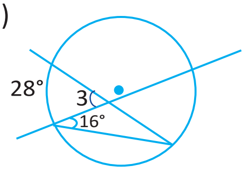
a)



b)

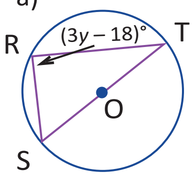


c)

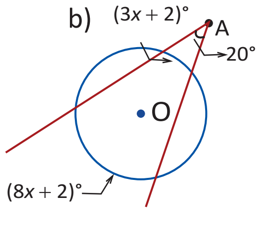


5 Найдите переменную, исходя из данных. O – центр окружности.

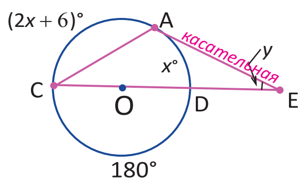
a)



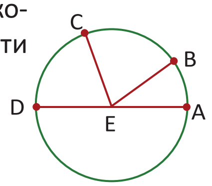
b)



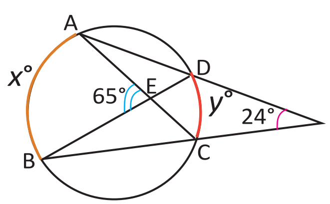
c)



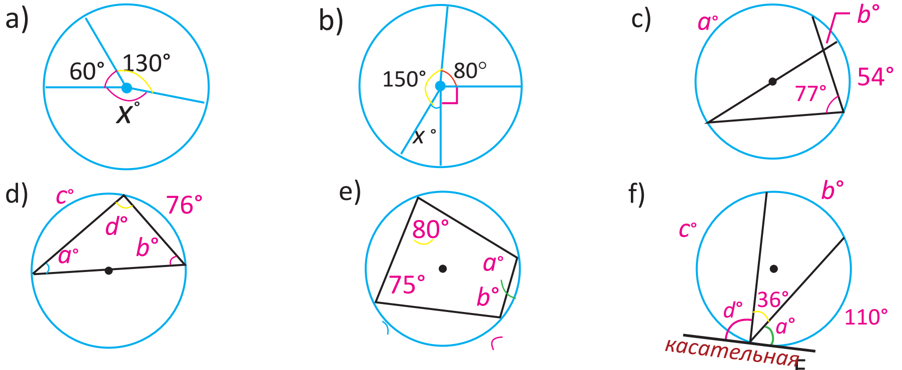
6 На рисунке E – центр окружности, AD - диаметр и AD=12 см. Если $\angle AEB : \angle BEC : \angle CED = 2 : 3 : 4$, найдите длину дуг, на которые опираются эти углы.



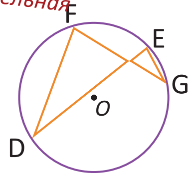
7 Найдите градусную меру дуг AB и CD по данным рисунка.



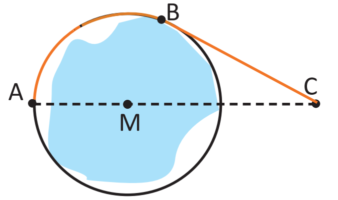
8 Найдите неизвестные, исходя из данных на рисунке. Центр окружности обозначен точкой.



9 В окружности с центром O проведены хорды DF, FG, EG, ED. Если отношение градусных мер дуг таково: ◡DF : ◡FE : ◡EG : ◡GD = 5 : 2 : 1 : 7, то определите конгруэнтные углы и найдите их градусные меры.



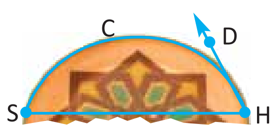
10 Каждый год муниципалитет с целью очистки озера на окраине города проводит благотворительное соревнование по велоспорту. За каждый преодоленный километр спортсмены добровольно платят определенное количество денег. Кянан в этом году также участвует в соревновании. Он заявил организаторам, что за каждый километр расстояния заплатит 5 манат. Гоночная дорога, проведенная вдоль озера, состоит из окружной дороги - дугообразной части дороги (◡AB) с радиусом 3 км (центр соответствующей окружности обозначен на рисунке точкой M), и части прямой дороги, составляющей касательную к окружности (BC). Точки A, M, C находятся на одной прямой и известно, что AC = 9 км.



a) Какова длина (в км) гоночной дороги ? Округлите ответ до десятых.

b) Сколько (приблизительно) манат заплатит Кянан с целью благотворительности?

11 При раскопках археологи обнаруживают части предметов затем, проведя ряд измерений, исследований, восстанавливают их изначальную форму.



a) Если ∠SHD, показанный на посуде, изображенной на рисунке, равен 60°, найдите градусную меру ◡SCH. (HD - касательная к окружности чаши).

b) Допустим, измерив длину дуги SCH, вы определили, что ее длина равна 9,5 см. Как вы определите длину всей окружности посуды?

3 Функции. Графики

В этом разделе вы научитесь

- Строить график квадратичной функции
- Определять формулу квадратичной функции по данному графику
- Решать задачи по применению квадратичной функции
- Строить график функции $y = |x|$
- Строить график функции $y = x^3$

Задача. После удара по мячу зависимость высоты подьема мяча (в метрах) от времени t (в секундах) задана формулой: $h(t) = -5t^2 + 12t$.

a) На какой высоте окажется мяч при $t = 1$ секунде?

b) Через какое время мяч окажется на высоте 2,2 метров?

c) Как найти максимальную высоту, на которую поднялся мяч?

3-1 Квадратичная функция и ее график

При $a \neq 0$ функция вида $y = ax^2 + bx + c$ называется квадратичной функцией.

Примеры. $y = 3x^2 + x$, $y = -2x^2 + 5$, $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 0{,}5x^2$

Квадратичная функция определена на всей числовой оси, т.е. аргумент x может принять любое действительное значение.

Пример. Задана функция $y = x^2 - 2x + 2$.

a) При $x = 2$ найдите значение функции;

b) При каких значениях аргумента значение функции равно 5?

Решение. a) Подставив значение $x = 2$ в формулу функции, получим:

$$y = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2$$

b) Подставив значение $y = 5$, из уравнения $5 = x^2 - 2x + 2$ находим:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Обучающие задания

1 Какая из функций является квадратичной?

a) $y = 2x^2 + x - 3$ b) $y = 2x^2 - 5$ c) $y = 5x + 2$

2 Вычислите значение функции $y = x^2 - 2x + 1$, если:

a) $x = -1$; b) $x = -2$; c) $x = 0$

3 При каких значениях аргумента значение функции $y = x^2 - x - 3$ равно:

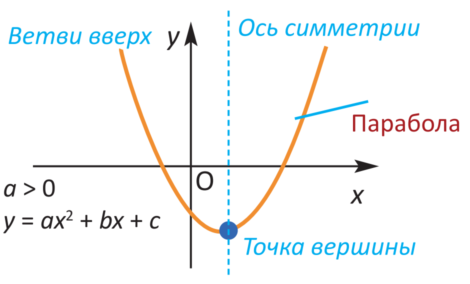
a) -1; b) 3; c) -3 ?

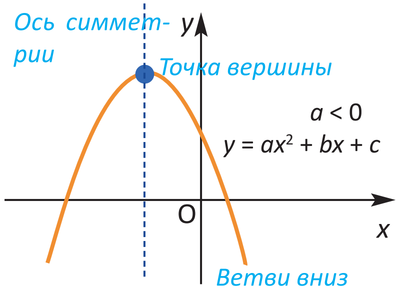
4 Задана функция $f(x) = x^2 - 2x + c$. Если $f(1) = 3$, то найдите $f(-1)$.

График квадратичной функции

Графиком квадратичной функции является парабола.

Парабола имеет ось симметрии. Точка пересечения оси симметрии и параболы называют точкой вершины параболы. В зависимости от знака и значения коэффициентов a, b, c на координатной плоскости парабола может находиться в разных положениях.



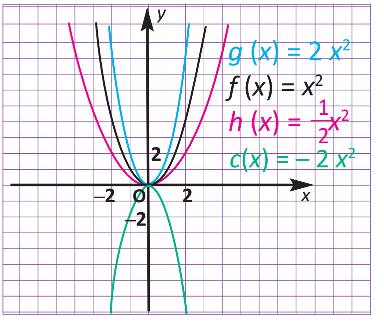


Рассмотрим частные случаи квадратичной функции при изменении коэффициентов (величин и знаков) a, b, c

1.График функции $y = ax^2$ (при $b = 0$, $c = 0$)

Пример 1. Исследуйте таблицу значений для функции $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$. Определите, к какой функции относится каждый график на рисунке.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = 2x^2$	$h(x) = \frac{1}{2}x^2$	$y = -2x^2$
-3	9	18	4,5	-18
-2	4	8	2	-8
-1	1	2	0,5	-2
0	0	0	0	0
1	1	2	0,5	-2
2	4	8	2	-8
3	9	18	4,5	-18



Решение. Как видно из таблицы при увеличении ординаты каждой точки параболы $y = x^2$ в 2 раза, не меняя абсциссу, то получатся точки графика функции $y = 2x^2$. В этом случае парабола “сужается”. Если ординаты точек параболы $y = x^2$ уменьшить в 2 раза, не меняя абсциссу, то получатся точки графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$. В этом случае парабола “расширяется”.

Парабола $y = -2x^2$ получается от параболы $y = 2x^2$ преобразованием симметрии относительно оси абсцисс.

> Графиком функции $y = ax^2$ является парабола с вершиной в начале координат и осью симметрии - ось ординат.
>
> ✓ При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз.
>
> ✓ При $|a| > 1$ парабола растягивается от оси абсцисс вдоль оси ординат, становится «уже» параболы $y = x^2$.
>
> ✓ При $|a| < 1$ парабола сжимается к оси абсцисс вдоль оси ординат, становится «шире» параболы $y = x^2$.

Обучающие задания

5 Постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = x^2$, $y = 3x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ и сравните. Какая из парабол - “шире”, какая - “уже”?

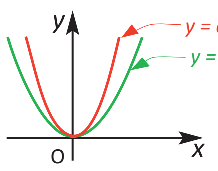
6 С помощью графика функции $y = x^2$ постройте графики нижеследующих функций. Постройте эти графики и с помощью графкалькулятора.

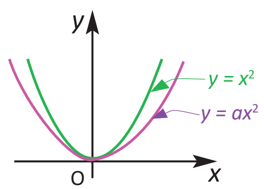
a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = -4x^2$ c) $f(x) = \frac{3}{4}x^2$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

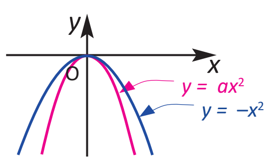
7 Постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x + 1$, отметьте их точки пересечения.

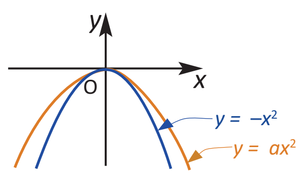
8 Парабола $y = ax^2$ проходит через точку A(–6; 9).
1) Определите коэффициент a;
2) Проходит ли эта парабола через точки: a) B(3; 5); b) C(–2; 1)?

9 По графикам, изображенным на рисунке, найдите интервал изменения значения a.

a)


b)


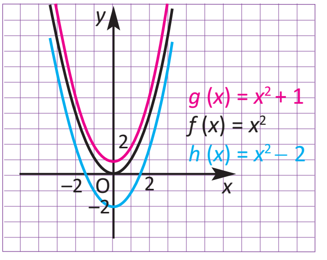
c)


d)


2. График функции $y = x^2 + n$

Пример 2. Функции $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 2$ представлены в виде таблицы и графика. Начертите таблицу и график в тетради. Рассмотрите, как изменится график функции $y = x^2 + n$ в зависимости от значения n.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 1$	$h(x) = x^2 - 2$
–3	9	10	7
–2	4	5	2
–1	1	2	–1
0	0	1	–2
1	1	2	–1
2	4	5	2
3	9	10	7



Решение. Построим параболу $y = x^2$ и сдвинем ее на 1 единицу вверх вдоль оси Oy. Вершиной параболы будет точка (0; 1), а Oy останется осью симметрии. Абсцисса каждой точки останется прежней, а ордината увеличится на одну единицу. Ордината точки с абсциссой x новой параболы будет $x^2 + 1$, то есть $y = x^2 + 1$.

Парабола, соответствующая функции $y = x^2 + 1$, получается сдвигом параболы $y = x^2$ на 1 единицу вверх вдоль оси Oy. Вершина параболы: (0;1).

Сравним параболы, соответствующие функциям $y = x^2$ и $y = x^2 - 2$.

Парабола, соответствующая функции $y = x^2 - 2$, получается сдвигом параболы $y = x^2$ вдоль оси Oy на 2 единицы вниз. Вершина параболы: (0; –2).

Следовательно, расположение параболы по отношению к n меняется по вертикали вдоль оси Oy. Важно правильно отметить точку вершины параболы.

График функции $y = ax^2 + n$ получается сдвигом параболы $y = ax^2$ вдоль оси Oy.

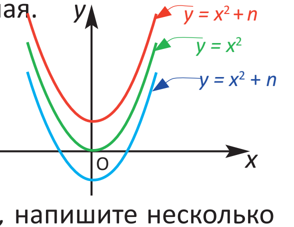
- Парабола сдвигается на $|n|$ единиц: вниз вдоль оси Oy, если $n < 0$,, вверх – если $n > 0$.
- Вершина параболы находится в точке $(0; n)$.
- Прямая $x = 0$ является осью симметрии параболы.

Обучающие задания

10 Изобразите схематически графики заданных функций, сдвигая параболу $y = x^2$.

a) $y = x^2 - 2$ b) $y = x^2 + 3$
c) $y = x^2 + 2$ d) $y = x^2 - 3$
e) $y = x^2 + 0{,}5$ f) $y = x^2 - 1{,}5$

11 По графикам, изображенным на рисунке определите знак n для каждого случая.

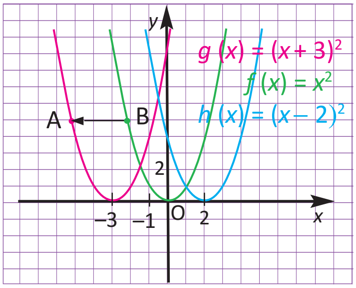


12 Задавая разные значения n в формуле $y = x^2 + n$, напишите несколько примеров и постройте графики. Эти графики постройте также с помощью графкалькулятора.

3. График функции $y = (x - m)^2$

3. **Пример 3.** Функции $y = x^2$, $y = (x + 3)^2$, $y = (x - 2)^2$ представлены в виде таблицы и графика. Начертите таблицу и график в тетради. Исследуйте, как изменится график функции $y = (x - m)^2$ в зависимости от значения m.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = (x + 3)^2$	$h(x) = (x - 2)^2$
– 5	25	4	49
– 4	16	1	36
– 3	9	0	25
– 2	4	1	16
– 1	1	4	9
0	0	9	4
1	1	16	1
2	4	25	0
3	9	36	1
4	16	49	4



Решение. Сдвинем параболу $y = x^2$ на 3 единицы влево. Точкой вершины параболы будет (–3; 0). Точка A $(x_1;y_1)$ на сдвиженной параболе получается сдвигом на три единицы точки B на данной параболе. Поэтому абсцисса точки B будет $x_1 + 3$, а ордината будет такой же, как и ордината точки A. Так как ордината произвольной точки на данной параболе равна квадрату абсциссы, то получим $y_1 = (x_1 + 3)^2$. То есть, для точки $(x_1; y_1)$ на сдвиженной параболе будет $y_1 = (x_1 + 3)^2$.

Если параболу $y = x^2$ сдвинем на 3 единицы влево, то получится парабола $y = (x + 3)^2$.

Если параболу $y = x^2$ сдвинем на 2 единицы вправо, то получится парабола $y = (x - 2)^2$.

График функции $y = a(x - m)^2$ получается сдвигом параболы $y = ax^2$ на $|m|$ единиц вдоль оси абсцисс, то есть m меняет положение параболы вдоль оси Ox (по горизонтали).

- Если $m > 0$, парабола сдвигается вдоль оси Ox вправо, если $m < 0$ - влево;
- m соответствует абсциссе точки вершины параболы. Точкой вершины параболы будет $(m; 0)$;
- Прямая $x = m$ является осью симметрии параболы.

Обучающие задания

13 Пользуясь графиком функции $y = x^2$, постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = (x + 5)^2$ и $y = (x - 5)^2$.

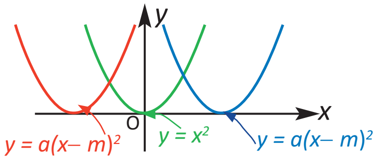
14 Изобразите схематично график функции.

a) $y = (x - 2)^2$ b) $y = (x + 4)^2$

c) $y = (x + 2)^2$ d) $y = (x - 4)^2$

e) $y = (x - 1{,}5)^2$ f) $y = (x + 1{,}5)^2$

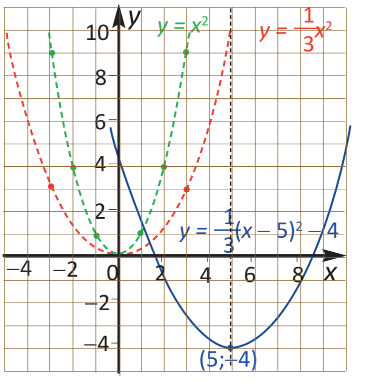
15 Определите знак m, по данным графиков на рисунке.



4. График функции $y = a(x - m)^2 + n$.

Обобщив рассмотренные построения, покажем построение графика функции $y = a(x - m)^2 + n$ по параболе $y = x^2$. Выполним примеры.

4. Пример. Исследуйте построение парболы $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5)^2 - 4$



Решение. 1. Постройте параболу $y = x^2$.

2. Так как $a = \frac{1}{3} > 0$, направление ветвей параболы $y = \frac{1}{3}x^2$ не меняется. Поскольку $a < 1$, парабола «расширяется», потому что при одинаковом значении x значение y будет в 3 раза меньше. Например, точка (3; 9), данная на графике $y = x^2$, для параболы $y = \frac{1}{3}x^2$ будет (3; 3).

3. Отметьте точку (3; –3), симметричную точке (3; 3) относительно оси Oy.

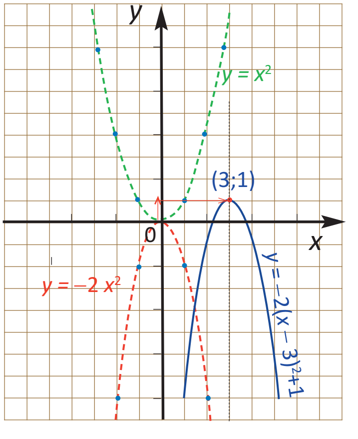
4. Начертите параболу, проходящую через точки (3; 3), (0; 0), (–3; 3). Это график функции $y = \frac{1}{3}x^2$.

5. Так как $m = 5$, $n = -4$, сдвиньте данную параболу на 5 единиц вправо и 4 единицы вниз. Полученная парабола является графиком функции $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5)^2 - 4$.

> Точка с координатами $(m; n)$ - вершина параболы $y = a(x - m)^2 + n$. Осью симметрии этой параболы является прямая $x = m$.

5. Пример. Исследуйте построение графика функции $y = -2(x - 3)^2 + 1$.

Решение.



- Постройте график функции $y = x^2$.
- Так как $a = -2$, ветви параболы $y = -2x^2$ направлены вниз. График этой функции будет «уже» параболы, соответствующей функции $y = x^2$. Так как при соответствующих значениях x значение y по модулю будет в 2 раза больше. Например: (1; 1)→(1; –2); (2; 4)→(2; –8). Отметьте эти точки и постройте график функции $y = -2x^2$, соединив их сплошной кривой.
- Так как $m = 3$ и $n = 1$, то при сдвиге параболы $y = -2x^2$ на 3 единицы вправо и на 1 единицу вверх получится график функции $y = -2(x - 3)^2 + 1$. Вершина параболы будет в точке (3; 1) .
- Прямая $x = 3$ является осью симметрии параболы.

16 Постройте схематически графики нижеследующих функций сдвигом графика $y = x^2$.

a) $y = 2(x + 3)^2 - 1$ b) $y = -3(x + 1)^2 + 3$ c) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$

17 Постройте схематически графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = 2x^2$ и перенесите точку вершины параболы в указанную точку. Запишите формулы функций, соответствующих новым графикам.

a) (0; –1) b) (3; 2) c) (–4; 1) d) (–2; –2)

Представление квадратичной функции в разных формах

Квадратичная функция	Графики
1.Записью по точке вершины (выделением полного квадрата) $y = a(x - m)^2 + n$	Точка вершины параболы: $(m; n)$ Ось симметрии: $x = m$
2. Записью по точкам пересечений с осью абсцисс $y = a(x - p)(x - q)$	График пересекает ось Ox в точках p и q. Ось симметрии: серединный перпендикуляр отрезка с концами в точках $(p; 0)$ и $(q; 0)$. Абсцисса точки вершины: $m = (p + q) : 2$

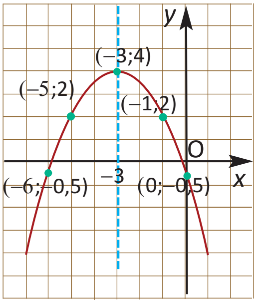
Точка вершины параболы и точки пересечения с осями координат – важные точки параболы.

Шаги построения параболы:
1. Находится точка вершины и отмечается на координатной плоскости;
2. Находятся точки пересечения с осью Оx (если есть) и осью Оy;
3. Определяется ось симметрии;
4. Отмечаются несколько точек на параболе относительно оси симметрии;
5. Строится парабола, проходящая через отмеченные точки.

1. Пример. Построим график функции $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 4$.

Решение. Так как $a < 0$, ветви параболы направлены вниз.

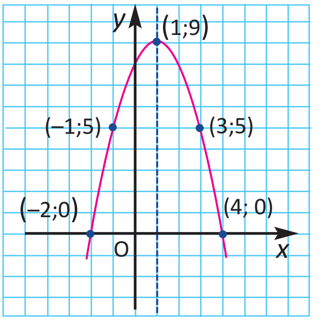
1. Отметим точку вершины параболы: (–3; 4);
2. При $x = 0$ находим $y = -0,5$, то есть, парабола пересекает ось Оy в точке (0; –0,5);
3. Начертим ось симметрии $x = -3$. При $x = -1$ имеем $y = 2$, отметим точку (–1; 2);
4. Отметим точки (–6; – 0,5) ; (– 5; 2), симметричные точкам (0; – 0,5) и (– 1; 2) относительно прямой $x = -3$;
5. Построим параболу, проходящую через отмеченные точки.



2. **Пример.** Построим график функции $y = -(x + 2)(x - 4)$.

Решение.

- $a = -1$, $p = -2$, $q = 4$; $(-2; 0)$ и $(4; 0)$ - точки пересечения с осью Ox.
- Ось симметрии проходит через точку, находящуюся на одинаковом расстоянии от этих точек: $(p + q) : 2 = (4 + (-2)) : 2 = 1$, ось симметрии этой параболы - прямая $x = 1$
- Абсцисса вершины параболы $x = 1$, ордината $y = -(1 + 2)(1 - 4) = 9$. Отметим точку вершины $(1; 9)$ на координатной плоскости.
- Проведем ось симметрии $x = 1$. Отметим две точки, симметричные относительно оси симметрии. Например, при $x = 3$ и $x = -1$ имеем $y = 5$. То есть, отметим точки $(3; 5)$ и $(-1; 5)$
- Построим параболу, проходящую через отмеченные точки.



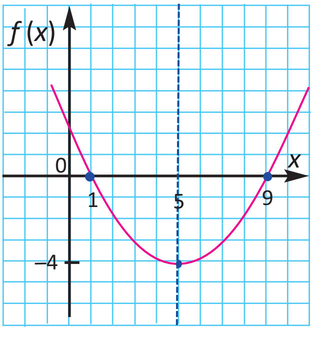
3. **Пример.** Выразите функцию, заданную графически и по координатам вершины ($y = a(x - m)^2 + n$)

Решение.

1. Как видно из рисунка, вершина параболы находится в точке $(5; -4)$, значит, $m = 5$, $n = -4$.
2. Так как ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$. Учитывая значения m и n, функцию можно записать в виде $y = a(x - 5)^2 - 4$.
3. Записав координаты любой точки графика, например, $(1; 0)$ или $(9; 0)$, в формулу функции, можно найти a. Учтем точку $(1; 0)$.

$0 = a(1 - 5)^2 - 4$, $16a = 4$, $a = \frac{1}{4}$

Формулой функции является $y = \frac{1}{4}(x - 5)^2 - 4$.



Обучающие задания

18 Постройте графики данных функций. Отметьте на графике координаты точки вершины и ось симметрии параболы.

1) $y = (x - 3)^2$	2) $y = (x + 4)^2$	3) $y = -(x + 3)^2 + 2$
4) $y = 3(x - 2)^2 - 1$	5) $y = -2(x - 2)^2 + 4$	6) $y = -(x + 1)^2 + 3$
7) $y = 2(x + 1)^2 - 5$	8) $y = -\frac{1}{4}(x + 1)^2$	9) $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$

19 Постройте графики данных функций. Отметьте на графике точку вершины и ось симметрии параболы.

1) $y = (x + 3)(x - 3)$	2) $y = -(x - 1)(x + 3)$	3) $y = 2(x + 2)(x + 4)$
4) $y = 2(x - 5)(x - 1)$	5) $y = -(x - 4)(x - 1)$	6) $y = (x - 3)(x + 7)$

20 **Логическое мышление.** a) Почему при построении параболы $y = x^2 + 3$ парабола $y = x^2$ сдвигается вдоль оси Oy вверх, а при построении параболы $y = (x + 3)^2$ сдвигается влево вдоль оси Ox? Изложите свои доводы письменно.
b) Число точек пересечения графика квадратичной функции с осью Ox не всегда одинаковое. Верно ли это утверждение и для оси Oy? Изложите свои доводы письменно.

21 По какой паре координат, расположенных на графике, можно написать уравнение оси симметрии графика квадратичной функции? Напишите уравнение оси симметрии, если это возможно.

a) (3; 10) и (7; 10) b) (4; 6) и (6; –2) c) (–1; 4) и (5; 4)

22 Точки (2; 3) и (24; 3) находятся на графике квадратичной функции. По координатам этих точек определите уравнение оси симметрии параболы.

23 Запишите квадратичную функцию в виде $y = a(x - m)^2 + n$, графиком которой является парабола:

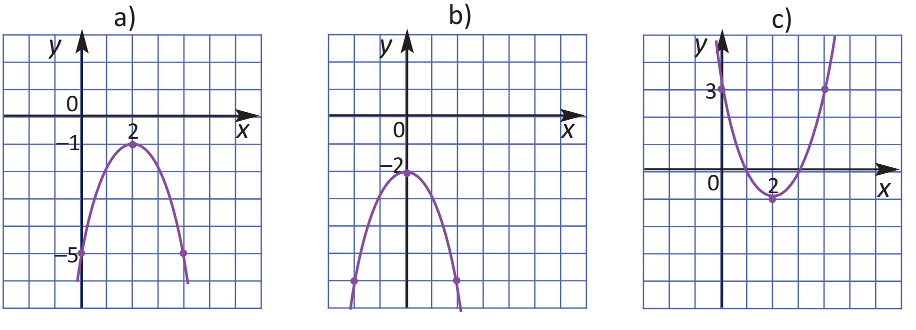
a) с вершиной в точке (0; 0), проходящей через точку (6; 9);

b) с вершиной в точке (0; –3), проходящей через точку (3; 24);

c) с вершиной в точке (2; 5), проходящей через точку (4; –11);

d) с вершиной в точке (–3; 10), проходящей через точку (2; –5).

24 В результате каких преобразований параболы $y = x^2$ получены графики следующих функций? Напишите формулы этих функций.



25 **Вопрос открытого типа.** Напишите формулу какой-либо квадратичной функции, «растянутой» относительно $f(x) = x^2$ и образованной сдвигом в горизонтальном и вертикальном направлениях. Изобразите график схематически.

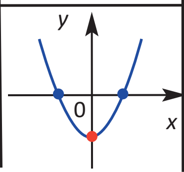
Пересечение параболы $y = a(x - m)^2$ с осью абсцисс.

В точках графика, которые находятся на оси абсцисс, значение функции равно 0. **Значения аргумента, при которых функция равна нулю, называются нулями функции**. Число нулей для функции $y = a(x - m)^2 + n$ можно определить по значениям a и n .

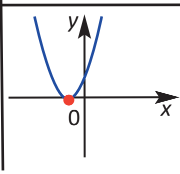
- По значению a можно определить, направлены ли ветви параболы вверх или вниз.
- По значению n можно определить, находится ли точка вершины параболы выше, ниже или на оси абсцисс.

По точке вершины параболы и направлению ее ветвей вниз или вверх определим число точек пересечения графика с осью абсцисс на примерах.

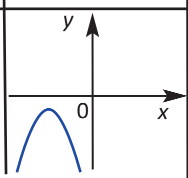
1. Пример. $f(x) = 0{,}8x^2 - 3$

Значение a	Значение n	График	Число точек пересечения с осью абсцисс
$a = 0{,}8 > 0$ Ветви параболы направлены вверх	$n = -3 < 0$ Точка вершины находится ниже оси Ox		График пересекает ось абсцисс в двух точках

2. Пример. $f(x) = 2(x + 1)^2$

Значение a	Значение n	График	Число точек пересечения с осью абсцисс
$a = 2 > 0$ Ветви параболы направлены вверх	$n = 0$ Точка вершины находится на оси Ox		График имеет одну общую точку с осью абсцисс и эта точка, находясь на оси абсцисс, является вершиной параболы.

3. Пример. $f(x) = -3(x + 2)^2 - 1$

Значение a	Значение n	График	Число точек пересечения с осью абсцисс
$a = -3 < 0$ Ветви параболы направлены вниз	$n = -1 < 0$ Точка вершины находится ниже оси Ox		График не пересекается с осью абсцисс и с направленными вниз ветвями, находится полностью ниже оси Ox

Обучающие задания

26 Определите число точек пересечения графиков нижеследующих функций с осью абсцисс.

a) $f(x) = 5x^2 - 7$ b) $f(x) = -2(x + 1)^2$ c) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 5)^2 - 9$

27 Без построения графиков функций

1) $y = 5(x - 15)^2 - 100$ 2) $y = -4x^2 + 14$ 3) $y = (x + 18)^2 - 8$

определите:

a) направление ветвей параболы;
b) вершины параболы;
c) уравнение оси симметрии;
d) число точек пересечения с осью абсцисс;

28 Даны функции:

1) $f(x) = x^2 - 5x - 24$ 2) $g(x) = x^2 - 2x + 1$ 3) $p(x) = 4x^2 - 20x + 24$

a) Запишите данные функции в виде $y = a(x - p)(x - q)$ разложением квадратного трехчлена на множители;
b) Определите точки пересечения с осями Ox и Oy;
c) Постройте графики функций.

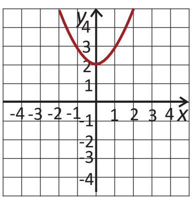
29 Известно, что ордината вершины равна –9 и парабола пересекается с осью абсцисс в точках (10; 0) и (4; 0).

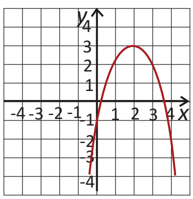
a) Напишите формулу функции;
b) Напишите координаты трех точек параболы, симметричных относительно оси симметрии;
c) Постройте графики функций.

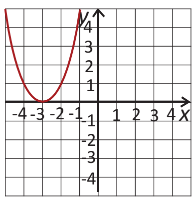
30 Определите, какой функции соответствует каждый график и начертите их в тетради.

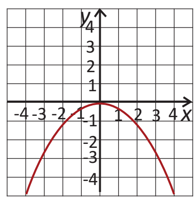
1) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ 2) $g(x) = (x + 3)^2$ 3) $v(x) = (x - 3)^2$ 4) $h(x) = \frac{1}{4}x^2$

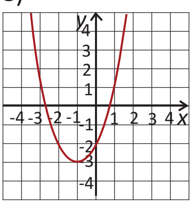
5) $t(x) = x^2 + 2$ 6) $s(x) = x^2 - 4$ 7) $p(x) = (x + 1)^2 - 3$ 8) $u(x) = -(x - 2)^2 + 3$

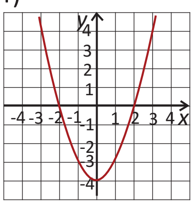
a)


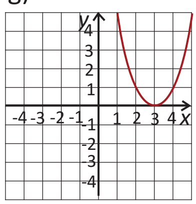
b)


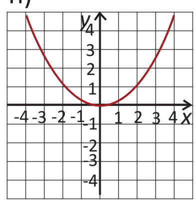
c)


d)


e)


f)


g)


h)


31 Даны точки пересечения параболы с осями координат. Найдите координаты вершины параболы.

a) (3; 0), (–1; 0), (0; –6) b) (–2; 0), (–3; 0), (0; 4) c) (–3; 0), (1; 0), (0; 3)

Построение графика функции $y = ax^2 + bx + c$

Любая квадратичная функция вида $y = ax^2 + bx + c$ может быть представлена в виде $y = a(x - m)^2 + n$ выделением полного квадрата. Действительно,

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}) + c =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Обозначив $m = -\dfrac{b}{2a}$, $n = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, получим $y = a(x - m)^2 + n$.

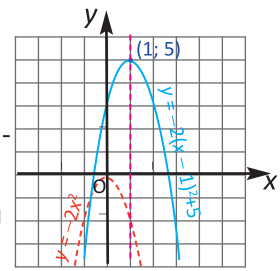
Точкой вершины будет $(m; n)$, где $m = \dfrac{-b}{2a}$, $n = \dfrac{-D}{4a}$, $D = b^2 - 4ac$

Осью симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$ является прямая $x = m$.

1. Пример. Выделением полного квадрата определите координаты точки вершины и уравнение оси симметрии параболы $y = -2x^2 + 4x + 3$

Решение. $y = -2x^2 + 4x + 3 = -2 \cdot (x^2 - 2x) + 3 =$
$= -2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - 1) + 3 = -2 \cdot ((x - 1)^2 - 1) + 3 =$
$= -2 \cdot (x - 1)^2 + 2 + 3 = -2 \cdot (x - 1)^2 + 5$

График этой функции можно получить перемещением на 1 единицу направо и на 5 единиц вверх график функции $y = -2x^2$. Значит, точка вершины параболы является (1; 5), уравнение оси симметрии будет: $x = 1$.



2. Пример. Задана функция $y = 0{,}5x^2 - x - 1{,}5$.

a) Напишите координаты точки вершины параболы.

b) Напишите уравнение оси симметрии.

c) Определите координаты точки пересечения параболы с координатными осями.

d) Постройте параболу.

Решение. a) $a = 0{,}5$; $b = -1$; $c = -1{,}5$;

$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot (-1{,}5) = 4$,

подставив значения в формулы для m и n,

$m = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}5} = 1$; $n = \dfrac{-D}{4a} = \dfrac{-4}{4 \cdot 0{,}5} = -2$. Точка вершины (1; –2)

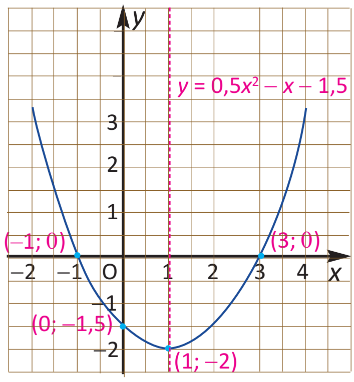
b) Уравнение оси симметрии: $x = 1$

c) при $x = 0$ находим $y = -1,5$, значит, парабола пересекает ось Oy в точке $(0; -1,5)$

при $y = 0$, решая уравнение $0,5x^2 - x - 1,5 = 0$, находим $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Точки пересечения оси абсцисс: $(-1; 0)$ и $(3; 0)$

d) Отметив точку вершины, точки пересечения с координатными осями на координатной плоскости, построим параболу.



Обучающие задания

32 Запишите квадратичные функции в виде $y = a(x - m)^2 + n$.

a) $y = x^2 + 8x + 8$ b) $y = 2x^2 - 16x + 21$ c) $y = -x^2 + 8x - 13$

33 1) Запишите квадратичные функции в виде $y = a(x - m)^2 + n$.
2) Напишите координаты точки вершины параболы.
3) Напишите координаты точек пересечения параболы с осями координат.
4) Напишите уравнение оси симметрии.
5) Постройте параболу.

a) $y = x^2 - 2x - 3$ b) $y = -x^2 - 4x + 5$ c) $y = x^2 + 6x + 5$

34 Постройте графики функций $f(x) = 2(x + 1)^2 + 2$ и $g(x) = 5(x + 1)^2 + 2$. Рассмотрите общие и отличительные признаки этих графиков.

35 **Вопрос открытого типа.** a) Запишите две разные квадратичные функции так, чтобы соответствующие им параболы имели точку вершины $(5; -3)$. Постройте графики этих функций схематично.

b) Запишите две разные квадратичные функции так, чтобы у обеих наибольшее значение было 5, а ось симметрии соответствующих парабол была прямая $x = -3$. Постройте графики этих функций схематично.

36 1) Постройте графики функций.
2) Найдите расстояние между точками пересечения.
3) Запишите уравнение оси симметрии.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 8$
c) $f(x) = x^2 - 4x - 5$ d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

Исследование функции $y = ax^2 + bx + c$

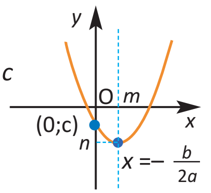
Свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ исследуем на графике.

- При $a > 0$ ветви параболы, являющейся графиком квадратичной функции, направлены вверх, при $a < 0$ - вниз.
- Точка вершины параболы $(m; n)$.
  Здесь $m = \dfrac{-b}{2a}$, $n = \dfrac{-D}{4a}$, $D = b^2 - 4ac$
- Уравнение оси симметрии: $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Парабола пересекается с осью ординат в точке $(0; c)$.
- Число точек пересечения параболы с осью абсцисс зависит от знака дискриминанта ($D = b^2 - 4ac$) уравнения $ax^2 + bx + c = 0$;

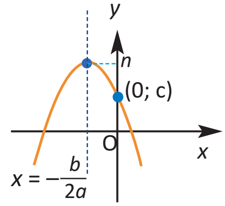
при $D > 0$ парабола пересекает ось абсцисс в двух точках;
при $D = 0$ парабола имеет с осью абсцисс одну общую точку, и эта точка является ее вершиной.
при $D < 0$ парабола не имеет общей точки с осью абсцисс.

- Значение ординаты (т.е. n) точки вершины при $a > 0$ будет **наименьшим значением** (НмЗ) функции, а при $a < 0$ будет **наибольшим значением** (НбЗ) функции. Эти значения также называются максимальными и минимальными значениями функции.

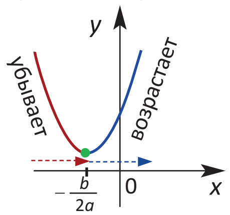
$a > 0$
$y = ax^2 + bx + c$



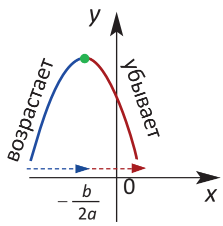
$a < 0$
$y = ax^2 + bx + c$



Областью определения квадратичной функции является множество всех действительных чисел. Значения, принимаемые функцией (y), образуют множество значений функции.
Множеством значений функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a < 0$ является $(-\infty; n]$, а при $a > 0$ множество $[n; +\infty)$, здесь n ордината вершины параболы.
Функция называется возрастающей (убывающей) в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.



При $a > 0$ функция $y = ax^2 + bx + c$ убывает в промежутке $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ а в промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$ возрастает.



При $a < 0$ функция $y = ax^2 + bx + c$ возрастает в промежутке $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$, а в промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$ убывает.

Обучающие задания

37 Для функции $y = -2x^2 + 4x + 6$ определите:

- направление ветвей соответствующей параболы;
- точки пересечения с осями координат;
- уравнение оси симметрии;
- точку вершины;
- наибольшее и наименьшее значения (если есть);
- область определения и множество значений;
- промежутки возрастания и убывания.

38 Выделите полный квадрат и выполните условия 5-го задания.

a) $g(x) = x^2 - 8x + 12$ d) $h(x) = x^2 + 4x - 5$ g) $n(x) = 2x^2 + 12x + 13$

b) $f(x) = 4x^2 + 16x + 19$ e) $p(x) = -3x^2 + 6x - 5$ h) $F(x) = 5x^2 + 10x + 5$

c) $k(x) = x^2 + 7x + 10$ f) $m(x) = x^2 - x - 6$ i) $Q(x) = -3x^2 + 12x$

39 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции, покажите множество значений.

a) $f(x) = 3(x-5)^2 + 8$ b) $g(x) = -2(x-1)^2 + 4$ c) $t(x) = -3(x+7)^2$

d) $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$ e) $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$ f) $f(x) = -5x^2 + \frac{1}{2}$

40 Координаты точки вершины $(m; n)$ параболы, являющейся графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, можно найти по формулам:

$$m = \frac{-b}{2a}, \quad n = am^2 + bm + c.$$

Можно ли определить функцию по координатам точки вершины? Если нет, то какие еще данные нужны, чтобы записать требуемую функцию? Ответы представьте в письменном виде на примерах.

41 Найдите координаты точек вершин парабол, соответствующих нижеследующим функциям.

a) $y = x^2 + 4x + 3$ b) $y = 2x^2 + 16x + 7\ 2$ c) $y = 5x^2 + 50x + 7$

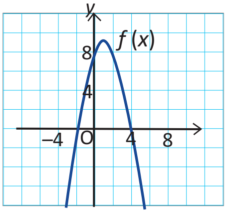
d) $y = 7x^2 - 14x + 21$ e) $y = 3x^2 - 18x + 12$ f) $y = -6x^2 + 24x + 24$

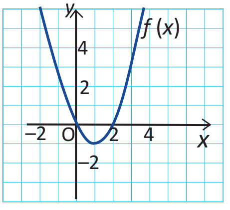
42 Запишите квадратичную функцию в виде $y = a(x-m)^2 + n$, затем в общем виде, если наибольшее значение функции равно 20 и точками пересечения соответствующей параболы с осью абсцисс являются точки $(-15; 0)$ и $(25; 0)$.

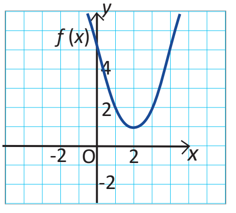
43 По графикам квадратичных функций определите:

- уравнение оси симметрии;
- максимальное и минимальное значения;
- точку вершины параболы;
- точки пересечения с осями *x* и *y*;
- области определения и области значений функции;
- промежутки возрастания и убывания.

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ b) $f(x) = x^2 - 2x$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$







44 **Исследование.** 1) На одной координатной плоскости постройте параболы $y = x^2 - 4x + c$, при $c = 0; 1; 2; -1; -2$. Как меняются вершины и точки пересечения параболы с осью Oy в зависимости от значения c?
2) На одной координатной плоскости постройте параболы функции $y = x^2 + bx + 4$ при $b = 0; 2; 4; -2; -4$. Исследуйте, как меняется график функции в зависимости от значения *b*.

45 Какое из нижеследующих утверждений верно, а какое неверно?

1) Если график функции $y = x^2$ сдвинем на 2 единицы вправо и 1 единицу вниз, то получим график функции $y = x^2 - 4x + 3$.

2) График функции $y = x^2 - x + 3$ пересекает ось Oy ниже оси абсцисс.

3) Максимум функции $y = 14 - x^2 - 2x$ равен 15.

46 При каких значениях *b* и *c* парабола $y = x^2 + bx + c$:
a) пересекает ось абсцисс в точках $(-1; 0)$ и $(3; 0)$;
b) пересекает ось абсцисс в точке $(1; 0)$, а ось ординат в точке $(0; 3)$;
c) касается оси абсцисс в точке $(2; 0)$?

47 Мяч брошен вверх с начальной скоростью v_0 (м/сек). Высоту *h* (м), на которую поднимется мяч через *t* секунд, можно определить формулой $h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$.

a) Обоснуйте то, что мяч достигнет максимальной высоты в $t = \frac{v_0}{g}$ секунду.

b) Покажите, что максимальная высота, на которую мяч поднимется будет $\frac{v_0^2}{2g}$ (метр).

48 **Вопрос открытого типа.** Запишите такую квадратичную функцию, чтобы множеством ее значений было множество всех тех действительных чисел, которые не меньше данного числа.

3-2 Решение задач применением квадратичной функции

1. Пример 1. Каковы должны быть измерения прямоугольника с периметром 200 м, чтобы площадь его была наибольшей?

Решение. 1. Допустим, что длина прямоугольника с периметром 200 м равна x. Запишем выражение, определяющее зависимость между шириной и длиной прямоугольника: $b = (200 - 2x) : 2 = 100 - x$

2. Напишем функцию, определяющую зависимость площади прямоугольника от его длины: $S(x) = x(100 - x)$ или $S(x) = -x^2 + 100x$

3. Выделением полного квадрата функцию $S(x)$ запишем в виде:

$$S(x) = -x^2 + 100x - 2500 + 2500 = -(x - 50)^2 + 2500$$

4.Так как $a = -1 < 0$, то функция $S(x)$ принимает максимальное значение при $x = 50$, и это значение равно 2500. Отсюда видно, что наибольшая площадь прямоугольника с периметром 200 м будет равна 2500 $м^2$, если его длина будет равна 50 м, ширина также равна 50 м (т.е. он должен иметь форму квадрата).

Обучающие задания

1 **Площадь.** Эльдар чертит разные прямоугольники. Сумма длины и ширины этих прямоугольников всегда равна 12 см.
a) Составьте таблицу с различными значениями ширины и длины;
b) Приняв за x ширину прямоугольника, запишите выражение, показывающее его площадь;
c) Запишите в виде функции зависимость площади прямоугольника от его ширины;
d) При скольких сантиметрах ширины площадь прямоугольника имеет максимальное значение?

2 Найдите наибольшее значение площади прямоугольного треугольника при сумме длин катетов 14 см.

3 Для проведения соревнований по волейболу в море туристы должны установить игровую площадку прямоугольной формы с учетом того, что одна сторона будет прилегать к берегу. Очертив 3 стороны прямоугольной площадки веревкой длиной 60 м и поставив на ней специальные маркеры, они хотят охватить наибольшую территорию. Каковы должны быть размеры игровой площадки?

4 a) Представьте число 12 в виде суммы таких двух слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
b) Найдите число, сумма которого с его квадратом наименьшая.

2. **Пример 3.** Если цена одной спортивной рубашки 8 манат, то магазин продаст 10 рубашек в день. Владелец магазина считает, что снижение цены одной рубашки каждый раз на 2 маната может привести к ежедневному увеличению продажи рубашек на 5 штук. Какова должна быть цена рубашки, чтобы поступление от продажи было максимальным?

Решение. 1. Примем число снижений цен на 2 маната за x. Тогда цена одной рубашки будет $(8 - 2x)$.

2. Количество рубашек, проданных ежедневно, будет $(10 + 5x)$.

3. **Прибыль от продажи = цена одной рубашки × количество рубашек.**

$$S(x) = (8 - 2x)(10 + 5x) = 80 + 40x - 20x - 10x^2 = -10x^2 + 20x + 80$$

Функция $S(x) = -10x^2 + 20x + 80$ выражает поступление от продажи.

Выделив полный квадрат функцию запишем в виде $S(x) = -10(x-1)^2+90$.

При $x = 1$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение равное 90.

Значит, если одна спортивная рубашка продается за $8 - 1 \cdot 2 = 6$ манат, то ежедневное поступление от продажи будет максимальным и составит 90 манат (если расчеты владельца магазина верны).

Обучающие задания

5 Зависимость между количеством билетов (N), проданных на концерт и днями (n) продаж определяется как $N(n) = -10n^2 + 60n + 200$. В какой день продано наибольшее количество билетов? Найдите число билетов, проданных в этот день.

6 **Бизнес. Максимальный доход.** Транспортная компания, занимающаяся перевозкой пассажиров, предоставляет услуги 200 пассажирам в день. Цена одного билета 5 манатов. Владелец компании считает, что каждые 50 копеек повышения платы приводят к уменьшению числа пассажиров на 10 человек. a) Сколько раз, повысив цены, компания может получить максимальный доход от продажи билетов? b) Сколько манатов может составить максимальный доход при таком повышении цен?

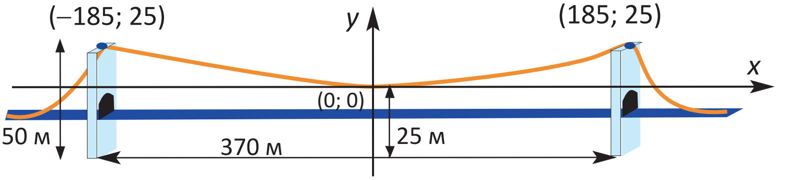
7 Группа студентов открыла компанию по производству компьютерных деталей. Доход (в манатах), полученный от производства, можно выразить функцией $P(x) = -2x^2 + 100x - 800$. Здесь x показывает число деталей, произведенных за неделю.

a) Найдите координаты точек пересечения графика данной функции с осью Ox и с осью Oy. Какую реальную информацию отражают эти координаты?

b) найдите координаты точки вершины параболы соответствующей функции $P(x)$. Какую реальную информацию отражают эти координаты?

8 **Исследование.** Дома или в классе посмотрите по данным ссылкам фильмы, касающиеся конструкции мостов:
http://questgarden.com/127/37/4/110617141445/process.htm и
http://passyworldofmathematics.com/sydney-harbour-bridge-mathematics

3. **Пример.** Трос (провод), поддерживающий вес моста, прикреплен к двум столбам, расстояние между которыми 370 м. Самая нижняя точка провода, являющегося по форме параболой, находится на расстоянии 25 м от земли. Высота каждого столба 50 м. На какой высоте от земли находится точка на проводе крепления, расположенная на расстоянии 60 м по горизонтали, от одного из столбов.



Решение: a) Нарисуйте схематично соответствующую параболу. Отметьте на ней данные из задачи. Расположите начало координат (0;0) в точке вершины параболы, в самой низкой точке. Данные, соответствующие расстоянию от начала координат до столбов и высоте столбов: (–185; 25), (185; 25).

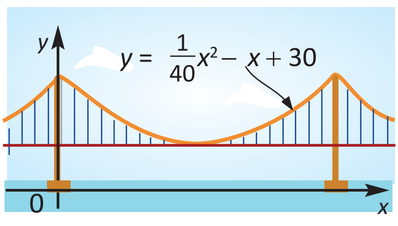
b) Форму провода крепления можно выразить формулой $f(x) = ax^2$. По точке (185; 25) найдите a. $25 = a \cdot 185^2$, $a = \frac{25}{185^2}$, $f(x) = \frac{1}{1369}x^2$

c) Точка, находящаяся на расстоянии 60 м от одного из столбов, будет находиться на расстоянии 185 – 60 =125(м) от точки вершины параболы.

Так как $f(125) = \frac{1}{1369} \cdot 125^2 = \frac{15625}{1369} \approx 11{,}4$ м, то указанная точка находится на расстоянии приблизительно 36,4 м от земли.

Обучающие задания

9 Трос, поддерживающий вес моста между двумя опорами, имеет форму параболы, на которой находятся точки крепления, зависимость между расстоянием (в метрах) от левой опоры и высотой над поверхностью воды определяется в виде функции: $y = \frac{1}{40}x^2 - x + 30$. Самая низкая точка троса находится на мосту. На какой высоте от поверхности воды находится мост?



10 1) Высоту мяча через t секунд после броска вверх можно найти по формуле $h = -5t^2 + 20t + 1$.

a) Через сколько секунд мяч достигнет высоты 16м?

b) На какую максимальную высоту поднимется мяч?

c) Сколько секунд мяч пробудет в воздухе?

2) Выполните упражнение - исследование, данное на стр 51.

Исследование. Принимая за ось абсцисс в основании лагерной палатки на поверхности земли, форму входа можно смоделировать в виде функции $y=-2,5|x-0,6|+1,5$, где x и y измеряются в метрах
a) Постройте график этой функции.
b) Представьте значения функции (y) и аргумента (x) согласно реальной ситуации.

3-3 Функция $y = |x|$ и ее график

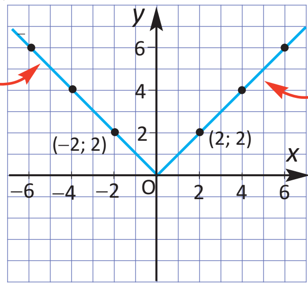
По определегнию абсолютной величины: $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

Отсюда ясно, что функция $y = |x|$ определена на всей числовой оси, и функция принимает неотрицательные значения.

Построим график функции $y = |x|$.

x	$y = \|x\|$
-6	$\|-6\| = 6$
-4	$\|-4\| = 4$
-2	$\|-2\| = 2$
0	0
2	$\|2\| = 2$
4	$\|4\| = 4$
6	$\|6\| = 6$

При $x \leq 0$ график функции $y=|x|$ находится на прямой $y = -x$

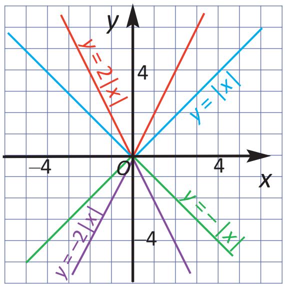


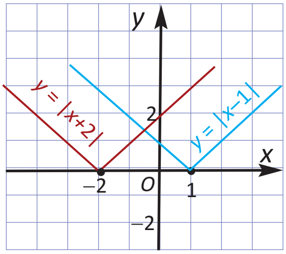
При $x \geq 0$ график функции $y=|x|$ находится на прямой $y = x$.

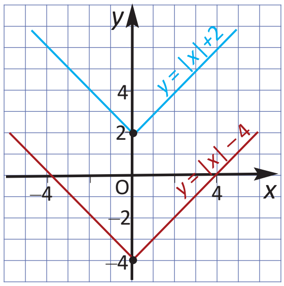
График функции $y = |x|$ представляет собой биссектрисы I и II четверти. Точка (0;0) является вершиной графика. Функция $y = |x|$ симметрична относительно оси Oy, так как каждая точка $(-x; y)$ симметрична каждой точке $(x; y)$ графика относительно оси Oy. Например, точки (2; 2) и (–2; 2) на графике находятся симметрично относительно оси ординат.

1. Пример. a) Исследуйте графики функций $y = |x|$, $y = 2|x|$ и $y = -|x|$, $y = -2|x|$, построенных на одной координатной плоскости.
b) Исследуйте графики функций $y = |x+2|$, $y = |x-1|$, $y = |x| + 2$ и $y = |x| - 4$.

Решение. a) При увеличении ординаты каждой точки на графике $y = |x|$ 2 раза, не меняя абсциссу, то получатся точки графика функции $y = 2|x|$. Графики функций $y = y = -|x|$ и $y = -2|x|$ получаются от графиков $y = |x|$, $y = 2|x|$ преобразованиями симметрии относительно оси абсцисс.
b) Если переместить график функции $y = |x|$ на 2 единицы влево можно получить график функции $y = |x + 2|$, а если переместить его на 1 единицу вправо, то получится график функции $y = |x - 1|$. График функции $y = |x| + 2$ можно получить перемещением графика функции $y = |x|$ на 2 единицы вверх, а график функции $y = |x| - 4$ перемещением на 4 единицы вниз.





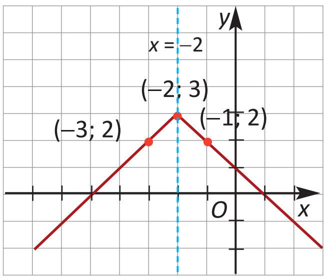


Исходя из этих графиков, можно подвести нижеследующие обобщения.

- График функции $y = a|x - m| + n$ получается сдвигом графика $y = a|x|$ на $|m|$ единиц горизонтально (при $m > 0$ направо, при $m < 0$ налево) и $|n|$ единиц вертикально (при $n > 0$ вверх, при $n < 0$ вниз).
- $(m; n)$ - точка вершины графика, симметричного относительно прямой $x = m$.
- При $a > 0$ лучи, образующие график, направлены вверх, а при $a < 0$ направлены вниз.

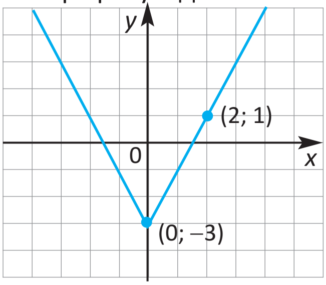
1. **Пример.** Постройте график функции $y = -|x + 2| + 3$.

Решение:



1. Отметьте точку вершины графика $(-2; 3)$ на координатной плоскости.
2. Отметьте какую-либо другую точку, например, $(-3; 2)$, соответствующую функции.
3. Отметьте точку $(-1; 2)$, симметричную точке $(-3; 2)$ относительно оси симметрии $x = -2$
4. Учитывая, что лучи направлены вниз, при $a = -1 < 0$, постройте график по трем отмеченным точкам.

2. **Пример.** Напишите соответствующую функцию по графику и данным точкам. **Решение:**



1. Вершина графика находится в точке $(0; -3)$.
2. В уравнении $y = a|x - m| + n$ вместо m и n напишем соответственно значение 0 и -3:

$y = a|x - 0| + (-3)$; $y = a|x| - 3$

Запишем координаты точки $(2; 1)$ в формуле:

$y = a|x| - 3$: $1 = a|2| - 3$;

$1 = 2a - 3$; $4 = 2a$; $a = 2$

Функция, соответствующая графику будет: $y = 2|x| - 3$.

Проверка: Постройте график функции $y = 2|x| - 3$. Обратите внимание на то, что ветви графика направленные вверх, более сжаты к оси ординат, чем у графика $y = |x|$.

Обучающие задания

1 Сдвигая график функции $y = |x|$, постройте графики $y = |x + 2|$, $y = |x - 2|$, и постройте графики функций $y = |x| + 2$, $y = |x| - 2$. Изложите обобщенные выводы.

2 1) Определите, как направлены ветви графика: вверх или вниз, графики данных функций «сжаты», «растянуты» или имеют одинаковую «ширину» относительно графика функции $y=|x.|$

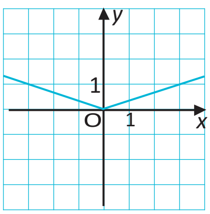
2) Постройте графики функций.

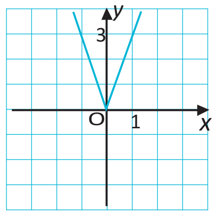
a) $y = \frac{1}{2}|x|$ c) $y = |x + 5|$ e) $y = |x| - 6$

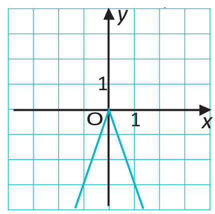
b) $y = |x| + 4$ d) $y = 2|x + 3| - 5$ f) $y = -|x - 3| + 5$

3 Какой функции соответствует каждый график?

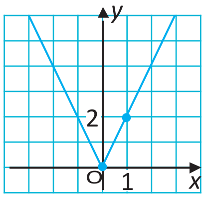
1) $f(x) = 3|x|$ 2) $f(x) = -3|x|$ 3) $f(x) = \frac{1}{3}|x|$

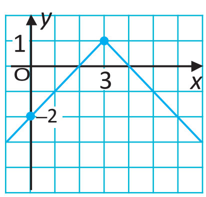
a) 

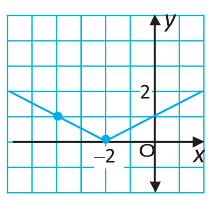
b) 

c) 

4 Запишите функции, соответствующие графикам.

a) 

b) 

c) 

5 Доход (в тыс манат), полученный магазином спортивных товаров с продажи плавательных костюмов и оборудования, определяется функцией $M(t) = -0,9|t - 6| + 5$. Здесь t показывает время (в месяцах).

a) Постройте график этой функции при значениях $0 \le t \le 12$.

b) В каком месяце доход от продажи был максимальным? Найдите приход в том же месяце.

6 Во многих графкалькуляторах знак модуля обозначается как ***abs***. Постройте графики функций с помощью графкалькулятора.

$y = -|x - 2| + 5$; $y = -3,2|x| + 7$ $y = |0,5x - 3| + 2$

$y = 1,75|x + 1,5| - 3,5$; $y = 1,5|x - 3| + 6$ $y = 1,2|2x - 3|$

7 Выполните задания по заданным функциям:

1) Определите точки пересечения графика с координатными осями (если есть).
2) Постройте графики на одной координатной плоскости.
3) Определите область определения и множество значений функций.

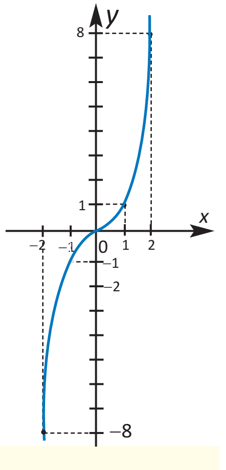
a) $y = |3x|$ и $y = 3|x|$ b) $y = |-4x|$ и $y = 4|x|$
c) $y = |x - 6|$ и $y = |x| - 6$ d) $y = |x + 2|$ и $y = |x| + 2$

8 a) Постройте графики функций $f(x) = |3x - 2|$ и $g(x) = |-3x + 2|$. Напишите свои мысли об этих двух графиках.
b) Напишите функцию в виде $g(x) = |ax + b|$, так чтобы ее график совпал с графиком функции $f(x) = |2x + 1|$.

9 Выполните задачу исследования на странице 70 по следующим шагам.
1) Отметьте точку вершины на координатной плоскости.
2) Решая уравнение $-2{,}5|x - 0{,}6| + 1{,}5 = 0$, найдите точки пересечения графика с осью абсцисс и отметьте их на координатной плоскости.
3) Через отмеченные точки проведите график функции.
Поскольку $a = -2{,}5 < 0$, значит ветви графика будут направлены вниз.
4) По графику определите размеры входа.

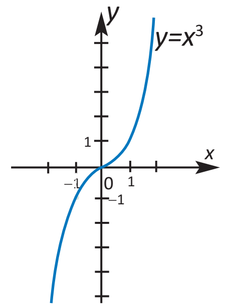
Практическое занятие. 1) Вычислите 12^3, используя равенства $3^3 = 27$, $4^3 = 64$. Аналогичным способом найдите 18^3.
2) Как изменится куб числа, если число увеличить или уменьшить в 10 раз? Основываясь на полученном результате, найдите $0{,}5^3$, 50^3.
3) Дополните таблицу в тетради.

x	-2		$-0{,}5$	0	$0{,}5$		
$y = x^3$		-1	$-0{,}125$	0		1	8



4) Отметьте на координатной плоскости точки, абсциссы которых равны значениям x, а ординаты равны соответствующим значениям y в таблице. Соедините эти точки сплошной кривой, как показано на рисунке.
5) Задайте несколько значений x, например, 1,5; −1,5 и т.д. Найдите соответствующие значения y и уточните расположение точек с соответствующими координатами на этой кривой.

3-4 Функция $y = x^3$ и ее график



Функция $y = x^3$ определена при всех значениях x. Функция принимает отрицательное значение при отрицательном значении x (куб отрицательного числа - отрицательное число), положительное значение при положительном значении x (куб положительного числа - положительное число). При $x=0$, $y=0$. То есть, областью определения и множеством значений функции $y = x^3$ являются все действительные числа.

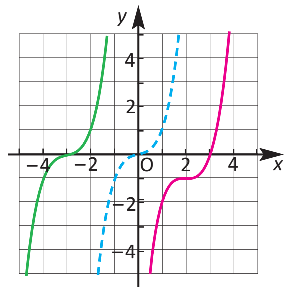
Графиком функции $y = x^3$ называется кубическая парабола.
График функции проходит через начало координат и расположен в I и III четвертях. Если значение x заменить его противоположным значением $-x$, тогда функция будет принимать противоположное значение:
т.к. $y = x^3$, то $(-x)^3 = -x^3 = -y$. Значит, каждой точке $(x; y)$ графика функции соответствует точка $(-x; -y)$, симметричная относительно начала координат на данном графике. Таким образом, график функции $y = x^3$ симметричен относительно начала координат.

Обучающие задания

1 a) Какие из точек $A(-2; 8)$, $B(2; 8)$, $C(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{8})$, $D(-3; -27)$ расположены на графике функции, являющейся кубической параболой?
b) Сколько точек находится на кубической параболе с ординатами $8; -1$?
c)При каком значении m кубическая парабола проходит через точку $N(m; -8)$?

2 a) При каком значении аргумента значение функции $y = x^3$ равно 6?
b) Постройте график функции $y = x^3$. Найдите приблизительное значение абсциссы точки, ордината которой равна 6.
c) Сравните полученные результаты предыдущих пунктов.

3 Постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = x^3$ и $y = 2 - x$, отметьте их точки пересечения.



4 На рисунке изображены графики функций $y = x^3$, $y = (x + 3)^3$, $y = (x - 2)^3 - 1$
Определите, какой график соответствует какой функции.

5 Точка $N(-1; 1)$ находится на графике функции $y = x^3 + n$. Какие из точек $A(1; 3)$, $B(0; 0)$, $C(-2; -8)$, $D(-2; -6)$ тоже находятся на графике этой функции?

6 Найдите объем куба, длина ребра которого 4 см.
a) Чему равен объем куба, если длину ребра увеличить в 2 раза?
b) На сколько изменится объем куба, если длину ребра увеличить на 1 см?

Обобщающие задания

1 График какой функции получается при сдвиге параболы $y = x^2$ на 3 единицы влево и 2 единицы вниз?

2 a) При каких значениях b и c парабола $y = x^2 + bx + c$ проходит через точки A (–1; 6) и B (0; 2)?

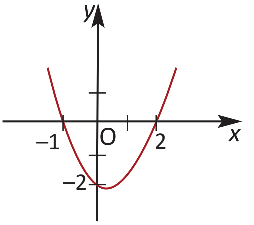
b) В каких точках график функции $y = x^2 - 2x - 15$ пересекает координатные оси?

3 a) При каком значении k наименьшее значение функции $y = x^2 + 6x + k$ равно 1?

b) Покажите множество значений функции $y = x^2 - 2x + 3$.

4 Найдите b и постройте график, если ордината точки вершины параболы $y = x^2 + bx + 3$ равна –1. Сколько существует возможных случаев?

5 Запишите квадратичную функцию, соответствующую параболе, данной на рисунке.



6 Определите соответствие.

1. $y = (x-2)^2 + 3$
2. $y = (x+2)^2 + 1$
3. $y = -(x-3)^2 + 3$

A) наименьшее значение равно 3;
B) наибольшее значение равно 3;
C) наименьшее значение принимает при $x=-2$;
D) убывает в интервале $[3; +\infty)$.

7 Зависимость высоты h (м) от времени t (сек) мяча, брошенного вверх от земли со скоростью v_0 = 20 м/сек, задается формулой $h(t) = -5t^2 + 20t$.

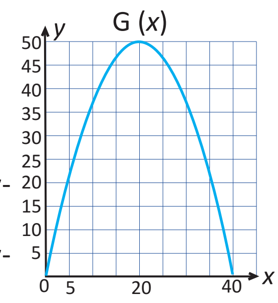
a) Через какое время мяч окажется на высоте 15м?

b) Найдите наибольшую высоту подъема мяча.

c) Через сколько секунд после броска мяч окажется на наибольшей высоте?

8 **Бизнес. Максимальный доход.** Исследования выявили, что доход издательства меняется в соответствии с функцией:

$G(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 5x.$



Здесь x показывает количество проданных книг (в тысячах), $G(x)$-соответствующую прибыль (в тысячах манат).

a) От продажи скольких книг издательство получило 32 тысячи манат прибыли?

b) От продажи скольких книг издательство получило максимальную прибыль?

c) Как вы объясните два ответа, полученные в пункте **a**?

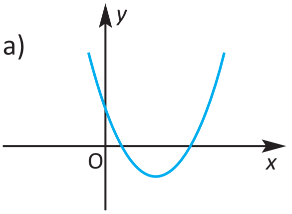
9 Фермер намеревается охватить наибольшую возможную площадь в форме прямоугольника, одна из сторон которого граничит с берегом реки, использовав материал для забора длиной 100 м для оставшихся трех сторон. Как он может определить размеры прямоугольника?

10 a) T(6; –12) - точка вершины параболы $y = x^2 + bx + c$. Найдите b и c.

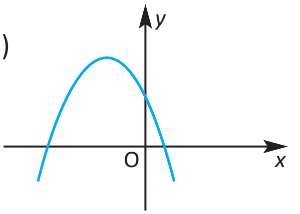
b) Функция $y = -x^2 + mx + n$ при $x = 1$ получает наибольшее значение, которое равно 4. Найдите m и n.

11 По заданным графикам функции $y = ax^2 + bx + c$ определите знаки коэффициентов a, b, c.

a)



b)



12 Вид палатки спереди можно выразить функцией $y = -\frac{3}{4}|x-2| + 1{,}5$. Здесь x и y показывают измерения в метрах. За ось Ox примите основание палатки на поверхности земли. Найдите размеры палатки спереди.

13 Найдите значение a и b, если график функции $f(x) = |ax + b|$ пересекает ось абсцисс в точке $(\frac{3}{2}; 0)$, а ось ординат – в точке (0; 6).

14 Продажа нового альбома музыкальной группы сначала повышалась в устойчивом темпе, затем с той же скоростью снизилась. Если число проданных альбомов обозначим через n (в сотнях), то изменение n можно написать как: $n = -2|t - 20| + 40$. Здесь t показывает время (в неделях)

a) Постройте график функции при значениях $0 \le t \le 40$

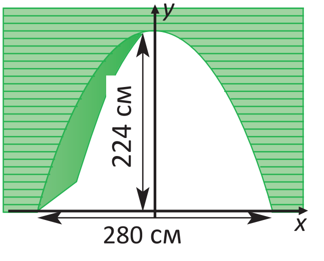
b) На какой неделе было продано наибольшее число альбомов? Сколько альбомов продано на этой неделе?

15 Постройте графики функций $y = x^3$ и $y = |x + 1| - 1$ на одной координатной плоскости. Определите число точек пересечения.

16 1) Выбрав координатную систему как показано на рисунке, запишите квадратичную функцию по данным измерениям арки.

2) Найдите высоту арки в точках, находящихся на расстоянии:

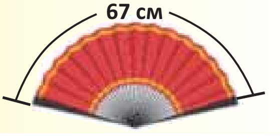
a) 70 см; b) 1 м 20 см от края арки.



4 Уравнение окружности

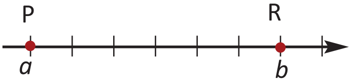
В этом разделе вы научитесь

- Вычислять расстояние между двумя точками с заданными координатами
- Записывать уравнение окружности по координатам точки центра и по радиусу
- Определять координаты точки центра и радиус по уравнению окружности
- Находить площади сектора и сегмента



4-1 Расстояние между двумя точками

- **На числовой оси**

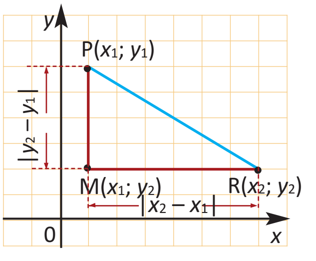


PR = $|a - b|$ или
PR = $|b - a|$

- **На координатной плоскости**

Расстояние между точками P(x_1; y_1) и R (x_2; y_2) можно найти по формуле: **PR =** $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

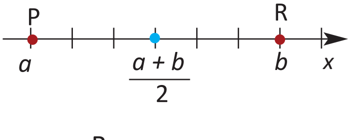
Докажем верность формулы для случаев $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$. Проведем через точки P и R прямые, параллельные осям координат, и обозначим через M точку их пересечения. Применяя к прямоугольному треугольнику ΔMPR теорему Пифагора $PR^2 = MR^2 + MP^2$ и учитывая что, длины катетов MR и MP соответственно равны $|x_2 - x_1|$ и $|y_2 - y_1|$, получим

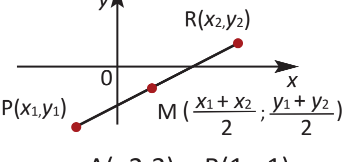


$$PR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Эта формула верна и в случае, когда точки P и R находятся на прямой линии, параллельной любой из координатных осей (рассмотрите самостоятельно.)

При решении задач на расстояние между двумя точками часто используется формула координат средней точки отрезка.





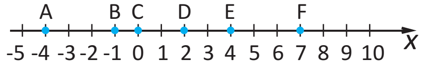
Пример. Вычислите расстояние между точками A(–2;3) и B(1;–1).
Решение. По формуле расстояния между двумя точками:

$$AB = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

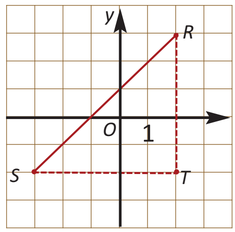
Обучающие задания

1 Вычислите на числовой оси расстояние между данными точками.

a) A и D b) B и E c) C и F



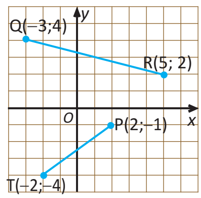
2 Вычислите расстояние между точками R и S двумя способами:
1) Подсчетом клеток (единиц измерения) на координатной плоскости и применением теоремы Пифагора; 2) Определением по рисунку координат точек R и S и применением формулы расстояния между двумя точками.



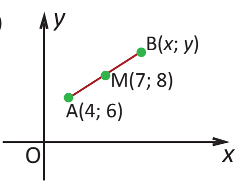
3 Вычислите расстояние между данными точками.

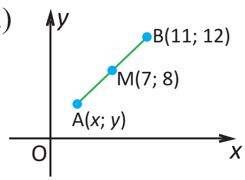
a) 1) A(–1; 3) и B(5; 11);
2) C(–3; 2) и D(1; 5);
3) E (6,5; –2,4) и F (–5,5; 2,6).

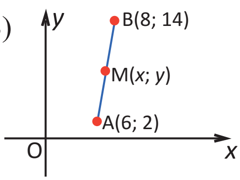
b)



4 Точка M – средняя точка отрезка AB. По данным найдите:
a) значения переменных; b) длину отрезка AB.

1)


2)


3)


5 Ниже даны координаты конца точки R отрезка RT и координаты средней точки S. 1) Определите координаты точки T по данным координатам.
2) Найдите длину отрезка RT различными способами.

a) R(–1; –3), S(–1; 2) b) R(2; 6), S(–1; 2) c) R(–3; 0), S(2; 12)

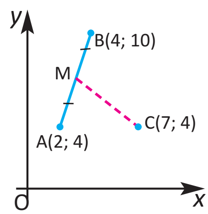
6 Найдите периметр фигур, вершины которых расположены в данных точках.

1)$\triangle ABC$
A(–2; –1), B(2; 2), C(6; –1)

2) четырехугольник ABCD

A(–4; –3), B(0; –2), C(–1; 2), D(–5; 1)

7 Точка M – средняя точка стороны AB. Найдите расстояние между точками C и M.



8 Найдите длину медианы CM треугольника с вершинами в точках A(–3; 3), B (1; 7), C(2; 1)

9 L (–5; –6) и M (7; 10) – координаты конечных точек отрезка LM. Точка X находится на отрезке LM и $LX = \frac{1}{4}LM$. Определите координаты точки X.

10 При каких значениях *к* расстояние между точками A(6; –4) и B(2; *к*) равно 5 единицам? Отметьте точки на координатной плоскости. Сколько таких точек?

11 Найдите на оси O*x* точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от точек (0; 2) и (8; 6).

Прикладные задания

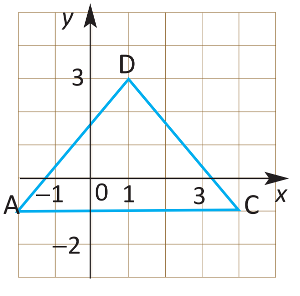
12 Начертите треугольник в координатной плоскости по координатам точек вершин треугольника. Подсчитайте длины сторон и определите является ли он прямоугольным треугольником.

a) (1; 2), (2; 3), (5; 0)   b) (2;1), (4; 2), (2; 6)   c) (3; 2), (5; 1), (2; 5)

13 Начертите на координатной плоскости четырехугольник с вершинами в точках A(1; 1), B(5; 9), C(2; 8) и D(0; 4).
a) Обоснуйте, что данный четырехугольник является трапецией;
b) Обоснуйте, что данный четырехугольник является равнобедренной трапецией.

14 **Масштаб.** Начертите на координатной плоскости треугольник с вершинами в точках A(1; 4), B(5; 4) и C(5; 1).
a) Найдите периметр ΔABC;
b) Увеличьте значения координат точек вершин в 2 раза,в 3 раза и снова вычислите периметр треугольника;
c) Объясните зависимость между увеличением координат точек вершин треугольника и увеличением периметра.

15 a) Начертите рисунок в тетради.
b) Найдите длины сторон треугольника.
c) Определите координаты средней точки каждой стороны.
d) Соединив последовательно средние точки, сравните периметр полученного и заданного треугольников.

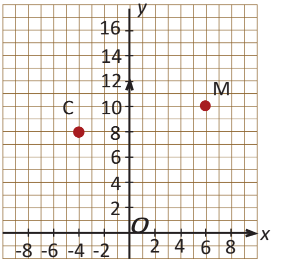


16 Два всадника выехали на прогулку на лошадях. Они начали движение из одной точки в одно и то же время. Один из них поскакал на 2 км к западу и 3 км к югу, а другой на 4 км к востоку и 5 км к северу. Найдите расстояние между всадниками.

17 Расположение дома Мехрибан отмечено на координатной плоскости точкой M(6; 10). Дом Джалила находится на 2 единицы к югу и 10 единиц к западу от дома Мехрибан. Школа находится на одинаковом расстоянии от дома каждого из них.

а) Отметьте дом Джалила на координатной плоскости;

b) Представьте на координатной плоскости один возможный вариант месторасположения школы. Подтвердите правильность выбора вычислениями, что школа находится на одинаковом расстоянии от двух домов. Рассмотрите различные варианты.



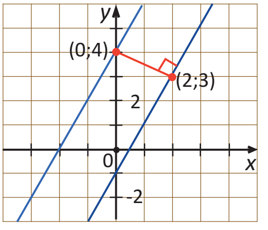
Указание: Используйте свойство серединного перпендикуляра отрезка.

18 Выполните задания по изображению на координатной плоскости.

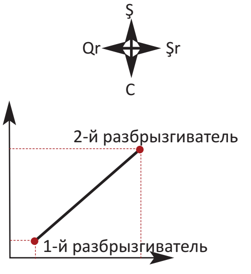
а) Напишите уравнение прямых.

b) Объясните по уравнениям параллельность данных прямых.

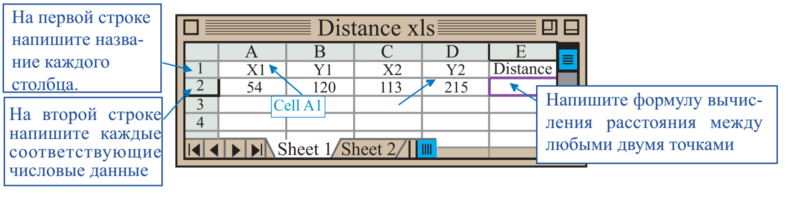
c) Найдите расстояние между прямыми.



19 Мастер должен установить оросительную систему методом дождевания в различных местах участка прямоугольной формы. Для этого он должен купить трубу, соединяющую первый и второй разбрызгиватели. Он забыл измерить это расстояние и направился в магазин. Но мастер запомнил несколько измерений. Первый разбрызгиватель находится в 3 м к востоку и в 1 м к северу, второй – в 15 м к востоку и в 10 м к северу от зеленого участка. Какие математические знания, полученные в школе, может применить мастер для вычисления расстояния между двумя разбрызгивателями, чтобы не было необходимости возвращаться домой? Запишите на плане данные сведения и решите задачу.

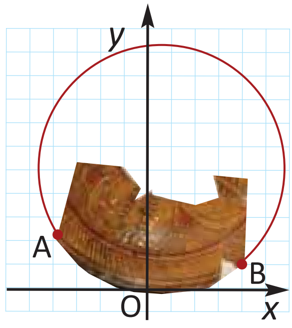


20 С помощью программы Excel вычислите расстояние между двумя данными точками.



а) (5; 120), (113; 215) b) (68; 153), (175; 336) c) (421; 454), (502; 798)

21 **Археология. Работа над небольшим проектом.** Ниже даны шаги решения проблемы нахождения изначального размера посуды по обломкам, найденным во время раскопок археологов. Решите задачу по этим этапам. Составьте, по возможности, обширный список применяемых математических понятий. Создайте толковый словарь этих понятий. Запишите их определения в виде примеров и рисунков.



1. Обломок посуды размещается в координатной системе. Отметив три точки (A, O, B) на круговой части, нарисуйте схематическое отображение в тетради.

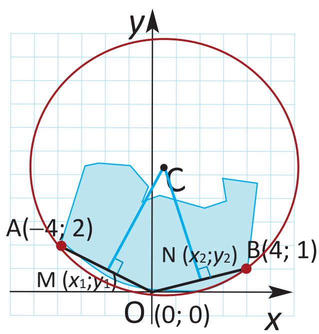
2. Чтобы определить центр окружности:

a) Начертите серединные перпендикуляры отрезков AO и OB;

b) Напишите уравнения для серединных перпендикуляров.

✓ Чтобы написать уравнение серединного перпендикуляра отрезка OA:

- Найдите координаты средней точки M;
- Определите угловой коэффициент прямой, содержащей отрезок OA.
- Основываясь на том, что серединный перпендикуляр и эта прямая являются взаимно перпендикулярными, найдите угловой коэффициент (k_1).
- Напишите уравнение прямой, проходящей через точку M с угловым коэффициентом k_1.



✓ Чтобы написать уравнение серединного перпендикуляра отрезка OB:

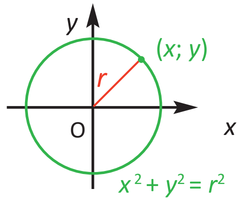
- Найдите координаты средней точки N;
- Определите угловой коэффициент прямой, проходящей через OB;
- Найдите угловой коэффициент (k_2), основываясь на взаимной перпендикулярности серединного перпендикуляра и прямой, проходящей через OB.
- Напишите уравнение прямой с угловым коэффициентом k_2 и проходящей через точку N.

✓ Центр окружности является точкой пересечения серединных перпендикуляров. Значит, координаты центра окружности C являются решением системы, состоящей из уравнений серединных перпендикуляров.

✓ Найдите радиус данной окружности, вычислив расстояние от точки C до каждой отмеченной точки. Напишите приблизительное значение диаметра посуды.

4-2 Уравнение окружности

Используя формулу расстояния между двумя точками, можно написать уравнение окружности с радиусом r и с центром O (0;0) в начале координат. Расстояние между центром окружности (0; 0) и ее любой точкой N ($x; y$) находится по формуле: $NO = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$. С другой стороны, так как $NO = r$, написав равенство $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, возведением в квадрат обеих сторон , получим: $x^2 + y^2 = r^2$. Координаты любой точки окружности удовлетворяют этому уравнению и, наоборот, координаты точки, удовлетворяющей этому уравнению, находятся на окружности. Таким образом, получим уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r : $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$

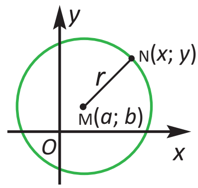


Например, уравнение окружности с центром в начале координат (0; 0) и радиусом 2 имеет вид: $x^2 + y^2 = 4$.

Рассмотрим общий случай.

По формуле расстояния между центром окружности M ($a; b$) и любой точкой N ($x; y$) на окружности радиуса r имеем:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$



Возведя в квадрат обе части, получаем уравнение окружности с центром в точке (a; b) и радиусом r:

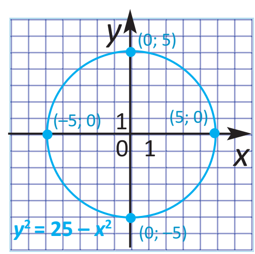
$$\boldsymbol{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Например, уравнение окружности с центром в точке (3; 2) и радиусом 4 имеет вид: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$

1. **Пример.** Постройте на координатной плоскости окружность, заданную уравнением $y^2 = 25 - x^2$.

Решение. Напишем уравнение в виде $x^2 + y^2 = 5^2$. Как видно, $r = 5$.

Отметим 4 точки, находящиеся на расстоянии 5 единиц от начала координат, например, (5; 0), (–5; 0), (0; 5), (0; –5). Проведем окружность через эти точки.



2. **Пример.** Точка A(2; 3) находится на окружности, центром которой является начало координат. Напишите уравнение этой окружности.

Решение. Записав координаты точки A в уравнении $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$, получим: $2^2 + 3^2 = r^2$, $r^2 = 13$.

Значит, уравнение этой окружности имеет вид: $x^2 + y^2 = 13$.

Обучающие задания

1 Запишите уравнение окружности с данным радиусом и центром в начале координат.

a) 3 b) $2\sqrt{3}$ c) $\sqrt{15}$ d) $5\sqrt{2}$ e) $\sqrt{22}$

2 Напишите уравнение окружности по данному центру и радиусу (или диаметру).

a) (2; –11), $r = 3$ b) (–4; 2), $d = 2$ c) (0; 0), $r = \sqrt{5}$

d) (6; 0), $r = \dfrac{2}{3}$ e) (–1; –1), $d = \dfrac{1}{4}$ f) (–5; 9), $d = 2\sqrt{20}$

3 На окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 169$:
a) найдите ординату точки с абсциссой 5;
b) найдите абсциссу точки с ординатой 0.

4 По данным уравнениям определите координаты центра окружности и радиус. Постройте окружность в координатной плоскости.

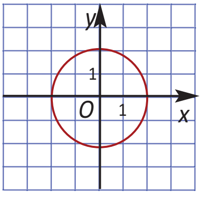
a) $x^2 + y^2 = 36$ c) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$
b) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ d) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$

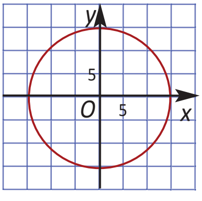
5 По данным уравнениям окружностей определите координаты центра и радиус.

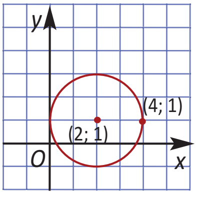
Пример. Найдем центр и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$
Решение: $(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 - 4 = 0$
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$
Центр окружности – точка M(1; –2). Радиус $r = 3$.

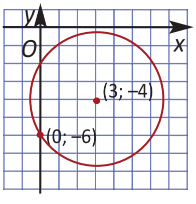
a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 8x + 16y - 20 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 6y - 5 = 0$
f) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$

6 Напишите уравнение согласно отображению окружности в координатной плоскости.









7 Какие из точек A(2; 3), B(3; 4), C(4; 4), D(4; –3), E(–3; 4) лежат на окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 25$?

8 Напишите уравнение окружности, исходя из данных.

Центр окружности	(0; 0)	(1; 2)	(–3; 5)	(–13; π)	(9; 10)
Точка на окружности	(0; 6)	(4; 2)	(1; 8)	(2; π)	(–7; 3)

9 Можно ли сказать, что следующие уравнения являются уравнениями какой-либо окружности? Обоснуйте ответ.

1) $x^2 + y^2 = -16$ 2) $x^2 + y^2 + 4x = 0$

3) $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25$ 4) $x^2 + 10x + y^2 - 8y + 8 = 0$

10 a) Напишите уравнение окружности с координатами концов диаметра (2; –1), (4; 7). Найдите точки с абсциссами –1, находящиеся на этой окружности.

b) Напишите уравнение окружности диаметром 12 см и центром в начале координат. Сдвиньте эту окружность на 6 единиц вправо и на 5 единиц вниз. Как изменится уравнение новой окружности?

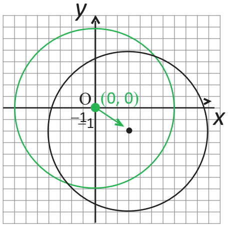
c) Центр окружности $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ перенесен на 6 единиц влево и на 3 единицы вниз. Напишите уравнение, соответствующее конечному положению окружности.

11 a) Напишите уравнение окружности с радиусом 7 и центром в точке (3; –2);

b) Определите координаты конечных точек горизонтального диаметра данной окружности.

Указание: Решите двумя способами.

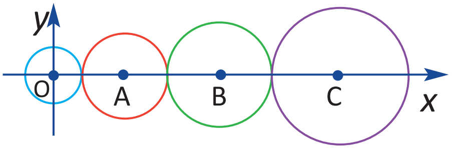
1) Сравните координаты сдвига относительно окружности с центром в точке (0; 0).



2) Впишите в уравнение окружности значение $y = -2$.

12 Найдите точки пересечения окружности $x^2 + y^2 - 6x + 9y + 8 = 0$ с осями координат.

13 Центры четырех касающихся окружностей находятся на оси Ox. Радиус окружности A больше радиуса окружности O в 2 раза, радиус окружности B больше радиуса окружности O в 3 раза, радиус окружности C больше радиуса окружности O в 4 раза. Известно, что BC = 28. Напишите уравнение окружности A.



Прикладные задания

14 Найдите расстояние от точки A(10; 7) до центра окружности, заданной уравнением $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

15 Найдите расстояние от точки C(5; –2) до окружности $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$.

16 a) Найдите расстояние между центрами окружностей, заданных уравнениями: $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ и $(x + 4)^2 + (y - 6)^2 = 1$.
b) Постройте эти окружности на координатной плоскости. Покажите две самые близкие друг к другу точки, находящиеся на окружностях, и найдите расстояние между этими точками.

17 Исследуйте задачу, решенную в качестве примера, и решите задачи.

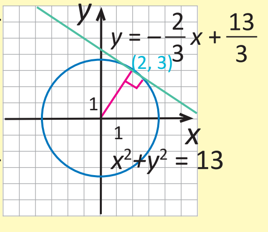
Пример. Радиосигналы с передающей станции могут передаваться на расстояние 90 км. Дом Ляман находится на расстоянии 45 км к востоку и 56 км к северу от станции.
Определите область распространения сигналов передатчика с помощью неравенства. Сможет ли Ляман пользоваться этим передатчиком?
Решение. По отношению к окружности точки плоскости делятся на два множества. В частности, для точек круга соответствующей окружности $x^2 + y^2 = r^2$, верно $x^2 + y^2 \leq r^2$, а для точек вне круга верно неравенство $x^2 + y^2 > r^2$. Для площади распространения сигнала должно быть верно: $x^2 + y^2 < 90^2$. Проверим: $45^2 + 56^2 < 90^2$; $5161 < 8100$. Значит, она сможет пользоваться этим передатчиком.

1) Землетрясение почувствовалось на расстоянии 110 км от эпицентра. Почувствуете ли вы землетрясение, если ваше место проживания находится на расстоянии 50 км к востоку и 30 км к северу от эпицентра?

2) Свет морского маяка распространяется на 20 км. Виден ли свет маяка с корабля, находящегося в 10 км к востоку и в 16 км к северу от маяка?

18 Исследуйте пример. Напишите уравнение касательной, проведенной к данной окружности из заданной точки.

Пример: Напишите уравнение касательной, проведенной к окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 13$ в точке (2; 3).



Решение. Найдем угловой коэффициент прямой, проходящей через точку касания и содержащей радиус, : $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3 - 0}{2 - 0} = \dfrac{3}{2}$

Так как радиус и касательная, проходящие через точку (2;3), взаимно перпендикулярны, то угловой коэффициент касательной будет $-\dfrac{2}{3}$.
Уравнение касательной: $y - 3 = -\dfrac{2}{3}(x - 2)$; $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{13}{3}$

a) $x^2 + y^2 = 13$; (2; 3) b) $x^2 + y^2 = 41$; (–4; –5)
c) $x^2 + y^2 = 65$; (–8; 1) d) $x^2 + y^2 = 40$; (–2; 6)

19 Определите, является ли прямая касательной к окружности или секущей, или не является ни той, ни другой.

a) $x^2 + y^2 = 36$
$y = 6$

b) $x^2 + y^2 = 100$
$y = 14 - x$

c) $x^2 + y^2 = 4$
$x + y = 7$

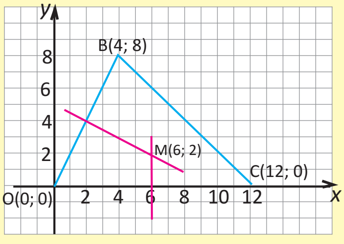
d) $x^2 + y^2 = 10$
$y = 3x$

e) $x^2 + y^2 = 9$
$y = x - 3$

f) $x^2 + y^2 = 9$
$y = x$

20 Исследуйте пример, относящийся к уравнению окружности, проходящей через три данные точки, и решите задачу.

Пример. Компания мобильного оператора старается расположить передающую станцию так, чтобы обслуживать больше пользователей. Представим, что три больших города находятся в точках O(0; 0), B(4, 8), C(12; 0). На координатной плоскости 1 единица равна расстоянию в 100 км. Передающая станция должна быть расположена в точке, находящейся на одинаковом расстоянии от этих городов. Напишите координаты этой точки и уравнение соответствующей окружности.

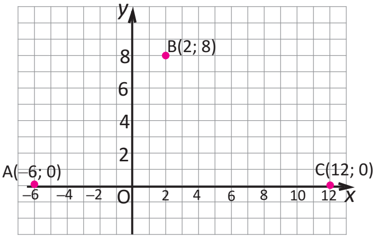


Решение. Вначале соединим заданные точки отрезками и найдем точку пересечения серединных перпендикуляров сторон полученного треугольника. Уравнение серединного перпендикуляра будет x = 6, при расположении отрезка OC на оси абсцисс и средней точки (6; 0). Угловой коэффициент прямой линии, содержащей отрезок OB равен $\boldsymbol{k = \frac{8-0}{4-0} = 2}$, угловым коэффициентом серединного перпендикуляра будет $-\frac{1}{2}$ При средней точке (2; 4) отрезка OB уравнение серединного перпендикуляра будет $y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 2)$, т.е. $y = -\frac{1}{2}x + 5$. Прямые $x = 6$ и $y = -\frac{1}{2}x + 5$ пересекаются в точке (6; 2), (проверьте сами). Эта точка будет центром окружности, которая показывает расположение станции.

Расстояние между центром и любой из заданных точек равно радиусу окружности : $r = \sqrt{(6-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$

Уравнение окружности: $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{40})^2$, $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 40$

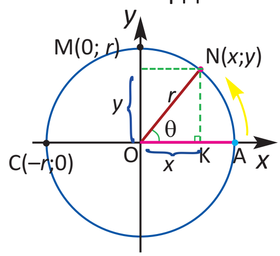
Начертите рисунок в тетради. Напишите уравнение окружности, проходящей через три отмеченные точки, и постройте окружность.



21 a) Покажите, что уравнение $(x - 2)(x - 6) + (y - 5)(y - 11) = 0$ является уравнением окружности.

b) Покажите, что уравнение окружности с координатами концов диаметра $(a; b)$ и $(c; d)$ можно представить в виде:
$(x - a)(x - c) + (y - b)(y - d) = 0.$

Практическое задание. 1) На оси абсцисс правее от начала координат отметьте точку A и проведите окружность с центром в точке O, радиусом r = OA.



2) Обозначьте точку, в которую перешла точка A при повороте на острый угол θ вокруг точки O против движения часовой стрелки, через N (x; y).
3) По рисунку напишите синус и косинус острого угла θ в прямоугольном треугольнике ONK :

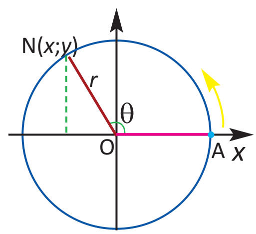
$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}.$$

4) Примените эти формулы для точки M(0; r) при $\theta = 90^\circ$ и для точки C ($-r$; 0) при $\theta = 180^\circ$:

$\sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1$, $\cos 90^\circ = \frac{0}{r} = 0$, $\sin 180^\circ = \frac{0}{r} = 0$, $\cos 180^\circ = \frac{-r}{r} = -1$

Координаты точек, находящихся на окружности, и тригонометрические соотношения

Если точка A(r; 0) при повороте вокруг точки начала координат O против движения часовой стрелки на угол θ преобразуется в точку N(x; y), то верны соотношения: $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$



Отсюда, для координат точки N(x; y) на окружности с радиусом r и центром, находящимся в начале координат, получим: $\boldsymbol{x = r \cdot \cos\theta}$ **,** $\boldsymbol{y = r \cdot \sin\theta}$.

В этих формулах угол θ образован лучом ON от положительного направления оси абсцисс против движения часовой стрелки. Если точка N(x; y) не находится на оси ординат то, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{r\cdot\sin\theta}{r\cdot\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

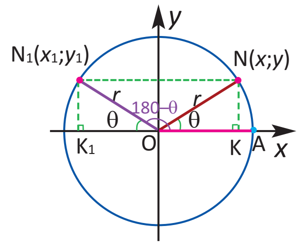
Обучающие задания

22 a) На бумаге в клетку, приняв клетку за единицу измерения, начертите окружность с центром в начале координат и радиусом r = 10. По координатам точки N(x; y), в которую перешла точка A (10; 0) при повороте на угол $\theta = 30^\circ$ вокруг начала координат против движения часовой стрелки, найдите приблизительные значения $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$.
b) Задание выполните и для углов поворота 45°, 60°, 120°, 150°. Проверьте результаты с помощью калькулятора.

23 Отметьте точку A (5; 0) на окружности с центром в начале координат и радиусом 5. Найдите координаты точки N(x; y) , в которую перешла точка A при повороте вокруг начала координат против движения часовой стрелки на угол:

a) $\theta = 180^\circ$ b) $\theta = 100^\circ$ c) $\theta = 120^\circ$

Практическое задание. 1) На окружности с центром в начале координат и радиуса r отметьте точку N $(x; y)$, в которую перешла точка A при повороте на острый угол θ и точку $N_1(x_1; y_1)$, соответствующую углу поворота $180° - \theta$. Относительно какой оси симметричны точки N и N_1?



2) Исходя из рисунка, обоснуйте конгруэнтность ΔONK и ΔON_1K_1 и на основании этого объясните соотношения $y_1 = y$, $x_1 = -x$ между координатами точек N и N_1.

3) Исследуйте равенства:

$$\sin(180^\circ - \theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y}{r} = \sin\theta, \qquad \cos(180^\circ - \theta) = \frac{x_1}{r} = \frac{-x}{r} = -\cos\theta$$

4) Выразите мнение о синусе и косинусе смежных углов.

Синусы смежных углов равны, а косинусы взаимно противоположны.

$$\mathbf{\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta, \qquad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta}$$

Из этих формул при $\cos\theta \neq 0$ почленным делением получаем:

$$\mathbf{\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta}$$

С помощью формул, приведенных выше, вычисление синуса, косинуса, тангенса для тупого угла можно свести к вычислению синуса, косинуса, тангенса острого угла соответственно.

Пример. Вычислите синус, косинус и тангенс угла 150°.

Решение. Поскольку для угла 150° градусная мера смежного угла будет 30°, можно записать:

$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Обучающие задания

24 Вычислите синус, косинус и тангенс углов $120°$, $135°$, $150°$.

25 Проверьте, верны ли равенства.

a) $\sin 40^\circ = \sin 140^\circ$ b) $\cos 140^\circ = -\cos 40^\circ$ c) $\cos 46^\circ = \cos 134^\circ$

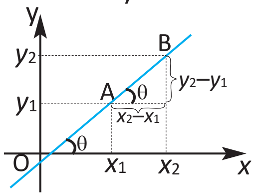
d) $\sin 130^\circ = \sin 50^\circ$ e) $\sin 120^\circ = -\sin 60^\circ$ f) $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$

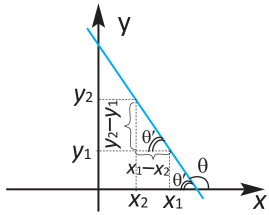
26 a) Разделив обе части уравнения окружности $x^2 + y^2 = r^2$ на r^2 и учитывая равенства $\frac{x}{r} = \cos\theta$, $\frac{y}{r} = \sin\theta$ покажите, что тождество $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ верно для любого угла θ.

b) Найдите $\cos\theta$ и $\tan\theta$, если $\sin\theta = 0{,}6$ и θ острый угол

c) Найдите $\cos\theta$ и $\tan\theta$, если $\sin\theta = 0{,}8$ и θ тупой угол

27 1) Угловой коэффициент прямой, не паралелльной оси ординат и проходящей через точки A(x_1; y_1) и B(x_2; y_2) находится по формуле $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Обозначив угол θ, между прямой и положительным направленем оси Ox в верхней полуплоскости ($y \geq 0$) покажите, что $\tan\theta = k$ для различных случаев.

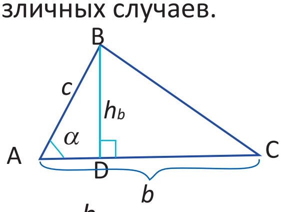




2) Найдите градусную меру угла, между прямой, заданной уравнением и положительным направленем оси Ox в верхней полуплоскости ($y \geq 0$).

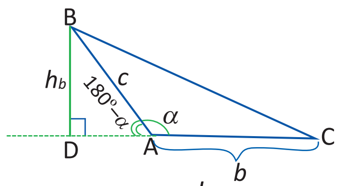
a) $y = \sqrt{3}\,x + 1$ b) $y = -x + 2$ c) $y = 2x - 3$

28 1) **Исследование:** Исследуйте формулу площади треугольника для различных случаев.



$\sin\alpha = \dfrac{h_b}{c}$ $h_b = c \cdot \sin\alpha$

$S = \dfrac{1}{2} b \cdot h_b = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$



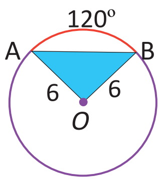
$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \dfrac{h_b}{c}$; $h_b = c \cdot \sin\alpha$

$S = \dfrac{1}{2} b \cdot h_b = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$

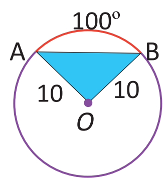
2) Перепишите утверждение, вписав пропущенные слова. “Площадь треугольника равна половине произведения ... сторон на ... угла .... “

29 Исходя из данных на рисунке, найдите площадь закрашенной части. O – центр окружности.

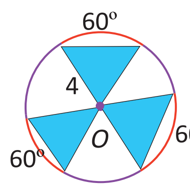
a)



b)



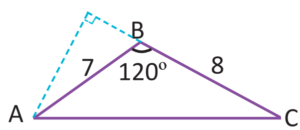
c)



30 Диагонали параллелограмма 6 см и 8 см, а угол между ними 45°. Найдите площадь параллелограмма.

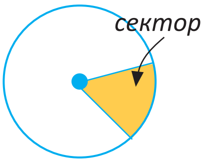
31 Найдите площадь равнобокой трапеции, длина диагонали которой равна 18 см, а угол между диагоналями 30°.

32 По данным на рисунке найдите длину стороны AC и синус угла C.
Указание: Проведите высоту из вершины A, как показано на рисунке.

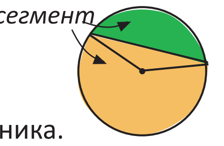


4-3 Площадь кругового сектора и сегмента

Круговым **сектором** называется часть круга, лежащего внутри соответствующего центрального угла. Площадь сектора, соответствующего центральному углу, является той частью площади круга, которую составляет центральный угол от полного угла.



Например, часть круга, соответствующая центральному углу 60°, составляет $\frac{60^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{6}$ часть всего круга. Так как площадь круга πr^2, то площадь этого сектора будет $\frac{1}{6}\pi r^2$.

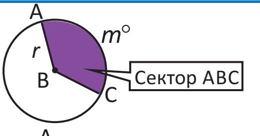


Сегмент – часть круга, ограниченная хордой и соответствующей дугой.

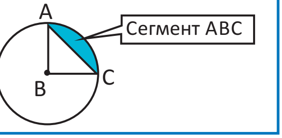
Площадь сегмента = площади сектора ± площадь треугольника.

Площадь сектора: $S_{ABC}=\frac{m}{360}\pi r^2$

Площадь сегмента: $S_{сегментABC}=S_{секторABC}-S_{\Delta ABC}$

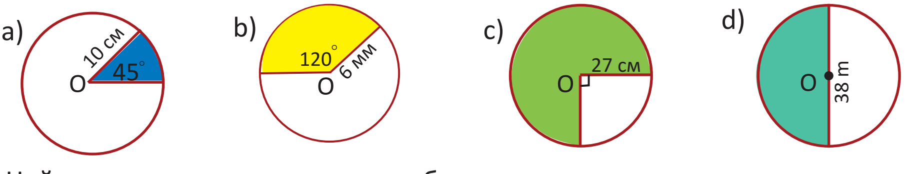


Примечание: При нахождении площади сегмента, соответствующего большей дуге, к площади соответствующего сектора прибавляется площадь ΔABC

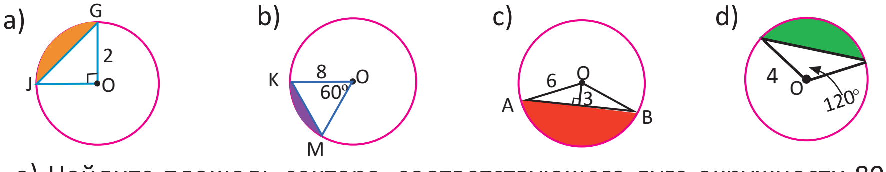


Обучающие задания

1 Найдите площадь секторов, изображенных на рисунке. O - центр окружности.



2 Найдите площадь сегментов, изображенных на рисунке. O - центр окружности.

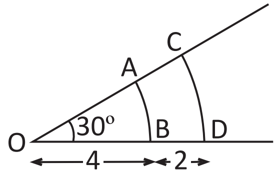


3 a) Найдите площадь сектора, соответствующего дуге окружности 80° с радиусом 12 см.

b) Площадь сектора с центральным углом 72° составляет 3,2π $м^2$. Найдите радиус круга.

c) Найдите центральный угол в круге с радиусом 8 см, соответствующий сектору с площадью 24π $см^2$.

4 Исходя из данных на рисунке, найдите:
a) Длину $\smile AB$ и $\smile CD$;
b) Площадь секторов AOB и COD.

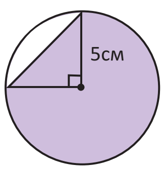


5 $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 2 = 0$ - уравнение окружности.
a) Найдите координаты центра и радиус окружности;
b) Найдите площадь сектора с центральным углом 45°;
c) Постройте окружность на координатной плоскости. Найдите площади сегментов, полученных в результате пересечения круга с осью ординат.

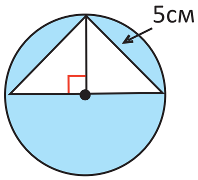
6 Окружность с центром в точке (0; 2) проходит через точку (2; 4) .
a) Напишите уравнение окружности;
b) Найдите расстояние между точками пересечения окружности и осью абсцисс;
c) Постройте окружность на координатной плоскости. Найдите площади сегментов, полученных в результате пересечения круга с осью абсцисс.

7 Исходя из данных на рисунке, найдите площадь закрашенной части.

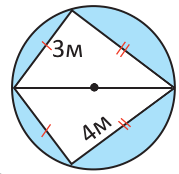
a)



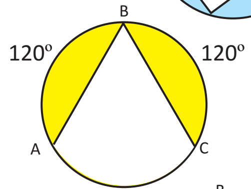
b)



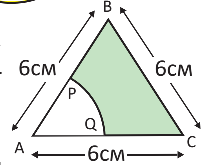
c)



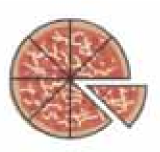
8 Длина окружности на рисунке 12π мм. Сколько квадратных миллиметров составляет площадь закрашенной части. Округлите ответ с точностью до сотых.



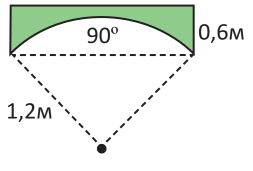
9 ΔABC - равносторонний. Точка P – середина стороны AB. APQ – сектор круга с центром в точке A. Найдите площадь закрашенной части.



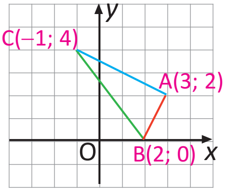
10 Представьте, что в столовой вам предлагают два вида пирога. Пироги одинаковой толщины имеют форму круга с диаметрами 24 см и 32 см. Каждый пирог разрезан на 8 равных кусков. В каком случае вы съедите больше пирога: если съедите 1 кусок пирога с радиусом 16 см, или 2 куска пирога с радиусом 12 см?



11 Часть оконной рамы, изображенной на рисунке, должна быть покрашена. Для этого сначала нужно вычислить ее площадь. Выполните это вычисление, исходя из данных рисунка.

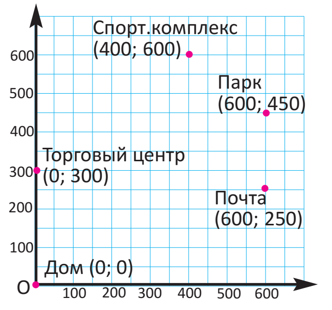


Обобщающие задания



1 Проверьте, являются ли точки A(3; 2), B(2; 0) и C(–1; 4) вершинами прямоугольного треугольника $\triangle ABC$.

2 На рисунке представлен план расположения дома, предложенного в аренду туристам . На плане сторона каждой квадратной клетки обозначает расстояние в 50 м.



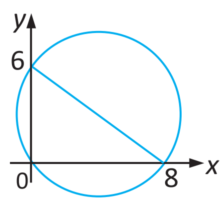
1) Представьте, что вы отдыхаете здесь. Какое расстояние вы преодолеете, если самым коротким путем пойдете на почту, оттуда в парк и вернетесь домой?
2) Чтобы пройти все объекты, указанные на плане, существуют два возможных коротких пути. Определите для них последовательность объектов и расстояния.

3 Напишите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку с концами в заданных точках.

a) (–2; 0), (6; 8) b) (0; –1), (–4; 3) c) (–1; 1), (1; 5)

4 Окружность с центром в точке M(3; 0) проходит через точку A(7; 3).
a) Напишите уравнение окружности.
b) Найдите точки пересечения этой окружности с осями координат.
c) Найдите площадь четырехугольника, у которого вершины являются точками пересечения окружности с координатными осями.

5 Окружность проходит через точки (0; 0), (0; 6), (8; 0).



a) Найдите координаты центра окружности.
b) Выразите через π длину дуги, лежащей в I четверти координатной плоскости. c) Найдите площадь части круга, относящейся к I четверти координатной плоскости. d) Прямая, проходящая через начало координат, является касательной к окружности. Найдите угловой коэффициент этой прямой и напишите ее уравнение.

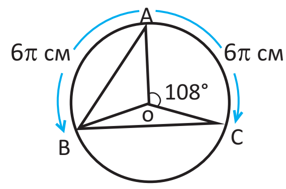
6 Определите соответствие для окружностей с данными уравнениями.

1) $x^2 + y^2 = 9$
2) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$
3) $x^2 - 2x + y^2 = 8$

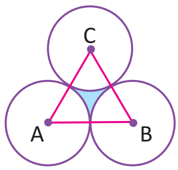
A) Центр - в точке (0; 0)
B) Центр - в точке (3; –2)
C) Центр - в точке (1; 0)
D) Радиус - 2 единицы

7 Окружность с центром в точке (0; 4) проходит через точку A(8; 10). Найдите площадь сектора, соответствующего центральному углу 45° соответствующего круга.

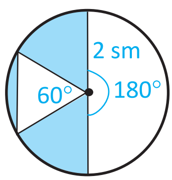
8 O – центр окружности. Длины дуг $\smile AB$ и $\smile BC$ равны 6π см.
Найдите:
a) $\angle AOB$ b) $\smile BC$ c) $S_{\text{сектор } AOC}$

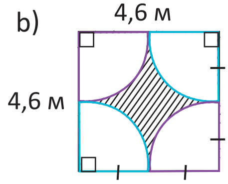


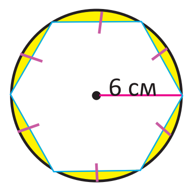
9 На рисунке изображены три окружности, касающиеся друг друга. Радиусы окружностей 4 единицы. Найдите площадь закрашенной части.



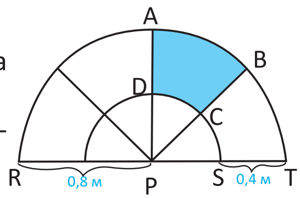
10 Найдите площадь закрашенной части.

a)


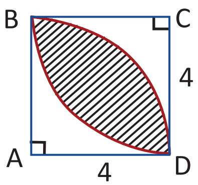
b)


c)


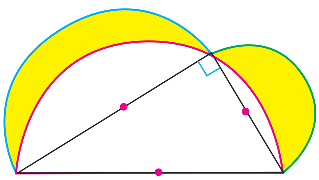
11 На рисунке дана схема окна в форме полукруга с радиусом 80 см.
Длина ST– 40 см, а дуга AB– 45°. Найдите площадь стекла части ABCD.



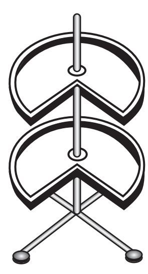
12 ABCD – квадрат. Найдите площадь заштрихованной части, полученной пересечением дуг окружностей с центрами в точках A и C.



13 На сторонах прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 как на диаметрах построены полукруги. Найдите площадь закрашенной части.



14 Изображенные на рисунке полки были изготовлены путем вырезания частей из кругов с радиусом 40 см под углом 90°. Сколько приблизительно квадратных сантиметров бумаги понадобится, чтобы накрыть поверхности полок? Ответ округлите до десятков.



5 Уравнения. Системы уравнений

В этом разделе вы научитесь

- Решать уравнения высших степеней
- Решать рациональные уравнения и задачи, приводящие к ним
- Решать уравнения, содержащие переменную под знаком модуля
- Решать иррациональные уравнения
- Решать системы уравнений
- Решать задачи с помощью уравнений и систем уравнений

5-1 Уравнения высших степеней

Алгебраическим уравнением n-ой степени с одной переменной называется уравнение $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, левой частью которого является многочлен n-й степени от x, а правой - нуль, при ($a_n \neq 0$).
Например, $x^3 - x^2 + 3x - 2 = 0$ - уравнение 3-й степени,
$3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 4 = 0$ - уравнение 4-й степени.
Формулы для нахождения корней уравнений третьей и четвертых степеней известны, однако эти формулы очень сложные.

Метод разложения на множители

Уравнения высокой степени удобно решать, применяя определенные методы. Одним из таких методов является метод разложение на множители.

Пример. Решите уравнение $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.
Решение. Разложим левую часть на множители, сгруппировав члены как показано ниже:
$(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0$; $x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0$; $(x^2 - 4)(x - 1) = 0$
$(x - 2)(x + 2)(x - 1) = 0$;
Для того, чтобы произведение было равным нулю, необходимо, чтобы хотя бы один из множителей был равен нулю. Поэтому
$x - 2 = 0$ или $x + 2 = 0$ или $x - 1 = 0$. Отсюда $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$.

Обучающие задания

1 Решите уравнения, воспользовавшись формулами сокращенного умножения:

a) $x^3 - 27 = 0$;   b) $16x^3 = -2$ c) $x^3 - 64 = 0$;
d) $5x^3 + 40 = 0$ e) $x^4 - 1= 0$;   f) $16x^4 = 81$;

2 Решите уравнения вынесением общего множителя за скобки.

a) $16x^5 = x$ b) $2x^4 = 16x$ c) $2x^3 - 7x = x$
d) $5x^3 = 320$ e) $x^3 = 16x$ f) $x^2(x^2 + 1) = x^2 - 125x$
g) $5x^3 - 19x^2 = x^2$ h) $x^3(5x - 2) = 20x^2 - 2x^3$ i) $x^3 + x^2 = 2x^2$

3 Решите уравнения, сгруппировав члены и разложив на множители:

1) $x^3 + x^2 = 20x$
2) $x + 1 = 9x^3 + 9x^2$
3) $4y^3 - 2 = y - 8y^2$
4) $2x - 3 = 8x^3 - 12x^2$
5) $x^3 + 2x^2 - 9x = 18$
6) $9y^3 + 8 = 4y + 18y^2$
7) $3x^3 + 2x^2 = 12x + 8$
8) $4x^3 - 12x^2 = 9x - 27$
9) $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$
10) $2x^3 - 3x^2 = 18x - 27$
11) $3x^3 + 7x^2 - 12x = 28$
12) $4x^3 + 16x^2 + x + 4 = 0$
13) $2x^3 - 3x^2 - 10x + 15 = 0$
14) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$
15) $9x^4 - 12x^2 + 4=0$
16) $4x^4 - 12x^2 + 9 = 0$

4 Дано уравнение $x^3 - x^2 - kx + k = 0$

a) Найдите количество действительных чисел, удовлетворяющих уравнению при $k = 0$.

b) Сколько действительных корней имеет уравнение при $k = -1$?

c) Сколько действительных корней имеет уравнение при $k = 4$?

5 Решите уравнения методом разложения на множители:

a) $3x^5 - 48x = 0$
b) $x^4 + 4x^2 = 32$
c) $x^4 - 3x^2 = 4$
d) $x^3 + x^2 - 2x = 0$
e) $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$
f) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 = -16x$
g) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$
h) $x^3 + 5x^2 = 4x + 20$
i) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

6 Найдите a и решите уравнение $x^3 + ax^2 - 5x + 6 = 0$, если один из корней равен 3.

7 Найдите нули функций.

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 16x - 80$ b) $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$
c) $f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ d) $f(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 - 11x + 30$

Указание. Запишите и решите уравнение $f(x) = 0$.

8 **Бизнес.** Математическую модель прибыли собственника, занимающегося малым бизнесом, можно записать следующим образом: $R = 5t^3 + 250t^2 + 2000t$. Здесь t показывает количество годов, начиная с 2000-го года. Через сколько лет прибыль собственника будет равна 50 000 манат?

9 В классе школьникам было задано решить уравнение $x^2 = x$.
Афаг, разделив обе части на x, нашла решение $x = 1$.
А Ульвия вычла x из обеих частей уравнения, записала уравнение в виде $x^2 - x = 0$ и решила его методом разложения на множители.
Чье решение верное?

10 Исследуйте графическим методом, сколько действительных корней имеет уравнение $x^3 = 4x - 1$. Определите знаки корней.
Указание: Постройте графики функций $y = x^3$ и $y = 4x - 1$ в одной координатной плоскости. Найдите абсциссы точек пересечения графиков.

11 Решите заданное уравнение двумя способами:
графическим и алгебраическим.

a) $x^3 = x$ a) $x^3 = 4x$ a) $x^3 = x^2$

Введение новой переменной

Ряд уравнений можно привести к квадратным введением новой переменной. Например, уравнение $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ заменой $x^n = u$ можно привести к уравнению $au^2 + bu + c = 0$. В частном случае, при $n = 2$ получается уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$, которое называется биквадратным уравнением и для его решения пользуются заменой $x^2 = u$.

Пример. $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ *заданное уравнение*

Решение.

$(x^2)^2 - 4x^2 - 5 = 0$	*применение свойства степени*
$u^2 - 4u - 5 = 0$	*замена $x^2 = u$*
$(u - 5)(u + 1) = 0$	*разложение на множители*
$u - 5 = 0$ или уа $u + 1 = 0$	*приравнивание произведений нулю*
$u = 5$ или $u = -1$	*нахождение неизвестной*
$x^2 = 5$ и уа $x^2 = -1 \rightarrow \varnothing$	*замена $u = x^2$*
$x = \pm\sqrt{5}$	*нахождение квадратного корня*

Обучающие задания

12 Решите уравнения введением новой переменной.

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$
b) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
c) $16y^4 - 8y^2 + 1 = 0$
d) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$
e) $27x^6 - 26x^3 + 1 = 0$
f) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
g) $8x^6 - 7x^3 + 1 = 0$
h) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$
i) $(y + 3)^4 - (y + 3)^2 = 12$

13 Решите уравнения.

a) $(2x^2 - 3)^2 - 4(2x^2 - 3) = 5$
b) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) = 3$
c) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) = 5$
d) $(2x^2 + x - 5)(2x^2 + x - 6) = 20$
e) $(x^2 - 3)(x^2 + 3) + x^2 - 3 = 0$
f) $(x^2 + 1)^2 + x^2(x^2 - 1) - 4 = 0$
g) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1$
h) $(x - 2)(x - 4)(x - 3)^2 = 20$

5-2 Рациональные уравнения. Решение задач с их применением.

Уравнение, содержащее в левой и правой частях рациональные выражения, называется рациональным уравнением. Рассмотрим шаги решения рациональных уравнений на примере.

Шаги решения	**Пример:** $\dfrac{x^3-20x}{x-4}=\dfrac{x^2}{4-x}$
1) Определяется допустимое значение переменной (ДЗП).	• $x \neq 4$, x не должно равняться 4.
2) Дроби в уравнении приводятся к общему знаменателю.	• $\dfrac{x^3-20x}{x-4}=\dfrac{-x^2}{x-4}$
3) Обе стороны уравнения умножаются на общий знаменатель, затем решается полученное уравнение	• $x^3-20x=-x^2$; $x^3+x^2-20x=0$; $x(x^2+x-20)=0$; $x(x+5)(x-4)=0$ $x_1=0$, $x_2=-5$, $x_3=4$
4) Проводится проверка и записывается ответ.	• Поскольку $x=4$ не входит в ДЗП, оно не может быть корнем заданного уравнения. Ответ: $\{0; -5\}$.

Обучающие задания

1 Решите уравнения, используя свойство пропорции.

a) $\dfrac{3}{x}=\dfrac{5}{x+2}$ b) $\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{3}{x-2}$ c) $\dfrac{x^2-8}{x}=\dfrac{x}{2}$

d) $\dfrac{x^2-3}{x-3}=\dfrac{x+2}{2}$ e) $\dfrac{x^2-x+1}{9}=\dfrac{1}{x+1}$ f) $\dfrac{x^2-3x+9}{13}=\dfrac{7}{x+3}$

2 Решите рациональные уравнения. Напишите ДЗП.

a) $\dfrac{x-4}{x}=\dfrac{6}{x^2-3x}$

b) $\dfrac{3x+6}{x^2-4}=\dfrac{x+1}{x-2}$

c) $\dfrac{12}{x+5}-\dfrac{12}{x}=\dfrac{2}{x+5}$

d) $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{6x}{4-x^2}=\dfrac{5}{x+2}$

e) $\dfrac{5}{x^2+2x+1}-\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{1}{x-5}$

f) $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{5}{x-4}=\dfrac{5}{x^2-7x+12}$

g) $\dfrac{x^3-6x}{x-2}=\dfrac{x^2}{2-x}$

h) $\dfrac{1}{x^2-4}=\dfrac{x}{18+5x-2x^2}$

3 Решите уравнения введением новой переменной.

a) $\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 - \dfrac{x+2}{x-1} - 2 = 0$

b) $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 - \dfrac{x}{x-1} - 6 = 0$

c) $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} = 2\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{x^2+2}{3x-2} + \dfrac{3x-2}{x^2+2} = 2\dfrac{2}{3}$

e) $\left(x+\dfrac{6}{x}\right)^2 - 12\left(x+\dfrac{6}{x}\right) + 35 = 0$

f) $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right) - 3 = 0$

Прикладные задания

4 Выразите искомую переменную через другие.

a) $h = \dfrac{2A}{b}$, $b = ?$

b) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{2}{b} = 3$, $a = ?$

c) $P = \dfrac{A}{1+rt}$, $r = ?$

d) $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{t}$, $q = ?$

e) $1 + \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, $b = ?$

f) $x = \dfrac{a+b}{a-b}$, $a = ?$

5 Найдите коэффициент k из тождества.

a) $\dfrac{x^2+kx-3}{x^2+5x+6} = \dfrac{x-1}{x+2}$

b) $\dfrac{2x^2+kx-10}{2x^2+7x+6} = \dfrac{2x-5}{2x+3}$

6 Из 20 проведенных игр команда выиграла 12. Сколько игр подряд должна выиграть команда в последующих играх, чтобы выигранные игры составляли 80 % всех игр?

7 Если к первому из 2-х последовательных чисел прибавить 6, а из второго вычесть 2, то частное полученных чисел будет $\dfrac{6}{5}$. Найдите эти числа.

8 В коробке лежат белые и черные шары. Число белых шаров на два меньше числа черных.

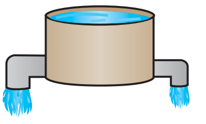
a) Сколько всего шаров в коробке, если вероятность того, что наугад взятый шар будет белым, равно 0,4?

b) Сколько белых шаров нужно добавить в коробку, чтобы вероятность того, что наугад извлеченный шар будет белым, равнялась бы $\dfrac{2}{3}$?

9 Работая одновременно Рагим и Джамиль скосят всю траву с поля за 2 часа. Джамиль, работая один, может выполнить эту работу на 3 часа быстрее, чем Рагим. За сколько часов смог бы скосить всё поле каждый из них?

10 Если число $\frac{1}{x}$ является средним арифметическим чисел $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$, то число x называется средним гармоническим чисел a и b.
a) Выразите это в виде рационального равенства и найдите x.
b) Среднее гармоническое двух положительных чисел равно 6, а разность этих чисел равна 8. Найдите эти числа.

11 Бассейн может опорожняться одновременно двумя трубами разного диаметра за 3 часа. Труба с меньшим диаметром опорожняет бассейн на 8 часов позже, чем труба с большим диаметром. За сколько часов опорожнит бассейн каждая труба в отдельности?



12 Представьте, что вы выполняете оценочные задания, еженедельный максимальный балл которых равен 60. По результатам 6-ти недель ваш средний балл равен 48.
a) Каким должен быть средний балл за следующие 2 недели, чтобы ваш средний балл за восемь недель был равен 50?
b) Если в первые 6 недель средний балл равен 50, то при каких условиях средний балл за 10 недель составит 85 % максимального балла?

13 Представьте, что вы планировали прочитать книгу в 480 страниц за 10 дней. После того, как вы прочитали половину книги оказалось, что для того, чтобы прочесть книгу в срок, вам нужно читать каждый день на 20 страниц больше. По сколько страниц в день вы читали первую половину книги?

14 Туркан думает о том, какую из предложенных работ ей выбрать. Расположение здания одной из работ очень близко к её дому. На другой работе ей предлагают за каждый час работы на 2,25 маната больше, чем на первой. Если она выберет эту работу, то работая на 10 часов меньше, может заработать 980 манат вместо 900 манат, которые ей предлагают на первой работе. Сколько манат было предложено Туркан за 1 час на каждой работе?

15 **Химия.** Новую концентрацию раствора соли и воды можно вычислить по формуле $C = \frac{A}{s+v}$, здесь A - количество соли в растворе, S - первоначальное количество раствора, v - добавленное количество воды. a) Какое количество воды необходимо добавить к 2 кг 30 %- го раствора соли, чтобы получить 10 %-ый раствор?

Указание: Здесь C = 0,1; A = 0,6; s = 2 кг. Найдите v.
b) Какое количество воды необходимо добавить к 0,5 кг 10%-го раствора, чтобы получить 2 %-ый раствор?

16 Сумма обратных значений двух чисел (отличных от нуля) равна отношению их суммы на произведение. Напишите тождество, показывающее верность этого утверждения и, упрощая, обоснуйте его.

5-3 Уравнения с модулем

По определению абсолютной величины: $|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0 \\ -x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$

Исходя из этого, при решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуль, рассматривается два случая.

1-й случай. Выражение под знаком модуля положительное или равно нулю.

2-й случай. Выражения под знаком модуля отрицательное.

1. Пример. Решите уравнение. $|3x - 2| + 11 = 5$.

Решение. В левой части равенства напишем только выражение со знаком модуля.

$|3x - 2| = 5 - 11$; $|3x - 2| = -6$. Это противоречит определению модуля, так как модуль числа должен быть не отрицательным.

Уравнение не имеет корней. **Ответ**: $\varnothing$

2. Пример. Решите уравнение $|x - 3| = 6$ двумя способами: алгебраически и графически.

Алгебраический метод.

По определению абсолютной величины, $x - 3$ равно 6, или же -6

Если $x - 3 = 6$, то $x = 9$. Если $x - 3 = -6$, то $x = -3$

Проверка. $x = 9$, $|9 - 3| = 6$; $6 = 6$

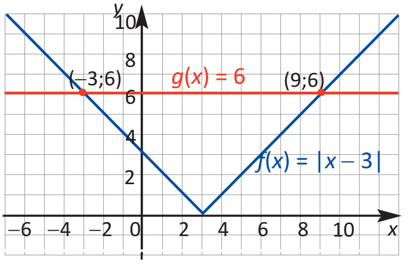
$x = -3$, $|-3 - 3| = 6$; $|-6| = 6$; $6 = 6$

Ответ: $\{9; -3\}$

Графический метод.

На одной координатной системе построим график функций $f(x) = |x - 3|$ и $g(x) = 6$. Точками пересечений этих графиков являются $(-3; 6)$ и $(9; 6)$.

Значения $x = -3$ и $x = 9$ являются корнями уравнения.



3. Пример. Решите уравнение $|x^2 - 2x| = 3$.

Решение. $x^2 - 2x$ равно или 3, или же -3

I случай. $x^2 - 2x = 3$ $\quad x^2 - 2x - 3 = 0$; $\quad (x - 3)(x + 1) = 0$ $\quad x_1 = 3$ или $x_2 = -1$

Проверка: $x = 3$: $|x^2 - 2x| = 3$; $|3^2 - 2{\cdot}3| = 3$; $|3| = 3$; $3 = 3$.

$x = -1$: $|x^2 - 2x| = 3$; $|(-1)^2 - 2{\cdot}(-1)| = 3$; $|3| = 3$; $3 = 3$.

II случай. $x^2 - 2x = -3$; $\quad x^2 - 2x + 3 = 0$,

Поскольку дискриминант отрицательный, уравнение в этом случае корней не имеет.

Ответ: $\{-1; 3\}$

4. Пример. Решите уравнение $|2x-4| = 1-3x$

Решение. По определению абсолютной величины числа:

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4, \text{ если } 2x-4 \geq 0 \\ -(2x-4), \text{ если } 2x-4<0 \end{cases}$$

I случай. Если $2x-4 \geq 0$, т.е. $x \geq 2$, то $|2x-4| = 2x-4$ и данное уравнение преобразуется к виду: $2x-4 = 1-3x$. Это записывается так:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x-4 = 1-3x \end{cases}$$

Из уравнения $2x-4 = 1-3x$ находим $x = 1$. А это значение не удовлетворяет условию $x \geq 2$. То есть в этом случае уравнение не имеет корней.

II случай. Если $2x-4<0$, т.е. $x<2$, то $|2x-4| = -(2x-4)$ и данное уравнение примет вид: $-(2x-4) = 1-3x$. В этом случае получаем систему:

$$\begin{cases} x < 2 \\ -(2x-4) = 1-3x \end{cases}$$

Из уравнения $-(2x-4) = 1-3x$ находим $x = -3$, а это значение удовлетворяет условию $x<2$. Таким образом, данное уравнение имеет один корень. **Ответ**: $\{-3\}$

Обучающие задания

1 Представьте решения (если есть) уравнений на числовой оси.

a) $|x| = 4$ b) $|x| - 3 = 10$ c) $|x| + 5 = 5$ d) $|x| = -4$

2 Решите уравнения двумя способами: алгебраическим и графическим.

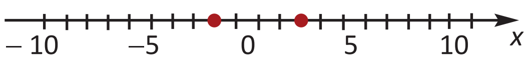
a) $|x-4| = 10$ b) $|x+3| = 2$ c) $|x-1| = 0$ d) $|x+9| = -3$

3 Решите уравнения.

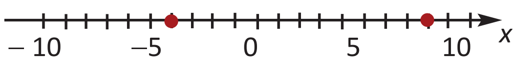
a) $|2-x| = 3$ b) $|3-2x| = 1$ c) $|4+0{,}5x| = 2$ d) $|5+2x| = 7$

4 По решениям, отмеченным на числовой оси, напишите уравнения вида $|ax+b| = c$.

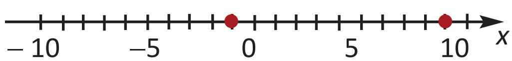
a)



b)



c)



5 Решите уравнения.

a) $|1-2x| + 6 = 9$ b) $|-2x| = 8$ c) $|-x| = 1$

d) $4 - |2x| = 3$ e) $5 - \left|\frac{1}{2}x\right| = 4$ f) $|x-2| = -\frac{1}{2}$

g) $|x^2-9| = 0$ h) $|x^2-2x| = 3$ i) $|x^2+x| = 12$

j) $|x-1| = 2x-1$ k) $|2x-3| = x-1$ l) $|x+1| = 3x-1$

6 Напишите уравнение, содержащее переменную под знаком модуля, чтобы точки на числовой оси, соответствующие его решению, были на расстоянии. a) 6 ; b) $\frac{11}{2}$ единиц от нуля.

7 Исследуйте пример и решите уравнения.

Пример. $|2x-4| = |5x+2|$

Решение. По определению абсолютной величины:

$2x-4 = 5x+2$ или $2x-4 = -(5x+2)$. Отсюда, $-3x = 6$ или $7x = 2$.

$x = -2$ или $x = \frac{2}{7}$

Проверка. $x = -2$: $|2\cdot(-2)-4| = |5\cdot(-2)+2|$; $|-8| = |-8|$; $8=8$

$x = \frac{2}{7}$: $|2\cdot\frac{2}{7}-4| = |5\cdot\frac{2}{7}+2|$; $|-\frac{24}{7}| = |\frac{24}{7}|$; $\frac{24}{7} = \frac{24}{7}$

Ответ: $\{-2; \frac{2}{7}\}$

a) $|9x+7| = |-7|$
b) $|3-4x| = |6-x|$
c) $|6{,}5n-1{,}4| = |3{,}5n-8{,}6|$
d) $\left|\frac{5p+3}{6}\right| = \left|\frac{1}{3}p-3\right|$
e) $|5n-4| = |7-5n|$
f) $|2y+1| = |2y-7|$
g) $|12a+1| = |12a-25|$
h) $\left|\frac{4p-1}{6}\right| = \left|\frac{2}{3}p+\frac{5}{6}\right|$

8 Решите уравнения.

a) $11+|x| = 3$ b) $|x|-22 = -3$ c) $7-3|x+4| = -8$

d) $|4x-3| = |5x+3|$ e) $|x-8| = |8-x|$ f) $|x-6| = 3-4x$

9 Махир решил уравнение $|x-2| = x^2$ графическим, Лейла алгебраическим способом. Чьё решение правильное?

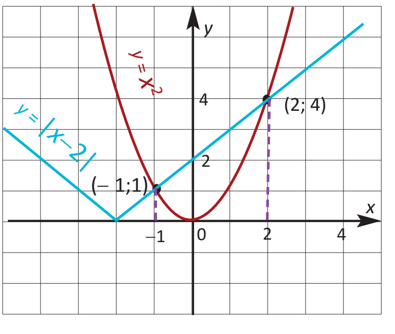
Лейла:

$|x-2| = x^2$

1. $x-2 = x^2$
$x^2-x+2 = 0$
корней нет

2. $-x+2 = x^2$
$x^2+x-2 = 0$
$(x+2)(x-1) = 0$
$x = -2$; $x = 1$

Махир:



10 Решите уравнения.

a) $|x^2-5| = -4$ b) $|x^2-5| = 4$ c) $|x^2-2| = 2$ d) $|x^2-1| = 3$

Прикладные задания

11 Напишите и изобразите на числовой оси уравнение с модулем, соответствующее каждому из заданных условий:

a) Число k находится на расстоянии 4 единиц от 2.

b) Число m находится на расстоянии 5 единиц от -3 .

c) Число $2x$ находится на расстоянии 3 единиц от 5.

d) Число $3t$ находится на расстоянии 4 единиц от -2.

12 Масса Гасана - 48 кг. Врач говорит, что эта масса отличается от идеальной на 5 %. Напишите идеальную массу, которую имел в виду врач с помощью уравнения, содержащего переменную под знаком модуля .

13 Сабухи и Камран по заданным вопросам в интернете проверили свои IQ (интеллектуальные способности). Сабухи говорит, что его IQ отличается от IQ Камрана на 15 баллов. IQ Камрана было оценено в 110 баллов. Представьте баллы, показывающие уровень способностей Сабухи в виде уравнения, содержащего переменную под знаком модуля.

5-4 Иррациональные уравнения

Иррациональными называются уравнения, в которых переменная находится под знаком радикала (или возведена в степень, являющуюся дробью).

Примеры: $\sqrt{x-1}=5$, $\sqrt[3]{x+2}-x=3$, $x^{\frac{2}{3}}=4$

При решении иррациональных уравнений обычно применяется действие возведения в степень. При возведении в четную степень множество допустимых значений переменной может расширяться. Поэтому в этом случае необходима проверка, удовлетворяют ли корни полученного уравнения заданному уравнению.

1. Пример. $\sqrt{x-2}+3=1$ Решите уравнение.

Решение. $\sqrt{x-2}=1-3$ *уединение радикала*

$\sqrt{x-2}=-2$ *упрощение*

У полученного уравнения нет корней, потому что корень квадратный не может быть отрицательным числом.

Ответ: $\varnothing$

2. Пример. $\sqrt{x+4}+2=5$ Решите уравнение.

Решение. $\sqrt{x+4}=3$ *уединение радикала*

$x+4=9$ *освобождение от радикала возведением в квадрат*

$x=5$ *решение полученного уравнения*

Проверка: Подставив x = 5 в заданное уравнение, $\sqrt{5+4}+2=5$, получим $5=5$, значит уравнение удовлетворяется. **Ответ:** $\{5\}$

3. Пример. Решите уравнение. $\sqrt{x-3}+x=5$

Решение. $\sqrt{x-3}=5-x$ *уединение радикала*

$x-3=(5-x)^2$ *освобождение от радикала возведением в квадрат*

$x^2-11x+28=0$ *упрощение и решение*

$x_1=4,\ x_2=7$

Проверка: при x = 4 , $\sqrt{4-3}+4=5$; $5=5$ уравнение удовлетворяется

при x = 7 $\sqrt{7-3}+7=9$; $9\neq 5$ уравнение не удовлетворяется

Ответ: $\{4\}$

4. Пример. $\sqrt[3]{x+2}-1=2$ решите уравнение.

Решение. $\sqrt[3]{x+2}=3$ *уединение радикала*

$x+2=27$ *освобождение от радикала возведением в куб*

$x=25$ *упрощение и решение*

Ответ: $\{25\}$

Обучающие задания

1 Решите уравнения.

a) $\sqrt{x+3}=4$ b) $\sqrt{1-2x}-3=0$ c) $\sqrt{5x-4}+1=3$

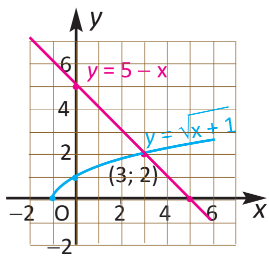
d) $\sqrt{12-x}=x$ e) $\sqrt{x^2-x-4}=x+2$ f) $\sqrt[4]{x^2+16}=\sqrt{5}$

g) $\sqrt[3]{x^2+4}=2$ h) $3+\sqrt{3x+1}=x$ i) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$

2 Какое уравнение не имеет корней?

a) $\sqrt{x-1}+3=4$ b) $\sqrt{x+1}+3=4$ c) $\sqrt{x-2}+7=10$ d) $\sqrt{x+2}-7=-10$

3 a) На рисунке показано решение уравнения $\sqrt{x+1}=5-x$ графическом способом. Найдите корни уравнения согласно графику. Обоснуйте свой ответ.
b) решите уравнение $\sqrt{x+2}=4-x$ с помощью графика.



4 Найдите допустимые значения переменной. Решите уравнение.

a) $x^{\frac{1}{2}}=3$ b) $x^{\frac{1}{3}}=2$ c) $x^{-\frac{1}{3}}=4$

d) $x^{\frac{3}{5}}\cdot x^{1,4}=9$ e) $(x-3)^{\frac{2}{3}}=4$ f) $(2x+3)^{\frac{3}{4}}=8$

Пример. $\mathbf{(x-1)^{\frac{2}{3}}=9.}$

Решение. Найдем допустимые значения переменной: $x-1\geq 0,\ x\geq 1$.

Обе части уравнения возведем в степень $\dfrac{3}{2}$:

$\left((x-1)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=9^{\frac{3}{2}},\ x-1=27,\ x=28$. Ответ; $\{28\}$

5 Решите уравнение введением новой переменной.

a) $x+\sqrt{x}=12$ c) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=2$ e) $x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}-6=0$

b) $x-\sqrt{x}=6$ d) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}=3$ f) $x+3x^{\frac{1}{2}}-4=0$

Пример. Решите уравнение $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-2=0$.

Решение. Сделав замену $\sqrt[4]{x}=t$, получим $\sqrt{x}=t^2$. Тогда в заданное уравнение, подставив t, выразим в форме $t^2-t-2=0$. Из этого уравнения находим $t_1=2$, $t_2=-1$.

Учитываем замену: 1) $\sqrt[4]{x}=2$ 2) $\sqrt[4]{x}=-1$

$x=2^4=16$ нет действительного корня

Ответ: $\{16\}$

6 Фируз решил уравнение $x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}-8=0$, как показано ниже. Исследуйте решение Фируза. Решите уравнения этим способом.

Решение Фируза

$x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}-8=0$

$(x^{\frac{1}{3}}-4)(x^{\frac{1}{3}}+2)=0$

$x^{\frac{1}{3}}-4=0$	$x^{\frac{1}{3}}+2=0$
$x^{\frac{1}{3}}=4$	$x^{\frac{1}{3}}=-2$
$(x^{\frac{1}{3}})^3=4^3$	$\varnothing$
$x=4^3=64$	

a) $x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}-6=0$

b) $x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{4}}-4=0$

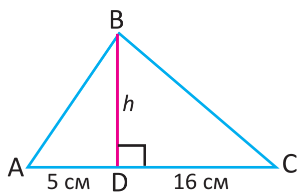
c) $x-2x^{\frac{1}{2}}+1=0$

d) $x+2x^{\frac{1}{2}}-3=0$

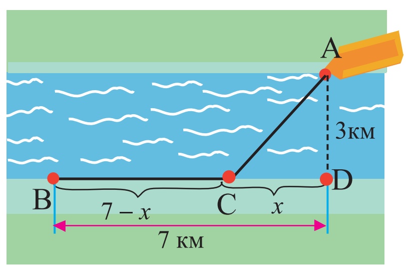
7 В ΔABC высота, проведенная из вершины B, делит сторону AC на две части AD = 5 см и DC = 16 см.

1) Обозначив BD = h, *выразите* длины сторон AB и BC через h .

2) При периметре ΔABC равным 54 см найдите h.



8 Рыбак планировал проплыть на лодке из пункта A, находящегося вблизи водохранилища, (шириной 3 км) в пункт C, а затем пройти пешком до пункта B. На противоположной стороне хранилища расстояние между пунктами D и B составляло 7 км. Скорость рыбака на лодке - 10 км/час, пешком до пункта B его скорость - 6 км/час. На весь путь был потрачен 1 час. Какой путь прошел рыбак?



5-5 Системы уравнений

Уравнения с двумя переменными. Системы уравнений

Примеры уравнений с двумя переменными:

$2x - 3y = 1$ $3x^2 - 2xy + y = 0$ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных $(x_0; y_0)$, обращающая уравнение в верное равенство.

Например, пара чисел $(-2; 5)$, первое из которых означает значение переменной x, а второе - переменной y, является решением уравнения $y - x^2 = 1$ (т.к. верно равенство $5 - (-2)^2 = 1$). Если правая часть уравнения с двумя переменными – нуль, а левая часть - многочлен в стандартном виде, то степень этого многочлена считается степенью уравнения.

Графиком уравнения с двумя переменными является множество точек на координатной плоскости, координаты которых являются решениями уравнения. Например, графиком уравнения $y - 2x = 3$ является прямая, графиком уравнения $y = x^2 - 2x$ - парабола, а графиком уравнения $x^2 + y^2 = 3$ является окружность.

Если ставится задача найти множество общих решений двух или нескольких уравнений с двумя (или более) переменными - значит нужно решить систему. Пару $(x_0; y_0)$, являющуюся решением каждого уравнения системы, называют решением системы, а совокупность всех пар называют множеством решений системы.

Обучающие задания

1 Проверьте, какая из пар является решением уравнения $x^2 - y + 2 = 0$.

a) $x = 1, y = 3$ b) $x = -2, y = 2$ c) $x = -2, y = 6$

2 Покажите любые три решения уравнения.

a) $x - 2y = 3$ b) $x^2 + 2y = 1$ c) $(x-1)(y+2) = 0$ d) $(x^2+4)(y-3) = 0$

3 Есть ли решение уравнения?

a) $x^2 + (y-2)^2 = -1$ b) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 0$

4 Найдите произведение xy для пары $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению.

a) $\sqrt{x-4} + (y+3)^2 = 0$ b) $(x+2)^2 + |y-3| = 0$

5 Постройте графики уравнений.

a) $xy = 6$ b) $x^2 + y^2 = 16$ c) $y = x^2 - 2x$

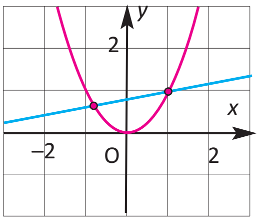
6 Являются ли: a) $(-8; 6)$; b) $(-5; 3)$ решением системы? $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x + y = -2 \end{cases}$

7 При каких значениях a и b пара $(1; 2)$ является решением системы:

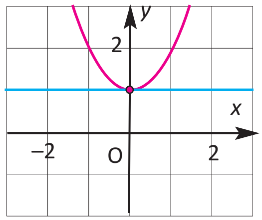
$$\begin{cases} ax + by = 5 \\ xy + b = a \end{cases}$$

Системы уравнений, в которых одно уравнение первой, а другое второй степени

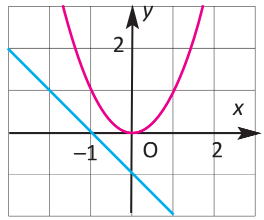
Решение системы можно определить (с некоторой точностью), построив графики обеих уравнений в одной координатной плоскости. Обычно решение системы графическим способом удобно, когда нужно найти количество решений. Количество решений системы уравнений может быть различным в зависимости от взаимного расположения графика уравнения первой степени с 2-мя переменными в виде прямой линии и графика уравнения второй степени (парабола, гипербола, окружность и т.д.).



Прямая пересекает параболу в двух точках. Система имеет два решения.

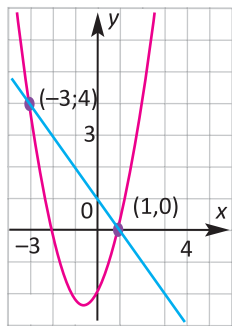


Прямая является касательной к параболе. Система имеет одно решение.



Прямая не имеет с параболой общих точек. Система не имеет решений.

1. **Пример.** Решите систему уравнений графическим методом $\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$



Решение. В одной системе координат построим графики, соответствующие каждому уравнению системы. Графиком уравнения $y = x^2 + x - 2$ является парабола, а графиком уравнения $y = -x + 1$ прямая. Определим координаты точек пересечения графиков: (1; 0) и (–3; 4). Подставив эти значения в уравнения системы, можно проверить верность решения.

1. уравнение

	левая	правая
(1; 0)	$0 = 1^2 + 1 - 2$,	$0 = 0$;
(–3; 4)	$4 = (-3)^2 - 3 - 2$,	$4 = 4$;

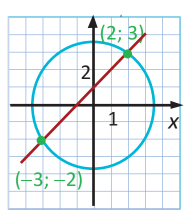
2. уравнение

левая	правая
$0 = -1 + 1$,	$0 = 0$.
$4 = -(-3) + 1 = 4$,	$4 = 4$;

Ответ: (1; 0), (–3; 4)

2. **Пример.**

Определите сколько решений имеет система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y = x + 1 \end{cases}$



Решение. Построив окружность с заданным уравнением $x^2 + y^2 = 13$ и прямую $y = x + 1$ в одной системе координат, можно увидеть что они пересекаются в двух точках. Пара $(x;\ y)$ - координаты этих точек являются решениями данной системы уравнения.

Ответ: Данная система имеет два решения.

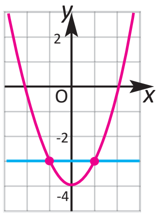
Обучающие задания

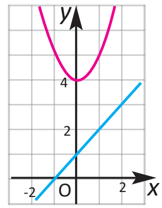
8 Внизу заданы системы уравнений и их графические решения. Определите соответствие, письменно изложите мысли о количестве решений заданной системы.

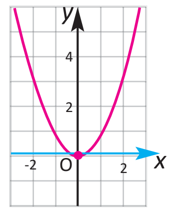
1) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$

a)


b)


c)


9 Построив окружность и прямую в одной системе координат, определите сколько решений имеет каждая система уравнений.

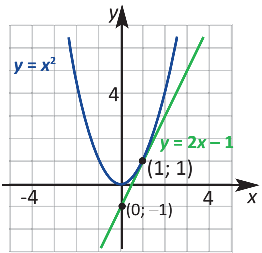
a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -x - 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

10 Решите систему уравнений графическим способом. Определите сколько решений имеет каждая система.

a) $\begin{cases} y = 3 - x \\ y = (x + 3)^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = (x - 3)^2 - 3 \\ y + x = 0 \end{cases}$

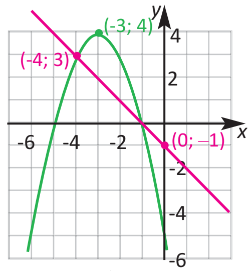
d) $\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x + y = 6 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y + 3 = x^2 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = x^2 + 8x + 11 \\ y = 4 \end{cases}$

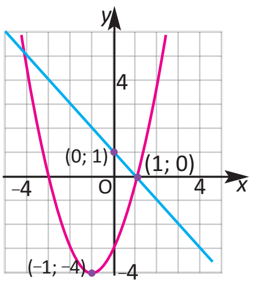
11 Напишите систему уравнений, соответствующую каждому графику.

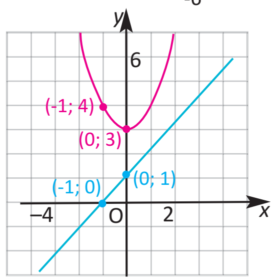
1)


Пример:

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

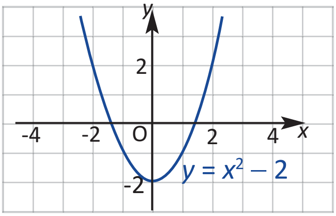
2)


3)


4)


12 Одно из уравнений системы $y = x^2 - 6x - 10$, а другое уравнение прямой, которая пересекает параболу в точках с абсциссами $x = 3$ и $x = 2$. Напишите систему уравнений.

13 Напишите такое уравнение прямой, чтобы оно составило систему с уравнением квадратичной функции, график которого изображен на рисунке, при условии, что система должна:
a) иметь два решения;
b) иметь одно решение;
c) не иметь решений.



14 **Вопрос открытого типа**. Напишите систему уравнений для каждого случая и представьте графически. a) парабола и горизонтальная линия; b) парабола и прямая с угловым коэффициентом $k > 0$.

Решение системы алгебраическим методом

Системы уравнений можно решать различными алгебраическими методами.

1. Способ подстановки

1) Из уравнения первой степени одна переменная выражается через другую.
2) Полученное выражение подставляется в другое уравнение системы и получается уравнение с одной переменной.
3) Решив это уравнение, находят значения одной переменной.
4) Находят соответсвующие значения второй переменной.

1. **Пример.** Решите систему уравнений. $\begin{cases} y + 9 = x^2 + 6x \\ -3x + y = -5 \end{cases}$

Решение:
1) Выразим y через x из уравнения $-3x + y = -5$: $y = -5 + 3x$
2) Подставим в уравнение $y + 9 = x^2 + 6x$ выражение $y = -5 + 3x$ и получим:

$-5 + 3x + 9 = x^2 + 6x$; $x^2 + 3x - 4 = 0$; $(x - 1)(x + 4) = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -4$

3) Подставим значения $x_1 = 1$, $x_2 = -4$ в выражение $y = -5 + 3x$ и найдем.
$y_1 = -5 + 3 - 1 = -2$, $y_2 = -5 + 3 - (-4) = -17$.
4) **Ответ:** $(1; -2)$, $(-4; -17)$.

2. Способ почленнего сложения (или вычитания)

2. **Пример.** Решите систему уравнений. $\begin{cases} y = x^2 - 8x - 5 \\ y = -4x + 7 \end{cases}$

Решение:
1)Вычтем из первого уравнения второе, получим:

$$- \begin{cases} y = x^2 - 8x - 5 \\ y = -4x + 7 \end{cases}$$
$$0 = x^2 - 4x - 12$$

2) Решим полученное уравнение:
$x^2 - 4x - 12 = 0$; $(x - 6)(x + 2) = 0$; $x_1 = 6$, $x_2 = -2$
3) Подставим значения $x_1 = 6$, $x_2 = -2$ в одно из уравнений системы и получим: $y_1 = -4 \cdot 6 + 7 = -17$; $y_2 = -4 \cdot (-2) + 7 = 15$
4) **Ответ:** $(6; -17)$, $(-2; 15)$

Обучающие задания

15 Решите системы уравнений способом подстановки.

a) $\begin{cases} x = y + 3 \\ yx = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ y + xy = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 6 - x \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y - x = 4 \\ xy = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 3 \\ y^2 - x = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y + x = 3 \\ x^2 + xy = 12 \end{cases}$ g) $\begin{cases} 3x^2 = 4y \\ x + y = 1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 32 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

16 Решите систему уравнений алгебраическим способом. Определите количество общих точек окружности и прямой. Проверьте графкалькулятором.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x - 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$

17 Решите систему уравнений способом сложения (вычитания).

a) $\begin{cases} y - 2x = 3 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y + x = 3 \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 11 \\ x^2 - 4x - y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + y - 11 = 0 \\ 2x + 5y - y^2 - 6 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + 4y = 10 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

18 Найдите произведение xy для пары $(x; y)$, удовлетворяющей системе уравнений. Решите систему уравнений

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{2}{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1{,}5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases}$

19 Найдите точку пересечения:

a) гиперболы $y = \frac{8}{x}$ с прямой $y = x - 2$;

b) окружности $x^2 + y^2 = 5$ с прямой $3y + x = 5$.

20 При каком значении b одна из точек пересечения прямой $y = b - x$ и параболы $y = (x - 2)^2$ находится на оси ординат? Найдите значение b, и определите, в какой еще точке пересекаются прямая и парабола. Постройте графики функций на одной координатной плоскости.

21 При помощи дискриминанта определите число решений системы.

Пример. $\begin{cases} y = x^2 + 3x \\ y = -5 \end{cases}$

Решение. Учитывая подстановки $y = x^2 + 3x$ во втором уравнении системы, запишем его в виде: $x^2 + 3x = -5$. В квадратном уравнении $x^2 + 3x + 5 = 0$. Определим, является ли дискриминант нулем, положительным или отрицательным числом.

$D = b^2 - 4ac = 9 - 20 = -11 < 0$. Так как $D < 0$, то решения системы нет.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 3x \\ y = -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 + 5 \\ y = x + 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = x^2 - 5 \\ y = 4x \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

Прикладные задания

Пример. Прямая с угловым коэффициентом $k = 2$ имеет с параболой $y = 2x^2 + 6x + 5$ одну общую точку. Найдите точку пересечения прямой с осью ординат.

Решение: Так как $k = 2$, то уравнением прямой будет $y = 2x + d$.

Из системы уравнений: $\begin{cases} y = 2x + d \\ y = 2x^2 + 6x + 5 \end{cases} \Rightarrow 2x + b = 2x^2 + 6x + 5$

$$\underset{a}{2x^2} + \underset{b}{4x} + \overbrace{(5 - d)}^{c} = 0$$

Так как, по условию система имеет одно решение, то дискриминант уравнения равен 0.

$D = 0$; $16 - 4 \cdot 2 \cdot (5 - d) = 0$; $16 - 40 + 8d = 0$; $8d = 24$; $d = 3$

Уравнение прямой будет: $y = 2x + 3$. Отсюда, при $x = 0$, получаем $y = 3$. Значит, прямая пересекает ось ординат в точке (0;3).

22 a) Прямая $y = 4x + b$ и парабола $y = -3x^2 - 2x + 4$ не имеют общих точек. Какие значения может принять b?

b) Прямая $y = 3x + b$ и парабола $y = 2x^2 - 5x + 3$ имеют одну общую точку. Найдите значение b.

23 Уравнение прямой имеет вид $y = kx - 5$. При каком значении k эта прямая будет касательной к параболе $y = 3x^2 + 4x - 2$?

24 1) При каком значении параметра b система, составленная из уравнений $y = x^2 + 1$ и $y - 2x = b$, не имеет решения?

2) При каком наибольшем целом значении b система уравнений $\begin{cases} y = b - x \\ y = (x - 2)^2 \end{cases}$ не имеет решений. Обоснуйте ответ графически.

25 Движение до момента раскрытия парашюта определяется формулой: $h(t) = -5t^2 + 1500$, после раскрытия парашюта определяется формулой: $h(t) = -5t + 450$. Здесь t (сек) означает время, h расстояние (в метрах) парашютиста до земли.

a) Через сколько секунд парашют раскрылся?
b)На каком расстоянии от земли парашют раскрылся?

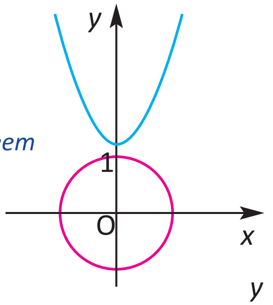
26 Самир ударом по футбольному мячу отбросил его вверх. В это же время птица вылетела из гнезда с 16-ти метровой высоты. Птица взмыла вертикально вверх со скоростью 4 м/сек. Зависимость между расстоянием h (м) мяча от поверхности земли и временем t (сек) полета задана формулой: $h(t) = 24t - 5t^2 + 1$. Через сколько секунд мяч и птица окажутся на одной высоте??

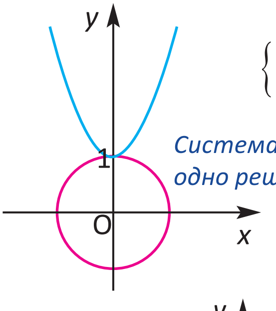
Системы уравнений, в которых оба уравнения второй степени

Количество решений системы уравнений, в которых оба уравнения второй степени можно определить графическим способом.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 + 2 \end{cases}$$

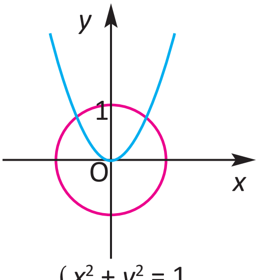
Система не имеет решений





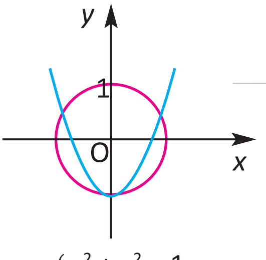
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

Система имеет одно решение



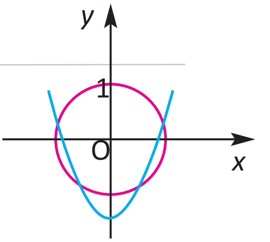
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Система имеет два решения



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 2x^2 - 1 \end{cases}$$

Система имеет три решения



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 4x^2 - 2 \end{cases}$$

Система имеет четыре решения

27 Изобразив схематически графики уравнений, входящих в системы, определите, какая система имеет два решения, одно решение, не имеет решений или же имеет бесконечное количество решений.

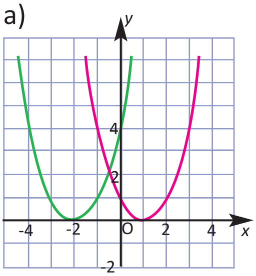
a) $\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x^2 + 3 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = (x + 4)^2 - 1 \\ y = x^2 + 8x + 15 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = -x^2 + 3 \end{cases}$

28 Решите систему уравнений графическим способом.

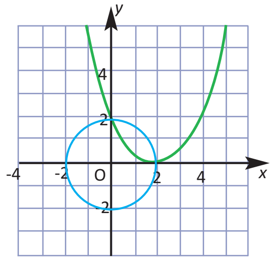
a) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y + x^2 = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = (x + 2)^2 - 4 \\ y = (x - 4)^2 - 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 - 7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} xy = 3 \\ y - x^2 = 2 \end{cases}$

29 Напишите систему уравнений, соответствующую каждому графику.

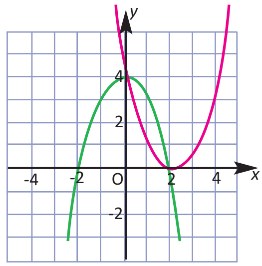
a)



b)



c)



30 Решите систему уравнений алгебраическим способом.

a) $\begin{cases} x^2 = xy + 3 \\ xy = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(y + 1) = 0 \\ x + 5xy + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - y = 3 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 - xy = 2 \\ y^2 - xy = -1 \end{cases}$

Пример. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases}$

Решение. Если 2-е уравнение системы умножить на 2 и просуммировать соответственно с левой и правой частями 1-го уравнения то получим $x^2 + y^2 - 2xy = 8 - 8$ или $(x - y)^2 = 0$. Отсюда $x = y$. Подставив это во 2-е уравнение, получим $y^2 = 4$. Тогда при $y_1 = 2$, $y_2 = -2$ и $x = y$ решения системы будут (2; 2) и (–2; –2). **Ответ:** $\{(2; 2), (-2; -2)\}$

31 **Задача открытого типа.** Зная, что точки (–1; 2) и (2; 5) являются решением системы уравнений, выполните задания.

a) Напишите такую систему уравнений, чтобы одно уравнение было линейным, а другое - второй степени и, чтобы только данная пара была бы решением системы.

b) Напишите систему уравнений, в которой оба уравнения были второй степени и только данная пара была бы решением системы.

c) Напишите такую систему уравнений, в которой оба уравнения были бы второй степени и вместе с данными парами система имела бы бесконечное количество решений.

5-6 Решение задач, приводящее к системе уравнений

1 Найдите двузначное число, если оно в 4 раза больше значения суммы его цифр и в 3 раза больше значения произведения его цифр.

2 a) Сумма двух чисел, разность которых равна 4, больше значения их произведения на 5. Найдите искомые числа.

b) Произведение двух чисел больше их суммы на 29. Если к одному числу прибавить 2-х кратное значение другого числа, то значение суммы будет 19. Найдите искомые числа.

3 Гюляндам имеет два банковских счета с простыми процентными ставками - 4,5 % и 6 %. Сумма на счету со ставкой 6 % в три раза больше, чем на счету со ставкой 4,5%. Если через год сумма денег на обоих счетах составит 4225 манат, то сколько денег на каждом счету?

	4,5%	6%
Первоначальная сумма	x	y
Годовой прирост	$0{,}045x$	$0{,}06y$
Всего	4225	

Исследуйте таблицу и нарисуйте ее в тетради. Решите задачу при помощи системы уравнений.

4 Чистящее средство А содержит 25 % кислоты, а чистящее средство В - 50 % кислоты. Сколько литров каждого средства нужно взять, чтобы получить 10 л чистящего средства с 35 % содержанием кислоты?

Указание. Обозначьте количество 25% -го чистящего средства через x, а 50% -го - через y, запишите данные в таблицу.

	25%-е	50%-е	35%-е
Количество средства	x	y	$x + y$
Количество кислоты	$0{,}25x$	$0{,}5y$	$0{,}25x + 0{,}5y$

Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y = 10 \\ \dfrac{0{,}25x + 0{,}5y}{x + y} = 0{,}35 \end{cases}$

5 На фабрике по производству шелковой одежды используются нитки чисто шелковые и с 85 %-ым содержанием шелка. Сколько килограмм каждого вида нитей нужно взять, чтобы получить 120 кг ниток с 96%-ым составом шелка?

6 Диагональ прямоугольника - 15 см. Если одну из его сторон уменьшить на 6 см, а другую на 8 см, то периметр уменьшиться в 3 раза. Найдите площадь данного прямоугольника.

7 Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 17 см. Если каждый из катетов уменьшить на 3 см, то гипотенуза будет равна 13 см. Найдите площадь первоначального треугольника.

8 Площадь прямоугольного треугольника 27 см^2. Если увеличить его катеты на 1 см, то площадь будет равна 35 см^2. Найдите катеты данного треугольника.

9 Две трубы, работая одновременно, наполняют бак за 12 минут. Если сначала первая труба наполнит первую половину бака, а затем вторая труба наполнит вторую половину бака, то весь бак наполнится за 25 минут. За какое время наполнится бак каждой трубой в отдельности?

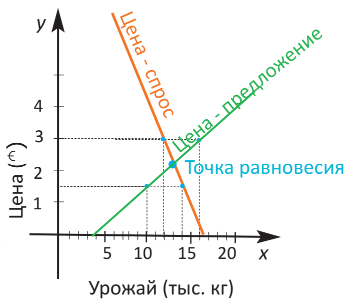
10 Двое рабочих вместе могут выполнить некоторую работу за 10 дней. После 7 дней совместной работы второй рабочий, проработав еще 9 дней, закончил работу. За сколько дней каждый рабочий в отдельности выполнил бы эту работу?

11 Из двух городов A и B, расстояние между которыми 80 км, одновременно навстречу друг другу выехали два автомобиля. После того как они встретились, один из автомобилей прибыл в B через 20 минут, а другой в A через 45 минут. Найдите скорости автомобилей.

12 Шагая по движущемуся вниз эскалатору, пассажир спускается в метро за 24 секунды, а по недвижущемуся эскалатору за 42 секунды. За сколько секунд спустится пассажир, если он будет стоять на движущемся эскалаторе?

13 Когда один килограмм черешни стоил 3 маната, то спрос на нее составил 12 000 кг при наличии 16 000 кг урожая на базаре. После снижения цены до 1,5 маната спрос на черешню увеличился до 14 000 кг при имеющихся 10 000 кг в наличии. Если условиться, что между стоимостью спроса и предложения и количеством (спрос- стоимость, предложение – стоимость) существует линейная зависимость, найдите количество проданной черешни и стоимость 1 килограмма черешни и, когда спрос и предложение совпадают.

Указание: Обозначьте через *x* (тыс. кг) массу черешни, через *y* - стоимость 1 кг черешни (манат). Запишите зависимость (предложение - стоимость) учитывая координаты точек. (16; 3) и (10; 1,5) в линейном уравнении $y - y_1 = k(x - x_1)$. Аналогично по координатам точек (12; 3) и (14; 1,5) проверьте зависимость спрос-стоимость.



Обобщающие упражнения

1 Решите уравнение.

a) $x^5 - x^3 = 0$
b) $x^4 = 16x^2$
c) $x^3 - x^2 = 4(x-1)^2$
d) $2x^3 + 2x^2 = (x+1)^2$
e) $(x-2)(x+2)(x^2+4) = 25x^2 - 16$
f) $(x^2+2x)(x^2+2x+2) = 3$
g) $x^3 + 5x^2 + 15x + 27 = 0$
h) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$
i) $\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1} = 12$
j) $\dfrac{x+4}{x-6} - \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{x+25}{x^2-4x-12}$

2 Имеются 20 %-й и 10%-й растворы солей. Сколько граммов 10 %-го раствора нужно добавить в 100 г 20%-го раствора, чтобы получить 12,5%-ый раствор?

3 Решите системы уравнений.

1) $\begin{cases} x^2 - y = 5 \\ -3x + y = -7 \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x - y = 0 \end{cases}$
3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -2x \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + 2y^2 = -6 \\ x + 8y = 0 \end{cases}$
5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ xy = 9 \end{cases}$
6) $\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 = 27 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x-4)(y-5) = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$
8) $\begin{cases} (x+y)(x-y) = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$
9) $\begin{cases} x^2 - x + 1 = y \\ y^2 - y + 1 = x \end{cases}$

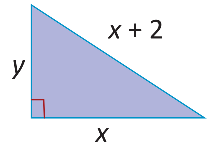
4 Из двух пунктов, расстояние между которыми 18 км, одновременно навстречу друг другу вышли две группы туристов и встретились через 2 часа. Найдите скорость каждой группы, если время, потраченное на преодоление расстояния между пунктами первой группой, на 54 минуты больше, чем второй?

5 Определите соответствие для системы уравнений.

1) $\begin{cases} x^2 - xy = 6 \\ y^2 - xy = -2 \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 + xy = 18 \\ y^2 + xy = 18 \end{cases}$
3 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 16 \\ x - y = 2 \end{cases}$

A) $|x + y| = 6$ B) $|x - y| = 2$ C) $xy = 15$ D) $|x + y| = 4$

6 Периметр треугольника равен 24 см. По данным рисунка найдите длины сторон треугольника.



7 Решите систему уравнений способом почленного деления.

a) $\begin{cases} xy - x = 2 \\ xy^3 - xy^2 = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^3 + x^2y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy^2 - x = 9 \\ xy^3 - xy = 18 \end{cases}$

8 Решите уравнения.

a) $|4 - x| = 3$ b) $4 - |x| = 3$ c) $\big||4 - |x|\big| = 3$ d) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = x + 3$

9 В коробке находятся белые и красные шары. Число белых шаров на 4 больше числа красных шаров.

a) a) Сколько всего шаров в коробке, если вероятность того, что наугад взятый шар будет белым, равно 0,7?

b) После добавления в коробку одинакового количества шаров белого и красного цветов вероятность случайного извлечения белого шара стала 0,6. Сколько шаров было добавлено в коробку?

10 Определите соответствие для уравнений.

1) $\dfrac{x}{2x - 3} = \dfrac{4}{x}$

2) $\sqrt{x^2 - x - 2} = 2$

3) $|x - 2| = 3$

A) сумма корней равна 1

B) сумма корней равна 4

C) сумма корней равна 8

D) сумма корней равна –6

11 Из вершины прямого угла вдоль его катетов начали одновременно двигаться два тела. Через три секунды расстояние между ними стало 15 метров. Зная, что расстояние, пройденное первым телом за 3 секунды, равно расстоянию, пройденному вторым телом за 4 секунды, найдите скорости этих тел.

12 Докажите, что парабола $y = x^2 + 4$ и прямая $y - x + 3 = 0$ не пересекаются.

13 Участок прямоугольной формы имеет длину равную 60 м и ширину - 8 м. На сколько метров нужно уменьшить длину и ширину этого участка, чтобы площадь уменьшилась в 2 раза, а периметр - на 44 метра?

14 При каких значениях параметра *a* система уравнений имеет единственное решение?

a) $\begin{cases} y + 2x = a \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = a \\ yx = 9 \end{cases}$

15 Изобразив схематически графики уравнений, входящих в систему $\begin{cases} y = x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ определите:

a) При каких положительных значениях *a* система имеет два решения?

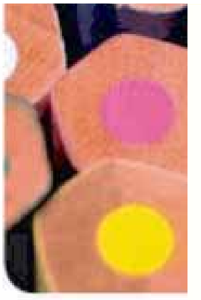
b) При каких значениях *a* система имеет три решения?

c) Существует ли, значение *a,* при котором система имеет четыре решения?

6 Многоугольники

В этом разделе вы научитесь

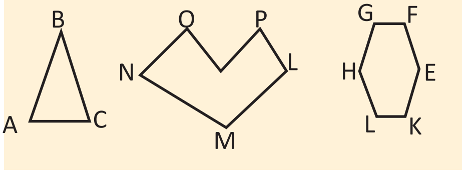
- Различать виды многоугольников
- Решать задачи на внутренние и внешние углы многоугольников
- Решать задачи на описанные и вписанные окружности в треугольник
- Свойствам вписанных и описанных четырехугольников
- Находить площадь правильных многоугольников



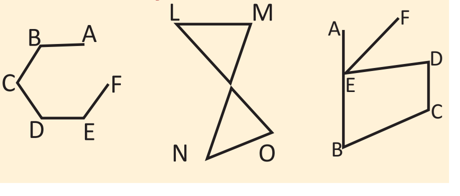
6-1 Многоугольники

Ломаной линией называется фигура, состоящая из последовательно соединенных отрезков, в которой конец одного отрезка является началом следующего. При этом два последовательно соединенных смежных отрезка не лежат на одной прямой. Если концы ломаной линии совпадают (конец последнего отрезка и начало первого отрезка), то ломаная называется замкнутой. Ломаная называется простой, если она не имеет самопересечений Простая замкнутая ломаная называется многоугольником.

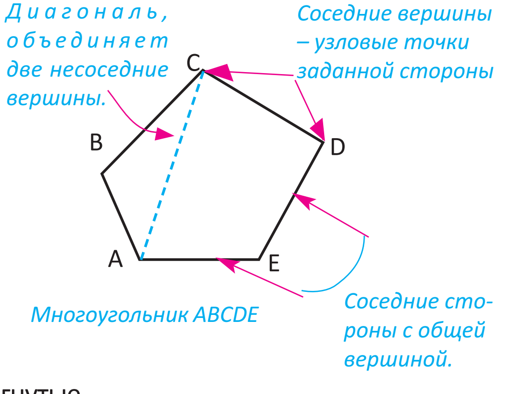
Многоугольник



Не многоугольник

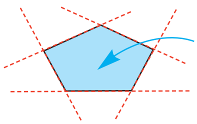


- Стороны многоугольника состоят из конечного числа отрезков. Концы сторон являются вершинами многоугольника. Многоугольник обозначают буквами, указывающими его вершины.
- Многоугольник делит точки соответствующей плоскости на две части: внутреннюю замкнутую область и внешнюю бесконечную область.



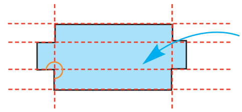
Многоугольники бывают выпуклые и вогнутые.

Выпуклый многоугольник



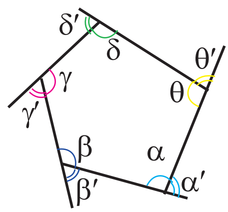
Многоугольник называется выпуклым, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону.

Вогнутый многоугольник



Вогнутый многоугольник находится в различных полуплоскостях относительно прямой, проходящей хотя бы через одну сторону.

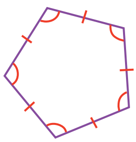
Отрезок, соединяющий любые две точки, взятые внутри выпуклого многоугольника, целиком расположен внутри многоугольника.



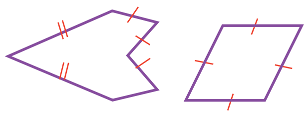
Угол, образованный двумя сторонами, исходящими из данной вершины, называется **внутренним углом** при данной вершине выпуклого многоугольника. Угол, смежный с внутренним углом многоугольника, называется **внешним углом** многоугольника.
На рисунке $\alpha, \beta, \delta, \theta, \gamma$ – внутренние углы, $\alpha', \beta', \delta', \theta', \gamma'$ - внешние углы многоугольника. Сумма внутренних и внешних углов (взятых по одному внешнему при каждой вершине) многоугольника при любой вершине равна $180°$.

Многоугольник называется правильным, если у него все стороны и все углы конгруэнтны.

Правильный многоугольник

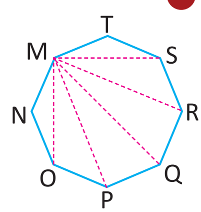


Неправильный многоугольник



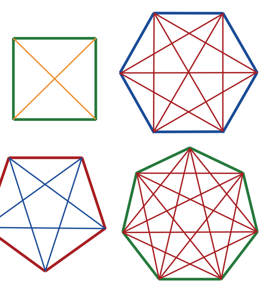
Многоугольник с *n* - сторонами называют еще и *n* - угольным. Из любой вершины выпуклого *n* - угольника можно провести $(n-3)$ диагонали.

Обучающие задания



1 По рисунку напишите названия: a) сторон; b) пяти вершин несмежных с какой-либо вершиной; c) двух смежных сторон; d) пяти диагоналей фигуры.

2 a) Нарисуйте в тетради два выпуклых и два вогнутых многоугольника.
b) Нарисуйте в тетради выпуклый пятиугольник и все его диагонали.

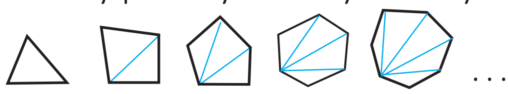


3 В тетради нарисуйте многоугольники и их диагонали как показано на рисунке. Составьте таблицу, показывающую число сторон, возможное число диагоналей, проведенных из одной вершины, и общее число всех диагоналей многоугольника.
Обоснуйте формулу $\dfrac{n(n-3)}{2}$, показывающую количество диагоналей в *n*- угольнике.

4 a) Сколько диагоналей имеет выпуклый восьмиугольник и двенадцатиугольник?
b) Сколько сторон у многоугольника с общим числом диагоналей 35; 90?

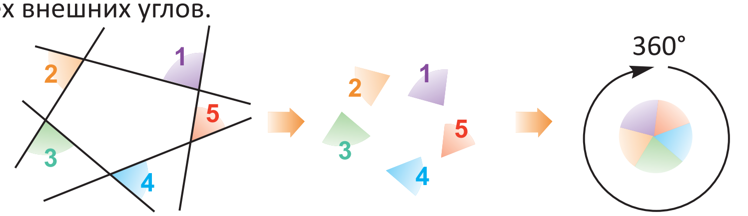
5 а) Найдите число сторон выпуклого многоугольника, у которого число диагоналей в 2 раза больше числа сторон.
b) Число диагоналей в 6 раз больше числа сторон. Сколько диагоналей выходят из одной вершины этого выпуклого многоугольника ?

Исследование 1. Заполните нижеприведенную таблицу. Напишите формулу для вычисления суммы внутренних углов выпуклого n- угольника.



Количество сторон многоугольника	3	4	5	6	7	. . .	n
Диагонали, исходящие из одной вершины	0	1				. . .	
Количество треугольников	1	2					
Сумма внутренних углов	$1\cdot 180°$ $180°$	$2\cdot 180°$ $360°$					

Исследование 2. На листе бумаги нарисуйте выпуклый многоугольник, закрасив внешний угол при каждой вершине, как показано на рисунке. Вырежьте внешние углы и приклейте на другую бумагу так, чтобы, не прикрывая друг друга, все вершины были в одной точке. Выразите свое мнение о сумме всех внешних углов.



Сумма внутренних и внешних углов выпуклого многоугольника

Теорема 1. Сумма **внутренних углов** выпуклого n - угольника ($n \geq 3$) равна $180° \cdot (n-2)$.

Доказательство: Теорема верна при $n = 3$. Рассмотрим случай $n > 3$, из одной вершины n – угольника можно провести диагонали в количестве $n-3$. Эти диагонали делят его на треугольники в количестве $n-2$. Сумма внутренних углов многоугольника равна сумме углов треугольников. Исходя из того, что сумма углов каждого треугольника 180°, сумма внутренних углов многоугольника будет $180°\cdot(n-2)$.

Следствие: Каждый внутренний угол правильного n - угольника равен $\dfrac{180°(n-2)}{n}$

Теорема 2. Сумма **внешних углов** выпуклого многоугольника равна 360°.

Сумма внешних углов = сумма развернутых углов - сумма внутренних углов:
$180°\cdot n - 180°(n-2) = 180°n - 180°n + 360° = 360°$

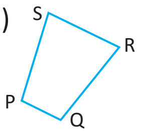
Следствие 2. Каждый внешний угол правильного n- угольника равен $\dfrac{360°}{n}$.

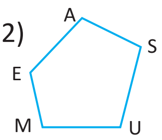
Пример. Внешний угол правильного многоугольника - 60°.
Найдите: a) градусную величину внутреннего угла многоугольника;
b) количество сторон многоугольника.
Решение. a) Внутр. угол + Внешн. угол = 180°; Внутр. угол = 180° – 60° = 120°

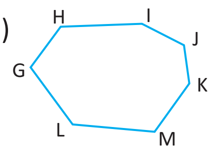
b) $\dfrac{360^\circ}{n} = 60^\circ$, $\quad n = \dfrac{360^\circ}{60^\circ} = 6$

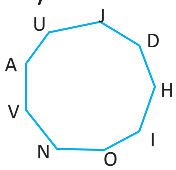
Обучающие задания

6 По рисунку найдите сумму внутренних углов каждого многоугольника.

1) 

2) 

3) 

4) 

7 1) Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна 1800°. Найдите сколько: a) сторон; b) диагоналей имеет многоугольник.

2) Найдите градусные меры внутренних и внешних углов правильного: a) шестиугольника, b) десятиугольника.

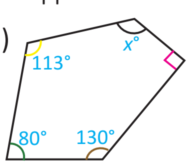
3) Сумма внутренних углов правильного многоугольника равна 1080°. Найдите градусные меры каждого внутреннего и внешнего угла многоугольника.

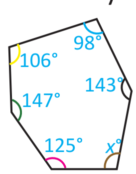
8 Найдите градусные меры внутренних и внешних углов правильного многоугольника с числом сторон $n = 8$; $n = 9$; $n = 12$; $n = 15$.

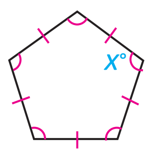
9 Выпуклый многоугольник имеет 27 диагоналей. Найдите сумму внутренних углов этого многоугольника.

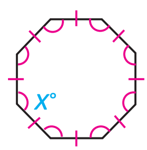
10 Внешний угол правильного многоугольника составляет 25% внутреннего угла. Найдите число сторон многоугольника.

11 Найдите неизвестный угол многоугольника.

a) 

b) 

c) 

d) 

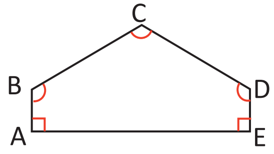
12 Внутренние углы выпуклого пятиугольника равны: 60°, 80°, 120°, 140°. Найдите градусную меру пятого угла.

13 Внутренние углы выпуклого шестиугольника равны 90°, 110°, 120°, 124° и 116°. Найдите неизвестный внутренний угол и внешний угол при той же вершине шестиугольника.

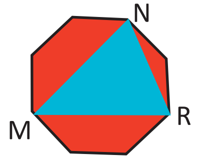
14 По данному внешнему углу найдите число сторон правильного многоугольника. 1) 72° 2) 40° 3) 36° 4) 30°

15 По данному внутреннему углу найдите число сторон правильного многоугольника. 1) 120° 2) 150° 3) 140° 4) 160°

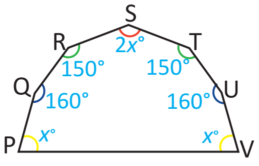
16 a) На рисунке изображен вид крыши дома спереди. По отмеченным знакам напишите градусные меры каждого из углов.



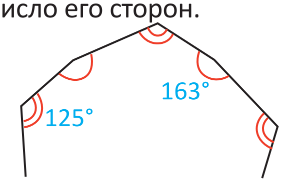
b) На знаке STOP, имеющем вид правильного восьмиугольника, изображен треугольник MNR. По сторонам этого треугольника определите его вид.



17 a) На рисунке изображен вид палатки спереди. Найдите градусные меры неизвестных углов.



b) Внутренние углы многоугольника, градусные меры которых указаны на рисунке, состоят из последовательности конгруэнтных углов. Воспользовавшись внешними углами многоугольника, найдите число его сторон.



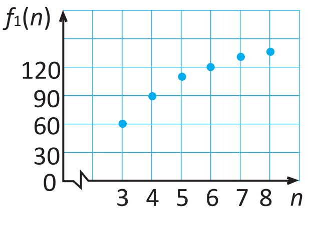
18 В правильном многоугольнике сумма внутренних углов в 11 раз больше суммы внешних углов. Сколько сторон у многоугольника?

19 Найдите градусную меру внешнего и внутреннего угла правильного многоугольника при $n = 10$; $n = 30$; $n = 50$. На рисунке изображены графики функций:

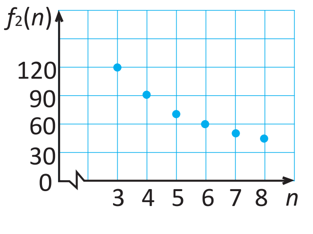
$$f_1(n) = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n} \quad \text{и} \quad f_2(n) = \frac{360^\circ}{n}.$$

Представьте изменения внутренних и внешних углов правильного многоугольника с увеличением значения *n*.

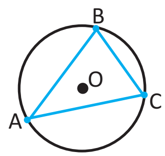
$$f_1(n) = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n}$$



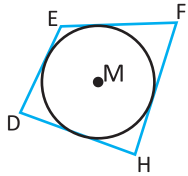
$$f_2(n) = \frac{360^\circ}{n}$$



6-2 Вписанные и описанные многоугольники

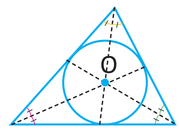


Определение 1. Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины лежат на окружности, а окружность называется описанной около многоугольника. На рисунке треугольник ΔABC вписан в окружность.

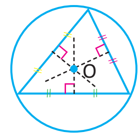


Определение 2. Многоугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются окружности, а окружность называется вписанной в многоугольник. На рисунке четырехугольник DEFH описан около окружности.

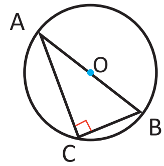
Вписанные и описанные треугольники



Теорема 1. В любой треугольник можно вписать окружность. Центром этой окружности будет точка пересечения биссектрис углов треугольника.

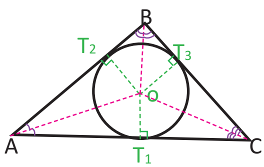


Теорема 2. Около любого треугольника можно описать окружность. Центром этой окружности будет точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

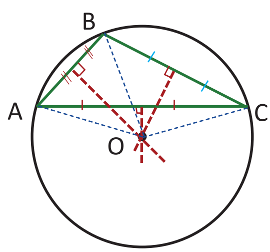


Теорема 3. Если в окружность вписан прямоугольный треугольник, то гипотенуза является диаметром этой окружности.

Обратная теорема. Если сторона треугольника, вписанного в окружность, является диаметром, то этот треугольник - прямоугольный.



Доказательство 1-й теоремы (текстовое). Проведем перпендикуляры OT_1, OT_2, OT_3 к сторонам из точки O, являющейся пересечением биссектрис $\angle A$ и $\angle B$ треугольника ΔABC. Исходя из того, что произвольная точка, взятая на биссектрисе, находится на одинаковом расстоянии от сторон угла, получим $OT_1 = OT_2$ и $OT_2 = OT_3$. Точка O находится и на биссектрисе угла $\angle C$ (почему?). Нарисуем окружность с центром в точке O и радиусом $r = OT_1$. Так как стороны треугольника перпендикулярны радиусам OT_1, OT_2, OT_3, то в точках T_1, T_2, T_3 они касаются окружности. Значит, эта окружность является вписанной в треугольник.

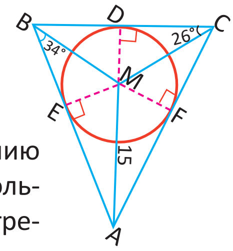


Доказательство 2-й теоремы. Через середины сторон AB и AC треугольника ABC проведем перпендикуляры и точку их пересечения обозначим буквой O. По свойству серединного перпендикуляра к отрезку: $OA = OB = OC$. Так как ΔAOC равнобедренный, то точка O находится и на серединном перпендикуляре стороны AC. Окружность с центром в точке O и радиусом $R = AO$, пройдя через все три вершины треугольника, будет описанной около него.

Замечание: Около всякого треугольника можно описать только одну окружность. В данную окружность можно вписать (описать) бесконечное количество треугольников.

Обучающие задания

1 Точка M-центр вписанной окружности. $\angle MBA = 34^\circ$, $\angle MCB = 26^\circ$, $MA = 15$. Найдите: a) $\angle MAC$; b) MF.

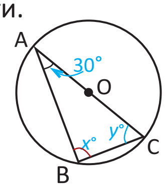


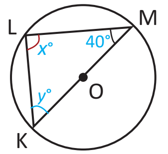
2 Впишите в окружность треугольник. По расположению центра окружности - внутри треугольника, вне треугольника или на стороне треугольника - определите вид треугольника.

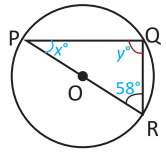
a) Остроугольный треугольник b) Прямоугольный треугольник

c) Тупоугольный треугольник

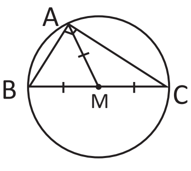
3 Найдите градусные меры углов, обозначенных переменными для треугольника, вписанного в окружность. Точка O является центром окружности.

a) 

b) 

c) 

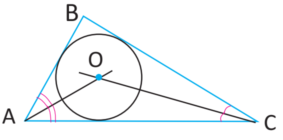
4 Длина медианы AM треугольника ΔABC, вписанного в окружность равна 10 см. Найдите площадь треугольника ABC, если AB = 12 см, M - центр окружности.



5 Исследуйте шаги построения окружности, вписанной в треугольник. Постройте в тетради.

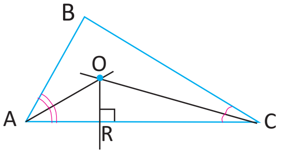
Построение окружности, вписанной в треугольник

Шаг 1



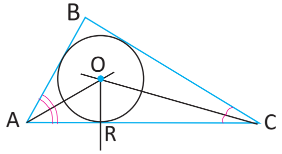
Начертите треугольник ABC и его две биссектрисы. Обозначьте их точку пересечения буквой **O**.

Шаг 2



Из точки O начертите к стороне перпендикуляр и обозначьте точку пересечения стороны буквой R.

Шаг 3

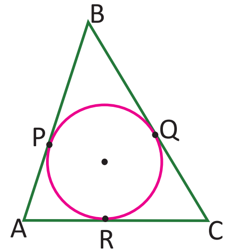


Острый наконечник циркуля расположите на точке O и начертите окружность с радиусом OR.

Центр вписанной в треугольник окружности находится в точке пересечения его биссектрис.

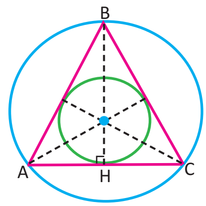
6 Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, точкой касания делит боковую сторону на отрезки равные 3 см и 4 см. Найдите периметр треугольника. Сколько решений имеет задача?

7 Вписанная окружность касается сторон треугольника ΔABC в точках P, Q и R.
a) По рисунку назовите конгруэнтные отрезки.
b) Если AB=10 см, BC=12 см, AC=8 см ,найдите длины отрезков AP, PB, BQ, QC, AR, RC.
c) Пусть AB = *c*, BC = *a*, AC = *b*. Выразите отрезки AP, BP, CR через переменные *a*, *b*, *c*.



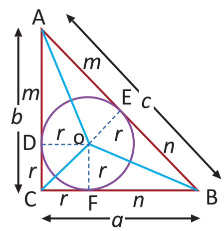
8 a) Докажите, что центры описанных и вписанных окружностей равностороннего треугольника находятся в точке пересечения медиан. Покажите справедливость формул: $R = \frac{2}{3}h$ и $r = \frac{1}{3}h$

Здесь R- радиус описанной окружности, *r* - радиус вписанной окружности, *h* - высота треугольника.
b) Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей около равностороннего треугольника с периметром равным 9 см.

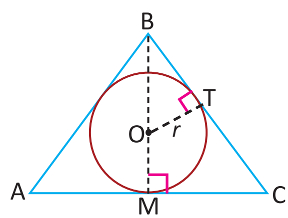


9 a) Пользуясь рисунком, покажите справедливость формулы $r = \frac{a+b-c}{2}$ для радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник.

b) В прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 вписана окружность и около него описана окружность. Найдите их радиусы.



10 1) Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник со сторонами AB=BC=10, AC=12, по нижеприведенным шагам:
- Обоснуйте, что центр окружности находится на высоте BM.
- Найдите высоту BM.
- Обозначьте центр окружности через O, точку касания со стороной BC – T, радиус окружности - r.
- обоснуйте конгруэнтность ΔBMC и ΔBTO.
- Используйте данные, записав отношение равенства соответствующих сторон.

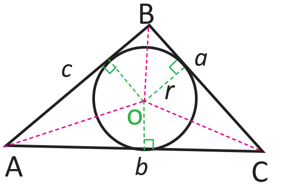


2) Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ΔABC со сторонами AB=BC=13, AC=10.

11 a) Покажите справедливость формулы нахождения радиуса окружности, вписанной в треугольник:

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

(S - площадь треугольника, *a, b, c* - его стороны).

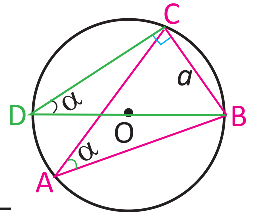


Указание: Выразите $S_{\Delta ABC}$ через $S_{\Delta AOC}$, $S_{\Delta AOB}$, $S_{\Delta BOC}$.

b) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник со сторонами 6; 25; 29.

12 Отношение стороны треугольника, вписанного в окружность, к синусу противоположного угла равен диаметру этой окружности: $d = \dfrac{a}{\sin\alpha}$

Исследуйте данное доказательство для случая, когда центр окружности расположен внутри треугольника, обсудите и запишите в тетради.



Доказательство: Начертите диаметр BD и хорду DC.

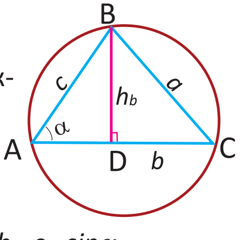
Предложение	Обоснование
1. $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$, $BD = d$	1. Задано
2. $\angle BDC \cong \angle BAC$	2. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, конгруэнтны.
3. $\angle BCD = 90^\circ$	3. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, является прямым углом.
4. $\sin\angle BDC = \dfrac{BC}{BD}$	4. Определение синуса острого угла ΔBDC
5. $\sin\alpha = \dfrac{a}{d}$, $d = \dfrac{a}{\sin\alpha}$	5. Упрощение

13 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см. Угол, образованный боковыми сторонами, 120°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

14 a) Покажите справедливость формулы радиуса окружности, описанной около треугольника: $R = \dfrac{abc}{4S}$

S - площадь треугольника,

a,b,c - его стороны.



Решение: По формуле площади треугольника $S = \dfrac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha$

$$R = \frac{d}{2} = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha} = \frac{abc}{4S}$$

Учитывая, что $d = \dfrac{a}{\sin\alpha}$

Знаменатель и числитель дроби умножаются на $(b \cdot c)$

Учитывается формула площади треугольника

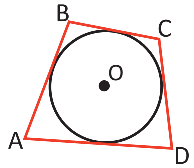
b) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 10; 10; 12.

15 a) Найдите радиусы окружностей, вписанной и описанной около треугольника со сторонами 13 см, 14 см и 15 см.

b) Найдите радиусы окружностей вписанной и описанной около равнобедренного треугольника, в котором высота, опущенная к основанию равна 20 см, а отношение основания к боковой стороне равно 4 : 3.

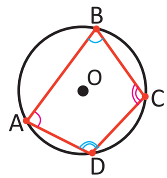
Свойство четырехугольников, вписанных в окружность и описанных около нее

В отличие от треугольников, не во всякий четырехугольник можно вписать или описать около него окружность.



Теорема 4. В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны:
AB + CD = BC + AD

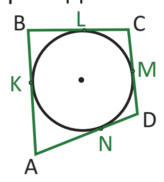
Обратная теорема. Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.



Теорема 5. Сумма двух противоположных углов четырехугольника, вписанного в окружность, равна 180°.
$\angle A + \angle C = 180^\circ$, $\angle B + \angle D = 180^\circ$

Обратная теорема. Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около этого четырехугольника можно описать окружность.

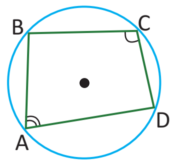
Доказательство теоремы 4: Пусть точки K, L, M, N будут точками касания сторон четырехугольника. По свойству касательных, проведенных из данной точки к окружности,



AK = AN, BK = BL, CM = CL, DM = DN.
Если сложить почленно эти равенства, получим:
AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN
или же AB + CD = BC + AD.

Обучающие задания

16 Завершите доказательство теоремы 5:

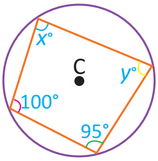


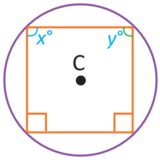
Предложение	Обоснование
1. $\angle A = \dfrac{\smile BCD}{2}$, $\angle C = \dfrac{\smile DAB}{2}$	1. ....
2. $\angle A + \angle C = \dfrac{\smile BCD + \smile DAB}{2}$	2. Почленное сложение
3. $\angle A + \angle C = \dfrac{360^\circ}{2} = 180^\circ$	3. ....

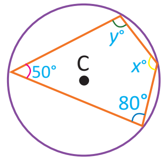
17 Сумма противоположных сторон четырехугольника, описанного около окружности, равна 12 см. Найдите периметр четырехугольника.

18 Длины трех сторон описанного четырехугольника 4 см, 6 см, 7 см. Найдите периметр этого четырехугольника. Исследуйте возможные варианты.

19 Найдите градусные меры неизвестных углов четырехугольника, вписанного в окружность.

a) 

b) 

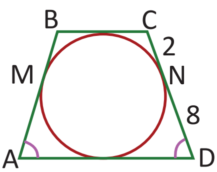
c) 

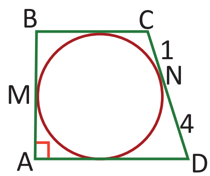
20 a) Докажите, что вписанная трапеция равнобедренная.

b) Покажите, что средняя линия трапеции, описанной около окружности, равна боковой стороне.

c) Нарисуйте параллелограммы, вписанные и описанные около окружности. В каком случае это возможно? Определите вид параллелограмма.

21 По данным рисункам найдите периметр и площадь описанной трапеции.

a) 

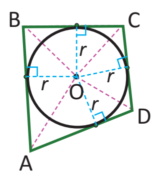
b) 

22 a) Покажите справедливость формулы нахождения радиуса окружности, вписанной в четырехугольник: $r = \frac{2S}{P}$

(S - площадь четырехугольника, P - его периметр)

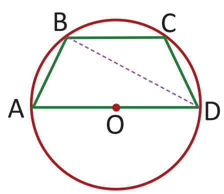
Указание: Учтите, что $S_{ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta AOD}$.

b) Около окружности радиуса 5 см описан четырехугольник, сумма длин противоположных сторон которого, 26 см. Найдите площадь четырехугольника.



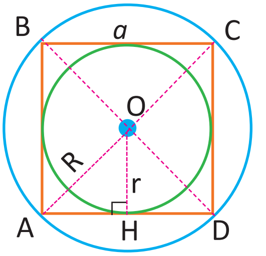
23 Найдите длину окружности, вписанной в трапецию с основаниями 6 см и 1 см и боковой стороной 4 см.

24 Найдите радиус окружности и площадь трапеции ABCD, вписанной в окружность с центром в точке O, если BC = 6 см, $\angle CBD = 30^\circ$ и AD - диаметр.



25 Найдите диаметр окружности, вписанной в ромб, с диагоналями равными 6 см и 8 см.

Практическое задание.

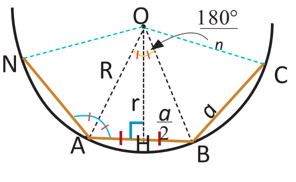


1. Нарисуйте квадрат ABCD в тетради и обозначьте точку пересечения диагоналей через O.
2. Нарисуйте окружность, проходящую через вершины квадрата, установив кончик циркуля в точке O. Выразите радиус (R) этой окружности через сторону (a) квадрата: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
3. Нарисуйте окружность, касающуюся сторон квадрата, установив кончик циркуля в точке O. Выразите радиус этой окружности через сторону квадрата: $r = \frac{a}{2}$

Исследование. Точка пересечения диагоналей квадрата является центром как вписанной так и описанной окружности. Можно ли начертить окружность, описанную и вписанную в любой правильный многоугольник?

Вписанные и описанные правильные многоугольники

В любой правильный многоугольник можно вписать и описать окружность. Центры этих окружностей совпадут. Пусть O - точка пересечения биссектрис углов из соседних вершин A и B. ΔAOB равнобедренный. Соединим точку O с остальными вершинами многоугольника. Полученные при этом треугольники (ΔBOC, ΔAON и т.д) конгруэнтны к ΔAOB по признаку СУС. Отсюда следует, что OC, NO и т.д также являются биссектрисами. Нарисуем окружность радиусом OA с центром в точке O. Эта окружность, пройдя через все вершины, будет описанной окружностью. А окружность с радиусом OH, касаясь всех сторон многоугольника, будет вписанной окружностью.



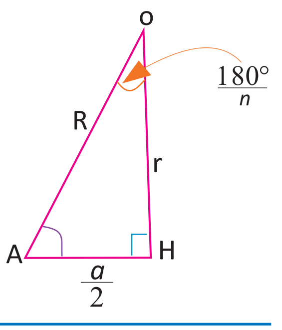
R- радиус окружности, описанной около правильного n-угольника,
r - радиус вписанной окружности, a-сторона правильного n-угольника,

$$\angle AOB = \frac{360°}{n}$$ - центральный угол

Поскольку $OA = R$, $OH = r$, $AH = \frac{a}{2}$, $\angle AOH = \frac{180°}{n}$ по определению синуса, тангенса острого угла в ΔAOH получим:

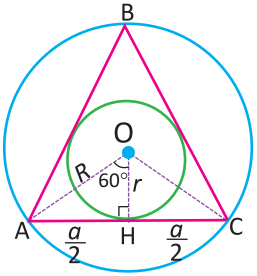
$$\frac{AH}{OA} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \sin\frac{180°}{n}, \qquad \mathbf{R = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}}$$

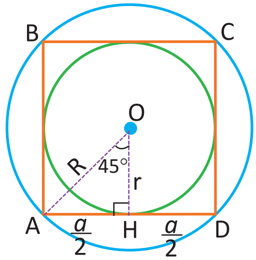
$$\frac{AH}{OH} = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \tan\frac{180°}{n}, \qquad \boldsymbol{r = \frac{a}{2\tan\frac{180°}{n}}}$$

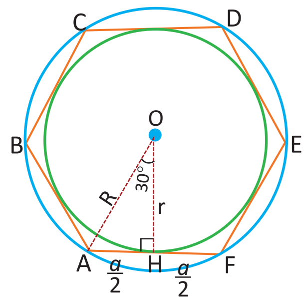


Обучающие задания

26 Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей около правильного: a) треугольника; b) четырехугольника; c) шестиугольника со стороной *a*.







Указание. Точка O будучи точкой пересечения биссектрис заданного многоугольника, в равенствах

$$\sin\angle AOH = \frac{AH}{OA},\ \tan\angle AOH = \frac{AH}{OH} \quad \text{запишите} \quad AH = \frac{a}{2},$$

$AO = R$, $OH = r$, учтите градусную меру угла $\angle AOH$ и выразите ***r*** и R через a из полученных соотношений.

27 a) Найдите радиусы окружностей, вписанной и описанной около правильного треугольника со стороной 6 см.
b) Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник - 9 см. Найдите сторону этого треугольника и радиус описанной окружности.

28 a) Найдите радиусы окружностей, вписанной и описанной около квадрата со стороной 8 см.
b) Радиус окружности, вписанной в квадрат, - 5 см. Найдите сторону квадрата и радиус описанной окружности.

29 a) Найдите радиусы окружностей, вписанной и описанной около шестиугольника со стороной 6 см.
b) Радиус окружности, вписанной в правилный шестиугольник - 3 см. Найдите сторону шестиугольника и радиус описанной окружности.

30 a) На рисунке покажите, что большая диагональ правильного шестиугольника является диаметром описанной окружности. Результат обобщите для правильного $2n$ - угольника.
b) Найдите периметр правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R. Выразите длины большей и меньшей диагоналей этого шестиугольника через R.

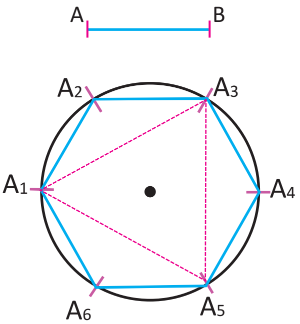
31 Длина большой диагонали правильного шестиугольника - 6 см.
Найдите:
a) сторону;
b) меньшую диагональ;
c) радиусы вписанной и описанной окружностей.

32 В квадрат стороной 6 см вписана окружность. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

33 Разность радиусов описанной и вписанной окружностей в правильный треугольник - $2\sqrt{3}$. Найдите периметр треугольника.

34 **Задача на построение:** Рассмотрите правила построения правильного шестиугольника и выполните в тетради.

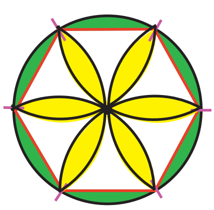
1. Нарисуйте отрезок AB, равный стороне правильного шестиугольника.
2. Циркулем нарисуйте окружность, радиус которой равен длине этого отрезка.
3. Не меняя раствора циркуля, разбейте всю окружность на части одинаковой длины и отметьте их точками.
4. Последовательно соедините отмеченные точки. Получится правильный шестиугольник, вписанный в окружность.



Если соединить попарно некоторые вершины правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, например, вершины A_1, A_3, A_5, то получится правильный треугольник. Чтобы построить правильный четырехугольник, нужно провести два взаимно перпендикулярных диаметра и последовательно соединить их концы. Пусть в окружность вписан правильный *n* -угольник. Отметим точки пересечения серединных перпендикуляров его сторон с окружностью и соединим эти точки с концами сответствующих дуг. Таким образом, будут построен правильный 2*n* -угольник.

35 a) Принимая каждую клетку за 4 единицы постройте правильный шестиугольник в тетради.
b) Отметив точки пересечения серединных перпендикуляров сторон шестиугольника с окружностью постройте правильный двенадцатиугольник.

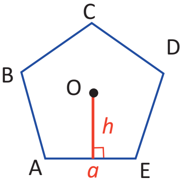
36 Дизайнер планирует вырезать из картона и раскрасить орнамент как на рисунке. Опишите шаги выполнения этой работы. Нарисуйте такие же орнаменты на тетради.



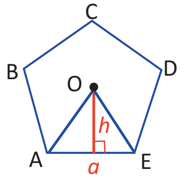
Центр правильного многоугольника. Центр окружности, описанной около правильного многоугольника или вписанной в него, называется центром правильного многоугольника. Центр правильного многоугольника находится на одинаковом расстоянии от всех вершин и всех сторон многоугольника.
Апофема правильного многоугольника. Перпендикуляр, проведенный из центра многоугольника к его стороне, называется апофемой**.**
Апофема правильного многоугольника равна радиусу вписанной окружности.

Выполните следующее упражнение по шагам и выведите формулу зависимости площади правильного многоугольника от апофемы.

Практическая работа **Апофема и площадь многоугольника**



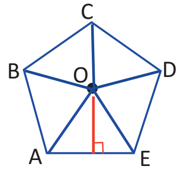
1. Нарисуйте правильный пятиугольник ABCDE.
2. Из центра O проведите перпендикуляр (h), делящий сторону AE (AE = a) пополам.
3. Соедините точки A и E с центром O.
4. Выразите площадь треугольника AOE переменными a и h. Обратите внимание, какому измерению многоугольника соответствует высота треугольника.



5. Соедините точки B, C, D с точкой O. Сравните площади полученных треугольников.
6. Обратите внимание на то, что площадь пятиугольника равна сумме площадей этих треугольников.
Площадь пятиугольника:

$$S = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah =$$

$$= \frac{1}{2}(ah + ah + ah + ah + ah) = \frac{1}{2} \cdot 5ah$$



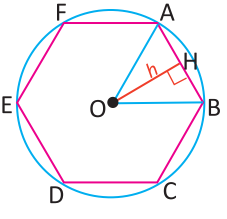
7. Какому измерению соответствует выражение 5a? Выразите площадь пятиугольника через его периметр.

6-3 Площадь правильного многоугольника

Соединив центр правильного n-угольника с вершинами, получится n-е количество равнобедренных конгруэнтных треугольников.
Площадь правильного многоугольника = количеству треугольников × площадь одного треугольника.

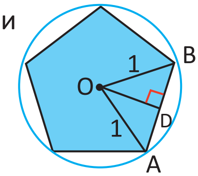
$$S = n \cdot \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(a \cdot n)h$$

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}Ph} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{S = \frac{1}{2}anh}$$



Здесь S -площадь, P *-периметр,* a - длина стороны многоугольника, n -число сторон, h -апофема.

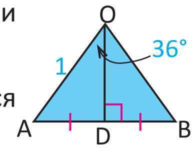
Пример. В окружность радиусом, равным единице, вписан правильный пятиугольник. Найдите апофему, сторону и площадь пятиугольника. Ответ округлите до десятых.



Решение. Площадь пятиугольника: $S = \frac{1}{2}Ph$

Нужно найти апофему h и периметр P

Центральный угол $\angle AOB$ равен $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. ΔAOB - равнобедренный треугольник, а значит его высота OD является и медианой, и биссектрисой. Тогда $\angle AOD = 36^\circ$.



Чтобы найти стороны треугольника ΔAOD воспользуемся тригонометрическими соотношениями:

$\cos 36^\circ = \frac{OD}{AO}$ $\sin 36^\circ = \frac{AD}{AO}$

$OD = AO \cos 36^\circ \approx 1 \cdot 0{,}8 = 0{,}8$ $AD = AO \sin 36^\circ \approx 1 \cdot 0{,}6 = 0{,}6$

OD - апофема пятиугольника, $h = OD \approx 0{,}8$;

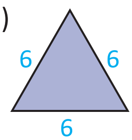
Сторона пятиугольника: $AB = 2 \cdot AD \approx 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$

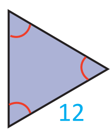
Площадь пятиугольника: $S = \frac{1}{2} h \cdot P \approx \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 5 \cdot 1{,}2 = 2{,}4$ (квадратных единиц)

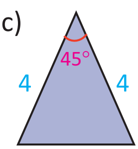
Обучающие задания

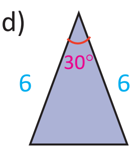
1 Покажите, что площадь равностороннего треугольника со стороной a вычисляется по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

2 Найдите площадь треугольников.

a) 

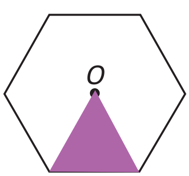
b) 

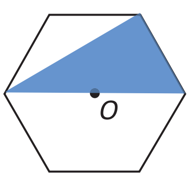
c) 

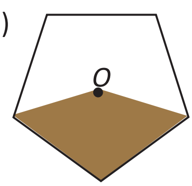
d) 

3 Докажите, что если стороны правильного шестиугольника и правильного треугольника равны, то площадь шестиугольника в шесть раз больше площади треугольника.

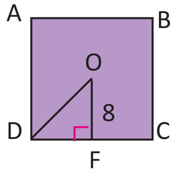
4 Найдите площадь правильного многоугольника, если известно, что площадь закрашенной части 8 см^2. O - центр многоугольника.

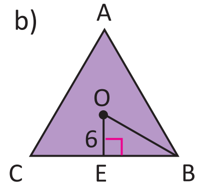
a) 

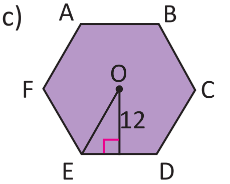
b) 

c) 

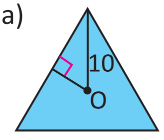
5 По рисунку найдите площадь правильного многоугольника. Точка O центр многоугольника.

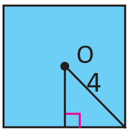
a)


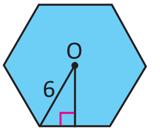
b)


c)


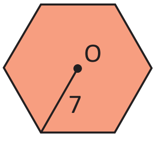
6 По рисунку найдите периметр и площадь правильного многоугольника. Точка O - центр многоугольника.

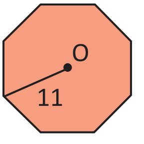
a)


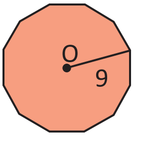
b)


c)


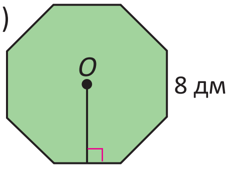
7 По рисунку найдите периметр и площадь правильного многоугольника. Точка O - центр многоугольника.

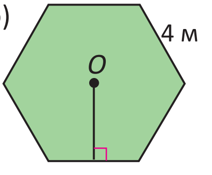
a)


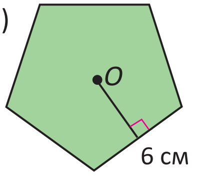
b)


c)


8 По длине стороны вычислите площадь правильных многоугольников. Точка *O* - центр многоугольника.

a)


b)


c)


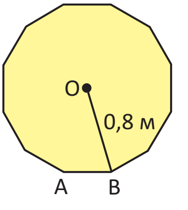
9 Найдите площадь правильного девятиугольника с длиной стороны равной 12 см.

10 В окружность диаметром равным 12 см вписан правильный шестиугольник. Найдите апофему этого шестиугольника.

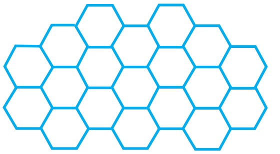
11 a) Докажите, что апофема правильного шестиугольника со стороной *a*, равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Найдите апофему правильного шестиугольника, площадь которого равна $54\sqrt{3}$ см^2.

12 В музее по краям экспоната было установлено ограждение в виде правильного двенадцатиугольника. Расстояние от центра до каждого столба равно 0,8 м. Сколько квадратных метров площади отведено для экспоната?



13 Пол кухни должен быть покрыт плитками в форме правильного шестиугольника со стороной 12 см.

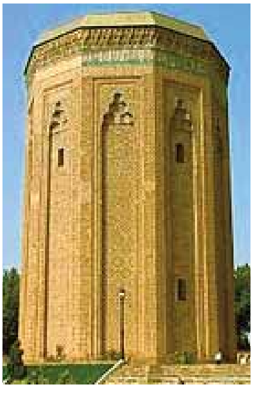


a) Какое наименьшее количество плиток разного цвета нужно выбрать, чтобы две соседние не были одинакового цвета?

b) Найдите площадь одной плитки.

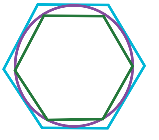
c) Метлах продается в коробках по 30 штук. Какое наименьшее количество коробок нужно для застилки пола размером 2,5 м × 4 м?

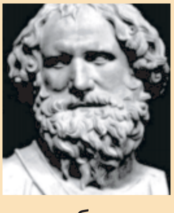
14 **Мавзолей Моминэ Хатун - наилучшее произведение известного архитектора Азербайджана Аджами Нахичевани, единственный памятник из архитектурного комплекса Атабеков, дошедший до наших дней, располагается в центре исторического Нахичевана.**



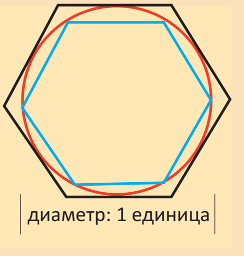
Основание мавзолея имеет форму правильного десятиугольника. Какие измерения вы провели бы, чтобы вычислить площадь, занимаемую мавзолеем? Нарисуйте и покажите соответствующий план. Из источников соберите информацию о действительных размерах мавзолея.

15 На рисунке изображены правильные шестиугольники: вписанный в окружность и описанный около окружности. Найдите площадь описанного шестиугольника, если площадь вписанного шестиугольника равна 3 квадратным единицам.





Историческое сведение. В 3-м веке до н.э. Архимед - древнегреческий ученый, для того, чтобы определить численное значение π, воспользовался периметрами правильных многоугольников, описанных и вписанных в окружность. Пользуясь данным способом, исследуйте значение π.



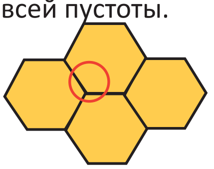
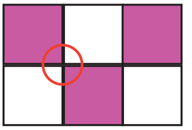
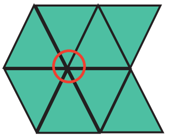
1. Принимая за единицу диаметр окружности, найдите периметр вписанного шестиугольника: $P_в = 3$.
2. Покажите, что длина окружности с единичным диаметром равна π.
3. Нарисуйте радиус окружности. Найдите периметр описанного шестиугольника: $P_о = 2\sqrt{3}$.
4. ***Напишите неравенство:***

периметр вписанного шестиугольника < π < периметра описанного шестиугольника: $3 < \pi < 2\sqrt{3}$.

Увеличив число сторон многоугольника в 2 раза и продолжая вычисления для 12-ти, а затем для 96-ти угольного многоугольника, Архимед, определил, что значения π больше $3\frac{1}{7}$, но меньше $3\frac{11}{70}$.

Паркетирование

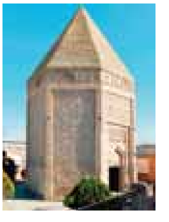
Паркетированием называется покрытие площади фигурами до заполнения всей пустоты.

Если внутренний угол правильного многоугольника является делителем 360, то паркетированием можно покрыть всю пустую часть площади. Паркетирование возможно при помощи правильных треугольников, квадратов и правильных шестиугольников. Однако, при помощи правильных пятиугольников это сделать невозможно, потому что градусная мера одного угла равна 108°, это число не является делителем 360. Сумма углов при общие вершине трех пятиугольников $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$, а четырех пятиугольников $4 \cdot 108^\circ = 432^\circ$.

Возможно ли паркетирование с помощью правильного семиугольника?

16 a) На древних памятниках можно увидеть, как при помощи различных расположений правильных фигур образуются новые узоры. Исследуйте эти орнаменты.



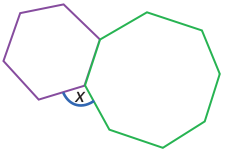
Мавзолей Юсиф Ибн Кусейира. Нахичеванский архитектор. Аджами Абубекр оглы Нахичевани.

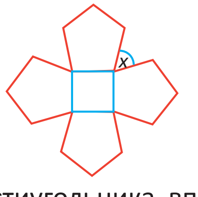
b) Найдите угол *x* на рисунке. С помощью компьютерных программ, повторяя данные рисунки, создайте новые узоры.

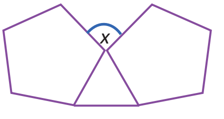
1) Изображение состоит из правильных шестиугольника и восьмиугольника.

2) Изображение состоит из правильных пятиугольников и квадрата.

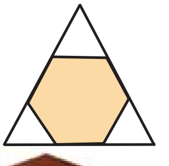
3) Изображение состоит из правильных пятиугольников и треугольника.





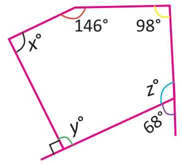


17 Площадь правильного шестиугольника, вписанного в равносторонний треугольник, 12 квадратных единиц. Найдите площадь равностороннего треугольника.



18 Пол беседки имеет форму правильного восьмиугольника. Расстояние от центра восьмиугольника до его вершины равно 1 м. Доски площадью 0,2 м^2 продаются в упаковке по 5 штук. Какое наименьшее количество упаковок потребуется для покрытия пола беседки?

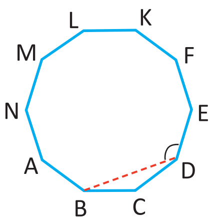
Обобщающие задания



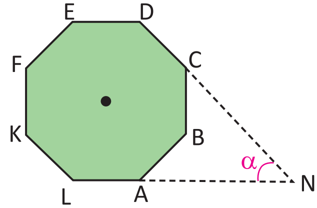
1 По данным рисунка найдите неизвестные внутренние углы многоугольника.

2 Существует ли правильный многоугольник с заданными размерами угла?
1) 155° b) 160° c) 175° d) 168°

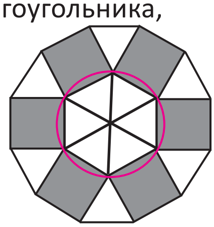
3 На рисунке изображен правильный десятиугольник. Найдите $\angle BDE$.



b) На рисунке отображен правильный восмиугольник. Продолжения сторон DC и LA пересекаются в точке N. Найдите величину угла $\angle ANC$.

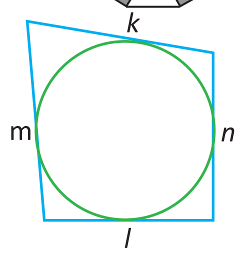


4 a) Сколько всего диагоналей у выпуклого десятиугольника?
b) Сколько сторон у многоугольника, имеющего 14 диагоналей?
c) Найдите сумму внутренних углов выпуклого многоугольника, имеющего 20 диагоналей.



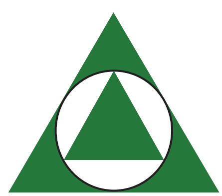
5 Правильный двенадцатиугольник был сконструирован из квадратов и правильных треугольников. Если диаметр нарисованной окружности равен 6 см, то найдите периметр двенадцатиугольника.

6 Определите соответствие для четырехугольника, описанного вокруг окружности.
P - периметр четырехугольника.

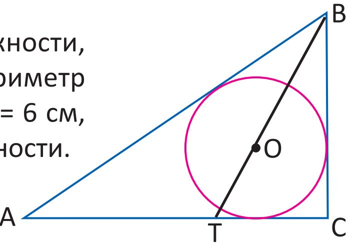


1) $k = 3$, $l = 7$	A) P = 22
2) $k = 4$, $l = 8$	B) P = 24
3) $k = 5$, $l = 6$	C) P = 20
	D) $m + n = 12$

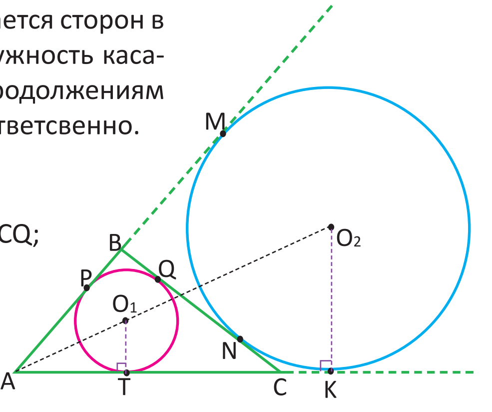
7 a) Один из равносторонних треугольников вписан в окружность, другой - описан около нее. Запишите отношение площадей этих треугольников. Решите задачу разными способами.
b) В маленький треугольник впишите окружность. Напишите отношение радиусов, вписанных и описанных около этого треугольника окружностей и отношение площадей соответствующих кругов.



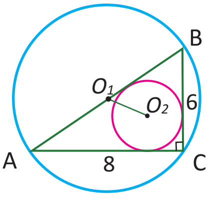
8 Точка O является центром окружности, вписанной в ΔABC. Зная, что периметр треугольника 48см, AT =10 см, TC = 6 см, найдите радиус вписанной окружности.



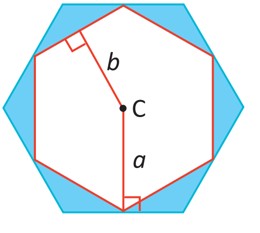
9 Окружность вписанная в ΔABC касается сторон в точках P, Q и T. Вневписанная окружность касается к стороне BC в точке N, и к продолжениям сторон AB и AC в точках M и K, соответсвенно.
Зная, что AB = 10 см, BC = 17 см, AC = 21 см найдите:
a) длину отрезков AP, AT, BP, BQ, CT, CQ;
b) длину отрезков BM, CN, CK;
c) радиусы окружностей.



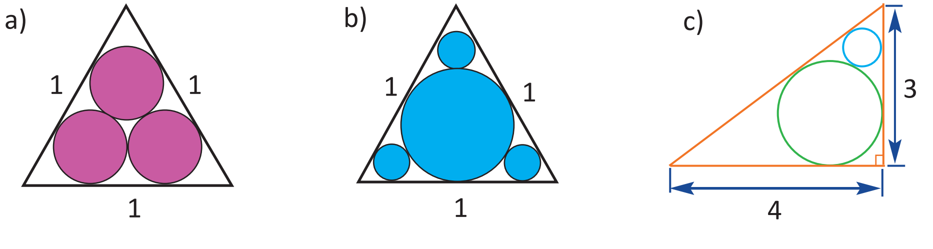
10 Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных и описанных около прямоугольного ΔABC, с катетами AC = 8, BC = 6.



11 У двух правильных шестиугольников, показанных на рисунке, вершины малого лежат на середине сторон большого. a и b - апофемы шестиугольников . Если $b = 6\sqrt{3}$ см, то найдите площадь закрашенной части .



12 По данным рисунка найдите радиус каждой окружности.



7 Неравенства

В этом разделе вы научитесь

- Решать системы неравенств и совокупность неравенств
- Решать неравенства, содержащие переменную под знаком модуля
- Решать квадратные неравенства
- Решать рациональные неравенства методом интервалов
- Решать простые иррациональные неравенства

7-1 Система линейных неравенств. Совокупность неравенств

Во многих случаях, чтобы найти множество значений переменной,удовлетворяющих данному условию, требуется найти общее решение, удовлетворяющее каждому из неравенств или решение, удовлетворяющее, по крайней мере, одному из неравенств.

Система линейных неравенств

Если требуется найти общее решение нескольких неравенств, то их объединяют фигурной скобкой и называют системой неравенств. Решением системы неравенств с одной переменной называют такое значение переменной, при котором каждое неравенство системы становится верным. Решить систему означает найти все решения или доказать его отсутствие. Чтобы решить систему неравенств надо найти множество решений каждого неравенства, входящего в систему, и затем определить пересечение этих множеств , т.е. общее решение.

Пример. Если альпинисты увеличат скорость на 1км/ч, то путь 4 км до вершины они преодолеют быстрее, чем за 2 часа. Если же они уменьшат скорость на 1 км/ч, то не смогут добраться до вершины за 2 часа. Выразите с помощью неравенства, с какой скоростью движутся альпинисты.

Решение: Примем за x - скорость альпинистов.

Если скорость увеличится на 1 км/ч, то длина пройденного пути будет больше 4-х км и соответствующее неравенство примет вид:

$$2(x+1) > 4$$

Если скорость уменьшится на 1 км/ч, то длина пройденного пути будет меньше 4-х км и соответствующее неравенство примет вид:

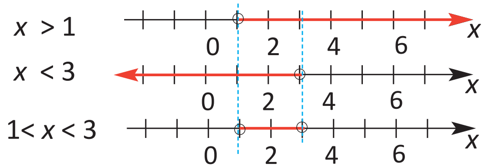
$$2(x-1) < 4$$

По условию задачи нужно найти такое значение x, которое удовлетворяло бы каждому из неравенств: $2(x+1) > 4$ и $2(x-1) < 4$.

Иными словами, в данной задаче нужно решить систему неравенств :

$$\begin{cases} 2\,(x+1) > 4 \\ 2\,(x-1) < 4 \end{cases}$$

Если каждое неравенство системы заменить на равносильное неравенство, то получим $\begin{cases} x > 1 \\ x < 3 \end{cases}$. Изобразим на числовой оси множество решений неравенств, входящих в систему, и найдем их пересечения (общую часть).



Ответ: Множеством решений системы является промежуток (1; 3).

Обучающие задания

1 Какие из чисел -3; 0; 5 являются решениями системы неравенств?

a) $\begin{cases} 3 - x \le 7 \\ 1 - 3x > -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 > 2 \\ 9 - 2x > -21 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 7 > 4 \\ 3 - 2x \le 5 \end{cases}$

2 Решите систему неравенств. Изобразите на числовой оси.

a) $\begin{cases} 4 - x \le 8 \\ 1 - 3x > -5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2 > 3 \\ 3 - 2x > -17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 15 > 0 \\ 4x < 12 \end{cases}$

3 Решите систему неравенств. Изобразите на числовой оси.

a) $\begin{cases} 7x - 11 \ge 3 \\ 2x < 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5(x-3) - x < 1 \\ 3(x-2) - 2 < 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + 2 \ge 5x + 3 \\ 3 - 3x < 8 - 2x \end{cases}$

4 При каких значениях аргумента x функции $y = x - 4$ и $y = 8 - x$ принимают положительные значения?

5 При каких значениях аргумента x значения функций $y = 0{,}5x + 2$ и $y = 3 - 3x$ будут одновременно: a) положительные; b) отрицательные; c) больше – 3-x ; d) меньше 3-x?

6 Решите систему неравенств.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x-2}{3} < 2 \\ \dfrac{x+1}{3} > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} < \dfrac{x}{3} \\ \dfrac{x+1}{2} \ge \dfrac{x}{5} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{6} \le \dfrac{3x-1}{4} \\ 5(x+2) > 3(x+3) \end{cases}$

7 При каких значениях переменной выражение имеет смысл?

a) $\sqrt{x-5}+\sqrt{7-x}$ b) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{3-x}$ c) $\sqrt{x+8}+\sqrt{2x+4}$

8 Если к удвоенному произведению целого числа прибавить половину числа, то сумма будет меньше 92. Если же от удвоенного произведения целого числа вычесть половину, то разность будет больше 53. Найдите это число.

9 10,8 кг 60 %-го раствора соли перемешивают с 20%-м раствором соли. Какое количество второго раствора нужно перемешать, чтобы концентрация соли была бы не больше 40% и не меньше 30%?

10 Длина одной стороны треугольника равна 5 м, а другой 8 м. Скольким метрам может быть равна длина третьей стороны, если периметр треугольника меньше 22 м?

Совокупность неравенств

Несколько неравенств образуют совокупность, если нужно найти такое множество значений переменной, которое будет решением хотя бы одного из неравенств. Неравенства, образующее совокупность, объединяют квадратной скобкой. Чтобы решить совокупность неравенств, надо отдельно решить каждое неравенство и найти объеденение найденных решений.

Пример. Наргиз и Эльшан играют в игру, построенную на числах. Каждый берет карточку с числом и прибавляет к нему 5. Если ответ будет меньше 10-ти или же больше 15-ти, то владелец карточки зарабатывает очко. Выразите с помощью неравенства ситуацию, когда Эльшан, взяв одну карточку, заработал очко.

Решение. Пусть число на карточке будет *x*. Требуемую ситуацию можно выразить неравенствами: $x+5<10$ или $x+5>15$, т.е совокупностью неравенств $\left[\begin{array}{l}x+5<10\\x+5>15\end{array}\right.$

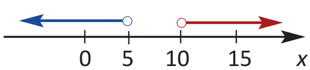
Решим совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l}x+5<10\\x+5>15\end{array}\right.$

1) $x+5<10$
$x<10-5$
$x<5$

2) $x+5>15$
$x>15-5$
$x>10$

Множество решений 1-го неравенства совокупности -промежуток $(-\infty; 5)$.

Множество решений 2-го неравенства совокупности - промежуток $(10; +\infty)$.



Множество решений данной совокупности неравенств: $(-\infty; 5)\cup(10; +\infty)$

Обучающие задания

11 Решите совокупность неравенств.

a) $\left[\begin{array}{l} x-1>4 \\ x+1<-2 \end{array}\right.$ b) $\left[\begin{array}{l} 2x-12>3 \\ 2x+1<-1 \end{array}\right.$ c) $\left[\begin{array}{l} 3(x-1)-x\geq 5 \\ 2(3-x)-3<x \end{array}\right.$

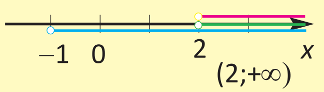
12 Решите неравенства, исследуя различные варианты знаков множителей.

a) $(x+1)(x-2)>0$ b) $(x-1)(x-3)>0$
c) $(x-2)(x-5)<0$ d) $(x+3)(x-6)\leq 0$

Пример. а) Решите неравенство: $(x+1)(x-2)>0$.
Решение: Для того, чтобы произведение двух множителей было положительным, нужно чтобы множители были одинакового знака. То есть, множители $(x+1)$ и $(x-2)$ должны быть или оба положительными, или отрицательными. Данное неравенство сводится к решению совокупности: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1<0 \\ x-2<0 \end{cases} \end{array}\right.$

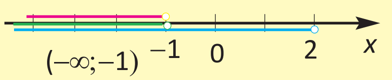
Решение 1-ой системы совокупности:
$\begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1 \\ x>2 \end{cases}$

Изображение решения на числовой оси:



Решение 2-ой системы совокупности:
$\begin{cases} x+1<0 \\ x-2<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1 \\ x<2 \end{cases}$

Изображение решения на числовой оси:



Множество решений данной совокупности: $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$

13 Решите неравенство, исследуя различные варианты знаков числителя и знаменателя дроби.

a) $\dfrac{x-1}{x-3}<0$ b) $\dfrac{x-2}{x+1}>0$

14 Квадрат какого числа не больше пятикратного значения этого числа? Найдите сумму целых чисел, удовлетворяющих этому условию.

15 При каких значениях a система неравенств имеет хотя бы одно решение?

a) $\begin{cases} x<9 \\ x>a \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\leq 10 \\ x>a \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\leq 5 \\ x\geq a \end{cases}$ d) $\begin{cases} x\geq 7 \\ x\leq a \end{cases}$

7-2 Неравенства с модулем

Для решения неравенства, содержащего переменную под знаком модуля, необходимо решить соответствующую систему или совокупность неравенств. В таблице даны эквивалентные записи неравенств с модулем.

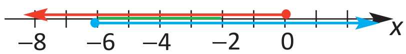
Неравенства с модулем	Двойные эквивалентные неравенства	Эквивалентные системы и совокупности неравенств
$\lvert ax+b\rvert < c$	$-c < ax+b < c$	$\begin{cases} ax+b < c \\ ax+b > -c \end{cases}$
$\lvert ax+b\rvert \le c$	$-c \le ax+b \le c$	$\begin{cases} ax+b \le c \\ ax+b \ge -c \end{cases}$
$\lvert ax+b\rvert > c$	$ax+b > c$ *или* $ax+b < -c$	$\left[\begin{array}{l} ax+b > c \\ ax+b < -c \end{array}\right.$
$\lvert ax+b\rvert \ge c$	$ax+b \ge c$ *или* $ax+b \le -c$	$\left[\begin{array}{l} ax+b \ge c \\ ax+b \le -c \end{array}\right.$

1. **Пример.** Решите неравенство $|2x+3| \le 3-x$.

Решение.

Эквивалентная система неравенств: $\begin{cases} 2x+3 \le 3-x \\ 2x+3 \ge -(3-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x \ge -6 \end{cases}$

Изображение решения на числовой оси:



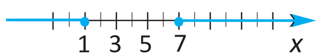
Ответ: $[-6;\ 0]$

2. **Пример.** Решите неравенство $|2x-5| \ge x+2$.

Решение.

Эквивалентная совокупность неравенств: $\left[\begin{array}{l} 2x-5 \ge x+2 \\ 2x-5 \le -x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 7 \\ x \le 1 \end{array}\right.$

Изображение решения на числовой оси:



Ответ: $(-\infty;\ 1] \cup [7;\ +\infty)$

Обучающие задания

1 Решите неравенства с модулем. Изобразите решение на числовой оси.

a) $|5x+3|-4 \ge 9$ d) $|4-x| < 5$ g) $|2x+3| > 4+x$

b) $|10-4x| \le 2$ e) $|3x-9|+2 > 7$ h) $6-2x > |x+12|$

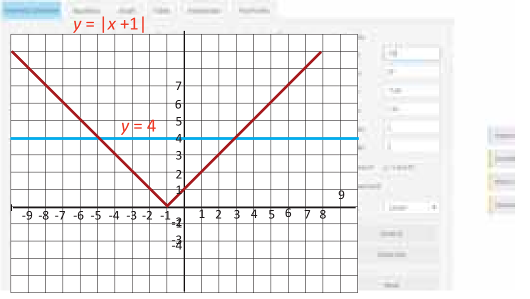
c) $|3+x|+7 < 10$ f) $|3x+2|-1 \ge 10$ i) $|2x+5|-1 < 6x-2$

2 Покажите такое значение a, чтобы неравенство $|x-3| \le a-2$ имело решение, и найдите это решение. Решите неравенство $|x-3| > a-2$ при найденном значении a.

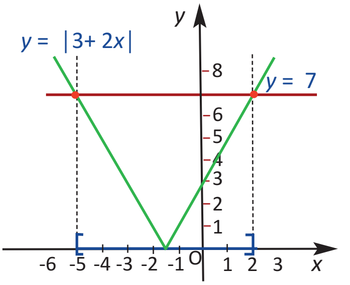
3 На рисунке даны графики функций $y = |x+1|$ и $y = 4$, построенные на графкалькуляторе. Нарисуйте графики в тетради и, воспользуясь этими графиками, покажите решения:

a) уравнения $|x+1| = 4$
b) неравенства $|x+1| < 4$
c) неравенства $|x+1| > 4$

http://www.meta-calculator.com/online/



4 Решите неравенства с модулем. Решение представьте в виде графика. На рисунке изображено решение неравенства пункта a) графическим способом.



a) $|3 + 2x| \leq 7$
b) $|4 - 2x| > 4$
c) $|3x - 6| \leq 6$
d) $|x - 1| < 1 - 2x$
e) $|x + 2| > 2x + 1$
f) $|x - 3| < x + 1$

5 Автобусная остановка находится на расстоянии 45 м от дома Октая. Планируется переместить остановку от нынешнего месторасположения на расстояние не более 30 м. Запишите расстояние от новой остановки до дома Октая в виде неравенств.

6 Различные цвета фейерверков образуются при сгорании химических веществ.

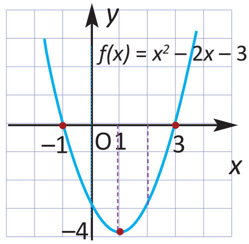
a) Вещество, в котором содержится медь, при сгорании образует световую волну, длина которой удовлетворяет неравенству $|w - 455| < 23$. Какой цвет получается в этом случае?

b) Вещество, в состав которого входит бариум-хлорид, при сгорании образует световую волну длиной, удовлетворяющей неравенству: $|w - 519{,}5| < 12{,}5$. Какой цвет получается в этом случае?

c) Вещество, в состав которого входит натриум, при сгорании образует световую волну длиной, удовлетворяющей неравенству $|w - 600| < 5$. Какой цвет получается в этом случае?

Цвет	Длина волны
Ультрафиолетовый	$w < 400$
Сиреневый	$400 \leq w \leq 424$
Голубой	$424 \leq w \leq 491$
Зеленый	$491 \leq w \leq 575$
Желтый	$575 \leq w \leq 585$
Оранжевый	$585 \leq w \leq 647$
Красный	$647 \leq w \leq 700$
Инфракрасный	$w \geq 700$

Исследование. 1) Найдите точки пересечения параболы $y = x^2 - 2x - 3$ с осью абсцисс: $x^2 - 2x - 3 = 0$ $x = -1$, $x = 3$



2) Найдите координаты точки вершины:

$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1, \quad n = m^2 - 2m - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

3) Постройте параболу.

4) Определите знаки ординат для точек параболы с абсциссами:

$$x = 0;\ x = 1;\ x = 2$$

5) При каких значениях x парабола находится ниже оси абсцисс?

6) При каких значениях x парабола находится выше оси абсцисс?

7) Чтобы правильно ответить на вопросы в пунктах 5 и 6, что важнее: нахождение точки вершины, или нахождение точек пересечения параболы с осью абсцисс?

7-3 Квадратные неравенства

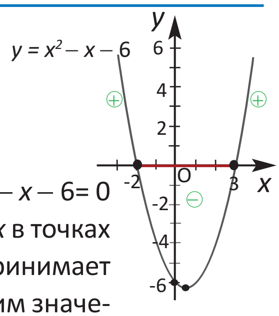
Неравенства вида:
- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \le 0$
- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c \ge 0$

являются квадратными неравенствами ($a \ne 0$).

Решение квадратных неравенств второй степени с одной переменной сводится к отысканию промежутков, на которых квадратичная функция принимает положительные или отрицательные значения.

При этом способе решения неравенств важно знать направление ветвей параболы и точки пересечения параболы с осью абсцисс.

Пример: По графику функции $y = x^2 - x - 6$ напишите множество решений нижеприведенных неравенств.



a) $x^2 - x - 6 \le 0$ c) $x^2 - x - 6 > 0$

b) $x^2 - x - 6 \ge 0$ d) $x^2 - x - 6 < 0$

Решение. Поскольку $x = -2$, $x = 3$ корни уравнения $x^2 - x - 6 = 0$ парабола функции $y = x^2 - x - 6$ пересекается с осью Ox в точках $x = -2$, $x = 3$ и делится на три промежутка, в которых принимает положительные и отрицательные значения. Определим значения выражения $x^2 - x - 6$ в каждом из промежутков.

a) График функции $y = x^2 - x - 6$ пересекает ось x в точках -2 и 3 и между этими значениями располагается ниже оси Ox.

Значит, неравенства $x^2 - x - 6 \le 0$ выполняется при $-2 \le x \le 3$.

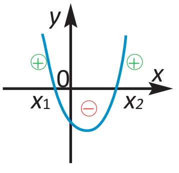
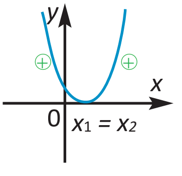
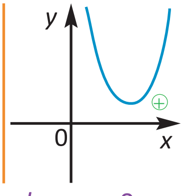
b) При значениях $x = -2$ и $x < -2$ или же $x = 3$ и $x > 3$ значения функции (то есть значение выражения $x^2 - x - 6$) равны нулю или же больше нуля. Решения неравенства $x^2 - x - 6 \ge 0$ таковы: $x \le -2$ или $x \ge 3$.

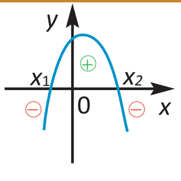
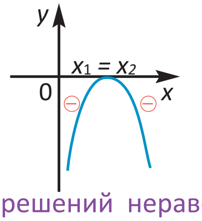
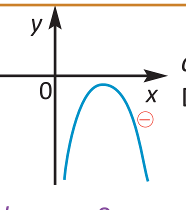
c) Решения неравенства $x^2 - x - 6 > 0$ таковы: $x < -2$ или же $x > 3$.

d) Неравенства $x^2 - x - 6 < 0$ выполняется при $-2 < x < 3$.

Алгоритм решения квадратных неравенств с помощью графика.

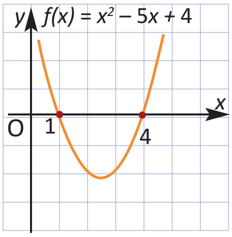
1. По значению коэффициента a определяется направление ветвей параболы.
2. Находятся соответствующие действительные корни квадратного уравнения (если есть) или определяется отсутствие действительных корней.
3. По точкам пересечения графика функции с осью абсцисс схематически изображается график функции.
4. По схематическому изображению параболы определяются промежутки, соответствующие решениям данных неравенств.

 $a > 0$, $D > 0$	 $a > 0$, $D = 0$	 $a > 0$, $D < 0$
Множество решений неравенства $ax^2 + bx + c > 0$		
$(-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ +\infty)$	$(-\infty;\ x_1) \cup (x_1;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
Множество решений неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0$		
$(-\infty;\ x_1] \cup [x_2;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
Множество решений неравенства $ax^2 + bx + c < 0$		
$(x_1;\ x_2)$	$\varnothing$	$\varnothing$
Множество решений неравенства $ax^2 + bx + c \leq 0$		
$[x_1;\ x_2]$	$\{x_1\}$	$\varnothing$

 $a < 0$, $D > 0$	 $a < 0$, $D = 0$	 $a < 0$, $D < 0$
Множество решений неравенства $ax^2 + bx + c > 0$		
$(x_1;\ x_2)$	$\varnothing$	$\varnothing$
Множество решений неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0$		
$[x_1;\ x_2]$	$\{x_1\}$	$\varnothing$
Множество решений неравенства $ax^2 + bx + c < 0$		
$(-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ +\infty)$	$(-\infty;\ x_1) \cup (x_1;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
Множество решений неравенства $ax^2 + bx + c \leq 0$		
$(-\infty;\ x_1] \cup [x_2;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$

Обучающие задания

1 По графикам напишите решения неравенств.

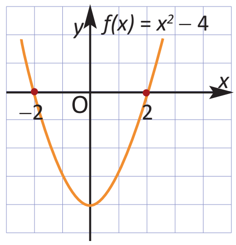
1) 

a) $x^2 - 5x + 4 \le 0$

b) $x^2 - 5x + 4 \ge 0$

c) $x^2 - 5x + 4 > 0$

d) $x^2 - 5x + 4 < 0$

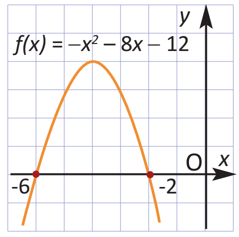
2) 

a) $x^2 - 4 \le 0$

b) $x^2 - 4 \ge 0$

c) $x^2 - 4 > 0$

d) $x^2 - 4 < 0$

3) 

a) $-x^2 - 8x - 12 \le 0$

b) $-x^2 - 8x - 12 \ge 0$

c) $-x^2 - 8x - 12 > 0$

d) $-x^2 - 8x - 12 < 0$

2 Решите неравенства, используя графики соответствующих функций.

a) $x^2 - 7x + 10 > 0$ b) $x^2 - 4x + 3 < 0$ c) $x^2 - 9 \ge 0$

3 Решите неравенства.

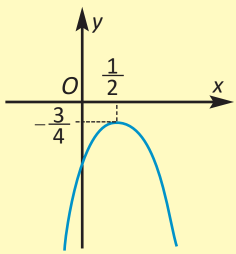
a) $x(x + 6) \ge 40$ c) $6x^2 > 11x + 35$ e) $-2x^2 - x + 3 > 0$

b) $-x^2 - 11x - 24 < 0$ d) $7x + 5 \le -2x^2$ f) $-3x^2 + 5x > 2$

4 Докажите, что неравенство верно при любом значении переменной.

a) $-x^2 + x - 1 < 0$ b) $6x - x^2 < 10$ c) $5x^2 - 2x + 1 > 0$

Пример: Решите неравенство $-x^2 + x - 1 < 0$.
Решение. Ветви параболы направлены вниз ($a < 0$).
Так как уравнение $-x^2 + x - 1 = 0$ не имеет действительных корней, парабола не пересекает ось абсцисс и целиком лежит в нижней полуплоскости. А это значит, что неравенство $-x^2 + x - 1 < 0$ верно при любых значениях переменной.
Ответ: $(-\infty; +\infty)$



5 Решите неравенства.

a) $x^2 + x + 3 > 0$ b) $2x^2 + x + 1 \ge 0$ c) $x^2 - 2x + 4 < 0$

6 В каких из данных неравенств: a) решением является множество всех действительных чисел $(x \in R)$; b) нет решений $(\varnothing)$?

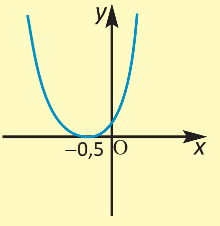
a) $x^2 + 1 > 0$ b) $x^2 + 1 < 0$

7 Найдите множество решений неравенства.

a) $4x^2 + 4x + 1 > 0$ b) $x^2 + 49 \le 14x$

c) $40x + 25x^2 + 16 < 0$ d) $49x^2 + 70x + 25 \ge 0$

Пример: Решим неравенство $4x^2 + 4x + 1 > 0$.
Решение. Изобразим график функции $y = 4x^2 + 4x + 1$. Решим уравнение $4x^2 + 4x + 1 = 0$ и найдем единственное действительное значение переменной, удовлетворяющее уравнению: $x = -0{,}5$. Парабола касается оси Ox в точке $(-0{,}5;\ 0)$.
Как видно из графика, это неравенство верно при любых значениях x, кроме $x = -0{,}5$.
Ответ: $x \ne -0{,}5$



8 Решите неравенства, построив графики соответствующих функций.

a) $x^2 - 9x + 8 < 0$ d) $x^2 - 2x - 24 \le 0$ g) $x^2 + 8x + 16 \ge 0$
b) $x^2 + 6x + 5 > 0$ e) $0 > -x^2 + 7x - 12$ h) $-x^2 + 2x + 15 < 0$
c) $4x^2 + 12x + 10 \le 0$ f) $3x^2 - 3x + 9 > 0$ i) $0 > -x^2 + 4x - 4$

9 Напишите квадратное неравенство, решение которого соответствует данному условию:
a) $-2 \le x \le 4$ b) $x < 1$ или $x > 10$ c) $\frac{1}{2} \le x \le 3$
d) $x < -\frac{3}{4}$ или $x > \frac{2}{3}$ e) $x \le -3 - \sqrt{5}$ или $x \ge -3 + \sqrt{5}$
f) $x \in R$ g) нет решений

10 При каких значениях x:

a) Трехчлен $3x^2 - 2x - 1$ принимает положительные значения?

b) Трехчлен $-x^2 + 3x - 2$ принимает отрицательные значения?

11 При каких значениях переменной:

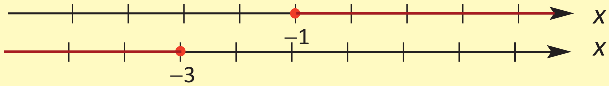
a) Значение трехчлена $2x^2 + x - 6$ меньше 4?

b) Значение трехчлена $-x^2 + 8x + 2$ больше 9?

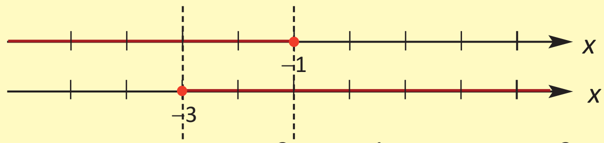
12 При каких значениях аргумента значение функции $f(x) = x^2 - 4x$ меньше соответствующего значения функции $g(x) = x + 6$?

13 Квадратные неравенства можно решать алгебраическим способом, разложив левую часть на множители и по знаку неравенства исследовать возможные случаи. Рассмотрите пример, решите заданные неравенства.

Пример. Неравенство $x^2 + 4x + 3 \le 0$ запишем в виде $(x + 1)(x + 3) \le 0$. Произведение двух множителей будет отрицательным, если множители будут иметь противоположные знаки.
1-й случай. Предположим, что $(x + 1) \ge 0$, а $(x + 3) \le 0$. Отсюда $x \ge -1$ и $x \le -3$. Решением неравенства $x^2 + 4x + 3 \le 0$ будут такие значения x, которые удовлетворяют обоим неравенствам. В этом случае такого значения для x нет.



2-й случай. Предположим что $(x + 1) \le 0$ и $(x + 3) \ge 0$.
Решив эти неравенства, получим $x \le -1$ и $x \ge -3$.



Все значения промежутка от -3-x до -1, включая $x=-3$ и $x=-1$ являются решением неравенства $x^2 + 4x + 3 \le 0$. Ответ: $-3 \le x \le -1$

a) $x^2 + 3x - 18 \ge 0$ b) $x^2 - 6x + 5 \le 0$ c) $4x^2 < 25$
d) $-x^2 - 12x < 32$ e) $x^2 - 4x - 5 > 0$ f) $12x^2 + 3x \le 0$

14 Решите неравенства разными способами.
a) $x^2 + 8x + 7 > 0$ b) $x^2 + 6x + 5 \le 0$ c) $2x^2 - 11x + 15 \ge 0$
d) $x^2 - 5x > 3x^2 - 18x + 20$ e) $2x^2 + 12x - 11 > x^2 + 2x + 13$

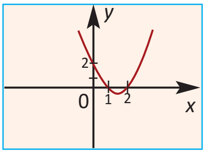
15 Решите неравенства, разделив их на две группы – линейные и квадратные неравенства.

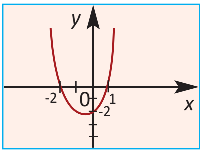
$y^2 - 3 < 0$	$4(x - 2) < 6x - 3$	$8p^2 - 18 > 0$
$7(3 - y) > 4 + 2y$	$(5x + 2)^2 \le 4$	$x + 3 \le 2(x + 1)$
$(3 - 7x)^2 < -1$	$x^2 - 3 < 5x + 3$	$x^2 \ge 4x$

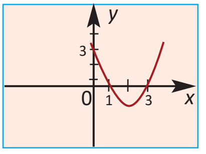
16 Решите неравенство $x^2 + x \ge 6$. Верно ли, что множество решений данного неравенства:
a) является также множеством решений неравенства $x(x + 1) \ge 6$
b) является также множеством решений неравенства $x^2 + x - 5 \ge 1$
c) является также множеством решений неравенства $3x^2 + 3x \ge 18$
d) является также множеством решений неравенства $-x^2 - x \le -6$

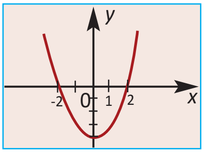
17 Установите соответствие графиков и неравенств. Каким неравенствам не соответствует ни один из графиков? Постройте эти графики, при помощи их решите неравенства.

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$
b) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$
c) $x^2 - 2x - 3 < 0$
d) $x^2 + x - 2 \geq 0$
e) $x^2 - x - 2 < 0$
f) $x^2 - 4 > 0$









18 Решите неравенства, построив графики соответствующих функций.

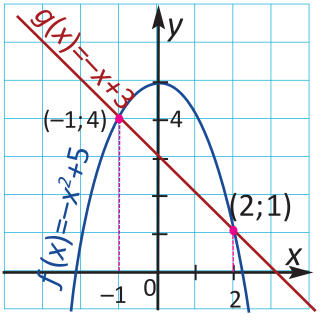
a) $x^2 - 2x - 3 > 0$ b) $x^2 + 2x - 3 < 0$ c) $x^2 + 5x + 4 \geq 0$

d) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ e) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ f) $x^2 - 4x < 0$

g) $-x^2 + 3x \geq 0$ h) $-x^2 + 9 \leq 0$ i) $-4x^2 - 16 > 0$

19 На рисунке показано решение неравенства $-x^2 + 5 \geq -x + 3$.

a) Обоснуйте письменно справедливость данного неравенства для всех значений x, принадлежащих промежутку $[-1; 2]$.



b) Упростив неравенство $-x^2 + 5 \geq -x + 3$, запишите в виде квадратного неравенства $-x^2 + x + 2 \geq 0$ и решите его графическим способом.

c) Одинаковы ли полученные результаты? Что общего и чем различаются данное графическое решение и решение, полученное вами?

20 Решите неравенства двумя способами.
1) Построив графики квадратичной и линейной функций.
2) Упростив и построив график полученной квадратичной функции.

a) $x^2 \leq 15 - 2x$ b) $x^2 + 4x > 3 + 2x$
c) $13x - 7 \leq -2x^2$ d) $x^2 + 4x + 3 < 2x + 1$

21 **Обобщение.** Воспользуясь графиком и дискриминантом квадратичной функции, исследуйте решение неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0$. В каких случаях: a) решениями неравенства будут все действительные числа?
b) решением неравенства будет одно действительное число?
c) множество определенных действительных чисел будет решением неравенства?

Прикладные задания

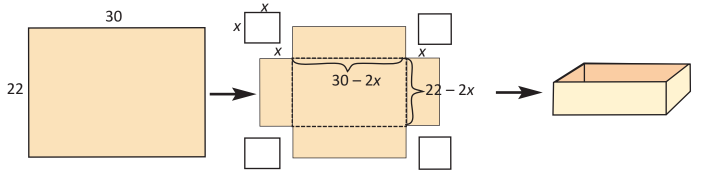
22 Один из катетов прямоугольного треугольника на 2 см длиннее другого. Какова должна быть длина меньшего катета, чтобы площадь треугольника была не меньше 24 см^2?

23 Длина одной стороны прямоугольника на 7 см больше другой. Если площадь прямоугольника будет меньше 60 см^2, то какой может быть длина большей стороны?

24 Исследования показывают, что время (в терциях) реакции водителей на возникшее препятствие можно смоделировать функцией
$T(x) = 0{,}005x^2 - 0{,}23x + 22$ (x - показывает возраст водителя: $16 \leq x \leq 70$)
Сколько терций составляет время реакции водителя:
a) в 16 лет; b) в 35 лет?
c) В каком возрасте время реакции водителя будет больше 25 терций?

Терция - единица измерения времени и равна $\frac{1}{60}$ секунды.

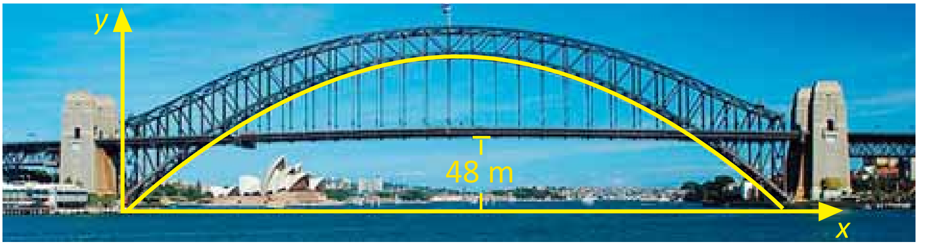
25 Для того, чтобы из листа картона прямоугольной формы сделать открытую коробку, по углам вырезают части в форме квадрата, сгибают по пунктирным линиям и склеивают. Требуется приготовить коробку из картона размером 22 см × 30 см.



a) При каком целом значении стороны вырезанных квадратов объем коробки будет 1200 см^3?
b) При каких целых значениях стороны вырезанных квадратов объем коробки будет не меньше 1200 см^3?

26 После удара движение мяча можно смоделировать функцией $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$. Здесь h - высота (в метрах) брошенного вверх мяча через t секунд.
a) В каком интервале времени мяч поднимется на высоту больше 16 м?
b) В каком интервале времени мяч окажется на высоте не менее чем 1 м?

27 Форму арки моста в выбранной системе координат можно показать квадратичной функцией $y = -0{,}002x^2 + 1{,}06x$. x - это расстояние от левой опоры. y - показывает высоту (в метрах) арки над уровнем воды. На каком расстоянии от левой опоры арка расположена над дорогой?



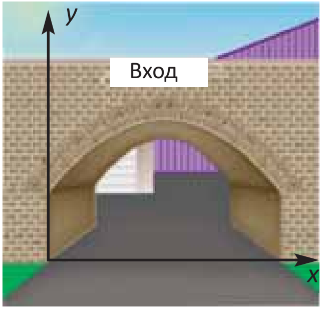
28 Чтобы посадить в саду зелень, Тахир планирует выделить участок прямоугольной формы. Для забора у него есть материал длиной 70 метров. Тахир хочет, чтобы участок для посадки зелени был больше 300 м^2. Какой длины и ширины должен быть участок , на забор для которого будет истрачен весь материал?

29 В медицине для определения степени избыточного веса используют “Индекс массы тела”. Если индекс массы находится между 17 и 24, то вес считается нормальным. Индекс массы тела рассчитывается по формуле: $\mathrm{i} = \dfrac{m}{h^2}$ где m - масса тела в килограммах, h - рост в метрах.

a) Какой должна быть масса человека с ростом 1 м 50 см, чтобы индекс массы был меньше 24-х?

b) Каким должен быть наименьший рост человека массой 54 кг, чтобы индекс массы был меньше или равен 24-м?

30 Через арку должна проехать машина высотой 3,5 м и шириной 2,2 м. Арку можно смоделировать функцией $y = -0{,}3x^2 + 1{,}8x + 1{,}1$ (x и y в метрах).



a) Сможет ли автомобиль проехать через арку? Объясните.

b) Для того, чтобы машина высотой в 3,5 м проехала через арку, какой может быть ширина машины?

c) Для того, чтобы машина шириной 2,2 м проехала через арку, какой может быть высота машины?

7-4 Метод интервалов

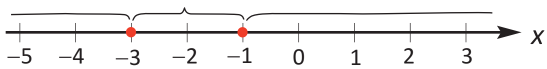
Один из методов решения квадратных неравенств – метод интервалов. Неравенства решаются методом интервалов согласно показанным ниже шагам.

1. Решается уравнение, соответствующее неравенству.
2. На числовой оси отмечаются точки, соответствующие корням уравнения (эти точки назовем граничными точками неравенства).
3. В каждом из интервалов, образованных граничными точками, выбираются последовательно пробные точки и определяется, какой из интервалов будет принадлежать множеству решений неравенства.

Пример. Решите неравенство $x^2 + 4x + 3 \leq 0$:

Решение. 1) Находим корни уравнения $x^2 + 4x + 3 = 0$:
$(x+1)(x+3) = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = -3$.

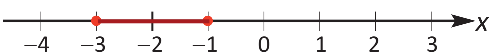
2. Отмечаем на числовой оси точки $x_1 = -1$; $x_2 = -3$. Как видно, граничные точки делят числовую ось на 3 интервала.



3. В каждом из интервалов выбираем пробное число (–5; –2; 0) и проверяем неравенство.

Интервал	$x < -3$ $(-\infty; -3)$	$-3 \leq x \leq -1$	$x > -1$, $(-1; +\infty)$
Пробное число	-5	-2	0
Значение выражения в левой части	$(-5)^2 + 4\cdot(-5) + 3 = 8$	$(-2)^2 + 4\cdot(-2) + {}$ $+ 3 = -1$	$(0)^2 + 4\cdot(0) + 3 = 3$
Удовлетворяет ли $x^2 - 4x + 3 \leq 0$?	Нет	Да	Нет

Неравенство $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ верно при интервале $(-3; -1)$ и граничных точках
Решение представим на числовой оси:



Ответ: $-3 \leq x \leq -1$

Обучающие задания

1 Решите неравенства методом интервалов.

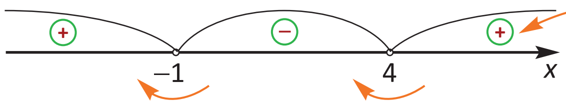
a) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ b) $3x^2 - x - 2 < 0$ c) $x^2 - 3x + 1 \leq 29$
d) $x^2 - 4x > 5$ e) $2x^2 + 5x \geq 7$ f) $2x^2 + 3x > 5$
g) $x^3 - 4x < 0$ h) $x^3 - 9x \geq 0$ i) $x(x + 1)(x - 2) > 0$

2 Метод интервалов уместен при решении неравенств, у которых правая часть ноль, а левая часть состоит из множителей вида (x – c). Рассмотрите примеры, обсудите и решите неравенства методом интервалов.

1. **Пример.** Решите неравенство $(x+1)(x-4)<0$

Решение. 1) Находим граничные точки: $(x+1)(x-4)=0$; $x_1=-1$, $x_2=4$.

2) На числовой оси отметим граничные точки и, начиная с 1-го правого интервала, определим знак выражения $(x+1)(x-4)$.



Так как в 1-ом интервале каждый множитель положительный, то знак выражения $(x+1)(x-4)$ будет положительным.

Поскольку при переходе через граничные точки только у одного множителя меняется знак и поэтому знак выражения $(x+1)(x-4)$ чередуется.

3) Неравенство удовлетворяется в промежутке, где значение $(x+1)(x-4)$ отрицательно. **Ответ:** $(-1;\ 4)$

Если в неравенстве каждый множитель имеет нечетную степень, то в интервалах знаки чередуются.

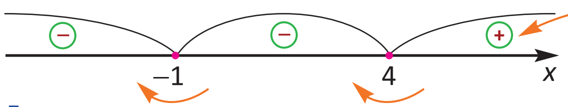
2. **Пример.** Решите неравенство $(x^2+1)(x+1)^2(x-4)\geq 0$.

Решение. 1) Находим граничные точки:

$(x+1)^2(x-4)=0$; $x_1=x_2=-1$, $x_3=4$.

Отметим, что $x=-1$ - повторяющийся корень.

2) На числовой оси отметим граничные точки (–1 и 4) и, начиная с 1-го правого интервала, в каждом интервале определим знак выражения.



Так как в 1-ом интервале каждый множитель положительный, то знак выражения $(x+1)^2(x-4)$ будет положительным.

При переходе через точку $x=1$ множитель $(x+1)^2$ не меняет знак.

При переходе через точку $x=4$ множитель $(x-4)$ меняет знак.

3) Неравенство верно в промежутке, где значения $(x+1)^2(x-4)$ положительны и в граничных точках. **Ответ.** $\{-1\}\cup[4;+\infty)$

Если в неравенстве есть множители с четным показателем степени вида $(x-c)^{2n}$, то справа и слева от граничной точки с знак повторяется.

a) $(x+3)(x-8)(x-20)<0$
b) $(x-3)(x+2)(x-1)\geq 0$
c) $(x^2-9)(x+4)(x-5)\leq 0$
d) $(x^2-2x)(x-6)^3<0$
e) $x^3+2x^2-15x\geq 0$
f) $(4x-x^3)(25-x^2)<0$
g) $(x-4)^2(x^2-8x)<0$
h) $(x+5)^2(2x-x^2)\geq 0$
i) $5x(x-2)(x-6)^2\geq 0$
j) $(1-\sqrt{3})(x+4)^2(x-5)\leq 0$

Решение рациональных неравенств методом интервалов

1. Напишите неравенство в виде эквивалентного неравенства, в одной части которого рациональное выражение, а в другой части нуль.
2. Найдите значение переменных, при которых числитель и знаменатель рационального выражения обращается в нуль. Эти значения переменных являются граничными точками данного неравенства.
3. Из интервалов, образованных граничными точками, последовательно выберите пробные точки и проверьте, какие из этих интервалов принадлежат множеству решений неравенства.

Пример $\dfrac{x+2}{x-4} \le 3$ *данное неравенство*

Решение. 1) $\dfrac{x+2}{x-4} - 3 \le 0$ *к общим частям неравенства прибавляют -3*

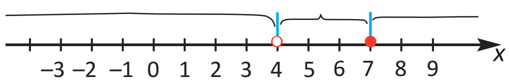
$\dfrac{-2x+14}{x-4} \le 0$ *упрощают*

$\dfrac{-2(x-7)}{x-4} \le 0$ *общий множитель выносят за скобки*

$\dfrac{x-7}{x-4} \ge 0$ *обе части делят на (– 2) и меняют знак на противоположный*

2) Найдем нули числителя и знаменателя: $x-7=0$, $x=7$; $x-4=0$, $x=4$

3) Отмечая точки $x=4$ и $x=7$ на числовой оси, делим ее на три интервала. $(-\infty;\ 4)$, $(4;\ 7)$ и $(7;+\infty)$



Выберем пробные точки из интервалов и проверим неравенство.

$(-\infty;\ 4)$

$x=0$ $\quad \dfrac{x-7}{x-4} \ge 0$

$\dfrac{0-7}{0-4} \overset{?}{\ge} 0;$ $\quad \dfrac{7}{4} \overset{?}{\ge} 0$

верно

$(4;\ 7)$

$x=5$ $\quad \dfrac{x-7}{x-4} \ge 0$

$\dfrac{5-7}{5-4} \overset{?}{\ge} 0;$ $\quad -2 \overset{?}{\ge} 0$

неверно

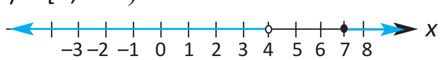
$(7;+\infty)$

$x=8$ $\quad \dfrac{x-7}{x-4} \ge 0$

$\dfrac{8-7}{8-4} \overset{?}{\ge} 0;$ $\quad \dfrac{1}{4} \overset{?}{\ge} 0$

верно

Так как при $x=4$ знаменатель обращается в нуль, то эта точка не входит в множество решений, а точка $x=7$ в это множество входит. Множество решений неравенства будет $(-\infty;\ 4)$ и $[7;+\infty)$.

Изображение на числовой оси: 

Ответ: $(-\infty;\ 4) \cup [7;+\infty)$

Замечание: Неравенство $\dfrac{x-7}{x-4} \ge 0$ можно также решить, применив правило изменения знаков в интервалах.

3 Сначала решите уравнения, потом решите соответствующие неравенства методом интервалов.

a)	b)	c)	d)
$\frac{10}{x-5} = 5$	$\frac{8}{a+1} = 4$	$\frac{z+2}{z-6} = -3$	$\frac{w-8}{w+6} = 2$
$\frac{10}{x-5} < 5$	$\frac{8}{a+1} > 4$	$\frac{z+2}{z-6} \le -3$	$\frac{w-8}{w+6} \le 2$
$\frac{10}{x-5} > 5$	$\frac{8}{a+1} < 4$	$\frac{z+2}{z-6} \ge -3$	$\frac{w-8}{w+6} \ge 2$

4 Решите неравенства.

a) $\frac{x-3}{x+7} < 0$ b) $\frac{2x-10}{x+8} > 0$ c) $\frac{x}{2x-5} \le 0$

d) $\frac{(x-1)(x^2-36)}{x+1} < 0$ e) $\frac{x}{x-5} \ge \frac{1}{2}$ f) $\frac{3x-1}{2x+5} \ge 3$

5 Перенеся все члены в левую часть и разложив на множители, решите неравенства.

a) $x^3 \le 16x$ b) $(2x-6)^2 \le x^2$ c) $(x^2+x-3)^2 < (x^2-x-5)^2$

6 При каких значениях ***к*** уравнение: a) не имеет действительных корней; b) имеет два различных действительных корня?

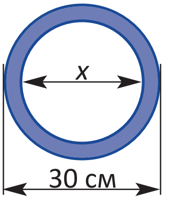
1) $3x^2 + kx + 3 = 0$ 2) $kx^2 - 4x + k - 3 = 0$

7 Решите неравенства.

a) $|2x-3| > |6-x|$ b) $|3x-5| < |x-3|$ c) $|2x-1| < |x+1|$

Указание: Неравенства вида $|p(x)| < |g(x)|$ замените эквивалентными им неравенствами $p^2(x) < g^2(x)$ и, перенеся члены в левую часть, разложив на множители, решите полученное неравенство.

8 В здание планируется провести водопроводную трубу. Наряду с внешним диаметром трубы в 30 см площадь поперечного (колцеобразного) сечения трубы не должна быть меньше 60 см² и больше 90 см².



a) Согласно условию задачи напишите квадратное неравенство и постройте график. b) Определите допустимые значения внутреннего диаметра водопроводной трубы. Примите $\pi \approx 3$.

9 Гейдар на летних каникулах в мебельном магазине помогает отцу. За транспортировку каждого стола они платят 10 манат, а фирме производителю стабильно 1800 манат в неделю. Если один стол будет стоить x манат, то за неделю можно продать $(120 - x)$ столов. a) Какую цену за один стол они могут предложить, чтобы работать с прибылью? b) По какой цене нужно продавать столы, чтобы недельная прибыль была максимальной? Сколько столов продадут за неделю в данном случае?

7-5 Иррациональные неравенства

Неравенство, содержащее переменную под знаком радикала, называется иррациональным неравенством. Используя свойства корней и неравенств, решение иррационалных неравенств сводится к решению рациональных неравенств или систем неравенств. Рассмотрим решения простых иррациональных неравенств с переменной, находящейся под знаком квадратного корня.

1. Пример. Решите неравенство $\sqrt{2x-4}-1<3$

Решение. ✓ Выражение под квадратным корнем не может быть отрицательным. Значит, должно быть $2x-4\geq 0$.
Решив это неравенство, получим $x\geq 2$.

✓ $\sqrt{2x-4}-1<3$ *данное неравенство*
$\sqrt{2x-4}<4$ *прибавляем к обеим частям 1*
$2x-4<16$ *возведем в квадрат обе части*
$2x<20$ *прибавляем к обеим частям 4*
$x<10$ *обе части делим на 2*

✓ Данное неравенство верно при $x\geq 2$ и $x<10$. Значит, $2\leq x<10$.

✓ Данное неравенство превратится в верное числовое неравенство для значений, взятых из интервала $[2;10)$, а для значений переменных, взятых вне этого интервала получится неверное числовое неравенство или выражение не имеющего смысла. Проверим это, выбрав пробные точки из интервалов $(-\infty;2)$, $[2;10)$; $(10;+\infty)$.

$(-\infty;2)$	$[2;10)$	$(10;+\infty)$
$x=1$ $\sqrt{2\cdot1-4}-1<3$ $\sqrt{-2}-1<3$ ✗ неверно	$x=2$ $\sqrt{2\cdot2-4}-1<3$ $-1<3$ ✓ верно	$x=11$ $\sqrt{2\cdot11-4}-1<3$ $\sqrt{18}-1<3$ ✗ неверно

✓ **Ответ:** $[2;10)$ Изображение на числовой оси:

Как видно, решение данного неравенства приводится к решению системы неравенств $\begin{cases}2x-4\geq 0\\ 2x-4<16\end{cases}$

Решение иррациональных неравенств, проводимые уединением радикала к виду $\sqrt{ax+b}<c$ (здесь c положительное число) приводится к решению систему неравенств $\begin{cases}ax+b\geq 0\\ ax+b<c^2\end{cases}$

> Решите неравенство $\sqrt{x-4}-1<2$, приводя к равносильной системе

2. **Пример.** Решите неравенство $\sqrt{x-3} \geq 2$

Решение.

✓ Определим допустимые значения переменной: $x-3 \geq 0$, $x \geq 3$

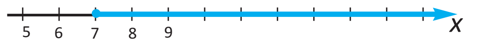
✓ Возведем в квадрат обе стороны: $x-3 \geq 4$, $x \geq 7$.

✓ Очевидно, что при $x \geq 7$ удовлетворяется и условие $x \geq 3$.

Значит неравенство верно при $x \geq 7$.

✓ **Ответ:** множеством решений неравенства является промежуток $[7; +\infty)$.

Изображение на числовой оси:

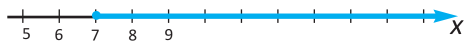


3. **Пример.** Решите неравенство $\sqrt{x-4} > -2$.

Решение. Допустимые значения переменной: $x-4 \geq 0$, т.е. $x \geq 4$. Очевидно, что при всех значениях x не меньших 4, данное неравенство удовлетворяется.

Ответ: множество решений неравенства - $[4; +\infty)$

Изображение на числовой оси:



Обучающие задания

1 Какие из чисел $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$ удовлетворяет неравенству?

a) $\sqrt{x+1} > -3$ b) $\sqrt{x-1} < 2$ c) $\sqrt{3-x} > 1$

2 Решите неравенство.

a) $\sqrt{x-4} < 3$ b) $\sqrt{2x-4} > 1$ c) $\sqrt{2x-3} < 1$

d) $\sqrt{x-3} - 2 < 2$ e) $\sqrt{x-5} - 1 > 3$ f) $5 - \sqrt{x-3} < 2$

3 Определите допустимые значения переменной. Рассуждайте: имеет ли неравенство какое-либо решение. Если имеет, то напишите это решение.

a) $\sqrt{x-3} < 0$ b) $\sqrt{3-x} < -1$ c) $\sqrt{2x-6} \leq 0$

d) $\sqrt{x-3} + \sqrt{1-x} > 2$ e) $\sqrt{x-4} > -1$ f) $\sqrt{2x-5} > -2$

4 Решите неравенство.

a) $\sqrt{x^2-9} < 4$ b) $\sqrt{4-x^2} > \sqrt{3}$ c) $\sqrt{x^2-3x} > 2$

d) $\sqrt[4]{x-1} \leq \sqrt{2}$ e) $\sqrt[4]{x-2} > 1$ f) $\sqrt[4]{2x-6} \leq \sqrt{8}$

5 Решите неравенство.

a) $\sqrt[3]{x-1} > 2$ b) $\sqrt[3]{2-x} \leq 1$ c) $\sqrt[3]{2x+1} + 2 < 1$

Указание: Уединив радикал, возведите в третью степень обе части неравенства. Решите полученное равносильное неравенство.

Обобщающие задания

1 В банк вложены 5000 манат под простую процентную ставку 8%. Сколько еще денег нужно вложить под простую процентную ставку 10%, чтобы годовая прибыль была между 800 и 950 манат?

2 Для нормального существования акул температура воды должна быть от 5°C до 18°C. Напишите неравенство для температуры, не подходящей для существования акул.

3 Зависимость между месячной арендной платой (r) за каждый квадратный метр площади магазина и полученным доходом (тыс. манатах) $P(r)$ приблизительно задается формулой $P(r) = -6r^2 + 45r - 39$.
Решите нижеуказанные уравнения и неравенства, представьте каждое из них соответственно реальной ситуации.

$-6r^2 + 45r - 39 = 0$ $\qquad$ $-6r^2 + 45r - 39 > 0$

$-6r^2 + 45r - 39 \geq 15$ $\qquad$ $-6r^2 + 45r - 39 < 15$

4 **Вопрос открытого типа.** Какие три точки нужно выбрать, чтобы найти множество решений неравенства $(x + 1)(x - 4) < 0$?

5 Джавид написал решение неравенства $2x^2 + 12x > 2x + 12$ в виде $2x(x + 6) > 2(x + 6)$, $x > 1$. Объясните ошибку Джавида.

6 Решите неравенства различными методами.

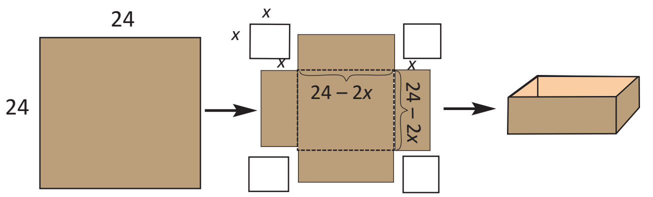
a) $-x^2 - 2x + 48 < 0$ $\qquad$ b) $3x^2 + 2x - 5 < 0$ $\qquad$ c) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

d) $x^2 + 2x - 15 \leq 0$ $\qquad$ e) $24 + 11x + x^2 > 0$ $\qquad$ f) $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$

g) $x^2 - 2x + 3 < 0$ $\qquad$ h) $x^2 - 2x + 3 > 0$ $\qquad$ i) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

7 Сумма двух целых чисел равна 20, а сумма их квадратов меньше 208. Определите эти числа.

8 Если от каждого угла листа картона квадратной формы размером 24 см × 24 см отрезать квадраты со стороной x см, а затем согнуть лист по пунктирным линиям, как показано на рисунке, и склеить его, то получится открытая коробка. При каких целых значениях x объем коробки будет больше 800 см³? При каких значениях объем будет наибольшим?



9 Решите неравенства.

a) $\dfrac{3x+1}{2x-4} > 0$ b) $\dfrac{2x-1}{5x+3} \geq 0$ c) $\dfrac{x-3}{x+3} \leq 5$

d) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x-3} < 0$ e) $x - 17 \geq \dfrac{60}{x}$ f) $\dfrac{x^2-x-6}{x-3} \geq 1$

g) $\dfrac{x-2}{x-1} < 1$ h) $\dfrac{x^2+x-1}{x+3} < 1$ i) $\dfrac{x^2+2}{x+4} \leq 3$

10 Из шелковой ткани прямоугольной формы отрезали кусок, длина которого больше ширины в 5 раз. Определите возможные размеры ширины, если площадь ткани не менее 500 см^2 и не более 720 см^2.

11 Аслан кинул мяч вверх со скоростью 15м/сек с крыши здания высотой 30 м. Расстояние h (в метрах) мяча от земли можно найти по формуле: $h(t) = -5t^2 + 15t + 30$. Здесь t показывает время в секундах).
a) Найдите наивысшую высоту, на которую поднялся мяч.
b) На каком промежутке времене мяч будет от земли на высоте 40 м и более?

12 Решите неравенства.

a) $|2x-3| + 5 < 6$ b) $|5x+3| - 4 \geq x$ c) $|x+5| < |6x-10|$

d) $\sqrt{x+2} < 2$ e) $\sqrt[3]{x-1} \leq -2$ f) $\sqrt{x^2-4} < 3$

13 При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 - ax + 1 > 0$ удовлетворяется при любых значениях переменной?

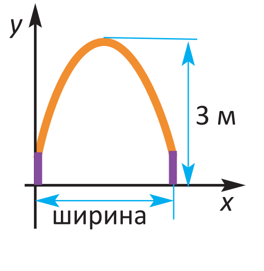
14 Определите соответствие.

1) $x^2 - x - 12 < 0$
2) $\sqrt{x-1} < 2$
3) $\dfrac{x^2-4x}{|x-2|} < 0$

A) сумма целых решений равна 4.
B) сумма целых решений равна 3.
C) сумма целых решений равна 10.
D) число целых чисел равно 4.

15 При каких значениях a точки пересечения параболы $y = ax^2 + 2x + 1$ с осью абсцисс находятся по разные стороны от точки $x = 1$?

16 Вход дома имеет форму арки. В выбранной системе координат модель арки задается функцией $g(x) = -0{,}6x^2 + bx + 0{,}6$. Если высота входа равна 3 м, то какой может быть ширина? Для того, чтобы машина высотой в 2,4 м проехала через арку, какой может быть ее ширина?

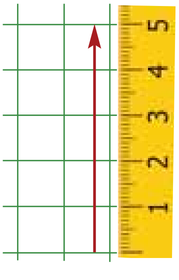


8 Векторы

В этом разделе вы научитесь

- Изображать векторы на координатной плоскости
- Определять модуль и направление векторов, заданных компонентами
- Слогать и вычитать векторы
- Умножать векторы на число
- Выполнять действия над векторами, заданными компонентами
- Решать задачи с применением векторов

Практическая работа



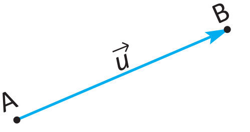
Начертите соответствующие расстояниям отрезки в заданном масштабе и с заданным направлением. Направление покажите стрелкой.

25 км на север 1 см : 5 км	20 м на восток 1 см : 5 м	4 км на запад 1 см : 1 км
250 м наверх 1 см : 25 м	100 м вниз 1 см : 20 м	15 км направо 1 см : 3 км

8-1 Векторы

Многие величины, например, масса, длина, время, температура и др. характеризуются только числовыми значениями. Такие величины называются скалярными величинами. Некоторые же величины, например, скорость, ускорение, сила и др. определяются как числовыми значениями, так и направлением. Такие величины называются векторными величинами. Перемещение - самый простой пример векторных величин. Перемещение тела из точки А в точку В изображается с помощью направленного от А до В отрезка - вектора.

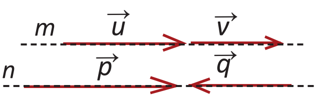
Вектор изображается с помощью направленного отрезка.Длина этого отрезка, называется **длиной** или **модулем вектора**. Вектор обозначается указанием начальной и конечной точки. Например, вектор $\overrightarrow{AB}$, здесь А - начало, В - конец вектора. Вектор обозначается также и маленькими буквами, например, вектор $\vec{u}$. Длину вектора $\vec{u}$ обозначают, как $|\vec{u}|$.



Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называется нулевым и обозначается $\vec{0}$. Длина нулевого вектора равна 0, а направление не определено.
Если направленные отрезки, изображающие векторы, параллельны или лежат на одной и той же прямой, то они называются **коллинеарными векторами**. Коллинеарные векторы могут быть одинаково направлены или противоположно направлены.

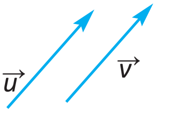
Одинаково направленные векторы обозначаются как $\vec{u}\uparrow\uparrow\vec{v}$,
а противоположно направленные $\vec{p}\uparrow\downarrow\vec{q}$.

На рисунке векторы $\vec{u}, \vec{v}, \vec{p}$ и $\vec{q}$
Коллинеарные векторы.
Здесь, $m \| n$.



- Два вектора называются равными, если они равны по модулю и одинаково направлены.

На рисунке векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ равны: $\vec{u}=\vec{v}$



- Два вектора называются противоположными, если они равны по модулю и противоположно направлены.

На рисунке векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ противоположны.

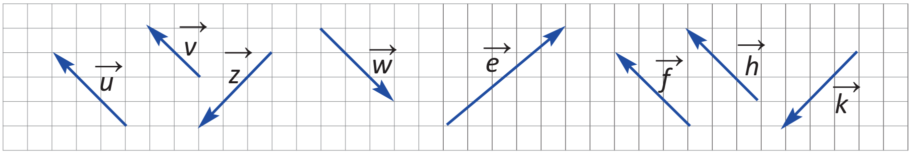
$$|\vec{p}| = |\vec{q}|, \quad \vec{p} = -\vec{q}$$

Обучающие задания

1 В каком случае можно говорить о векторных, а в каком о скалярных величинах?
1) Автомобиль движется на восток со скоростью 60 км/час.
2) Севиндж кинула мяч вперед под углом 30° с силой 100 Н.
3) Рост Гасана равен 1м 75 см, а масса 72 кг.
4) Парашютист выпрыгнул со скоростью 20 км/час из самолета

2 Какие из величин векторные?
1) 5,6 кг 2) 3,2 *м/сек*, по направлению северо-восток
3) 9,81 $м/сек^2$, вниз 4) $8{,}8 \times 10^{-3}\, м^3$

3 По рисунку выполните задания.



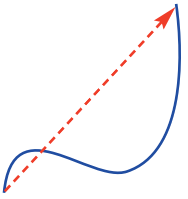
a) Запишите все векторы, длины которых равны длине вектора $\vec{u}$.

b) Запишите векторы, одинаково направленные с вектором $\vec{u}$.

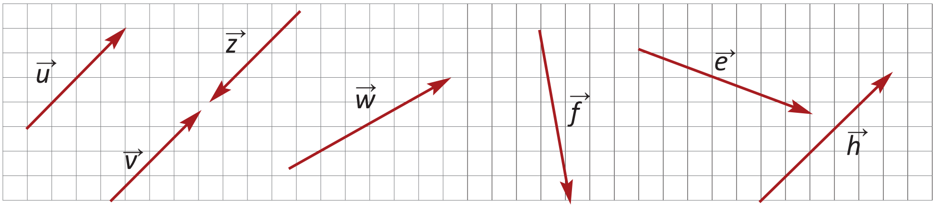
c) Запишите все векторы, равные вектору $\vec{u}$.

d) Запишите вектор, противоположный вектору $\vec{u}$.

4 a) На рисунке путь, пройденный велосипедистом показан голубой линией. Какая величина показана красной линией?
b) Какая из величин масса и вес - векторная, а какая скалярная? Объясните свое мнение.



5 Выберите векторы коллинеарные вектору $\vec{u}$.

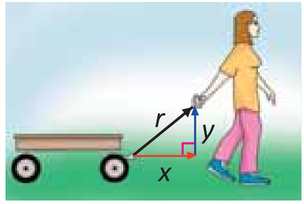


6 Нарисуйте в тетради: a) два коллинеарных вектора; b) два противоположных вектора; c) два равных вектора.

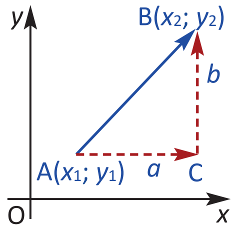
7 Расим представил на рисунке вектор перемещения отрезком длиной 6 см. Найдите реальное перемещение, если масштаб рисунка 1 см : 250 м

8-2 Векторы на декартовой координатной плоскости

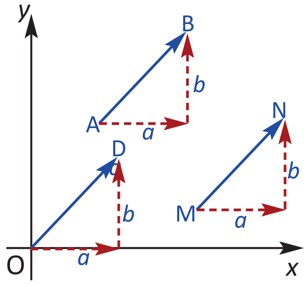
Исследование. Сила, приложенная Наилей к тележке, имеет два компонента - тянущую тележку вперед и тянущую ее вверх. Какими буквами на рисунке изображены эти силы? Какими формулами пользуются в физике для вычисления этих сил?



Выражения вектора компонентами на координатной плоскости



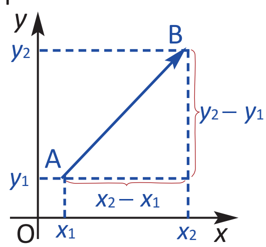
Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}$ на координатной плоскости. Конечная точка B относительно начальной точки A изменила свое положение вдоль оси Ox на $|a|$ (при $a>0$ направо, при $a<0$ налево), вдоль оси Oy на $|b|$ (при $b>0$ вверх, при $b<0$ вниз). Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$, определенные (и по модулю, и по направлению) числами a и b (как указано выше), являются компонентами вектора $\overrightarrow{AB}$. На координатной плоскости вектор записывается как $\overrightarrow{AB} = \langle a;\, b\rangle$. Эта запись называется записью вектора с компонентами.



Равные векторы имеют равные компоненты. Наоборот, если соответствующие компоненты векторов равны, то эти векторы равны.

На рисунке $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{MN}$.

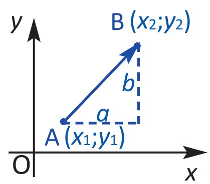
Если дан какой либо вектор $\overrightarrow{AB}$, то выбрав любую точку плоскости как начало, можно построить вектор равный данному, причем только один. Значит, выбирая разные начальные точки можно построить бесконечно много векторов, равных данному.



На координатной плоскости вектор $\overrightarrow{AB} = \langle a;\, b\rangle$ с начальной точкой A и конечной точкой B согласно координатам этих точек можно выразить с компонентами. Так как $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$, то имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1;\, y_2 - y_1\rangle = \langle a;\, b\rangle$$

Если отложить вектор $\langle a;\, b\rangle$ от начала координат конец вектора будет находиться в точке $(a;\, b)$. Числа a и b также называются координатами вектора



Длина вектора. Длину вектора можно найти по координатам начальной и конечной точек, используя формулу расстояния между точками.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Длину вектора $\overrightarrow{AB} = \langle a;\, b\rangle$ можно найти по формуле: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

1. Пример. Напишите вектор $\vec{z}$, начальная точка которого $(-2; 3)$, конечная $(3; 7)$ в виде $\vec{z} = \langle a; b \rangle$.

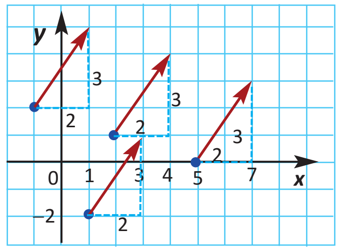
Решение. Напишем вектор $\vec{z}$ с компонентами: $\vec{z} = \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1 \rangle$ и впишем соответствующие координаты:

$\vec{z} = \langle 3 - (-2)\ ;\ 7 - 3 \rangle = \langle 5; 4 \rangle$ Ответ: $\vec{z} = \langle 5; 4 \rangle$

2. Пример. Точка $(2; 3)$ начальная точка вектора $\vec{u}\langle 3, 6 \rangle$. Найдите координаты конечной точки этого вектора.

Решение. Примем за координаты конечной точки вектора $\vec{u}$ - точку $(x; y)$: Тогда $\langle x - 2; y - 3 \rangle = \langle 3; 6 \rangle$. По равенству соответствующих координатов получаем: $x - 2 = 3$, $x = 5$; $y - 3 = 6$, $y = 9$

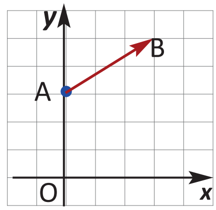
Конечная точка этого вектора $(5; 9)$.



3. Пример. На координатной плоскости нарисуйте несколько векторов равных вектору $\langle 2; 3 \rangle$, начальными точками которых являются точки $(-1; 2)$, $(2; 1)$, $(1; -2)$, $(5; 0)$.

Решение. Конечная точка вектора $\langle 2; 3 \rangle$ изменила свое положение относительно начальной точки 2 единицы вправо, 3 единицы вверх.Данные точки отмечаются на координатной плоскости. Начиная с этих точек изображаются векторы равные $\langle 2; 3 \rangle$.

4. Пример. $A(0; 3)$ и $B(3; 5)$ соответственно начальная и конечная точка вектора $\overrightarrow{AB}$. Напишите этот вектор в виде $\overrightarrow{AB} = \langle a; b \rangle$ и найдите длину



Решение. $\overrightarrow{AB} = \langle 3 - 0\ ;\ 5 - 3 \rangle = \langle 3; 2 \rangle$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

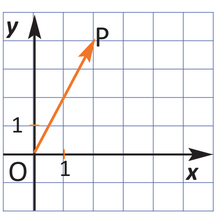
Обучающие задания

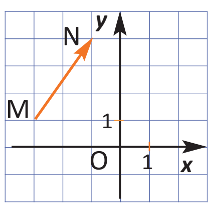
1 1) P и Q соответственно - начальная и конечная точки вектора $\overrightarrow{PQ}$. Напишите вектор $\overrightarrow{PQ}$ с компонентами и найдите длину.

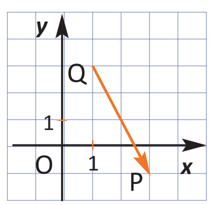
a) $P(0; 0)$, $Q(3; 4)$ b) $P(-5; 1)$, $Q(7; 6)$ c) $P(5; 4)$, $Q(-1; -4)$

2) Даны точки $A(-1; 2)$, $B(3; -4)$, $C(5; 6)$. Напишите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$ с компонентами.

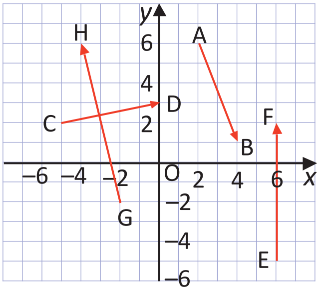
2 Выразите векторы, изображенные на координатной плоскости, через компоненты.

a) 

b) 

c) 

3 На координатной плоскости изображены векторы:
a) согласно координатам начальной и конечной точек выразите векторы с компонентами.
b) найдите модуль вектора.



4 1) По данным найдите координаты конечной точки вектора.

Вектор с компонентами: $\vec{u}\langle 1; 3\rangle$,

Координаты начальной точки: a) (2; 3); b) (0; 0); c) (–1; 3)

2) По данным найдите координаты начальной точки вектора.

Вектор с компонентами: $\vec{u}\langle -2; 0\rangle$,

Координаты конечной точки: a) (3; 1); b) (5; 0); c) (3; 1)

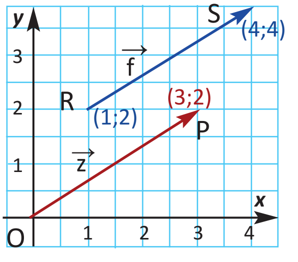
5 На координатной плоскости нарисуйте несколько векторов равных вектору $\langle 4; 2\rangle$, начальными точками которых являются точки (–2; 1), (0; 2), (3; –2), (0; 0).

6 По компонентам вектора найдите его длину.

a) $\langle 8; 6\rangle$ b) $\langle -2{,}4; -3{,}2\rangle$ c) $\langle 12; -16\rangle$

7 Вектор $\overrightarrow{OP}$ направлен из точки (0; 0) в точку (3; 2), а вектор $\overrightarrow{RS}$ из точки (1; 2) в точку (4; 4). Покажите равенство этих векторов.

Указание: Покажите равенство соответствующих компонентов векторов.



Прикладные задания

8 Скорость автомобиля можно выразить вектором, направленным из точки P(1; 1) в точку Q (4; 5). В координатной плоскости, приняв одно деление за 10 км/ч, найдите скорость автомобиля.

9 Аслан прошел 2 км в восточном направлении и 1 км в северном направлении. А Рашид прошел 1 км на север и еще 2 км на восток. Обоснуйте предположение, что Аслан и Рашид преодолели одинаковое расстояние.

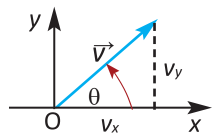
10 A - начальная, а B - конечная точки вектора. Найдите угловой коэффициент прямой, содержащей этот вектор.

a) A(3; 2), B(–1; 4) b) A(–4; 3), B(2; –6) c) A(1; 3), B(2; 4)

Направление вектора. Угол наклона

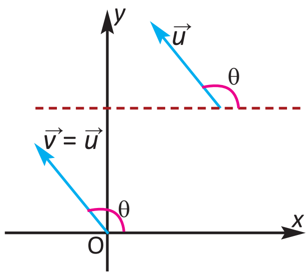
На координатной плоскости направление вектора, отложенного от начала координат определяется углом с положительным направлением оси *Ox* против часовой стрелки. Этот угол назовем **углом наклона** вектора.

На рисунке длина вектора $\vec{v} = \langle v_x; v_y \rangle$ обозначена $|\vec{v}| = v$, а угол, определяющий направление, через θ.



длина вектора: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

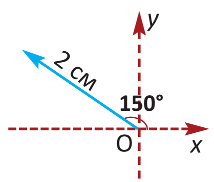
направление вектора: $\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$ və ya $\cos\theta = \dfrac{v_x}{v}$



Угол наклона любого вектора находится отложением вектора, равного данному вектору, от начала координат. Отметим, что угол наклона также можно найти, проведя горизонтальную ось, параллельную абсциссе, от начальной точки данного вектора.

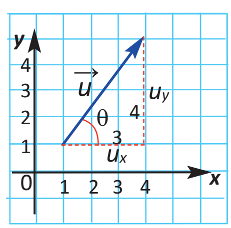
1. Пример. Вектор перемещения, модуль которого 200 м, направлен под углом наклона 150°. Выбрав масштаб 1 см : 100 м, нарисуйте этот вектор.

Решение. От начала луча, образующего с положительным направлением оси Ox угол в 150°, соответственно масштабу 1 см : 100 м линейкой отложим отрезок длиной 2 см.



2. Пример. Определите длину и угол наклона вектора $\vec{u}\langle 3;4 \rangle$.

Решение. Произвольную точку на координатной плоскости примем за начало вектора. От этой точки по горизонтальной оси отложим компоненту u_x, равную 3 единицам, по вертикальной оси отложим компоненту u_y, равную 4 единицам, и построим вектор $\vec{u}$, как показано на рисунке. Если измерить транспортиром угол θ, то можно увидеть, что его приближенное значение равно 53°. Это можно проверить вычислениями.

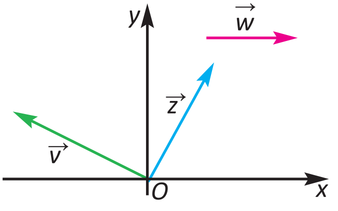


Длина вектора: $|\vec{u}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$, Угол наклона: $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$, с помощью калькулятора находим $\theta \approx 53°$.

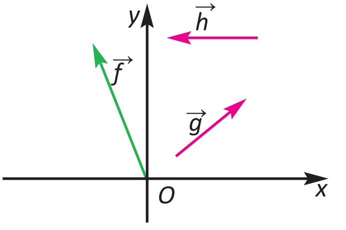
Обучающие задания

11 Произведя измерения с помощью транспортира и линейки, определите по данному масштабу длину и направление векторов.

a) 1 см : 50 км/час



b) 1 см : 10 Н



12 Произведя измерения с помощью транспортира и линейки, определите направление и длину векторов. (при необходимости выберите масштаб).

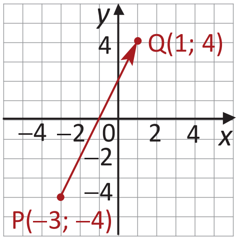
a) 5 км; 20°; 1 см : 1 км

b) 200 км; 170°; 1 см : 50 км

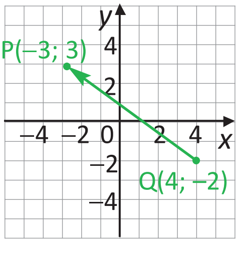
c) 1200 м; 150°; ? см : ? км

13 Начертите векторы в тетради. Определите модуль и угол наклона.

a)



b)



14 Данные векторы нарисуйте на координатной плоскости. Определите модуль и угол наклона.

a) $\langle 5; 5\rangle$ b) $\langle 5; 1\rangle$ c) $\langle -1; 1\rangle$ d) $\langle -6; 8\rangle$

15 P - начальная точка вектора, Q - конечная. Определите модуль и угол наклона.

a) P(0; 0), Q (–3; 2)

b) P(1; –1), Q (–2; 3)

c) P(4; 2), Q (1; 3)

d) P(0; 4), Q (2; 6)

16 Какое из утверждений верно, а какое неверно?

a) Если $\vec{u} = \vec{v}$, то $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

b) Если $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, то $\vec{u} = \vec{v}$

17 а) Точка (1; 2) - начальная точка вектора $\vec{w}$, а точка (5; –1) - конечная. Точка (5; –1) -начальная точка вектора $\vec{f}$, а (1; 2) - конечная. Напишите, чем схожи и чем отличаются эти векторы.

18 Запишите вектор с компонентами, длина которого равна длине вектора $\overrightarrow{KL}\langle 1; 3\rangle$, но противоположна по направлению. Объясните, как вы это определили.

19 На координатной плоскости нарисуйте соответствующие векторы.

а) Скорость корабля, движущегося под углом 60°, равна 60 км/час.

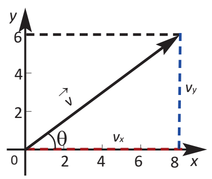
b) Скорость автомобиля, движущегося под углом 0°, равна 80 км/час.

c) Перемещение всадника под углом 70° равно 16 км.

d) Сила, действующая на тело под углом 145°, равна 100 Н .

Тригонометрические соотношения и компоненты вектора

Зная модуль и угол наклона, с помощью тригонометрических отношений можно записать вектор с компонентами. Обозначим $|\vec{v}| = v$. Учитывая, что



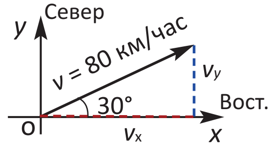
$$\cos\theta = \frac{v_x}{v}, \quad \sin\theta = \frac{v_y}{v}, \quad v_x = v\cos\theta, \quad v_y = v\sin\theta$$

вектор $\vec{v} = \langle v_x;\ v_y\rangle$ можно представить в виде $\vec{v} = \langle v\cos\theta;\ v\sin\theta\rangle$

Пример 1. Автомобиль движется в северо-восточном направлении под углом 30° со скоростью 80 км/ч. Напишите вектор скорости с компонентами.

Решение. На координатной плоскости положительное направление оси абсцисс примем за восток, а положителное направление оси ординат как север.

Даны: $|\vec{v}| = 80$ (км/час), $\theta = 30°$



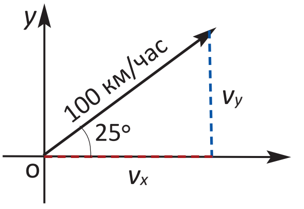
$\vec{v} = \langle v_x;\ v_y\rangle = \langle v\cos\theta;\ v\sin\theta\rangle = \langle 80\cos 30°;\ 80\sin 30°\rangle$ учитывая значения синуса и косинуса угла 30° получаем:

скорость в восточном направлении: $v_x = v\cos\theta = 80\cdot\cos 30° \approx 80\cdot 0{,}87 \approx 69{,}6$ (км/час)

скорость в северном направлении: $v_y = v\sin\theta = 80\cdot\sin 30° = 80\cdot 0{,}5 = 40$ (км/час)

Обучающие задания

20 Используя тригонометрические отношения, запишите вектор скорости $\vec{v}$, изображенный на рисунке компонентами.



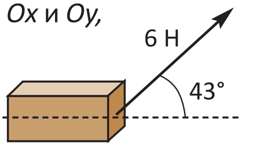
21 Запишете вектор $\vec{v}$ с компонентами в виде $\langle v_x;\ v_y \rangle$, соответствующий каждому случаю:

a) вектор, показывающий скорость корабля плывущего со скоростью 20 км/ч в северо-восточном направлении под углом 45°;
b) вектор, показывающий скорость самолета, летящего со скоростью 300 км/ч в западном направлении;
c) вектор, показывающий скорость велосипедиста, движущегося со скоростью 10 км/ч в северном направлении.

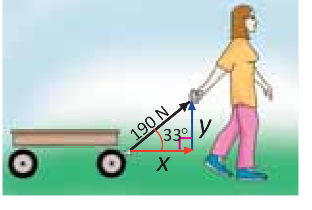
22 a) Снаряд, выпушенный из пушки со скоростью 925 м/сек, летел под углом 15°. Найдите скорость снаряда в горизонтальном направлении.

b) Корабль двигается под углом 60° со скоростью 75 км/час. Определите скорость корабля по отношению к осям Ox и Oy, другими словами, к востоку и северу.

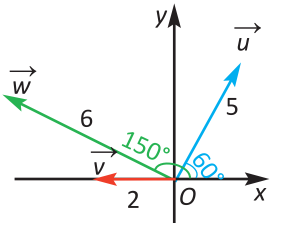
c) На тело приложена сила 6 Н под углом 43°. Запишите числовые значения горизонтального и вертикального компонента приложенной силы.



23 Гюльнар прилагает к тележке силу 190 Н под углом 33°. Найдите модули горизонтального и вертикального компонента приложенной силы.



24 По данным рисунка запишите векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ с компонентами.



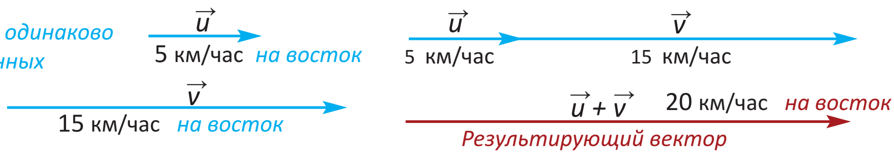
8-3 Сложение и вычитание векторов

Исследование. Как влияет течение реки на скорость лодки, если лодка движется по течению, или против течения реки?

Сложение колленарных векторов

Чтобы сложить два колленарных вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ надо переместить вектор $\vec{v}$ таким образом, чтобы конечная точка вектора $\vec{u}$ и начальная точка вектора $\vec{v}$ совпадали.
Вектор, показывающий сумму одинаково направленных коллинеарных векторов, называется результирующим вектором. Его модуль равен сумме модулей данных векторов, а сам вектор имеет одинаковое направление с данными векторами.

Сложение одинаково направленных векторов

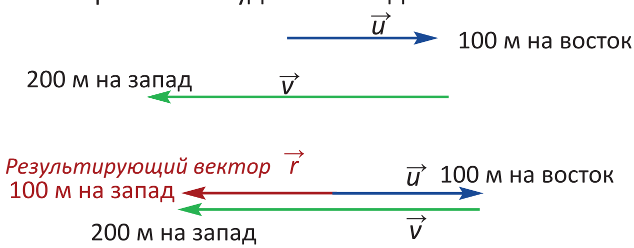


Модуль результирующего вектора двух противоположно-направленных коллинеарных векторов равен разности модулей (из большого вычитывается меньшее) этих векторов, а направление совпадает с направлением вектора большего по модулю.

Сложение противоположно-направленных векторов

1. **Пример.** Представьте, что вы прошли 100 м на восток, еще 200 метров на запад.

Решение. Нарисуем данные векторы в масштабе 1см : 50м. По определению, модуль результирующего вектора равен разности модулей векторов. А направление будет на запад.



Поскольку $|\vec{v}| > |\vec{u}|$, в этом случае длина результирующего вектора $\vec{r}$ равна:
$|\vec{r}| = |\vec{v}| - |\vec{u}|$ 200 м – 100 м = 100 м (на запад)

Проведем обобщение по сложению колленарных векторов.

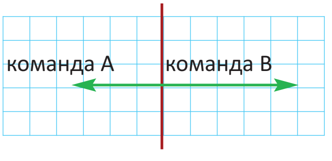
Пусть векторы $\vec{u}$ və $\vec{v}$ противоположно направленные, а $\vec{r}$ их результирующий вектор:

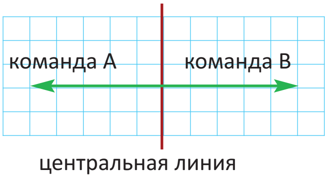
- при $|\vec{u}| > |\vec{v}|, |\vec{r}| = |\vec{u}| - |\vec{v}|$, и вектор $\vec{r}$ одинаково направлены с вектором $\vec{u}$
- при $|\vec{u}| < |\vec{v}|$, $|\vec{r}| = |\vec{v}| - |\vec{u}|$ и вектор $\vec{r}$ одинаково направлен с вектором $\vec{v}$.
- при $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, $|\vec{r}| = \vec{0}$, то есть сумма противоположных векторов равна $\vec{0}$

Для того, чтобы найти разность $\vec{u} - \vec{v}$, нужно к вектору $\vec{u}$ прибавить вектор $-\vec{v}$, противоположный вектору $\vec{v}$.
То есть выражения $\vec{u} - \vec{v}$ и $\vec{u} + (-\vec{v})$ эквивалентные.

Обучающие задания

1 В игре, изображенной на рисунке, приложенные силы выражаются векторами. Направления векторов показывают направления сил, прилагаемых к веревке командами. На рисунке показаны силы, приложенные к веревкам в двух раундах.

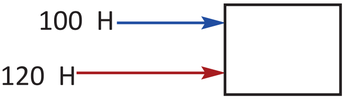




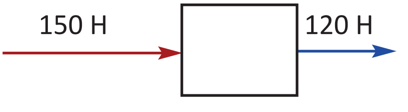
По векторам выразите свое мнение по поводу результатов 1-го и 2-го раундов.

2 Определите направление и модуль результирующей силы.

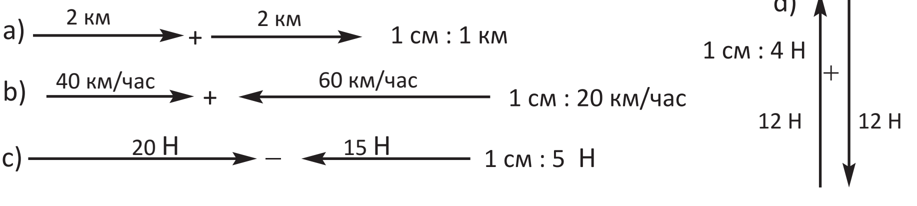
a) Чтобы перетащить шкаф, два человека толкают его в одном направлении, при этом один из них прикладывает силу 100 Н, а другой – 120 Н.

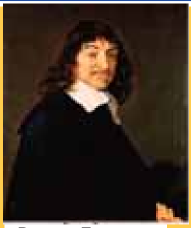


b) Чтобы переместить шкаф, один из двух людей с силой в 150 Н толкает шкаф вперед, а другой с силой в 120 Н тянет в том же направлении.



3 Нарисуйте результирующий вектор, показывающий сумму и разность векторов на рисунке.





Рене Декарт

Пьер Ферма

Жившие в XVII веке ученые-математики Рене Декарт и Пьер Ферма, взаимосвязывая алгебру и геометрию, создали новую область науки-аналитическую геометрию. Аналитическая геометрия, благодаря методу координат, позволила, с одной стороны, посредством алгебраических выкладок легко доказывать геометрические теоремы, а с другой стороны, в силу наглядности геометрических представлений упрощает решение задач над векторами.

Сложение и вычитание неколленарных векторов

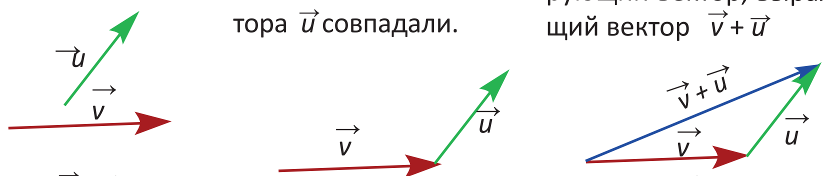
Существуют различные способы сложения неколлинеарных векторов. Рассмотрим два графических способа: 1) правило треугольника; 2) правило паралелограмма. При сложении векторов графическим способом данные векторы и результирующий вектор, показывающий их сумму строятся с помощью линейки (модуль) и транспортира (направление).

1) Правило треугольника

1. Даны: векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$

2. Вектор $\vec{u}$ переместить таким образом, чтобы конечная точка вектора $\vec{v}$ и начальная точка вектора $\vec{u}$ совпадали.

3. Направленный отрезок, соединяющий начальную точку вектора $\vec{v}$ с конечной точкой вектора $\vec{u}$ -результирующий вектор, выражающий вектор $\vec{v}+\vec{u}$

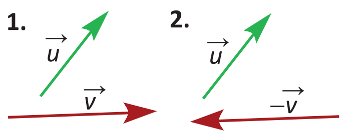


Вектор $\vec{u}+\vec{v}$ можно также получить смещением вектора $\vec{v}$.

Вектора можно складывать в любой последовательности. Переместительное свойство сложения верно и для сложения векторов. По этому правилу можно складывать три и более вектора. (Это - называется правилом многоугольника).

Вычитание векторов. Определим графическим способом вектор $(\vec{u}-\vec{v})$. Для этого:

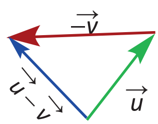
1. Нарисуем вектор $-\vec{v}$, противоположный вектору $\vec{v}$.



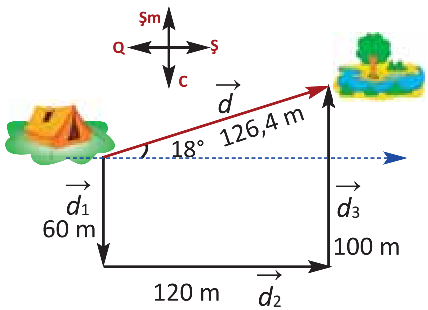
2. $-\vec{v}$ переместим так, чтобы конечная точка вектора $-\vec{v}$ совпадала с начальной точкой вектора $\vec{u}$.

3. Направленный отрезок, соединяющий начальную точку вектора $\vec{u}$ и конечную точку вектора $-\vec{v}$, будет вектором $\vec{u}-\vec{v}$.

3.



Пример. Джамал прошел от палатки, разбитой в лагеры 60 метров на юг, 120 м на восток, еще 100 м на север и дошел до озера. Какое наименьшее расстояние от палатки до озера?

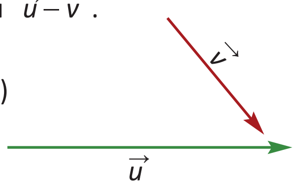


Решение: Выберем масштаб: 1 см : 40 м Движение Джамала изобразим последовательно векторами по выбранному масштабу. Начальную точку 1-го вектора, показывающего движение Джамала, соединим с конечной точкой 3-го вектора.
Полученный результирующий вектор $\vec{d}$ выражает сумму векторов $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$ и $\vec{d_3}$. Измерив, видим что, длина этого вектора приблизительно 126,4 м, а направление под углом 18°.
Ответ: Озеро находится на расстоянии приблизительно 126,4 м от палатки

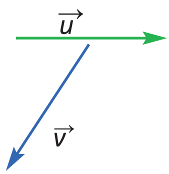
Решите задачи путем измерения и построения, используя транспортир и линейку.

4 1) Векторы данные на рисунке, перерисуйте в тетрадь и постройте вектор $\vec{u}+\vec{v}$ и $\vec{u}-\vec{v}$.

a)



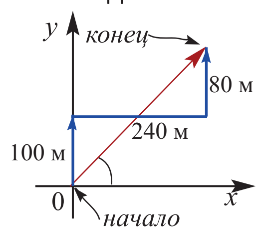
b)



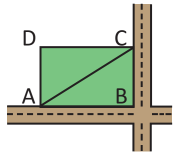
5 Начертите данные векторы перемещения в тетради по определенному масштабу и сложите их по правилу треугольника.
a) 5 км, угол наклона 60° и 3 км, угол наклона 45°;
b) 8 км, угол наклона 180° и 3 км, угол наклона 30°;

6 Всадник прошел 400 метров на запад, затем 300 метров на север.
a) По масштабу 1см : 100м начертите вектор показывающего перемещение всадника, определите модуль и угол наклона.
b) По выбранному масштабу определите перемещения всадника

7 Представьте, что вы двигались 100 м на север, 240 м на восток и снова 80 м на север. На сколько метров вы удалились от начальной точки движения? Найдите угол наклона вектора перемещения.



8 Корабль проплыл по направлению на юг 15 км, затем, изменив направление, взял курс на восток и проплыл еще 40 км. Далее он проплыл в северном направлении еще 25 км и достиг маяка. Выберите масштаб, изобразите вектор перемещения корабля до маяка, найдите модуль и угол наклона.



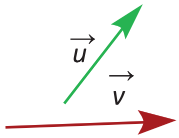
Исследование. Представьте, что вы должны пройти в парке из точки A в точку C. Предположим, что для этого вы выбрали 3 различных способа:

1) Из точки A в точку B, а оттуда в точку C.
2) Из точки A в точку D, а оттуда в точку C.
3) Из точки A в точку C.

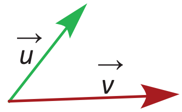
Для каждого из перемещений запишите соответсвующие вектора.

Правило параллелограмма

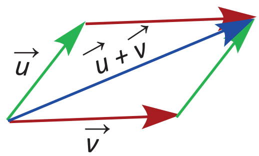
1. Даны векторы: $\vec{u}$ и $\vec{v}$



2. Переместим вектор $\vec{v}$ так, чтобы начальные точки векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ совпадали.



3. Построим параллелограмм со сторонами $\vec{u}$ и $\vec{v}$ параллельным переносом соответствующих векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Диагональ этого параллелограмма, исходящая из начальных точек векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$, показывает их сумму: $\vec{u}+\vec{v}$



С помощью линейки и транспортира определите длину и направление построенного результирующего вектора.

9 Заданы векторы перемещения. Начертите их по определенному масштабу в тетради. Найдите результирующий вектор по правилу паралелограмма

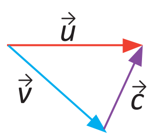
a) 1,5 км под углом 180° и 3 км под углом 45°
b) 2,5 км под углом 80 и 5 км под углом 15°
c) 4 км под углом 120° и 2 км под углом 30°

10 Самолет летит на север со скоростью 850 км/час. Как изменится скорость и направление самолета под воздействием западного ветра скорость которого 50 км/час? Начертите соответствующую схему.

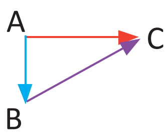
b) Моторная лодка движется со скоростью 10км/час перпендикулярно течению реки. Скорость течения реки 2 км/час. Определите модуль и угол наклона вектора скорости лодки.

11 Каждый вектор на рисунке представьте в виде суммы или разности двух других векторов.

a)



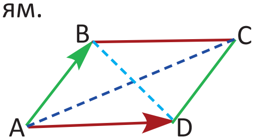
b)



2) Для паралелограмма ABCD напишите векторы данным выражениям.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$



Переместительное и сочетательное свойство

Для любых векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$ və $\vec{z}$ верны:

Переместительное свойство: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

Сочетательное свойство: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{z}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{z})$

Свойство идентичности: $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$

Сумма противоположенных векторов: $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$

1. Пример 1. $(\vec{u}+\vec{v})-\vec{u}=(\vec{v}+\vec{u})-\vec{u}=$ *переместительное свойство*

$=(\vec{v}+\vec{u})+(-\vec{u})=$ *складывается с противоположным*

$=\vec{v}+(\vec{u}+(-\vec{u}))=$ *сочетательное свойство*

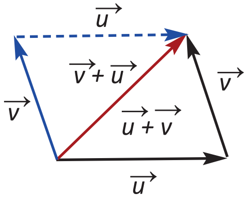
$=\vec{v}+\vec{0}=$ *складывается с суммой противоположных векторов*

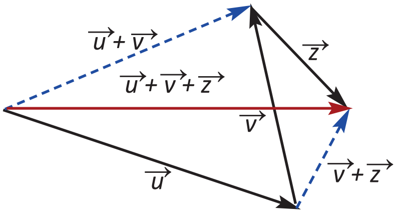
$=\vec{v}$ *свойство идентичности*

12 Измерьте рисунки и перечертите их в тетради.

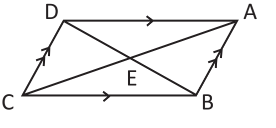
a) При сложении векторов примените переместительное и сочетательное свойства.

b) Для каждого свойства приведите еще один пример.





13 ABCD параллелограмм, E - точка пересечения диагоналей. Запишите векторы, соответствующие каждому выражению:

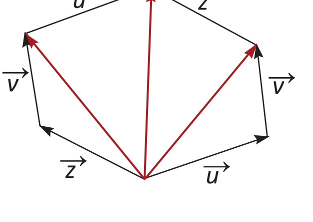


a) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}$
b) $\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}$
c) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$

d) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}$
e) $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{BC}$
f) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}$

g) $\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DC}$
h) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$
i) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DC}$

14 Выделенные красным цветом векторы выразите различными способами в виде суммы векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{z}$. Используйте свойства сложения векторов.

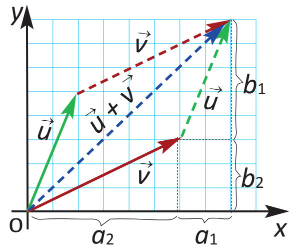


Практическая работа. **1.** По координатам точек $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ запишите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AC}$ с компонентами.
2. Используя правило треугольника сложения, запишите равенства $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ и сравните компоненты вектора $\overrightarrow{AC}$ с суммой соответствующей компонентам векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

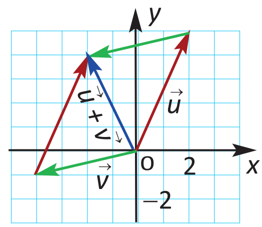
Сложение векторов, заданных компонентами

Правило сложения двух векторов на координатной плоскости, с использованием их компонентов.

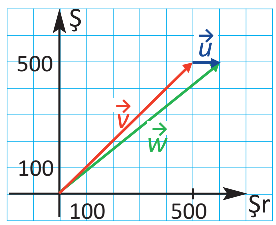
Суммой векторов $\vec{u}=\langle a_1; b_1\rangle$ ***и*** $\vec{v}=\langle a_2; b_2\rangle$ ***будет вектор:*** $\vec{u}+\vec{v}=\langle a_1+a_2; b_1+b_2\rangle$



1. **Пример.** Если $\vec{u}=\langle 2; 5\rangle$ и $\vec{v}=\langle -4; -1\rangle$, то вектор $\vec{u}+\vec{v}$ выразите через компоненты.
Решение: Для того, чтобы найти компоненты вектора $\vec{u}+\vec{v}$ нужно по горизонтали (оси абсцисс) и по вертикали (оси ординат) сложить соответствующие компоненты векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$:
$\vec{u}+\vec{v}=\langle 2+(-4);\ 5+(-1)\rangle=\langle -2; 4\rangle$



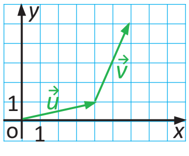
2. **Пример.** Самолет летит в северо-восточном направлении под углом 45° со скоростью 707 миль/час. В восточном направлении дует ветер со скоростью 40 миль/час. Как изменится скорость самолета под воздействием ветра? Выразите скорость самолета в компонентах и найдите его модуль.

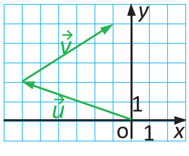


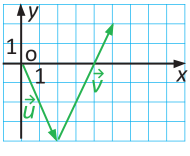
Решение. Так как $707\cdot\cos45^\circ=707\cdot\sin45^\circ\approx 500$, то скорость самолета можно выразить вектором $\vec{v}=\langle 500; 500\rangle$. А скорость ветра выражается вектором $\vec{u}=\langle 40; 0\rangle$. Конечная скорость самолета:
$\vec{w}=\vec{v}+\vec{u}=\langle 500+40; 500+0\rangle=\langle 540; 500\rangle$
Модуль конечной скорости самолета: $|\vec{w}|=\sqrt{540^2+500^2}\approx 736$ миль/час

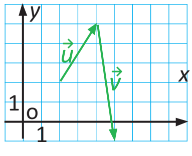
Обучающие задания

15 Перечертите в тетрадь изображения векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Каждый из этих векторов запишите с компонентами. Найдите вектор, выражающий сумму $\vec{u}+\vec{v}$ и нарисуйте его.









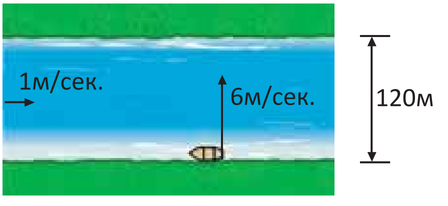
16 Выразите сумму векторов с их компонентами, найдите угол наклона и модуль.

a) $\vec{u}=\langle 5; 3\rangle$ və $\vec{v}=\langle -1; 4\rangle$ b) $\vec{u}=\langle 3; -4\rangle$ və $\vec{v}=\langle 5; -2\rangle$

c) $\vec{u}=\langle 0; 12\rangle$ və $\vec{v}=\langle -5; 0\rangle$ d) $\vec{u}=\langle -6; 9\rangle$ və $\vec{v}=\langle -2; 6\rangle$

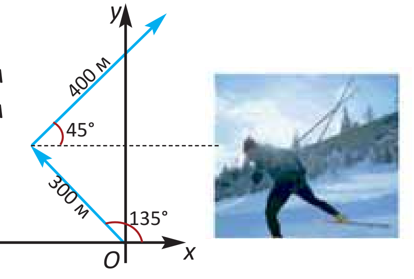
17 Самолет выполняет полет со скоростью 650 км/ч в северном направлении. Через некоторое время начался ветер с запада со скоростью 80 км/час. Выразите ветор скорости самолета с компонентами, найдите модуль и угол наклона.

18 Лодка движется перпендикулярно к течению реки шириной 120 м. Скорость лодки в стоячей воде 6 м/сек, скорость течения реки 1м/сек:

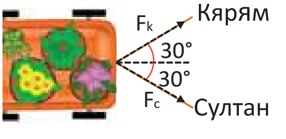


a) сколько времени потребуется лодке, чтобы переплыть реку?
b) на сколько метров течение реки снесет лодку вниз от места назначения?
c) под каким углом по отношению к берегу будет двигаться лодка?

19 Лыжник преодолел путь сначала 300 м под углом 135°, а потом 400 м под углом 45°. Найдите перемещение лыжника.



20 Кярям и Султан тянут дачную повозку. Оба тянут повозку с одинаковой силой под углом 30°.



a) Если результирующая сила равна 170 Н, то какую силу приложил каждый из них?

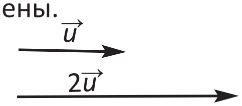
b) Если сила, приложенная каждым будет 70 Н, то чему будет равна результирующая этих сил?

c) Если Кярям и Султан приблизятся друг к другу, то как изменится результирующая сила?

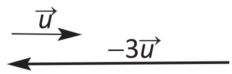
8-4 Умножение вектора на число

Произведение вектора $\vec{u}$ на число k ($k \in R$) записывается как $k \cdot \vec{u}$, а его длина равна $|k| \cdot |\vec{u}|$, при $k > 0$ вектора $k \cdot \vec{u}$ и $\vec{u}$ имеют одинаковое направление, при $k < 0$ вектора $k \cdot \vec{u}$ и $\vec{u}$ имеют противоположное направление.

1) Вектор $2\vec{u}$ на рисунке, получен из вектора $\vec{u}$ увеличением длины в 2 раза. Эти векторы одинаково направлены.



2) На рисунке изображены векторы $\vec{u}$ и $-3\vec{u}$. Эти векторы противоположно направлены.



Любой вектор коллинеарен вектору, выражающему произведение этого вектора на число (отличное от нуля). Если $\vec{u} \neq 0$ и $\vec{v}$ коллинеарные векторы, то существует единственное число k, что $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$

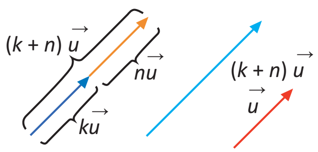
Свойство умножения вектора на число.

1. Сочетательное свойство.

Для любых чисел k и n ($k \in R$, $n \in R$) и вектора $\vec{u}$: $\quad \boldsymbol{(kn) \cdot \vec{u} = n\,(k \cdot \vec{u})}$

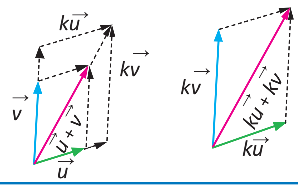
2. Распределительное свойство.

Для любых чисел k и n (k, $n \in R$) и вектора $\vec{u}$: $\quad \boldsymbol{(k + n)\,\vec{u} = k\vec{u} + n\vec{u}}$



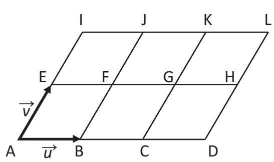
Для любого числа k ($k \in R$) и векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$:

$$\boldsymbol{(\vec{u} + \vec{v})\,k = k\vec{u} + k\vec{v}}$$



Обучающие задания

1 Фигура на рисунке состоит из конгруэнтных параллелограммов. Векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ лежат на сторонах параллелограмма. Выразите следующие векторы через $\vec{u}$ и $\vec{v}$:



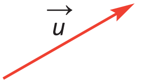
a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{KC}$ c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL}$ d) $\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IE}$

2 Модуль вектора скорости под углом 30° равен $v = 400$ км/час. Выберите масштаб и начертите в тетради следующие векторы.

a) $2\vec{v}$ b) $-2\vec{v}$ c) $0{,}5\vec{v}$ d) $-3\vec{v}$

3 С помощью линейки и транспортира нарисуйте в тетради вектор $\vec{u}$. Геометрически покажите справедливость равенства $(k+m)\vec{u} = k\vec{u} + m\vec{u}$ для следующих значений k и m.

a) $k = 2$ и $m = 2$ b) $k = -3$ и $m = 2$ c) $k = -2$ и $m = -1$



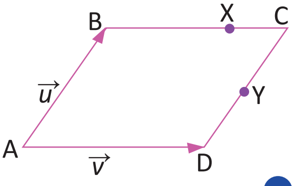
4 Выскажите свое мнение о векторах $\vec{u}$ и $\vec{v}$ согласно следующей информации.

a) $2\vec{u} = 4\vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v} = 0$ c) $4(\vec{u} + \vec{v}) - 3(\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

5 В параллелограмме $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$. Точка X расположена на стороне BC так, что $BX = 3 \cdot XC$, а точка Y делит сторону CD пополам. Выразите следующие векторы через $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

1) $\overrightarrow{BD}$ 2) $\overrightarrow{AX}$ 3) $\overrightarrow{BY}$ 4) $\overrightarrow{DY}$

5) $\overrightarrow{AC}$ 6) $\overrightarrow{AY}$ 7) $\overrightarrow{DX}$ 8) $\overrightarrow{XY}$



Прикладные задачи

6 По закону Ньютона гравитационная сила $\vec{F}_g$ (в ньютонах) равна произведению массы тела (в кг) гравитационному ускорению (м/сек^2): $\vec{F}_g = m\vec{g}$. Эта сила называется весом тела и записывается также в виде $\vec{P} = m\vec{g}$. Гравитационное ускорение на Земле равно 9,8 м/сек^2, а на Луне 1,6 м/сек^2.

a) Найдите вес тела массой 60 кг на Земле и на Луне.

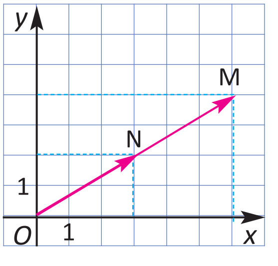
7 **Вопрос открытого типа.** На координатной плоскости нарисуйте вектор, начальной точкой которого будет начало координат, и отметьте координаты конечной точки. Выберите какое-либо число k и нарисуйте вектор $k\vec{u}$, полученный произведением этого числа на вектор $\vec{u}$. Напишите координаты конечной точки этого вектора. Нарисуйте еще три вектора $\vec{v}$, $\vec{z}$, $\vec{w}$ и, выбрав одинаковое число k, нарисуйте векторы, полученные из произведения этих векторов на k.

8 Выполните задания по рисунку.

1) Запишите вектор $\overrightarrow{ON}$ с компонентами и вычислите длину.

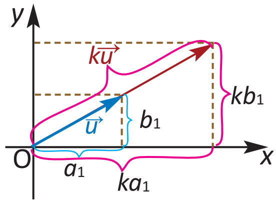
2) Запишите вектор $\overrightarrow{OM}$ с компонентами и вычислите длину.

3) Сравните длины и соответствующие компоненты векторов $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$.



8-5 Действия над векторами, заданными компонентами

Для вектора $\vec{u}\langle a_1;\, b_1\rangle$, заданного компонентами и для любого числа k верно: $k\vec{u} = \langle ka_1;\, kb_1\rangle$.
Поскольку для вектора $\vec{v} = \langle a_2;\, b_2\rangle$ верно равенство $-\vec{v} = \langle -a_2;\, -b_2\rangle$, то разность векторов $\vec{u} = \langle a_1;\, b_1\rangle$ и $\vec{v} = \langle a_2;\, b_2\rangle$ будет $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = \langle a_1 - a_2;\, b_1 - b_2\rangle$



1. Пример. Заданы векторы $\vec{u} = \langle 3;\, -2\rangle$ и $\vec{v} = \langle -1;\, 4\rangle$. Запишите векторы a) $3\vec{u}$; b) $2\vec{u} + 3\vec{v}$; c) $\vec{u} - \vec{v}$ с компонентами.

Решение. a) $3\vec{u} = 3\cdot\langle 3;\, -2\rangle = \langle 9;\, -6\rangle$

b) $2\vec{u} + 3\vec{v} = 2\cdot\langle 3;\, -2\rangle + 3\cdot\langle -1;\, 4\rangle = \langle 6;\, -4\rangle + \langle -3;\, 12\rangle = \langle 6+(-3);\, -4+12\rangle = \langle 3;\, 8\rangle$

c) $\vec{u} - \vec{v} = \langle 3;\, -2\rangle - \langle -1;\, 4\rangle = \langle 3-(-1);\, -2-4\rangle = \langle 4;\, -6\rangle$

- Соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны.
- Наоборот, если соответствующие координаты векторов пропорциональны, то эти векторы коллинеарные. Условие коллинеарности векторов $\vec{u}\langle a_1;\, b_1\rangle$ и $\vec{v}\langle a_2;\, b_2\rangle$, (при $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$) можно выразить как: $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{b_2}{b_1}$

2. Пример. При каком значении m, векторы $\vec{u}\ \langle -1;\, 4\rangle$ və $\vec{v}\ \langle 3;\, m\rangle$ коллинеарны?

Решение. По условию коллинеарности: $\dfrac{3}{-1} = \dfrac{m}{4} \Rightarrow m = -12$

1 Если $\vec{u} = \langle 2\,;\, 3\rangle$ и $\vec{v} = \langle -4;\, 5\rangle$, запишите векторы с компонентами:

a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ b) $\vec{u} + 2\vec{v}$ c) $3\vec{u} - 2\vec{v}$ d) $4\vec{u} - 3\vec{v}$

2 a) Если $\vec{u} = \langle -6;\, 2\rangle$ и $\vec{v} = \langle 2;\, -4\rangle$, найдите длину вектора $2\vec{u} + 3\vec{v}$.

b) Если $\vec{z} = \langle 2;\, 3\rangle$ и $\vec{w} = \langle 1;-3\rangle$, найдите длину вектора $3\vec{z} - \vec{w}$.

3 Покажите векторы, коллинеарные вектору $\vec{f} = \langle 2\,;\, -3\rangle$

a) $\vec{u} = \langle 4\,;\, 6\rangle$ b) $\vec{v} = \langle 1\,;\, -1{,}5\rangle$ c) $\vec{z} = \langle -4\,;\, 6\rangle$ d) $\vec{w} = \langle -2\,;\, -3\rangle$

4 При каких значениях k векторы коллинеарны?

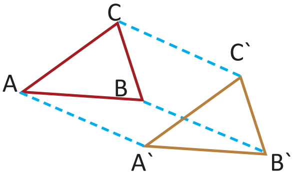
a) $\vec{u} = \langle 2\,;\, -3\rangle$ və $\vec{v} = \langle k;\, 9\rangle$ b) $\vec{u} = \langle 3\,;\, k\rangle$ və $\vec{v} = \langle k;\, 12\rangle$

5 Даны точки A $(-3;\, 1)$ и B $(6;\, 7)$. Найдите координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении: AC : CB = 1 : 2.

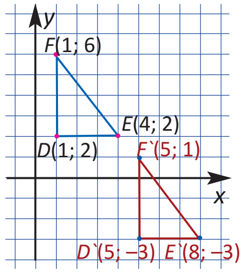
Указание: Используйте равенство $\overrightarrow{AB} = 3\cdot\overrightarrow{AC}$ и, приняв за $C(x;\, y)$, запишите векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ с компонентами.

6 Даны точки A (1; 1) , B (1; 7), C (7; 7). Найдите точку пересечения медиан треугольника ABC.

8-6 Параллельный перенос



При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и тоже расстояние и фигура переходит в фигуру конгруэнтную себе.
Треугольник A′B′C′, изображенный на рисунке, получен параллельным переносом из треугольника ABC.
Здесь AA′ = BB′ = CC′, ΔABC ≅ ΔA′B′C

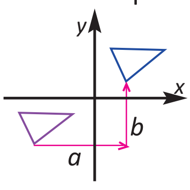


В координатной плоскости каждая точка данного треугольника DEF перемещена на 4 единицы вправо, и на 5 единиц вниз.

D(1 ; 2) → D′(5; –3) E(4; 2) → E′(8; –3) F(1 ; 6) → F′(5; 1)

Применяя формулу расстояния между двумя точками, получим: DE = 3, D′E′ = 3; DF = 4, D′F′ = 4; FE = 5, F′E′ = 5. По признаку конгруэнтности ΔDEF ≅ ΔD′E′F′

При параллельном переносе фигуры произвольная точка A (x; y) переходит в точку A′(x'; y') и между координатами этих точек верны равенства: $x' = x + a$, $y' = y + b$.



На координатной плоскости при параллельном переносе перемещение по осям координат направо и наверх выражается положительными, налево и вниз отрицательными единицами. Это определяется числами a и b. При параллельном переносе расстояние между двумя точками не меняется.

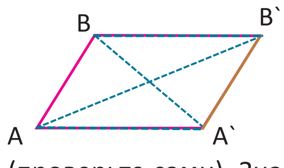
Действительно, при параллельном переносе произвольные точки A(x_1; y_1) и B(x_2; y_2) переходят в точки A′($x_1 + a$; $y_1 + b$) и B′ ($x_2 + a$; $y_2 + b$).

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$ $\quad A'B' = \sqrt{((x_2 + a) - (x_1 + a))^2 + ((y_2 + b) - (y_1 + b))^2}$

Отсюда AB = A′B′. Значит, при параллельном переносе сохраняется расстояние.

Координаты середины отрезка AB′:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + a}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}$$



Координаты середины отрезка A′B будут такими же (проверьте сами). Значит, диагонали четырехугольника ABB′A′ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. То есть, этот четырехугольник параллелограм. А у параллелограмма противоположные стороны параллельны. При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в саму себя).
Если при переходе одной фигуры в другую расстояния между точками сохраняются, то такое преобразование называется движением. Параллельный перенос это движение.

Обучающие задания

1 Запишите параллельные переносы в виде $(x; y) \to (x + a; y + b)$.
a) 4 единицы налево, 2 единицы вниз
b) 2 единицы направо, 2 единицы наверх
c) 3 единицы направо, 5 единиц наверх
d) 3 единицы налево, 1 единица наверх

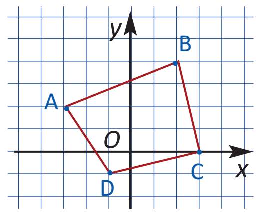
2 Изобразите в тетради данный параллельный перенос четырехугольника на рисунке.

a) $(x; y) \longrightarrow (x - 1; y + 2)$

b) $(x; y) \longrightarrow (x + 3; y - 2)$

c) $(x; y) \longrightarrow (x - 3; y - 1)$

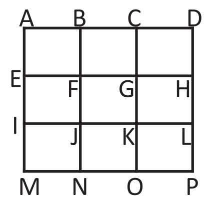
d) $(x; y) \longrightarrow (x + 1; y + 2)$



3 ΔABC с вершинами в точках A(3, –4), B(3; 2), C(5, 1) при параллельном переносе $(x; y) \to (x - 2; y + 1)$ переходит в $\Delta A'B'C'$. Определите координаты вершины $\Delta A'B'C'$ и нарисуйте треугольник.

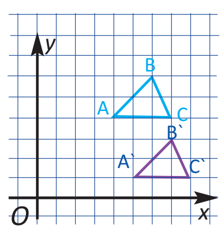
4 Дан ΔABC с вершинами в точках A(2; –1), B(4; 2), C(–3; 3). При параллельном переносе точка A переходит в точку A′(–1; –1). При этом же параллельном переносе точка B переходит в точку B′ и точка C в точку C′. Найдите координаты точек B\` и C\`. Запишите этот параллельный перенос в виде $(x; y) \to (x + a; y + b)$.

5 На картине показаны 9 конгруэнтных прямоугольников. Здесь параллельным переносом точки A образовалась точка G. Определите точки, образованные одним и тем же параллельным переносом каждой из нижеуказанных точек.



a) F b) E c) B d) J e) I

6 Вершинами треугольника ABC являются точки A(4, 4), B(6, 6) и C(7, 4). Запись $(x, y) \to (x + 1, y - 3)$ определяет преобразование ΔABC в $\Delta A'B'C'$. Докажите, что $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.



План для доказательства:
1) Применив параллельный перенос, найдите координаты точек A\`, B\`, C\`.
2) Примените формулу расстояния между двумя точками.
3) Воспользуйтесь свойством конгруэнтности треугольников.

7 Запишите новые координаты точек при параллельном переносе $(x; y) \longrightarrow (x + a; y + b)$.

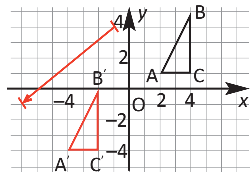
a) $a = 3$, $b = -2$
F(–4; 1), A(–2;, 5), S(–1; 4), N(–1; 2)

b) $a = -4$, $b = -3$
D(–4; –3), E(–2; –2), F(–2; –4)

Паралелный перенос и векторы

Каждый параллельный перенос определяет один вектор. То есть при параллельном переносе перемещение всех точек фигуры выполняется по одному вектору. Выражение параллельного переноса вектором упрощает запись. Компоненты вектора $\vec{u}\langle a\,;\, b\rangle$ показывают изменения координат точек относительно осей Ox и Oy. На картине изображен параллельный перенос ΔABC на вектор $\vec{u}\langle -6; -5\rangle$.

Воспользуясь компонентами вектора, можно определить перемещение фигуры. Все точки треугольника ABC, перемещаясь на длину вектора $\vec{u}\langle -6; -5\rangle$, переходят в точки треугольника ΔA′B′C′.



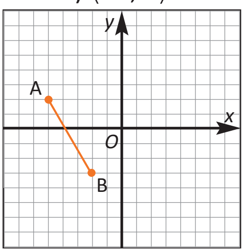
Paralel köçürmə vektoru: ⟨–6; –5⟩

Длина вектора $|\vec{u}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2} \approx 7{,}8$ (единиц)

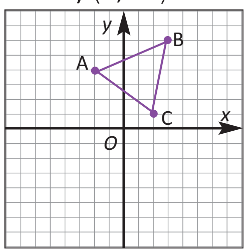
8 Напишите векторы компонентами, соответствующими параллельным переносам.
a) 5 единиц направо 8 единиц наверх
b) 2 единицы налево, 5 единиц наверх
c) 3 единицы налево, 5 единиц вниз
d) 4 единицы налево, 5 единиц вниз

9 Выполните параллельный перенос фигур по заданному вектору:

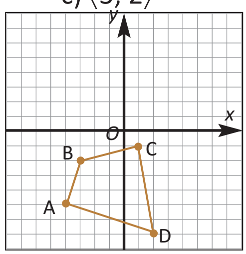
a) ⟨–2; 5⟩



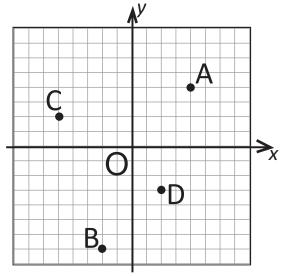
b) ⟨1; –4⟩



c) ⟨3; 2⟩



10 Точка A (–3; –2) параллельно перенесена по правилу $(x\,; y) \rightarrow (x + 5; y + 3)$ и преобразована в точку A'.
1) Запишите вектор, определяющий параллельный перенос;
2) Запишите координаты точки A'.



11 Запишите вектор, определяющий параллельный перенос.

a) B ⟶ D b) A ⟶ C c) A ⟶ B

8-7 Движение и конгруэнтные фигуры

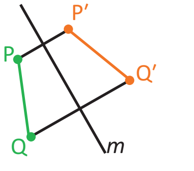
Пусть каждой точке фигуры F противопоставлена определенная точка плоскости. Множество таких точек образует фигуру F′. В этом случае говорят, что фигура F′ получена преобразованием фигуры F. Плоскость так же является геометрической фигурой. При преобразовании плоскости произвольная точка переходит в точку этой же плоскости и причем каждая точка преобразуется в определенную точку. Если при преобразовании одной фигуры в другую расстояние между точками сохраняется, то все геометрические свойства фигуры сохраняются и фигура преобразуется в конгруэнтную фигуру. Такие преобразования называются движением. Результат последовательных движений также является движением.

Теорема. При движении отрезок преобразуется в отрезок.

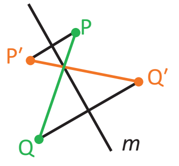
Следствие: При движении каждая сторона треугольника переходит в конгруэнтный отрезок, и поэтому по признаку ССС треугольник преобразуется в конгруэнтный треугольник. При движении прямая переходит в прямую, отрезок в отрезок и угол между полупрямыми сохраняется. При таких преобразованиях как параллельный перенос, центральная симметрия, осевая симметрия, поворот, фигура переходит в конгруэнтную фигуру.

Теорема. Осевая симметрия (отражение) есть движение.
На рисунке изображено отражение отрезка PQ относительно прямой *m*. По расположению отрезка PQ и прямой *m* возможны 4 различных случая.

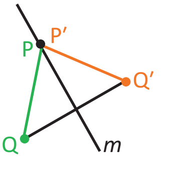
1. Точки P и Q лежат по одну сторону от прямой *m*.



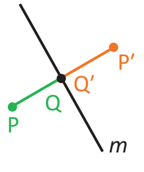
1. Точки P и Q лежат по разные стороны от прямой *m*.



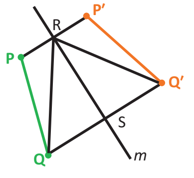
1. Одна из точек лежит на прямой, PQ не перпендикулярен прямой *m*.



4. Точка Q лежит на прямой *m*, $PQ \perp m$



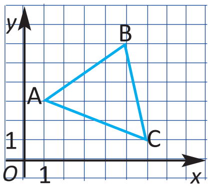
Докажем теорему для первого случая:
Текстовое доказательство. В этом случае точки P и Q лежат по одну сторону от прямой *m*.

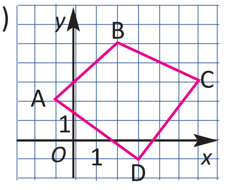


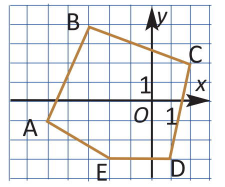
Из определения отражения следует, что, так как отрезок RS - серединный перпендикуляр к отрезкам PP′ и QQ′, то $RQ \cong RQ'$ и $\angle QRS \cong \angle Q'RS$. $PR \cong RP'$, $\angle PRQ \cong \angle P'RQ'$. Тогда по признаку СУС $\Delta RQP \cong \Delta RQ'P'$. Так как у конгруэнтных треугольников соответственные стороны конгруэнтны, то $PQ = P'Q'$. Теорема доказана.

Обучающие задания

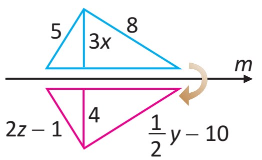
1 Изобразите отражение многоугольников относительно осей *Ox* и *Oy*.

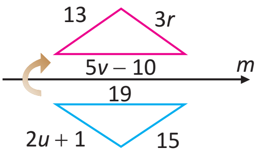
a) 

b) 

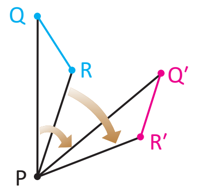
c) 

2 На рисунке изображено отображение относительно прямой *m*. Найдите значения переменных.

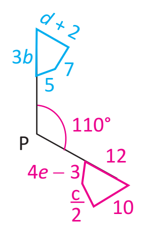
a) 

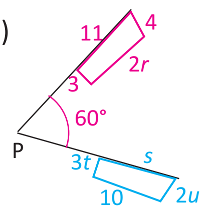
b) 

3 Рисунок отображает перемещение точки Q в Q′, R в R′ в результате поворота . Докажите: PQ ≅ P′Q′
План для доказательства: По определению поворота PQ ≅ PQ′, PR = PR′ и ∠QPQ′ ≅ ∠RPR′:
Завершите доказательство конгруэнтных треугольников.

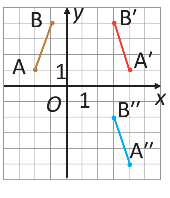


4 На рисунке изображен поворот многоугольника вокруг точки P . По данным найдите переменные.

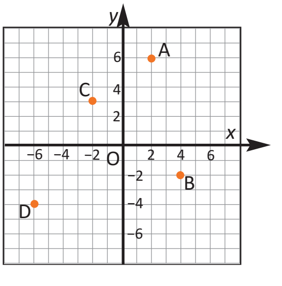
a) 

b) 

5 В результате каких двух последовательных движений отрезок AB преобразуется в отрезок A″B″?



6 По данным найдите точку, в которую переходит точка C при параллельном переносе.
a) ⟨4; 3⟩
b) ⟨6; –5⟩
c) ⟨–4; –7⟩



7 Вершинами треугольника являются точки A(–1; 0), B (2; 3), C (3; –3). Этот треугольник был параллельно перемещен на вектор $\vec{u}\langle 4; -2\rangle$. Запишите новые координаты вершин треугольника.

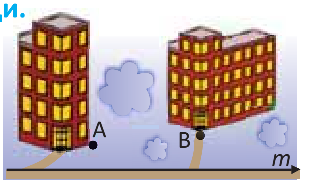
8 Допишите правило изменения координат на координатной плоскости при каждом повороте вокруг начала координат против часовой стрелки. Покажите на рисунке.

a) 90° $(x; y) \to (\quad;\quad)$ b) 180° $(x; y) \to (\quad;\quad)$

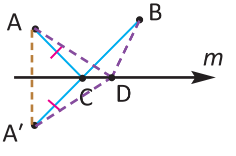
9 a) Точка A (–3; 5) в результате отражения относительно оси *Ox* переходит в точку A'. Напишите координаты точки A' .
b) Точка D (3; 4) совершила поворот вокруг начала координат на 180°. Напишите координаты точки D'.
c) Точка E (–3; 4) при параллельном переносе на вектор $\vec{u}\langle 4; 5\rangle$ переходит в точку E′. Запишите координаты точки E'.

10 **Исследуйте решение задачи и запишите в тетради.**

Для того, чтобы провести телефон в зданиях **A** и **B**, на краю дороги нужно установить распределительный прибор в такой точке **C**, чтобы использовать как можно меньше кабеля, т.е. расстояние AC + BC должно быть минимальным?



Решение. Отметим точку A′, полученную отражением точки A относительно прямой *m*. Нарисуем отрезок A′B и пересечение с прямой *m* обозначим точкой C. Отрезок A′B самое короткое расстояние между точками A′ и B и, так как AC = AC′, то точка C самая выгодная точка для этой цели. Действительно, для любой другой точки D прямой *m*, по неравенству треугольника будет:

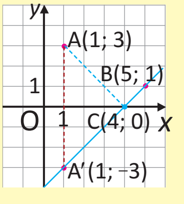


AD + DB = A'D + DB > A'B = A'C + CB = AC + CB

11 На оси абсцисс найдите такую точку C, чтобы AC + BC было минимальным.

a) A(1; 3), B(5; 1) b) A(2; –2), B(11; –4)
c) A(–1; 4), B(6; 3) d) A(–4; 6), B(5; 3)

Пример. На оси *Ox* найдите такую точку C, чтобы AC + CB было минимальным. Точку A(1; 5) отражаем относительно Ox: A′(1; –3). Уравнение прямой, проходящей через точку A′(1; –3) и B(5; 1) есть $y = x - 4$. Эта прямая пересекает ось *Ox* в точке C (4; 0).



Обобщающие задания

1 Учитывая, что $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RT}$, по данным координатам точек P(8;–7), Q(–2; 5), R(8; –7)) определите координаты точки T.

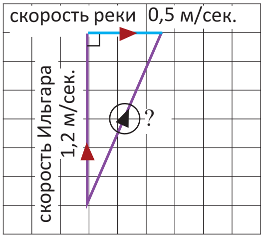
2 Даны векторы: $\vec{u} = \langle 6; 2\rangle$, $\vec{v} = \langle 5; -1\rangle$, $\vec{z} = \langle -2; -5\rangle$. Напишите векторы с компонентами, найдите их модуль и угол наклона.

a) $\vec{u} + \vec{z}$ b) $3\vec{u} - 2\vec{v}$ c) $2\vec{z} + \vec{u}$

3 Значение результирующих сил, приложенных на тело в вертикальном и горизонтальном направлениях равно 40 Н, а угол наклона 22°. Найдите значение сил, приложенных на тело.

4 По данному значению модуля и угла наклона запишите векторы компонентами. 1) $|\vec{v}| = 12$; $\theta = 60°$ 2) $|\vec{v}| = 16$; $\theta = 120°$

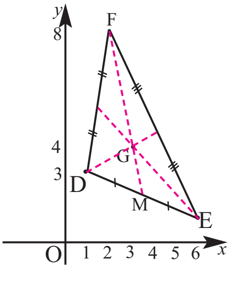
5 Ильгар плывет по реке в перпендикулярном направлении к берегу со скоростью 1,2 м/сек. Если ширина реки 60 метров, а скорость течения 0,5 м/сек, найдите:
a) время, за которое Ильгар переплывет реку;
b) расстояние, которое переплывет Ильгар.
c) под каким углом по отношению к берегу Ильгар переплывет реку?



6 Рассмотрите утверждение $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$.
a) Запишите утверждение словами;
b) Верно или неверно данное утверждение? Ответ обоснуйте.

7 Даны точки M (3; 5) и C (9; 8). Найдите координаты точки K, делящей отрезок MC в отношении MK : KC = 2 : 1.

8 Точка пересечения медиан называется центром тяжести треугольника. Точки D(1; 3) и E(6; 1) являются вершинами ΔDEF, G (3; 4) - показывает центр тяжести. Определите координаты вершины F.

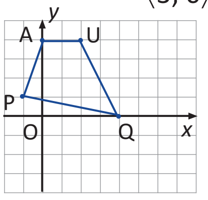


9 При параллельном переносе точка P (6;–2) переходит в точку P′. Для каждого случая определите вектор параллельного переноса.

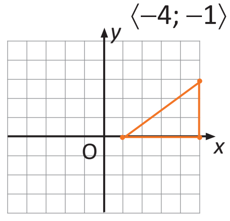
a) P′ (2; 0) b) P′ (–3; 1) c) P′ (8; –3)

10 Перерисуйте рисунки в тетрадь. Выполните параллельный перенос по данному вектору.

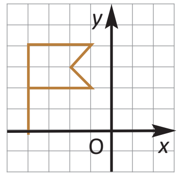
a) $\langle 3; 0\rangle$



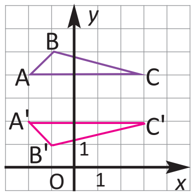
b) $\langle -4; -1\rangle$



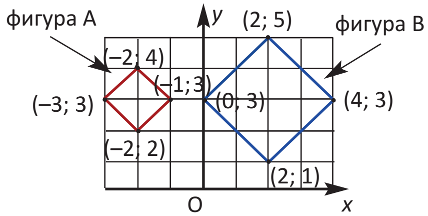
c) $\langle 2; -2\rangle$

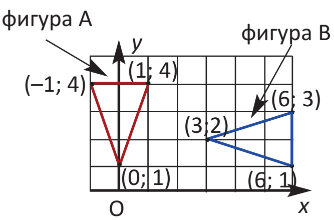


11 Фигура A отражением переходит в фигуру B. Определите линию отражения и напишите ее уравнение.



12 Представьте два последовательных преобразования, при которых из фигуры A можно было бы получить фигуру B.

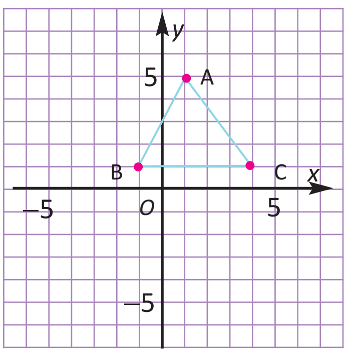




13 Точки A (2; –2), B (2; 3), C (–4; –2) вершины ΔABC. Треугольник отражен относительно оси *Ox* и повернут на 90° против часовой стрелки вокруг начала координат, далее перемещен на 3 единицы вниз и на 2 единицы налево. Нарисуйте рисунок, соответствующий каждому движению, и напишите координаты вершин треугольника после:

a) отражения; b) поворота; c) параллельного переноса.

14 После каждого преобразования напишите координаты точек A', B', C'.

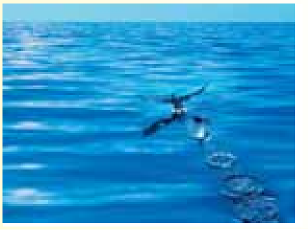


1) Параллельный перенос на вектор $\langle 3; 0\rangle$;
2) Параллельный перенос на вектор $\langle -4; 2\rangle$;
3) Отражение относительно *Oy*;
4) Отражение относительно прямой $x = -2$;
5) Поворот вокруг точки B на 90° по часовой стрелке;
6) Поворот вокруг начала координат на 180°;
7) Гомотетия с коэффициентом $k = 2$ и центром в точке A.
8) Гомотетия с коэффициентом $k = 2$ и центром в начале координат.

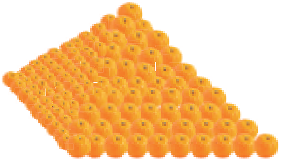
9 Числовые последовательности

В этом разделе вы научитесь

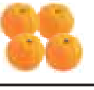
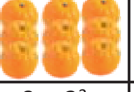
- Задавать числовые последовательности
- Находить n-ый член арифметической и геометрической прогрессии
- Применять свойства членов арифметической и геометрической прогрессии
- Находить сумму n-первых членов арифметической и геометрической прогрессии
- Решать задачи на арифметические и геометрические прогрессии



Исследование. На полке апельсины собраны слоями таким образом, что в 1-ом ряду 1 апельсин, во 2-ом ряду 4, в 3-ем ряду 9 и.т.д образуют правильную четырехугольную пирамиду.



1) Дополните таблицу, показывающую количество первых пяти слоев апельсинов.

n	1 	2 	3 		
a_n	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$		

2) Напишите формулу для нахождения количества апельсинов в любом из слоев (a_n, n - показывает номер ряда).

3) По этой формуле найдите количество апельсинов в 4-ом, 7-ом и 10-ом рядах.

4) Изобразите в тетради график, показывающий зависимость количества апельсинов от номера слоя.

9-1 Числовые последовательности

Определение. Множество чисел, занумерованных натуральными числами называется числовой последовательностью, а числа, образующие это множество называется членами последовательности.

♦ Числа, образующие последовательность, называются соответственно первым, вторым, третьим, четвертым и т.д. членами последовательности. Члены последовательности, обычно обозначаются буквами, индекс буквы показывает порядковый номер члена. Например, первый член a_1, второй член a_2, n -ый член a_n и т.д. Сама последовательность обозначается: (a_n), (b_n) и т.д.

$$\begin{array}{ccccc} 5, & 10, & 15, & 20, & 25, \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \ldots \end{array}$$

♦ Последовательность может содержать конечное и бесконечное число членов. Например, множество двузначных чисел может быть примером конечной последовательности. А последовательность всех натуральных чисел - бесконечна.

♦ Последовательность можно задавать аналитически, т.е. формулой, которая позволяет найти любой член последовательности, зная его номер. Такую формулу называют формулой n-го члена последовательности.

Например, 2, 4, 6, 8, ... - последовательность четных чисел.Любой член этой последовательности можно найти по формуле $a_n = 2n$.

Пример. Последовательность задается формулой $a_n = n^2 + 3n$. Найдите 5-ый и 10-ый член последовательности.

Решение: При $n = 1$, $a_1 = 1^2 + 3 \cdot 1 = 4$,
при $n = 5$, $a_5 = 5^2 + 3 \cdot 5 = 40$,
при $n = 10$, $a_{10} = 10^2 + 3 \cdot 10 = 130$.

Обучающие задания

1 Определите закономерность и напишите следующие два члена последовательности.

a) 1; 3; 5; 7; . . . b) 1; 10; 100; 1000; . . . c) –5; 10; –15; 20; . . .

d) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{3}; \frac{4}{3}; \ldots$ e) $\frac{1}{10}; \frac{2}{20}; \frac{3}{30}; \frac{4}{40}; \ldots$ f) 1,9; 2,7; 3,5; 4,3; . . .

2 По данной формуле напишите первые пять членов последовательности.

$a_n = n + 1$	$a_n = 3 - n$	$a_n = n^2 + 1$	$f_n = \frac{n-1}{n}$
$a_n = (n + 1)^2$	$a_n = (n - 1)^2$	$a_n = n(n - 1)$	$f_n = \frac{n+2}{2n}$

3 a) Напишите первые семь членов последовательности натуральных чисел, кратных 3.

b) Напишите первые 5 членов последовательности натуральных чисел, при делении которых на 3, в остатке получается 1.

4 1) Какой член последовательности (a_n) :a) следует за членом a_7; a_{72}; a_k; a_{k+4} ? b) предшествует члену a_6; a_{50}; a_k; a_{2k}?

2) Назовите члены последовательности, располагающиеся между двумя данными членами: a) b_{11} и b_{15}; b) b_k и b_{k+3}; c) b_{n-3} и b_{n+2}

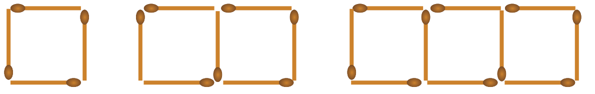
5 1) Последовательность задается формулой $b_n = 2n^2 + 1$. Найдите член последовательности с номером a) 4; b) 5; c) 7; d) $k + 1$

2) В последовательности, заданной формулой $c_n = 4n - 1$ покажите номер члена равного: a) 27; b) 35; c) 71.

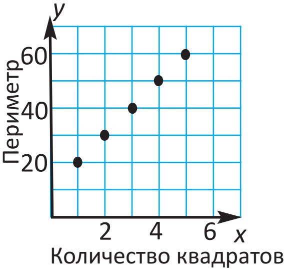
6 1) Последовательность задана формулой $a_n = n^2 - 8n$: Существует ли член равный: a) 20; b) 48; c) –15; d) 0; e) 4?
Если есть, то найдите номер этого члена.

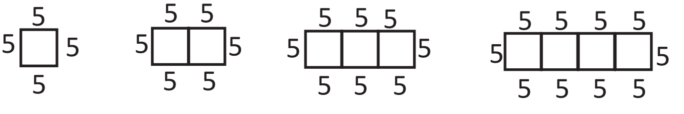
Прикладные задания

7 Сколько спичек будет использовано на 5-ом шаге построения фигуры по правилу, показанному на рисунке. Напишите формулу, определяющую количество спичек в любом шаге.



8 Квадраты со сторонами 5 единиц выстраиваются, как показано на рисунке рядом друг с другом.
a) Найдите периметр фигуры, которую образуют квадраты на каждом шаге построения
b) найдите периметр фигуры, образованной на *n*-ом шаге.
c) Объясните, что график на рисунке соответствует данной последовательности.

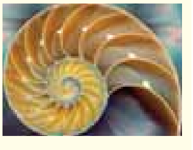


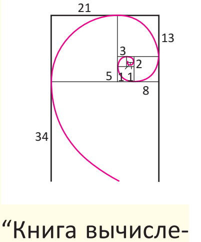


9 Члены последовательности $a_n = 4^n - 1$ кратны 3, а члены последовательности $c_n = 5^n - 1$ кратны 4. Проверьте это для первых пяти членов.

Историческая информация.

Наблюдается взаимосвязь многих природных явлений с последовательностью Фибоначчи.





Фибоначчи родился в итальянском городе Пиза: Его произведение “Книга вычислений” (Liber Abaci) оказала огромное влияние на распространение математических знаний в Европе, служила учебником - справочником европейских ученых. Особенно неоценима его роль в быстром распространении в Европе индийско-арабской десятичной системы. В то время в Европе при записи и вычислениях пользовались Римскими цифрами. В этом произведении Фибоначчи также уделил большое внимание задаче о размножении кроликов, которая дает последовательность чисел
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Для членов этого ряда (при $n \geq 2$) верно $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$.
Продолжите ряд Фибоначчи для последующих трех шагов.

Рекуррентный способ задания последовательности

Формула, выражающая любой член последовательности, начиная с некоторого, через один или несколько предыдущих членов называется рекуррентной формулой (от латинского слова recirro - возвращаться).
Например, в последовательности 3; 6; 12; 24; ... при $a_1 = 3$ то $a_{n+1} = 2a_n$ - рекуррентная формула и по этой формуле можно продолжить последовательность.
n-ый член этой последовательности можно выразить формулой $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

Пример. Напишите 2-ой, 3-ий и 4-ый член последовательности, заданной рекуррентной формулой $b_1 = 3$; $b_{n+1} = 2b_n + 1$.
Решение: Как видно из формулы, каждый последующий член последовательности, начиная со второго, получается умножением на два предыдущего члена и прибавлением 1. По скольку $b_1 = 3$, находим:

$$b_2 = 2 \cdot b_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7,$$
$$b_3 = 2 \cdot b_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15,$$
$$b_4 = 2 \cdot b_3 + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$$

Обучающие задания

10 Для данной последовательности напишите рекуррентную формулу и формулу n-го члена.
1. Последовательность нечетных натуральных чисел;
2. Последовательность четных натуральных чисел.

11 Напишите первые 5 членов последовательности:
a) первый член равен 4, начиная со второго, каждый последующий член на 3 больше предыдущего.
b) первый член равен 4, начиная со второго, каждый последующий член в 3 раза больше предыдущего.

12 Напишите первые 5 членов последовательности, заданной рекуррентной формулой

a) $a_1 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} + 2$
b) $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$
c) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
d) $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

13 **Исследование. Работа в группах.** a) Воспользуйтесь формулой и напишите четыре члена последовательности, если $a_1 = 11$,.

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2}, & \text{если } a_n \text{ -четное число;} \\ 3a_n + 1, & \text{если } a_n \text{ -нечетное число;} \end{cases}$$

b) Напишите 4 члена последовательности указанной в пункте a) при $a_1 = 6$.

14 Для членов последовательности определите закономерность и напишите еще четыре члена.
a) 3; 6; 4; 8; 6; 12; 10; ...
b) 2; 4; 6; 12; 14; ...

Исследование. При конструировании крыши керамиты выстраиваются в определенном порядке. Крыша, показанная на рисунке, покрыта керамитами по правилу, показанному в таблице.

Ряд	1	2	3	4	5	6	7	8
Керамит	3	4	5	6	7	8	9	10

1) Найдите разность между количеством керамитов каждого ряда с количеством керамитов последующего ряда.
2) Возможно ли найти количество керамитов по рекуррентному и аналитическому способу?
3) Задайте последовательность количества керамитов по рекуррентному и аналитическим способам.

9-2 Арифметическая прогрессия

Определение. Последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом называется арифметической прогрессией. То есть, арифметическая прогрессия - это такая последовательность, в которой $a_{n+1} = a_n + d$. Число d называют разностью арифметической прогрессии. Из определения следует, что равенство $d = a_{n+1} - a_n$ справедливо для любого натурального числа n. $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots$.
При $d > 0$ начиная со второго каждый член будет больше предыдущего (возрастающая последовательность), а при $d < 0$ - меньше предыдущего (убывающая последовательность). При $d = 0$ все члены будучи равными одному числу (1-му члену), образуют стационарную последовательность. Например, 5; 5; 5;... . Арифметическая прогрессия с n-ым членом a_n символически обозначается, как $\div (a_n)$. Для того, чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно показать ее первый член и разность.

1. Пример. Определите, какие из последовательностей являются арифметической прогрессией.

a) $-6,\ 0,\ 6,\ 12,\ 18,\ 24, \ldots$
6 6 6 6 6
последовательность - арифметическая прогрессия, потому что разность между двумя соседними членами остается постоянной

b) $-1,\ -3,\ -6,\ -10,\ -15,\ -21 \ldots$
-2 -3 -4 -5 -6
последовательность не является арифметической прогрессией, потому что разность между двумя соседними членами меняется

2. Пример. a) При $a_1 = 2$, $d = 3$ соответствующая арифметическая прогрессия будет : 2; 5; 8; 11; 14; 17; ...
Рекуррентная формула этой прогрессии: $a_{n+1} = a_n + 3$.
b) При $a_1 = 11$, $d = -4$ соответствующая арифметическая прогрессия будет: 11; 7; 3; -1; -5; ... .
Рекуррентная формула этой прогрессии: $a_{n+1} = a_n - 4$

Обучающие задания

1 Какие из данных последовательностей являются арифметической прогрессией? Найдите разность этой прогрессии. Напишите рекуррентную формулу для прогрессии.

a) $-1{,}9;\ -2{,}1;\ -2{,}5;\ -3{,}1;\ -3{,}9;\dots$ c) $-1{,}6;\ -1{,}3;\ -1{,}0;\ -0{,}7;\ -0{,}4;\dots$

b) $\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{2};\ \frac{5}{2};\dots$ d) $\frac{13}{2};\ \frac{13}{3};\ \frac{13}{4};\ \frac{13}{5};\ \frac{13}{6};\dots$

2 Найдите неизвестные члены арифметической прогрессии:

a) $x_1;\ 5;\ x_3;\ -3;\ -7;\ \dots$ b) $x_1;\ x_2;\ 17;\ 23;\ \dots$

3 Напишите первые пять членов прогрессии по данному первому члену и разности прогрессии.

a) $a_1 = -1{,}2 \quad d = 2$ b) $a_1 = 3, \quad d = -2$

4 Найдите первые четыре члена последовательности, заданной рекуррентным способом.

a) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n - 3$ b) $a_1 = 1\frac{2}{3},\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{3}$

Формула *n*-го члена арифметической прогрессии

Каждый член арифметической прогрессии равен предыдущему, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом. Согласно этому правилу имеем: $a_2 = a_1 + d$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

По этому правилу можно записать: $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$.
Формула $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$ является формулой n-го члена арифметической прогрессии.

1. Пример. В арифметической прогрессии $a_1 = -2$, $d = 2{,}5$. Найдите a_6 и a_9:

Решение:
$$a_6 = a_1 + 5d = -2 + 5 \cdot 2{,}5 = 10{,}5$$
$$a_9 = a_1 + 8d = -2 + 8 \cdot 2{,}5 = 18$$

Отметим, что a_9 можно было бы вычислить и нижеуказанным способом:
$a_9 = a_1 + 8d = (a_1 + 5d) + 3d = a_6 + 3d = 10{,}5 + 3 \cdot 2{,}5 = 18$

В арифметической прогрессии верно равенство
$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + (k-1)d + (n-k)d = a_k + (n-k)d$
то есть верно равенство, $\boldsymbol{a_n = a_k + (n-k)d}$

$a_5 = a_1 + 4d$
$a_5 = a_2 + 3d$
$a_5 = a_3 + 2d$

Отсюда получаем формулу для разности прогрессии: $\boldsymbol{d = \frac{a_n - a_k}{n-k}}$ $(n \neq k)$

2. Пример. В арифметической прогрессии $a_5 = 7$, $a_9 = 19$. Найдите d и a_{12}

Решение: $d = \frac{a_9 - a_5}{9-5} = \frac{19-7}{4} = 3,\qquad a_{12} = a_9 + 3d = 19 + 9 = 28$

Обучающие задания

5 Напишите еще пять членов арифметической прогрессии. Для прогрессии напишите рекуррентное правило и формулу n-го члена.

a) 11; 17; 23; ... b) –6; –2; 2; ... c) $\frac{1}{4}$; 1; $\frac{7}{4}$; ...

d) 3,5; 4,3; 5,1; ... e) $\frac{17}{3}$; $\frac{15}{3}$; $\frac{13}{3}$; ... f) –12; –10; –8; ...

6 a) Выразите через a_1 и d члены a_9, a_{12}, a_{21}, a_{k+2}, a_{2k} арифметической прогрессии a_n.
b) Найдите a_6, a_{15} если $a_1 = -4$, $d = 3$
c) В арифметической прогрессии $a_1 = 18$, $d = -3$, найдите a_5 и a_{12}.

7 По данным арифметической прогрессии найдите:

a) $a_{12} = -7$, $d = 3$ a_1 и a_8 b) $c_1 = 0,5$, $c_{15} = -2,3$ d и c_{16} c) $a_5 = -10$, $a_8 = 8$ a_1 и a_6

d) если –20; –15; ...... , d и a_{10} e) если 5; 4,5; ...... , d и a_9

8 Между числами 4 и 40 напишите такие четыре числа, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

9 1) В арифметической прогрессии $a_1 = -12$, $d = 3$. Есть ли члены равные:
a) 6-ти; b) 0-ю; c) 9-ти?

2) В арифметической прогрессии –2; 5; . . . есть ли члены равные:
a) 53; b) 75-ти? Если есть, то найдите номер этого члена.

10 Для каких членов арифметической прогрессии –40; –37; ..., выполняется условие: a) $a_n > 0$; b) $a_n < 0$

11 a) Найдите первый положительный член прогрессии, если $a_1 = -18$; $d = 1,5$. Сколько членов этой прогрессии отрицательны?
b) В арифметической прогрессии 4,1; 3,9; ..... найдите первый отрицательный член прогрессии.

12 Если в арифметической прогрессии $x_1 = -45$; $d = 4$, то для каких членов справедливо неравенство: a) $x_n > 99$; b) $x_n < 160$?

13 a) Покажите, что последовательность, заданная формулой $x_n = 2n - 5$ является арифметической прогрессией. Найдите первый член и разность этой прогрессии.
b) Покажите, что последовательность, заданная формулой $a_n = k \cdot n + b$ является арифметической прогрессией.

14 a) Если в арифметической прогрессии $a_n = 2n + 3$, то найдите a_8 и d.

b) Если в арифметической прогрессии $a_n = 1 - 4n$, то найдите a_6 и d.

15 a) Если в прогрессии $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{12}$, то какой член равен $\sqrt{48}$?
b) Сколько членов в арифметческой прогрессии 3; 8; 13; ... ; 58?
c) Сколько членов в арифметической прогрессии,если первый член равен 6,а разность прогрессии 5,последний член 66?

16 **Задание открытого типа.** Напишите примеры арифметической прогрессии, показав первые шесть членов: a) возрастающей; b) убывающей; c) все члены которой отрицательные; d) все члены которой четные.

17 По данным найдите разность шестого и первого членов арифметической прогрессии.

a) $\begin{cases} a_1 + a_7 = 42 \\ a_{10} - a_3 = 21 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = 3 \\ a_2 \cdot a_3 = 8 \end{cases}$

18 a) Три числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма этих чисел равна 12, а произведение 28. Найдите эти числа.
b) Три числа образуют арифметическую прогрессию. Средний член равен 8. Сумма квадратов этих чисел равна 264. Найдите другие два числа.

19 Некоторые члены арифметической прогрессии заданы в таблице. Дополните таблицу в тетради и представьте прогрессию по рекуррентному правилу ($n \in$ N).

n	a_n
1	–3,5
2	1
4	

n	a_n
1	40
7	22
13	

n	a_n
1	
3	30
50	500
150	

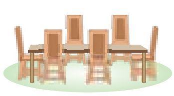
20 Будет ли последовательность арифметической прогрессией, если к членам одной арифметической прогрессии прибавить соответствующие члены другой арифметической прогрессии (члены с одинаковыми номерами).

Прикладные задания

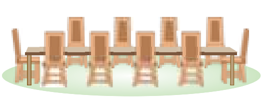
21 В январе завод изготовил 120 деталей, в каждом последующем месяце изготовил на 8 деталей больше. Сколько деталей изготовил завод в мае и в декабре?

22 Исследуйте, как изменится количество стульев в зависимости от количества столов. Сколько стульев будет за: a) 7-ю столами ; b) 10-ю столами; c) n столами ? **Указание:** в формуле $a_n = a_1 + d\,(n - 1)$ найдите a_1 и d.

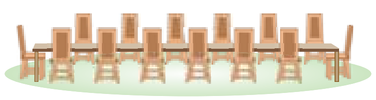
1 стол



2 стола

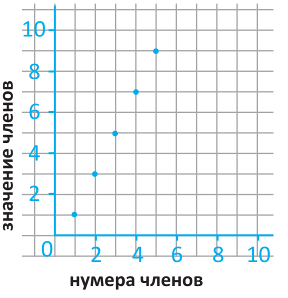


3 стола



23 В первую секунду тело проходит 6 м, в каждую последующую секунду проходит на 2 м больше предыдущего. Какой путь проделает тело:
a) в пятую секунду; b) за первые 5 секунд?

24 a) На графике показана зависимость между номерами и значениями членов арифметической прогрессии $a_n = 2n - 1$. Напишите уравнение прямой, проходящей через фиксированные точки.
b) Постройте график функции $f(x) = 2x - 1$ (x- действительное число). Покажите разницу между графиком арифметической прогрессии и графиком линейной функции. Что выражает угловой коэффициент прямой в арифметической прогрессии?



25 Дана арифметическая прогрессия a_n.
a) запишите первые 5 членов; b) найдите разность;
c) покажите графически.

$a_n = 4 + 2(n - 1)$ | $a_n = \frac{5}{2} - (n - 1)$ | $a_n = 4 - 3(n - 1)$ | $a_n = \frac{1}{2}(n - 1)$

26 Первые шесть членов арифметической прогрессии отмечены на координатной плоскости. Координаты двух этих точек (3; 11) и (6; 23). Напишите формулу n-го члена этой прогрессии.

27 Годовая прибыль вклада, вложенного в сберегательную кассу, составляет 5%. В какую сумму превратятся 40 000 манат, вложенные на 3 года при подсчете по простой процентной ставке?

28 Стороны a, b, c прямоугольного треугольника образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите площадь треугольника, если $c = 10$ см.

29 Если обратные члены некоторой последовательности образуют арифметическую прогрессию, то эта последовательность называется **гармонической последовательностью**. Объясните, что последовательность: $1, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}, \ldots$ является гармонической.

30 **Архитектура.** На станциях “Ичеришехер”, “Кероглу”, “Автовокзал”, были использованы прозрачные элементы пирамиды. Например, дизайн станции “Ичеришехер” выполнен так, что в самом верхнем ряду имеется 2 окна, а в каждом нижнем ряду на 2 окна больше верхнего. Сколько окон в 12-ом ряду? В каком ряду 18 окон?

Исследование. 1) Запишите первые 10 членов какой-либо арифметической прогрессии. Например, при $a_1 = 4$, $d = 3$ эти члены будут записаны, как показано в таблице.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

2) Сравните какой-либо средний член прогрессии со средним арифметическим соседних с ним членов. Получилось ли равенство?

Верны ли равенства? $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$

Свойства арифметической прогрессии

Свойство 1. В арифметической прогрессии каждый член кроме первого (и последнего, в случае конечной прогрессии) равен среднему арифметическому соседним с ним членов.

Действительно, из $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ получается $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$

Так как в общем случае, $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, то верно равенство:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n \geq 2)$$

Это свойство можно обобщить таким образом. Каждый член арифметической прогрессии (начиная со второго) равен среднему арифметическому равноудаленных от него членов: $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ $(1 \leq k \leq n-1)$

Верно и обратное. Если любой член последовательности, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

Свойство 2. Если для номеров выполняется условие $m + k = n + p$, то для соответствующих членов верно равенство $a_m + a_k = a_n + a_p$

Следствие: В конечной арифметической прогрессии сумма членов, расположенных на одинаковом расстоянии от концов, равна сумме крайних членов. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = ...$

Обучающие задания

31 1) В арифметической прогрессии $a_1 = 3$, $a_3 = 7$. Найдите a_2

2) В арифметической прогрессии $a_4 + a_{10} = 6$. Найдите: a) $a_5 + a_9$; b) a_7

3) В арифметической прогрессии $a_8 = 5$. Найдите сумму $a_1 + a_{15}$.

32 Зная, что данные числа являются последовательными членами арифметической прогрессии, найдите x.

a) $3x - 4$; 6; $x + 6$ b) $x - 2$; x^2; $3x + 2$

33 Для членов арифметической прогрессии ÷ (x_n) докажите равенство:

a) $x_1 + x_9 = x_4 + x_6$ b) $x_3 + x_{12} = x_8 + x_7$ c) $x_4 + x_{n-4} = x_6 + x_{n-6}$

34 Между данными числами впишите: 1) такое одно число; 2) такие два числа, чтобы они образовывали арифметическую прогрессию.

a) –1; 5 b) 30; 50 c) 12; 48 d) 0; 20 e) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$

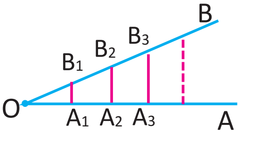
35 Пятый член арифметической прогрессии равен *c*. Напишите выражение, показывающее сумму 2-го и 8-го членов этой прогрессии.

Прикладные задания

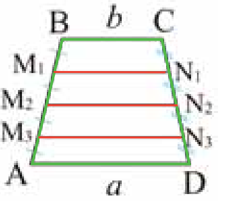
36 Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что один из углов этого треугольника равен 60°.

37 Периметр треугольника равен 24 см. Длины сторон этого треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите длину средней стороны.

38 На стороне OA угла AOB, начиная с вершины, отложены равные отрезки и из точек деления проведены параллельные прямые. Найдите длину отрезка A_5B_5, если $A_1B_1 = 2$ см.



39 В трапеции ABCD сторона AB разделена на четыре равных отрезка и из точек деления проведены прямые, параллельные основаниям.
a) Докажите, что длины отрезков BC, M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 и AD образуют арифметическую прогрессию. Если AD = 18 см, BC = 6 см, то найдите длины отрезков M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3.



40 Если числа $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ образуют арифметическую прогрессию, докажите справедливость равенства $\frac{b}{c} + \frac{b}{a} = 2$

41 Врач хочет, чтобы больной, принимавший лекарство в течении 5-ти дней с одинаковыми дозами, увеличил ежедневную дозу от 100 мг до 300 мг. Напишите количество лекарства, которые принимал больной в течение 5-ти дней.

42 Числа *a, b, c* образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что последовательность $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ также является арифметической прогрессией.

Практическое задание. Найдем сумму натуральных чисел от 1 до 100. Предположим, что эта сумма равна x. В 1-ом ряду напишем слагаемые этой суммы в порядке возрастания, а во 2-ом ряду - в порядке убывания.

$$x = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 98 + 99 + 100$$

$$+$$

$$x = 100 + 99 + 98 \ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + 2 + 1$$

$$2x = \underbrace{101 + 101 + 101 \ldots\ldots + 101 + 101 + 101}_{100}$$

$$x = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$$

Полученный результат запишите в виде: $x = \dfrac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5050$

Сумма *n*-первых членов арифметической прогрессии

Обозначим через S_n сумму n-первых членов любой арифметической прогрессии.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$+$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots a_3 + a_2 + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots\ldots + (a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_1)$$

Попарные суммы $a_1 + a_n$ и т.д равны между собой, так как в конечной арифметической прогрессии сумма членов, расположенных на одинаковом расстоянии от концов, равна сумме крайних членов. Всего таких пар n, поэтому $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$, а отсюда получим: $\boldsymbol{S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$

Сумма n-первых членов конечной арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число членов этой прогрессии. Так как $a_n = a_1 + (n - 1)\,d$, то формулу суммы членов арифметической прогрессии можно написать в виде:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)\,d) \cdot n}{2}}$$

1. **Пример.** Найдите сумму 12-ти первых членов арифметической прогрессии заданной формулой $a_n = 3n + 1$.

Решение. $a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ $\quad a_{12} = 3 \cdot 12 + 1 = 37$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = (4 + 37) \cdot 6 = 246$$

2. **Пример.** Найдите сумму 10-ти первых членов арифметической прогрессии $-3;\ 5;\ 13;\ \ldots$.

Решение. $a_1 = -3,\ a_2 = 5,\ d = 8,\quad a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 72 = 69$

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = (-3 + 69) \cdot 5 = 330$$

3. Пример. В зале заседаний 30 рядов. В первом ряду 24 места, а в каждом следующем ряду на одно место больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в зале?

Решение. $a_1 = 24$, $d = 1$, $n = 30$

В последнем ряду: $a_{30} = 24 + 29 \cdot 1 = 53$ места. Всего мест в 30-ти рядах:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} = 1155$$

4. Пример. Сколько членов арифметической прогрессии 5; 7; 9; ... нужно сложить, чтобы получить 320 ?

Решение. $\frac{(2a_1 + (n-1)\,d\,) \cdot n}{2} = 320$, здесь подставим $a_1 = 5$, $d = 2$

$$\frac{(2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 2) \cdot n}{2}, \quad \frac{(8 + 2\,n) \cdot n}{2} = 320, \qquad n^2 + 4n = 320,$$

$$n^2 + 4n - 320 = 0 \quad (n-16)(n+20) = 0, \qquad n_1 = 16,\ n = -20.$$

Так как количество членов не может быть отрицательным, то сумма 16-ти первых членов этой прогрессии равна 320.

Перепишем сумму первых n членов арифметической прогрессии в следующем виде:

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)\,d\,) \cdot n}{2} = \frac{(n \cdot d + (2a_1 - d)) \cdot n}{2} = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \frac{2\,a_1 - d}{2} \cdot n$$

обозначая, $\frac{d}{2} = a$, $\frac{2\,a_1 - d}{2} = b$ получаем, что сумму n - первых членов любой арифметической прогрессии можно также записать в виде:

$S_n = a \cdot n^2 + bn$. Можно считать арифметическую прогрессию заданной, если известна S_n. При решении некоторых задач для определения a_n пользуются формулой $\quad a_n = S_n - S_{n-1}$.

5. Пример. Найдем первый член и разность арифметической прогрессии, сумма n - первых членов которой задана формулой $S_n = 2n^2 - 3n$.

Решение. $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -1$

$$a_2 = (a_1 + a_2) - a_1 = S_2 - S_1 = (2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2) - (-1) = 3$$

$$d = a_2 - a_1 = 3 - (-1) = 4$$

Обучающие задания

43 По данным найдите сумму соответствующего числа членов арифметической прогрессии.

a) $a_1 = 10$; $a_{20} = 48$ $S_{20} = ?$	b) $a_1 = 6{,}5$; $a_{10} = 7{,}5$ $S_{10} = ?$	c) $a_1 = -13$; $d = 7$, $S_8 = ?$	d) $a_1 = 9$; $d = -4$, $S_{12} = ?$
e) $a_3 = -8$; $a_8 = 2$ $S_9 = ?$	f) $a_2 = -5$; $a_6 = 11$ $S_6 = ?$	g) 14,2; 9,6; ..... $S_{16} = ?$	h) –17; –14; ... $S_{11} = ?$

44 Для арифметической прогрессии, заданной формулой $a_n = 2n - 3$, найдите сумму первых : a) 15-ти членов; b) n членов.

45 По данным для арифметической прогрессии найдите требуемое.

a) при $a_3 = 31$, $a_7 = 79$, $a_{11}=?$ $S_{11}=?$
c) при $a_4 + a_7 = 20$, $S_{10}=?$
b) при $a_9 = 10$, $S_{17}=?$
d) при $a_5 = 38$, $S_7=203$, $S_{12}=?$

46 Найдите сумму:

a) первых 80-ти натуральных чисел; b) всех двузначных чисел;
c) натуральных чисел меньших 100 и делящихся на 3.
d) натуральных чисел меньших 130 и делящихся на 4.

47 Найдите сумму,в которой слагаемые составляют арифметическую прогрессию a) $2 + 6 + 10 + ... + 198$ b) $1 + 4 + 7 + ... + 91$

48 Первый член арифметической прогрессии равен 7, а разность 1,5. Найдите сумму с 5-го по 11-ый член (11-ый включительно) прогрессии.

49 Сумма 3-го и 5-го членов арифметической прогрессии равна 12. Сумма членов от 2-го до 5-го (5-ый включительно) равна 8. Напишите первые 5 членов этой прогрессии.

50 Найдите требуемое по данным.

$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + \dots$
a) $n = 20$, $S_n = ?$ b) $S_n = 210$, $n = ?$

$30 + 24 + 18 + 12 + 6 + \dots$
a) $n = 15$, $S_n = ?$ b) $S_n = -36$, $n = ?$

$-10 + (-5) + 0 + 5 + 10 + \dots$
a) $n = 15$, $S_n = ?$ b) $S_n = 315$, $n = ?$

$45 + 42 + 39 + 36 + 33 + \dots$
a) $n = 31$, $S_n = ?$ b) $S_n = -48$, $n = ?$

51 Найдите требуемое по данным.

a) $S_n = 4n^2 - 3n$, $a_1 = ?$ и $a_2 = ?$
b) $S_n = 2n^2 + n$, $a_5 = ?$ и $a_{11} = ?$
c) $S_n = 2n^2 + 3n$, $a_n = 21$, $n = ?$

52 Заполните таблицу.

№	a_1	d	n	a_n	S_n
1	2		11	7	
2		– 0,4	8	– 5,2	
3	0,5			14	72,5
4			7	16	17,5

53 Найдите сумму:

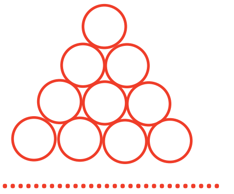
a) $1 + 2 + 3 + ... + n$; b) $2 + 4 + 6 + ... + 2n$; c) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$.

Прикладные задания

54 Шары построены в форме треугольника таким образом, что в первом ряду 1 шар, во втором 2 шара, в третьем ряду 3 шара и.т.д.

a) Сколько рядов получится из 36-ти шаров?

b) Сколько потребуется шаров, чтобы составить треугольник из 12-ти рядов?



55 **Исследование.** 90 фотографий расположили в пяти рядах. Разность количества фотографий двух соседних рядов всегда постоянная. Сколькими вариантами можно расположить эти фотографии согласно этому правилу?

56 Если звонок прозвенит в 1 час один раз, в 2 часа два раза, ... , в 12 часов двенадцать раз, то сколько раз звонок прозвенит за все это время?

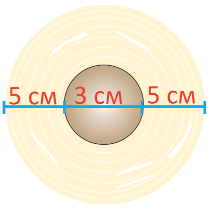
57 Решите уравнение, зная что слагаемые в левой части являются членами арифметической прогрессии.

a) $1 + 4 + 7 + ... + x = 70$ b) $1 + 1{,}5 + 2 + ... + x = 27$

58 Вычислите. $\dfrac{2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2^{19}}{4 \cdot 4^4 \cdot 4^7 \cdot \ldots \cdot 4^{16}}$

59 Фабрика производит бумагу, предназначенную для различных целей, свернутую в специальные цилиндрические картоны в виде рулона. Толщина бумаги 0,1 мм. Диаметр картона 3 см, диаметр всего рулона 13 см.

n	d_n (см)	l_n (см)
1	3	3π
2		
3		
4		

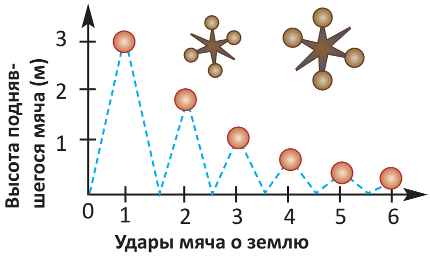


a) Приняв количество бумажных свертков за “n”, диаметр рулона при каждом n -ом свертывании “d_n”, при каждом шаге свертывания-длину бумаги в свертке “l_n”, заполните таблицу в тетради.

b) Что вы думаете о последовательности $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$? Запишите формулу n-го члена последовательности.

c) Сколько бумажных сверток в рулоне с диаметром 13 см? Сколько метров бумаги в рулоне? Ответ округлите до десятых.

Исследование. Мяч, ударяясь о землю первый раз, поднимается на высоту 3 м. В каждый последующий раз поднимается на высоту, равную 60%-ам предыдущей высоты. График показывает зависимость между количеством ударов о землю и высотой мяча.



1) Высоты, на которые поднимается мяч, обозначьте через $h_1, h_2, h_3, h_4, \ldots$. Выразите высоту, на которую поднимается мяч каждый раз через высоту, после первого удара о землю.
2) На какую высоту поднимется мяч после 8-го удара о землю?
3) Объясните возможность применения формулы $h_n = 3 \cdot (0{,}6)^{n-1}$ для нахождения высоты поднявшегося мяча после n-го падения на землю.

9-3 Геометрическая прогрессия

Определение. Числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же, не равное нулю число, называется геометрической прогрессией.
То есть если для любого натурального числа n, будет выполнено условие: $b_n \neq 0$ и $b_{n+1} = b_n \cdot q$, то последовательность (b_n) будет геометрической прогрессией. Число q называется знаменателем геометрической прогрессии. Геометрическая прогрессия символически обозначается ∺(b_n). Формула $\boldsymbol{b_{n+1} = b_n \cdot q}$ является представлением геометрической прогрессии по рекуррентному правилу. Из определения следует, что для любого натурального числа n, справедливо равенство: $\boldsymbol{q = \frac{b_{n+1}}{b_n}}$. В частности, $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \ldots$
При $q > 0$, члены геометрической прогрессии имеют одинаковый знак.
При $q < 0$ знаки членов прогрессии чередуются.
При $q = 1$ получается стационарная последовательность.

1. Пример. a) Если $b_1 = 2$, $q = 3$, то получится геометрическая прогрессия 2; 6; 18; 54; 162; ... ; b) Если $b_1 = 3$, $q = -2$, то получится геометрическая прогрессия 3; –6; 12; –24; 48; ... .

2. Пример. Какая из данных числовых последовательностей геометрическая прогрессия? a) 4; 12; 22; 34; 48. b) 625; 125; 25; 5; 1.

Решение. Отношение каждого члена геометрической прогрессии на предыдущий всегда остается постоянной. Проверим это условие для обеих прогрессий.

a) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{12}{4} = 3$ $\quad \frac{b_3}{b_2} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$ Последовательность не является геометрической прогрессией

b) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{125}{625} = \frac{1}{5}$ $\quad \frac{b_3}{b_2} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5}$ $\quad \frac{b_4}{b_3} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ $\quad \frac{b_5}{b_4} = \frac{1}{5}$
Условие выполняется, это последовательность - геометрическая прогрессия.

Обучающие задания

1 Напишите следующие два члена геометрической прогрессии.

500; 100; 20; ...	$\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \ldots$	$7; \frac{14}{3}; \frac{28}{9}; \ldots$
16; 24; 36; ...	$\frac{1}{3}; \frac{5}{6}; \frac{25}{12}; \ldots$	0,4; –0,16; 0,064; ...
1,25; 1,5; 1,8; ...		$1; \sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}; \ldots$

2 Напишите следующие три члена геометрической прогрессии.

a) 512; –256; 128; –64, ...

b) $\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{8}{5}; \frac{16}{5}; \ldots$

3 Найдите неизвестные члены геометрической прогрессии.

a) $y_1; 1; \frac{1}{2}; y_4; \ldots$

b) $y_1; y_2; 24; 36; 54; \ldots$

4 a) Зная, что $b_2 = 3$, по рекуррентному правилу $b_{n+1} = 0{,}3 \cdot b_n$, напишите первые пять членов геометрической прогрессии.

b) Напишите рекуррентное правило для последовательности
2; 8; 32; 128; ... .

5 **Задания открытого типа**. Напишите 4 члена геометрической прогрессии.

a) $q = \frac{1}{2}$

b) $b_1 = 0{,}5$

c) $b_3 = 20$

6 Какая из данных последовательностей является арифметической, а какая геометрической прогрессией? Напишите рекуррентные формулы для этих прогрессий.

a) 7; 14; 28; 56; 112; ...
b) 1000; 500; 250; 125; ...
c) 4; 8; 13; 19; ...
d) 1; 2; 5; 26; ...
e) 1; 5; 9; 13; ...
f) 200; 20; 2; 0,2; ...

7 Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

1) 81; 27; 9; ...

2) 4; 8; 16; ...

3) $14; 7; \frac{7}{2}; \ldots$

4) $\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}; \ldots$

8 Для последовательностей напишите рекуррентное правило и следующие два члена.

a) 1; 7; 13; 19; ...	b) 66; 33; 16,5; 8,25; ...	c) 41; 32; 23; 14; . . .
d) 2;3; 8; 63;...	e) 2; 5; 11; 23; 47; . . .	f) 2; 5; 10; 50; 500; ...

Исследование. Зная, что геометрическая прогрессия задается рекуррентным отношением $b_{n+1} = b_n \cdot q$, заполните пустые клетки в таблице.

b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$b_1 \cdot q$	$b_2 \cdot q = b_1\, q^2$	$b_3 \cdot q = b_1\, q^3$	$\boxed{} \cdot q = \boxed{}$	$\boxed{} \cdot q = \boxed{}$

К какому выводу вы пришли?
На какую степень q нужно умножить b_1, чтобы получить b_5?
Какую связь вы видите между показателем степени q и индексами b_5 и b_1?
Как вы думаете, на какую степень q надо умножить b_1, чтобы получить b_8?

Формула n-го члена геометрической прогрессии

В геометрической прогрессии для b_n верно равенство $\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$ Это выражение называется формулой n-го члена геометрической прогрессии.
n-ый член геометрической прогрессии можно найти следующим способом.
По определению можно писать равенства:

$$b_2 = b_1 \cdot q$$
$$b_3 = b_2 \cdot q$$
$$b_4 = b_3 \cdot q$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$b_n = b_{n-1} \cdot q$$

Если перемножить почленно эти $(n-1)$ равенства, получим:

$$b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \ldots \cdot b_{n-1}\, b_n \cdot = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot q^{n-1}.$$

Сократив одинаковые члены в левой и правой частях, получим формулу

$$\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$$

Для того чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно знать его первый член и знаменатель.

1. Пример. В геометрической прогрессии $b_1 = 3$, $q = 2$, найдите b_4 и b_7.
Решение. $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 3 \cdot 2^3 = 24$, $\quad b_7 = b_1 \cdot q^6 = 3 \cdot 2^6 = 192$
Примечание. Можно было бы вычислить следующем способом
$b_7 = b_1 \cdot q^6 = b_1 \cdot q^3 \cdot q^3 = b_4 \cdot q^3 = 24 \cdot 2^3 = 192.$

Для членов геометрической прогрессии верно равенство,
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q^{n-k} = b_k \cdot q^{n-k}$,
или же $\boldsymbol{b_n = b_k \cdot q^{n-k}}$

$b_6 = b_1 \cdot q^5$
$b_6 = b_2 \cdot q^4$
$b_6 = b_3 \cdot q^3$

2. Пример. Найдите b_7, если в геометрической прогрессии $b_2 = 4$; $b_5 = 32$.
Решение. Поскольку $b_5 = b_2 \cdot q^3$, отсюда $q^3 = \dfrac{b_5}{b_2} = \dfrac{32}{4} = 8$, $q = 2$ и
$b_7 = b_5 \cdot q^2 = 32 \cdot 2^2 = 128$

Обучающие задания

9 Найдите неизвестные по данным:

a) $b_1 = 3$; $q = 2$, $b_4 = ?$ $b_5 = ?$

b) $b_1 = 24$; $q = 0{,}5$, $b_3 = ?$ $b_4 = ?$

c) $b_6 = 48$; $q = -2$, $b_4 = ?$ $b_5 = ?$

d) $b_5 = 64$; $q = 2$, $b_1 = ?$ $b_7 = ?$

e) $b_4 = 15$; $b_6 = 135$, $q = ?$ $b_7 = ?$

f) $b_1 = 3$; $b_5 = 48$, $q = ?$ $b_7 = ?$

10 Найдите седьмой член геометрической прогрессии.

a) $\frac{5}{2}$; 5; 10; . . . b) $-\frac{1}{4}$; –1; –4; . . . c) $-\frac{64}{81}$; $\frac{32}{27}$; $-\frac{16}{9}$; . . .

11 По данным напишите формулу n-го члена геометрической прогрессии.

a) $b_1 = 45$, $q = \frac{1}{3}$ b) $b_3 = 72$, $q = 6$ c) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_6 = -16$

12 a) В геометрической прогрессии $b_1 = 2$, $q = 3$; найдите номер члена равного 162.
b) в геометрической прогрессии 0,1; 0,3; .... найдите номер члена равного 24,3 .
c) Покажите, что последовательность заданная формулой $c_n = 3 \cdot 2^n$ является геометрической прогрессией. Найдите знаменатель прогрессии.

13 1) По данным, запишите n-ый член геометрической прогрессии по рекуррентному правилу.
a) $b_1 = -4$, $q = 6$ b) $b_1 = 4$, $q = 3$ c) $b_1 = 2$, q = –3 d) $b_1 = -4$, $q = 2$

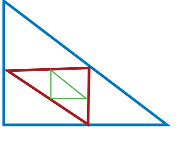
2) Прогрессия задана по реккурентому правилу, как $b_1 = 2$, $b_{n+1} = b_n \cdot 3$. Запишите формулу n-го члена.

14 По данным, запишите первые пять членов геометрической прогрессии. Задайте прогрессию рекуррентным соотношением и аналитическим способом: 1) $b_4 = 25$, $q = -5$; 2) $b_1 = 4$, $q = 5$

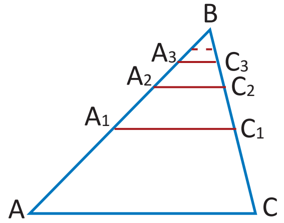
15 В геометрической прогрессии сумма первого и третьего членов равна 15, а сумма второго и четвертого 30. Найдите первые четыре члена прогрессии.

Прикладные задания

16 В прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 16 см вписан треугольник с вершинами на серединах сторон данного треугольника. Аналогично, во второй треугольник так же вписан треугольник и т.д. Найдите периметр 6-го треугольника.



17 В ΔABC проведена средняя линия A_1C_1, в ΔA_1BC_1 проведена средняя линия A_2C_2, во вновь полученном ΔA_2BC_2 проведена средняя линия A_3C_3 и т.д. Найдите площадь треугольника A_5BC_5, если площадь треугольника ABC равна 3072 см^2.



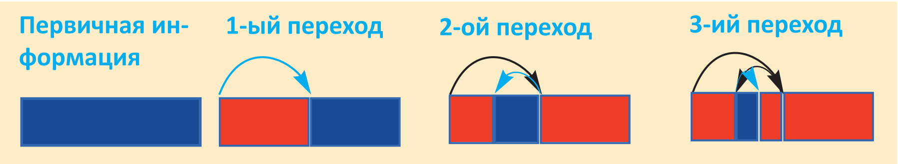
18 Завод по производству молока купил новое оборудование на 200 тыс. манат. Каждый год списывает 10 % от стоимости оборудования за изношенность. Сколько будет стоить это оборудование через 3 года?

19 На экспериментальном участке леса количество древесины за год растет на 10%. Если вначале древесины на участке было 20000 м^3, то сколько ее будет через 4 года ?

20 За один раз насос выкачивает из бака $\frac{1}{10}$ часть горючего. Какой процент горючего останется в баке после 3-х применений насоса?

21 Бактерия, попавшая в живой организм, в конце 20-ой минуты делится на две бактерии; каждая из вновь образованных бактерий в конце последующей 20 минуты тоже делится на две бактерии и т.д. Найдите количество бактерий, образованных из одной бактерии к концу дня.

22 Поиск элемента в компьютере происходит следующим способом. Список упорядоченного ряда делится попалам и определяется, в какой половине находится элемент поиска и отпадает необходимость проверки второй половины. Далее эта половина списка вновь делится пополам, и вновь определяют место расположения элемента. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет найден необходимый элемент.



a) Напишите выражение, показывающее количество оставшихся элементов в списке, состоящем из 2048 элементов после n-го перехода.

b) Искомый элемент в самом худшем случае может быть найден в самом последнем переходе. В этом случае, при каком значении *"n"* будет найден искомый элемент из совокупности данных, состоящий из 2048 элементов.

Исследование. Напишем восемь первых членов какой-либо геометрической прогрессии. Например, при $b_1 = 3$, $q = 2$, эти члены будут как в таблице:

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
3	6	12	24	48	96	192	384

$\boxed{\sqrt{3 \cdot 12} = 6}$ $\boxed{\sqrt{12 \cdot 48} = 24}$

Свойства геометрической прогрессии

Свойство 1. В геометрической прогрессии квадрат каждого члена кроме первого (и последнего в случае конечной прогрессии) равен прозведению соседних с ним членов.

Из определения геометрической прогрессии

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \quad \ldots \quad = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Взяв попарно эти равенства, имеем: $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, $b_3^2 = b_2 \cdot b_4, \ldots,$ $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Верно и обратное: Если в последовательности ненулевых чисел, квадрат каждого члена, начиная со второго, равен прозведению соседних с ним членов, то последовательность является геометрической прогрессией.

Это свойство можно обобщить. В геометрической прогрессии, начиная со второго, квадрат любого члена равен произведению равноудаленных членов последовательности, то есть $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$. Для геометрической прогрессии с положительными членами это свойство можно записать в виде:

$$b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}} \qquad (1 \le k \le n-1).$$

Свойство 2. В геометрической прогрессии если $n + m = k + p$, то верно равенство $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_p$.

Обучающие задания

23 1) В геометрической прогрессии $b_3 = 4$. Найдите $b_2 \cdot b_4$.

2) В геометрической прогрессии $b_3 \cdot b_5 = 36$. Найдите: a) $b_2 \cdot b_6$; b) $|b_4|$

24 a) Числа $x - 1$; 8 ; $x + 11$ являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите x.

b) Числа $x - 1$; $x + 2$; $x + 8$ являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите x.

25 Вместо вопросительного знака запишите такое число, чтобы эти числа образовали геометрическую прогрессию.

a) 3; $\boxed{?}$;12 b) 6; $\boxed{?}$; $2\frac{2}{3}$

26 В геометрической прогрессии (b_n) покажите справедливость равенств:

a) $b_4^2 = b_3 \cdot b_5$; b) $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

c) $b_5 \cdot b_9 = b_6 \cdot b_8$ d) $b_3 \cdot b_7 = b_4 \cdot b_6$ e) $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$ $(n+m = k+l)$.

27 Если ∺(b_n) геометрическая прогрессия, то будут ли последовательности,

a) b_1; b_3; b_5; b_7; ... b) b_1^2; b_2^2; b_3^2; ... геометрической прогрессией?

Исследование. Записав имена своих родителей, 4-х бабушек и дедушек, 8-ми прабабушек и прадедушек, Али построил дерево поколений, отражающее непосредственно родителей. Найдите количество 10-ти поколений родителей Али.

Сумма n - первых членов геометрической прогрессии

Обозначим через S_n сумму n-первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots\dots\ b_n \quad (1)$$

При $q = 1$, все члены равны b_1 и $S_n = n \cdot b_1$.

Рассмотрим случай когда $q \neq 1$.

Умножим обе части (1)-го равенства на q :

$q \cdot S_n = b_1 \cdot q + b_2 \cdot q + b_3 \cdot q \dots\dots + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q$ (2). Отнимем от (2)-го равенства (1)-е. Получим: $q \cdot S_n - S_n = b_n \cdot q - b_1$.

Отсюда имеем $$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q-1}, \qquad (q \neq 1) \qquad (3)$$

(3)-я формула называется формулой n- первых членов геометрической прогрессии. Так как $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, то для S_n можно записать:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, \qquad (q \neq 1)$$

Пример. В геометрической прогрессии $b_2 = 6,\ b_5 = 48$. Найдите сумму первых шести членов.

Решение. $b_5 = b_2 \cdot q^3$. Отсюда $q^3 = \frac{b_5}{b_2} = \frac{48}{6} = 8,\ q = 2$

Из формулы $b_2 = b_1 \cdot q$ выразим b_1: $b_1 = \frac{b_2}{q} = \frac{6}{2} = 3$

Тогда $$S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q-1} = \frac{3 \cdot (2^6 - 1)}{2-1} = 189$$

Обучающие задания

28 По данным найдите сумму n - первых членов геометрической прогрессии.

a) $b_1 = 16, \quad q = \frac{1}{2} \quad S_6 = ?$ b) $b_1 = 1, \quad q = -2 \quad S_5 = ?$

c) $3; \ 6; \ldots, \quad S_{10} = ?$ d) $1; \ -2; \ 4, \ldots, \quad S_8 = ?$

29 Найдите по данным требуемые:

1) $-4 + 12 + (-36) + 108 + \ldots$

a) $n = 6$, $S_6 = ?$ b) $S_n = -244$ $n = ?$

2) $160 + (-80) + 40 + (-20) + \ldots$

a) $n = 7$, $S_7 = ?$ b) $S_n = 105$ $n = ?$

30 По данным в геометрической прогрессии найдите требуемое:

a) $S_4 = 45, \quad q = 2, \ b_1 = ?$ b) $S_4 = 130, \quad q = \frac{2}{3}, \quad b_4 = ?$

c) $b_1 = 2, \ b_5 = 162, \ S_6 = ?$ d) $b_2 = \frac{1}{5}, \ b_5 = \frac{1}{625}, \ S_5 = ?$

31 Для последовательности $a_n = 3 \cdot 2^n$, являющейся геометрической прогрессией найдите сумму: a) первых 5 членов; b) первых n членов.

32 Разность четвертого и первого членов геометрической прогрессии равна 26, а разность пятого и второго членов равна 78. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

33 Упростите выражение при $x \neq 1$.

a) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ b) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

34 Упростите выражение ($n \neq 1$).

a) $\dfrac{1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5}{1 + n + n^2}$ b) $\dfrac{1 + n + n^2 + n^3}{1 + n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7}$

35 Напишите формулу суммы n -первых членов данной геометрической прогрессии.

a) $1, y, y^2, y^3, y^4, \ \ldots$ b) $1, y^3, y^6, y^9, \ \ldots$

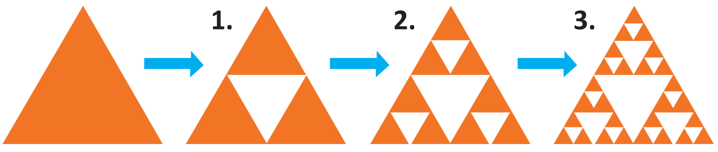
36 В конечной геометрической прогрессии с четным числом элементов отношение суммы членов, стоящих на четных местах, к сумме членов, стоящих на нечетных местах, равно знаменателю прогрессии. Докажите это.

Прикладные задания

37 Фирма, изготавливающая сигнализационные устройства для безопасности, начала с выпуска 10000 устройств в первый год. Рост производительности за год составлял 20 %.
a) Сколько устройств произвела фирма в 5-ом году деятельности?
b) Сколько всего устройств произвела фирма за 5 лет?

38 Фаррух смотрит на картину. На ней была нарисована собака, за собакой 4 щенка, за каждым щенком 4 кошки, за каждой кошкой 4 котенка. За каждым котенком шли 4 крысы. Сколько всего конечностей сможет насчитать Фаррух на этой картинке?

39 Польский ученный Серпинский, с целью исследования равносторонних треугольников, сделал дизайн. На каждом шаге, соединяя середины сторон большого треугольника, создавал равносторонние треугольники. Представьте, что первоначальный треугольник - это равносторонний треугольник со сторонами, равными единице.

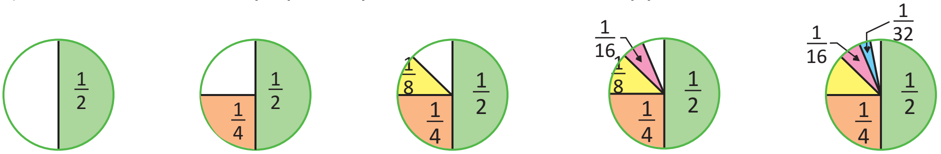


a) На первом шаге количество вырезанных треугольников 1, на втором 3, на третьем 9 и т.д. Напишите формулу, показывающую число вырезанных треугольников на *n*-ом шаге?
b) Согласно этому правилу, сколько треугольников будут вырезаны на 4-ом, 5-ом шагах?
c) Вычислите неразделенную площадь, оставшуюся от данного треугольника на 3-ем шаге.

40 Компания, занимающаяся программным обеспечением, планирует потратить 100 000 манат на усовершенствование игры. Финансовые менеджеры компании должны будут потратить на это первоначально 4 000 манат, а за каждую последующую неделю на 20% больше предыдущего.
a) Сколько денег будет потрачено на 5-ой неделе?
b) Сколько денег будет потрачено за первые 5 недель?
c) На какой неделе не останется достаточного количества денег?

41 Подсчитайте число отцов и матерей, бабушек и дедушек, прабабушек и прадедушек 10-ти поколений. В каком поколении количество будет больше 1000000?

Практическое задание. На картине даны шаги деления на части круга по определенному правилу. а) Представьте это правило словами.
b) Можно ли по этому правилу закончить деление круга на маленькие части?



c) Выразите круг через сумму его частей. Исследуйте применение формулы суммы n-первых членов геометрической прогрессии.

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

$$S_1=\frac{1}{2}=0{,}5$$

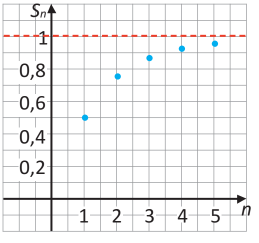
$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=0{,}75$$

$$S_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\approx 0{,}88$$

$$S_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\approx 0{,}94$$

$$S_5=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\approx 0{,}97$$

....



$$S_n=b_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

d) сравните с нулем значение с $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ увелечением n.

e) Объясните данный график соответственно ситуации. По графику представьте свои рассуждения о $S_n \to 1$, при $n \to \infty$.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Бесконечную геометрическую прогрессию при $|q|<1$ называют бесконечно убывающей геометрической прогрессией. Преобразуем формулу суммы n - первых членов геометрической прогрессии следующим образом.

$$S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{b_1-b_1q^n}{1-q}=\frac{b_1}{1-q}-\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$$

Если $|q|<1$, то с бесконечным ростом "n" множитель q^n, а значит и $\frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$ приближаются к нулю. Поэтому с ростом n до бесконечности сумма S_n приближается к числу $\frac{b_1}{1-q}$. Число $\frac{b_1}{1-q}$ называется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.
Если обозначить эту сумму через S, то получим: $\boldsymbol{S=\frac{b_1}{1-q}}$ $\quad (|q|<1)$

Пример. Формулу для нахождения суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии примените для преобразования периодической десятичной дроби в обыкновенную.

Решение. $0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots$

Учитывая $q = \frac{1}{10}$, $b_1 = \frac{3}{10}$ в формуле сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии и проведя упрощения, получим:

$$0,(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Обучающие задания

42 Проверьте условие $|q| < 1$ для знаменателя геометрической прогрессии и найдите сумму прогрессии.

a) $18;\ 6;\ 2;\ \ldots\ldots$ b) $0{,}3;\ 0{,}03;\ 0{,}003;\ \ldots\ldots$

43 Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

a) $-\frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ -\frac{1}{32};\ \ldots.$ b) $1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \ldots.$

44 Зная сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии и первый член, найдите знаменатель прогрессии.

a) $S = 4;\ b_1 = 1$ b) $S = 12;\ b_1 = 3$ c) $S = -\frac{1}{9};\ b_1 = -\frac{1}{6}$

d) $S = 8;\ b_1 = \frac{1}{2}$ e) $S = \frac{3\sqrt{3}}{2};\ b_1 = \sqrt{3}$ f) $S = \frac{11}{13};\ b_1 = 1$

45 Найдите сумму, слагаемые которой являются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии. ($|a| < 1$)

a) $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots.$ b) $1 - a + a^2 - a^3 + \ldots\ldots.$

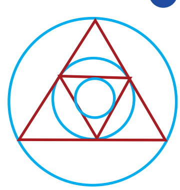
c) $1 + a^2 + a^4 + a^6 + \ldots\ldots.$ d) $1 - a^3 + a^6 - a^9 + \ldots\ldots$

46 Преобразуйте периодическую десятичную дробь в обыкновенную.

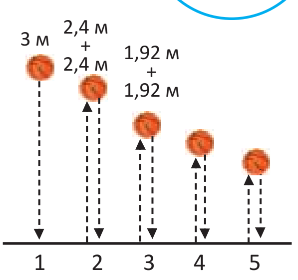
a) $0,(2)$ b) $0,(15)$ c) $2,(6)$ d) $0{,}2(7)$

Прикладные задания

47 В окружность с радиусом 6 см вписан правильный треугольник. В треугольник вписана окружность, в эту окружность - правильный треугольник и т.д. Найдите сумму длин этих окружностей.



48 Мяч падает с высоты 3 м и отскакивает от земли. После каждого удара о землю мяч поднимается на высоту, составляющую 80% предыдущей высоты. Найдите общую длину расстояния, которую преодолеет мяч.



Обобщающие задания

1 Напишите 4-ый и 6-ой члены последовательности.

a) $a_1 = 5$, $a_n = a_{n-1} + 3$

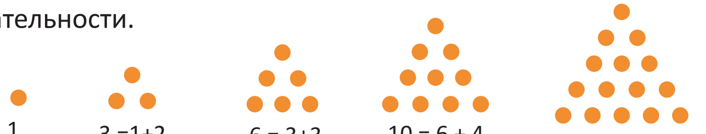
b) $a_1 = 1$, $a_n = 4a_{n-1}$

c) $a_n = n^2 - 3n$

d) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

2 В возрастающей последовательности 1, 2, 5, 10, a,12, b, c (a, b, c - натуральные числа) среднее арифметическое членов равно 12-ти. Каким может быть наибольшее значение b.

3 Исследуйте картину, показанную ниже. Напишите еще 5 членов последовательности. Напишите формулу, определяющую любой член последовательности.



1

3 =1+2

6 = 3+3, $\frac{3 \cdot 4}{2}$, 1+2+3

10 = 6 + 4, $\frac{4 \cdot 5}{2}$, 1+2+3+4

15 = 10 + 5, $\frac{6 \cdot 5}{2}$, 1+2+3+4+5

4 Определите вид последовательности и запишите два последующих члена.

a) $\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}; \frac{7}{3}; ....$

b) $\sqrt{3}; 3; 3\sqrt{3}; 9; ...$

c) $1; -1; 1; -1; ...$

5 a) В арифметической прогрессии, при $a_3 = 4$, $a_7 = 6$ найдите a_5 и a_8

b) В арифметической прогрессии, если $a_3 + a_6 + a_{24} = 12$, то найдите , сумму первых 21 членов.

6 Если в арифметической прогрессии $a_4 = 9$, $a_9 = -6$, то сумма скольких первых членов равна 54?

7 Найдите сумму положительных членов арифметической прогрессии 6,6 ; 5,8 ; ..... .

8 Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, заданной формулой суммы n - первых членов $S_n = 2n^2 + 3n$.

9 Строительная компания купила бульдозеры на сумму 500 000 манат. Цена бульдозера каждый год дешевеет на 20 % по сравнению с предыдущим. Напишите формулу, позволяющую определить цену бульдозера в любом n-ом году. Через сколько лет цена бульдозера будет 256 тысяч манат?

10 a) Если в геометрической прогрессии $b_2 = 0,1$ и $b_5 = 0,8$, то найдите b_6 и b_8 .

b) Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 8, а сумма последующих четырех членов равна 4-ём. Найдите сумму первых двенадцати членов.

11 Числа a, b, 12 образуют геометрическую прогрессию, числа a, b, 9 – арифметическую прогрессию. Найдите числа a и b.

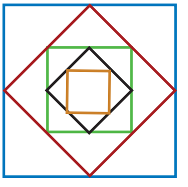
12 Определите соответствие (здесь c_n - n-ый член последовательности, S_n -сумма n- первых членов).

1. $c_n = 2n^2 - 3$
2. $c_n = 3 \cdot 2^n$
3. $S_n = n^2 + 2n$

A) Геометрическая прогрессия
B) Арифметическая прогрессия
C) $c_3 = 7$
D) $c_3 = 15$

13 В первую секунду тело проходит 6 м, в каждую последующую секунду проходит на 4 м больше предыдущего. a) Какой путь преодолеет тело за 20 секунд? b) За сколько секунд тело преодолеет расстояние 4800 м?

14 Дан квадрат со стороной 6 см. Середины сторон этого квадрата являются вершинами второго квадрата, середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и т.д. Найдите сумму площадей всех квадратов, построенных по этому правилу.



15 Тахир и Орхан мечтают купить велосипед. Стоимость велосипеда 120 манат. Тахир думает, что если отец даст ему в первый день 4 маната, а в каждый последующий день на 4 маната больше предыдущего, то за 7 дней сможет собрать нужную сумму. А Орхан считает, что если отец ему в первый день даст 1 манат, а в каждый последующий день в 2 раза больше предыдущего, то за 7 дней сможет собрать нужную сумму. Кто из них прав?

16 В арифметической прогрессии, членами которой являются целые числа $a_3 = 11$, сумма 8 первых членов больше 72-х, но меньше 80-ти. Найдите a_2.

17 Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию равна 45. Если из первого члена вычесть 2, из второго 9, а из третьего 8, то эти числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

18 **Старинная задача.** Торговец имеет 14 серебряных монет. Масса серебряных монет растет в арифметической прогрессии с разностью, равной 4. Масса последней серебряной монеты равна 59 лот. (лот - старинная единица измерения и равна 12,8 граммам). Чему равна масса всех монет?

19 Найдите сумму.

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \dots$

b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^5} + \frac{7}{2^7} + \dots$

10 Представление информации. Комбинаторика. Вероятность

В этом раздел вы научитесь

- Систематизировать и представлять информацию
- Группировать и анализировать информацию
- Вычислять число возможных вариантов
- Вычислять пермутации и комбинезоны
- Решать задачи на вычисление вероятности

10-1 Таблица распределения частот

Число случаев, в которых встречается данное значение в базе данных, называют частотой этого значения. Рассмотрим построение таблицы распределения частот на примере.

Пример 1. Ниже представлены результаты опроса среди 25-ти учеников о том, “Сколько детей в их семье, включая их самих”. Представьте информацию в виде таблицы распределения частот.

2	2	3	4	5	2	2	2	3
2	1	2	5	3	4	3	1	2
3	5	3	2	1	3	2		

Решение. Как видно из данных, в семьях по 1, 2, 3, 4 или 5 детей. Составим трехстолбчатую таблицу.
В 1-ом столбце размещается информация о количестве детей в семьях, т.е. числовые данные 1, 2, 3, 4, 5.
Во 2-ом столбце указываются черточки, которые определяют число, соответствующее этим данным.
В 3-ем столбце записывается частота.
Такие таблицы называют - таблицей распределения частот.

<table>
<tr><th>Число детей в семьях</th><th>Подсчет</th><th>Частота</th></tr>
<tr><td>1</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>𝍸 𝍸</td><td>10</td></tr>
<tr><td>3</td><td>𝍸||</td><td>7</td></tr>
<tr><td>4</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
</table>

Представление информации: Как видно из таблицы, 5 семей имеют более 3-х детей. Семей, имеющих не больше трех детей – 20.

Если база данных содержит большое количество числовых значений, то эта информация группируется по интервалам (классам).

Рассмотрим построение таблицы распределения частот сгруппированных данных на следующем примере.

Пример 2. Представленные ниже данные отражают информацию о возрасте 50-ти пользователей интернета. Информацию представьте в виде таблицы частот.

50	40	41	17	11	7	22	44	28	21	19	23	37	51	54	42	88
41	78	56	72	56	17	7	69	30	80	56	29	33	46	31	39	20
18	29	34	59	73	77	36	39	30	62	54	67	39	31	53	44	

1. Разделим информацию на 7 классов, сгруппировав ее в определенных интервалах.
2. Определим длину каждого интервала - класса. Для этого от наибольшего числа (88) вычтем наименьшее (7) и разделим на число классов:

$$(88 - 7) : 7 \approx 11{,}57 \approx 12$$

3. Как видно, наименьшее значение равно 7. Это наименьшее граничное значение первого класса, а наибольшее - будет 18. Наименьшее значение второго класса 19, а наибольшее 30. Границами 3-го класса будут числа 31 и 42 и т.д. (Не забудьте о том, что граничное значение входит в интервал, и обратите внимание, чтобы не происходило перекрытие классов.)
4. Построим таблицу частот.

Класс (возраст)	7-18	19-30	31-42	43-54	55-66	67-78	79-90	
Подсчет	𝍸 |	𝍸 𝍸	𝍸 𝍸 |||	𝍸 |||	𝍸	𝍸 |	||	
Частота	6	10	13	8	5	6	2	Всего: 50

Систематизация и представление базы данных могут быть обобщены следующим образом.

1. В базе данных информация группируется в классы-интервалы в соответствии с числовыми значениями (или категориями – цветом, видом и т.д.). Для удобства при расчетах рекомендуется, чтобы количество классов было между 5-ю и 12-ю.

2. Определяется длина интервалов. Для этого разность наибольшего и наименьшего значений информации делится на число классов. Приблизительное значение частного от деления принимается за длину интервала.

3. Определяются граничные значения – наибольшее и наименьшее значения каждого класса-интервала. Наименьшее значение первого интервала выбирается из базы данных, а наибольшее значение определяется в соответствии с длиной интервала.

4. Строится таблица частот. В таблице представлены граничные значения классов, в виде черточек и чисел указаны частоты, соответствующие информации.

Обучающие задания

1 В классе 25 учеников выполнили задания по оцениванию по предмету математика. Полученные результаты приведены ниже. Представьте информацию в виде таблицы распределения частот.

3	2	3	3	4	3	3	2	5	4	5	4	
2	4	4	3	3	4	3	2	4	5	4	5	2

2 Следующую информацию сгруппируйте по классам.
a) **Продажа.** Количество классов: 6
Информация: Сумма (в манатах), полученная от продажи в августе:
2114, 2468, 6992, 1876, 4105, 3183, 6932, 1355, 4278, 1030, 2702, 3077, 5835, 5512, 4697, 2478, 5981, 3643, 3858, 3500, 2608, 1000
b) **Время реакции.** Количество классов: 7
Информация: Время реакции на голосовое предупреждение (в миллисекундах) 30 женщин.

507,	389,	305,	298,	336,	310,	506,	382,	320,	450,
309,	416,	359,	442,	307,	337,	373,	469,	351,	411,
388,	422,	413,	428,	387,	454,	323,	441,	388,	426

3 1) Ниже показаны результаты взвешивания спортсменов. Представьте информацию в виде таблицы распределения частот, сгруппировав данные в пяти классах.

50,	50,	53,	53,	54,	55,	55,	55,	56,	60,
62,	62,	62,	64,	64,	64,	65,	65,	65,	66,
66,	66,	70,	72,	72,	72,	75,	75,	76,	80,
80,	80,	81,	81,	82,	82,	83,	84,	85,	85,
85,	86,	87,	93,	94,	97,	98,	98,	100,	100

2) Составьте таблицу частот, отражающую вес учеников вашего класса.

Относительная частота

Относительная частота – это отношение частоты к общему числу данных. Относительная частота выражается в виде обыкновенной дроби, десятичной дроби или в процентах. Сумма относительных частот должна быть равна 1 или 100%.

$$\text{Относительная частота} = \frac{\text{Частота класса}}{\text{Общее число}}$$

Середина интервала (средняя точка интервала) равна полусумме нижнего и верхнего граничных значений интервала (класса).

$$\text{Середина интервала} = \frac{\text{нижнее граничное значение} + \text{верхнее граничное значение}}{2}$$

Определим эти показатели на примере о возрасте пользователей интернета.

Класс	Частота	Середина интервала	Относительная частота
7-18	6	$\frac{7+18}{2} = 12{,}5$	$\frac{6}{50} = 0{,}12$
19-30	10	$\frac{19+30}{2} = 24{,}5$	$\frac{10}{50} = 0{,}2$
31-42	13	$\frac{31+42}{2} = 36{,}5$	$\frac{13}{50} = 0{,}26$
. . .	. . .	. . .	. . .

+12

+12

Как видно из последовательности 12,5; 24,5; 36,5; ... , середину каждого последующего интервала можно найти, суммируя длину интервала со серединой предыдущего интервала.

Представим базу данных следующей таблицей с соответствующими показателями.

Возраст пользователей и срок пользования

Класс (возраст)	Частота	Середина интервала	Относительная частота
7-18	6	12,5	0,12
19-30	10	24,5	0,2
31-42	13	36,5	0,26
43-54	8	48,5	0,16
55-66	5	60,5	0,1
67-78	6	72,5	0,12
79-90	2	84,5	0,04
	Всего: 50		Всего : 1

Из таблицы видно, что 26% пользователей интернета люди в возрасте от 31 до 42 лет.

4 Результаты опроса 20-ти учащихся о том, сколько часов в неделю они занимаются спортом, приведены ниже. Представьте информацию в таблице, охватывающей частоту и относительную частоту.

5	3	2	3	1
3	2	1	4	5
0	4	5	4	4
2	3	5	3	4

5 Выполните задания, пользуясь таблицей.

a) Определите длину интервала-класса;
b) Определите середины интервалов;
c) Вычислите относительные частоты.

Класс	Частота
10-19	8
20-29	20
30-39	30
40-49	72
50-59	40
60-69	10
70-79	20

6 Следующий ряд информации отражает результат оценивания 50 учеников по предмету математика по 100-бальной системе.

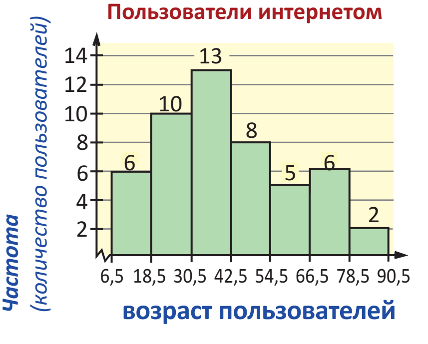
43, 88, 25, 93, 68, 81, 29, 41, 45, 87, 34, 50, 61, 75, 51, 96, 20, 10, 18, 35, 25, 77, 62, 98, 47, 36, 15, 40, 49, 25, 39, 60, 37, 50, 19, 86, 42, 29, 32, 61, 45, 68, 41, 87, 61, 44, 67, 30, 54, 28.

a) Разделите информацию на 6 классов; b) Составьте таблицу частот;
c) Добавив в таблицу столбик, выражающий относительную частоту, составьте таблицу заново.

Гистограмма частот. Полигон частот

Гистограмма частот. Одной из самых выгодных форм представления распределения информации является гистограмма. Построим гистограмму частот рассмотренного нами примера о пользователях интернета: 1. Классы с граничными значениями или середина класса-интервала помещается на горизонтальной оси, а значения частот на вертикальной оси. 2. Соседние столбики гистограммы должны касаться. Например, граничные точки 1-го класса будут 6,5-18,5, 2-го класса – 18,5-30,5 и т.д.

Класс (возраст)	Границы	Частота
7-18	6,5-18,5	6
19-30	18,5-30,5	10
31-42	30,5-42,5	13
43-54	42,5-54,5	8
55-66	54,5-66,5	5
67-78	66,5-78,5	6
79-90	78,5-90,5	2

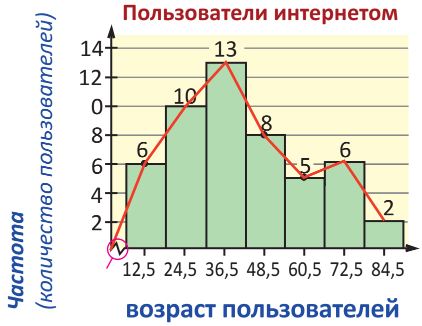


Представление информации. Из гистограммы частот видно, что возраст более половины пользователей меньше 42-х лет.

Полигон частот графически отражает частоту распределения информации. Полигон частот можно построить 2-мя способами.

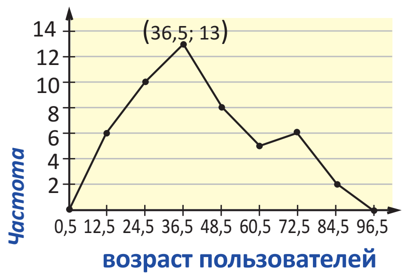
1. Пользуясь гистограммой:

- строится гистограмма;
- отмечается средняя точка интервалов (на столбцах гистограммы);
- эти точки соединяются.



2. Пользуясь таблицей частот:

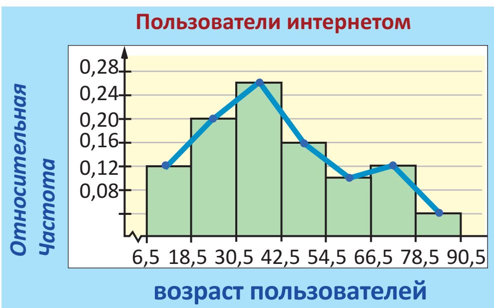
- На оси абсцисс отмечается средняя точка класса-интервала с соответствующим масштабом, на оси ординат – частота, соответствующая классу.
- Отмеченные точки соединяются. Полученный график распределения информации называется полигоном частот.



Анализируя данные по полигону распределения частот, можно получить новую информацию. Например, из полигона частот по координатам точки (36,5;13) можно определить, что большинство пользователей интернета из класса со средним возрастом (приблизительно) 36,5 лет.

Гистограмма относительных частот

Для наглядного и легкого сравнения собранных данных, во многих случаях, более удобно представлять информацию с помощью гистограммы относительных частот или полигона относительных частот



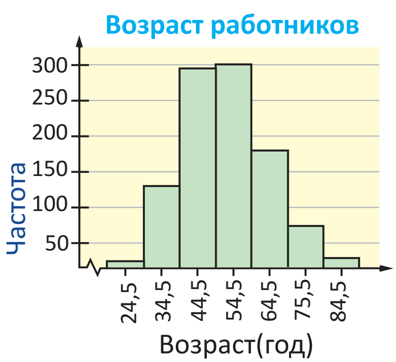
Из гистограммы частот видно, что возраст 25% пользователей между 30 и 42 годами.

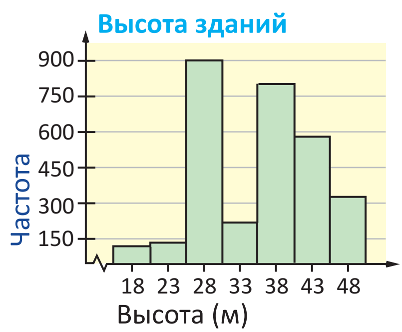
Обучающие задания

7 Данная информация отражает результаты опроса, проведенного в различных семьях, о ежемесячных затратах на продукты питания.
a) Сгруппируйте информацию в 6-ти классах и постройте соответствующую таблицу частот.
b) Представьте информацию полигоном частот.

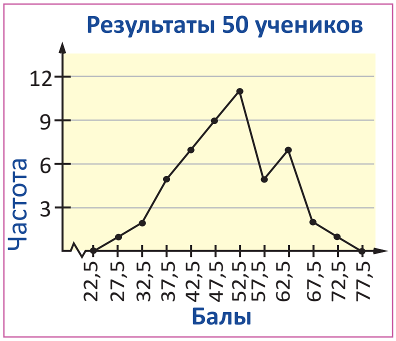
279	205	279	266	199	177	162	232
192	181	321	309	246	278	50	40
116	100	151	240	474	297	170	188
429	294	570	342	279	235	434	123
303	335	320	325	180	290	578	205

8 1) По гистограммам определите:
a) число классов;
b) длину интервалов - классов;
c) классы с наименьшей и наибольшей частотой и приблизительные значения этих частот;
2) Постройте полигон частот, соответствующий каждой гистограмме.





9 По графику полигона частот на рисунке выполните задания.
a) Определите классы с наибольшей и с наименьшей частотой.
b) Сколько, приблизительно, людей набрали меньше 50 баллов?



10 Таблица отражает информацию о высоте деревьев в лесу.

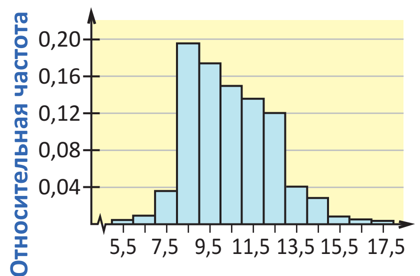
а) Добавив в таблицу столбик, отражающий относительную частоту, нарисуйте ее в тетради.
b) Постройте соответствующую гистограмму и полигон частот.

Класс (высота деревьев, *м*)	Частота (число деревьев)
10-14	10
15-19	15
20-24	20
25-29	30
30-34	25
35-39	15
40-44	10

11 Сгруппируйте данные в 5-ти классах:
а) постройте гистограмму частот;
b) постройте гистограмму относительных частот;
c) постройте полигон частот.
d) определите классы с наибольшей и наименьшей частотой.
1) Результаты игры (по числу очков).
Данные: 154 257 195 220 182 240 177 228 235 149 174 192 207
185 180 264 169 225 239 148 190 182 205 148 188
2) Площади участков фермеров в деревне (в гектарах)
Данные: 12 7 9 8 9 8 12 10 9 10 6 8 13
12 10 11 7 14 12 8 10 9 11 13 5

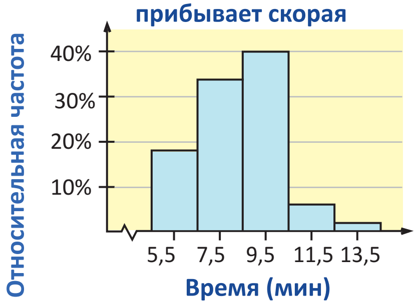
12 а) Определите классы с наибольшей и наименьшей частотой.
b) Какой процент всех рыб составляют рыбы со средней длиной 12,5 см?

Длины рыб в аквариуме (см)



13 а) Согласно гистограмме, можно ли утверждать, что “в 50-ти из каждых 100 вызовов скорая помощь прибыла менее чем за 10 минут”?
b) Представьте информацию, соответствующую наибольшему значению относительной частоты.

Время, за которое прибывает скорая



Среднее арифметическое по распределению частот

Среднее арифметическое по распределению частот сгруппированных данных находится следующим образом:

1. Находятся середины каждого интервала (x).	$x = \dfrac{\text{наиболь. знач. + наимень.знач}}{2}$
2. Находится сумма частот	$n = \sum f$
3. Находится сумма произведений середины интервала (x) и частоты (f)	$\sum(x \cdot f)$
4. Находится значение среднего арифметического, соответствующее общей информации	$\overline{x} = \dfrac{\sum(x \cdot f)}{n}$

Знак Σ – показывает сумму и читается как "сигма"..
Обратите внимание, что $n = \sum f$

Пример. Таблица представляет информацию о количестве сотрудников компании по продолжительности их телефонных разговоров в день. Сколько минут в среднем разговаривает по телефону один сотрудник в этой компании?

Класс (время разговора)	Частота (Число работников
1–5	12
6 –10	26
11 –15	20
16–20	7
21–25	11

Решение. В этой задаче требуется вычислить среднее арифметическое, соответственно сгруппированной информации.

1. Определив среднюю точку каждого интервала-класса (x), запишем его в столбец, добавленный к таблице.

2. Находим сумму частот (f): 12 + 26 + 20 + 7 + 11 = 76

3. Вычисляем сумму произведений середины каждого интервала (x) и частоты (f): 3·12 + 8·26 + 13·20 + 18·7 + 23·11 = 883

4. Разделив третий результат на второй результат, находим среднее арифметическое:

Среднее арифметическое $= \dfrac{883}{76} \approx 11{,}6$

Класс	Середина интервала (x)	Частота (f)	Частота О среднее значение
1–5	3	12	36
6–10	8	26	208
11–15	13	20	260
16–20	18	7	126
21–25	23	11	253
		$\sum f = 76$	$\sum(x \cdot f) = 883$

Таким образом, можно сказать, что в среднем каждый работник этой фирмы в день разговаривает по телефону 11, 6 минут.

Обучающие задания

14 Зарплата 8-ми из 30-ти сотрудников фирмы составляет 120 манатов, зарплата 22-х сотрудников – 330 манатов. Найдите средний заработок сотрудников фирмы.

15 Пироги, приготовленные одной и той же фирмой, в разных магазинах города продаются по разным ценам. Количество пирогов, проданных за день, и цена одного пирога приведены в таблице. За какую цену, в среднем, фирма продает один пирог?

Продажа пирогов		
магазин	цена (₼)	кол.
A	1,20	120
B	1,50	70
C	1,60	110
D	1,10	200

16 Найдите среднее арифметическое по данным в таблице.

a) Найдите средний балл игроков по набранным очкам в компьютерной игре.

Набранные очки	Число игроков
1–10	2
11–20	5
21–30	6
31–40	4
41–50	3

b) По информации о массе новорожденных детей за неделю определите среднюю массу одного ребенка.

Масса	Количество
[1 - 1,5)	1
[1,5 - 2)	3
[2 - 2,5)	8
[2,5 - 3)	15
[3 - 3,5)	10
[3,5 - 4)	9
[4 - 4,5)	0

17 Сгруппируйте информацию по классам, постройте таблицу и вычислите среднее арифметическое.

a) База информации: Высота 30 кустов (в см) Число классов: 5

67	76	69	68	72	68	65	63	75	69
66	72	67	66	69	73	64	62	71	73
68	72	71	65	69	66	74	72	68	69

b) База информации: Время пребывания 20 больных в больнице (дни)
Число классов: 4

6	9	7	14	4	5	6	8	4	11
10	6	8	6	5	7	5	6	3	11

10-2 Комбинаторика

Подбор элементов (вариантов) с определенными свойствами, подсчет различных комбинаций, расположение этих элементов в определенном порядке и т. д. – такие задачи называются комбинаторными. При малых значениях заданной величины (параметра) комбинаторные задачи легко решать путем подсчета вариантов (путем построения диаграммы ветвления или составления списка). При больших значениях параметров эти методы менее эффективны. В таких случаях применяется один из основных принципов – правило умножения.

Принцип умножения. Если элемент a можно выбрать n способами, а при любом выборе a элемент b можно выбрать m способами, то пару (a, b) можно выбрать $m \times n$ способами.
Принцип умножения верен для выбора любого конечного числа объектов.

Пример 1. Предположим, что номера автомобилей составляются с помощью последовательно записанных трех латинских букв и трех цифр. Сколько различных автомобильных номеров можно составить?
a) разрешается повторение букв b) не разрешается повторение букв.

	Буквы			Цифры			Общее число выборок
a)	26	26	26	10	10	10	$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ $= 17\ 57\ 6000$
b)	26	25	24	10	10	10	$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ $= 15\ 600\ 000$

Обучающие задания

1. Записываются различные двузначные числа, в которых каждое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 используется не более одного раза.
a) Сколькими разными способами можно выбрать десятки при написании числа?
b) Сколькими способами можно выбрать цифру единиц, после выбора десяток?
c) Сколько таких двузначных чисел можно записать?

2. Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5? Сколько из них делится на 5?

3. Али, Вюгар, Яшар, Лейла, Илаха и Тогрул в соревновании по шахматам между собой набрали различные очки. Найдите число всех возможных вариантов распределения I и II места.

Пермутации - перестановки. ${}_nP_n$

В некоторых случаях требуется найти число возможных вариантов по порядку расположения элементов, входящих во множество. Например, сколько трехзначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 1, 2, 3?
123, 132, 213, 231, 312, 321. Здесь каждое расположение называется пермутацией (перестановкой). Первый элемент можно выбрать из 3-х элементного множества тремя способами; 2-ой элемент из оставшегося 2-х элементного множества двумя способами; 3-ий элемент можно выбрать из одноэлементного множества одним способом. Тогда, по принципу умножения, число всех возможных перестановок будет $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Различные упорядоченные множества, которые отличаются только порядком расположения своих элементов называются пермутациями (перестановками) рассматриваемого множества и их число обозначается как ${}_n\mathbf{P}_n$, и читается как “пермутация из n элементов по n”.

Первый элемент пермутации можно выбрать из n- элементного множества n способами; 2-ой элемент из оставшегося $(n-1)$ элементного множества $(n-1)$ способами, 3-ий элемент из оставшегося $(n-2)$ элементного множества $(n-2)$ способами и .т.д. Наконец, n-ый (последний) элемент можно выбрать одним способом. Тогда число всех пермутаций по принципу умножения будет: ${}_n\mathbf{P}_n = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1$.
Произведение первых n натуральных чисел пишется $\boldsymbol{n!}$ и читается как “эн факториал”. Таким образом число всевозможных пермутаций находится по формуле ${}_n\mathbf{P}_n = n!$. Здесь $\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$
В частности, $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.... и.т.п. Принято, что $0! = 1$.

При вычислениях так же удобно пользоваться формулами:

$$(n+1)! = (n+1)\cdot n! \qquad \text{и} \qquad (n+2)! = (n+2)\cdot(n+1)\cdot n!$$

Например, $$\frac{9!}{7!} = \frac{9\cdot 8\cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 72$$

Пример Сколькими способами можно построить в ряд 5 человек?
Решение. Поскольку $n = 5$, то число возможных вариантов будет:

$${}_5P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$$

Обучающие задания

4 Сколько чисел можно составить перестановкой цифр числа 1234?

5 В турнире участвуют 6 человек. Сколькими различными способами могут быть распределены места в турнирной таблице.

6 Сколько пятизначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4 ?

7 Вычислите.

a) $\dfrac{8!}{6!}$ b) $\dfrac{18! - 2 \cdot 17!}{16! + 15!}$ c) $\dfrac{9! \cdot 5!}{8! \cdot 6!}$ d) $\dfrac{{}_5P_5 - 2 \cdot {}_3P_3}{{}_4P_4 + 5 \cdot {}_3P_3}$

8 Сколько различных “слов” можно получить, переставляя буквы в слове “АТОМ”?

9 Сколькими разными способами можно построить в ряд 8 школьников, при условии, чтобы Лала и Эльмир стояли рядом.

10 Сколькими различными способами можно рассадить 6 человек вокруг круглого стола?

11 Переставляя буквы в слове “ПЕРМУТАЦИЯ”, строятся различные “слова”. Найдите число слов, в которых гласные записаны рядом.

12 В классе 8 учеников, из которых 5 мальчиков, 3 девочки. Сколько существуют возможных вариантов последовательного выхода их из дверей:
a) сначала выходят девочки; b) сначала выходят мальчики;
c) могут выйти в любой последовательности.

Число пермутаций с повторениями

Число возможных перестановок n-элементного множества равно $n!$. Однако, если среди этих элементов есть элементы, которые не отличаются друг от друга (повторяющиеся), то количество различных пермутаций (перестановок) уменьшается. Покажем это на примерах.

1 **Пример.** Сколько различных слов с различным произношением можно получить, переставляя буквы в слове АЛТАЙ?

Решение: Если буквы были бы различными, то 5! перестановками можно построить различные слова. Однако при каждой такой перестановке, если поменять местами две буквы А между собой, слово не изменится. Поэтому число различных перестановок будет в два раза меньше, то есть $\dfrac{5!}{2} = 60$.

2 **Пример.** Сколькими способами можно поменять буквы в слове БАНАН? Например, ААБНН, АНАБН, АБАНН и т.д .

Решение: В слове БАНАН имеются две буквы А, две буквы Н и одна буква Б. Число пермутаций из 5 элементов равно 5!. Однако, две буквы – повторяющиеся, поэтому число возможных перестановок будет:

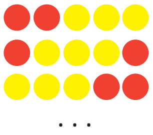
$$\text{БАНАН} \qquad \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{2 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{60}{2} = 30$$

В любой пермутации данного множества при перестановке между собой одинаковых k элементов $k!$ раз не происходит никакой другой пермутации. Значит в этом случае число пермутаций уменьшается в $k!$ раз.
Если в n-элементном повторяющемся множестве имеется k видов элементов и из них количество 1-го вида равно n_1; 2-го вида n_2; 3-го - n_3, наконец k-го вида n_k, тогда число возможных пермутаций, будучи:
$n_1+n_2+n_3+...+n_k=n$ вычисляется как $P(n_1, n_2, ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot ... \cdot n_k!}$

Обучающие задания

13 Сколько слов с различными произношениями можно получить, переставляя буквы в словах:
a) НЯНЯ; b) ДАЧА; c) ВОДОПАД; d) ПАРАБОЛА

14 Из 5-ти последовательно расположенных шаров два красные, три желтые. Сколькими способами можно расположить их в ряд?



15 По данным выражениям напишите число элементов, число повторяющихся элементов и число повторений

a) $\dfrac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$ b) $\dfrac{12!}{7! \cdot 3! \cdot 2!}$ c) $\dfrac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 2!}$

Пермутации - Размещения, $_nP_k$

Задача. В группе 8 учеников. Сколькими способами можно выбрать председателя группы и редактора?
Решение. a) Председателя группы можно выбрать из 8-ми учеников 8-ю разными способами; после того как выбрали председателя группы, редактора выбирают из оставшихся 7-и учеников 7-ю разными способами. По правилу умножения число различных выборов $8 \cdot 7 = 56$.
Если закодировать учеников буквами *a, b, c, d, e, f, g, h* то выбор последовательностью *ab* отличается от выбора последовательностью *ba*. В первом случае *a* выбран председателем, а *b* - редактором. А во втором случае наоборот, *b* выбран председателем, а *a* редактором.
В рассматриваемой задаче необходимо найти количество двухэлементных подмножеств 8-ми элементного множества, которые различаются или элементом, или порядком их расположения. Упорядоченные (т.е. различающихся либо элементом, либо порядком их расположения) k - элементные подмножества данного множества, содержащего n элементов, называют размещениями (пермутациями) из n элементов по k. Их число обозначается как $_nP_k$ и читается как “пермутация из n элементов по k”. Из n-элементного множества выбрав “k” элементов, построим их последовательно в ряд.

1-ый элемент ряда можно выбрать из n-элементного множества n способами, 2-ой элемент из оставшихся $(n-1)$-го элемента $(n-1)$-способами и т.д., наконец, k-ый элемент $(n-k+1)$ способами. По принципу умножения число пермутаций вычисляется по формуле:

$${}_nP_k = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{\text{число множителей равно “k”}} \qquad 0 \le k \le n.$$

Умножив и разделив это выражение на $(n-k)!$, указанную выше формулу можно записать короче:

$${}_nP_k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}^{n!}}{(n-k) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \qquad \mathbf{{}_nP_k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

1 **Пример:** Вычислите. ${}_7P_3$

Решение. ${}_7P_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

или $\quad {}_7P_3 = \dfrac{7!}{(7-3)!} = \dfrac{7!}{4!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

Обучающие задания

16 Каждая буква слова “АЗОТ” написана на отдельной карточке. Сколько различных “слов” можно составить, если любые две будут лежать рядом.

17 Вычислите. a) ${}_{10}P_3$ b) ${}_7P_2$ c) ${}_8P_3$ d) ${}_5P_4$ e) ${}_7P_4$

18 Что больше? a) ${}_8P_2$, или ${}_6P_3$ b) ${}_{10}P_3$, или ${}_7P_5$ c) ${}_9P_6$, или ${}_8P_7$

19 Вычислите. a) $\dfrac{{}_5P_3}{{}_5P_2}$ b) $\dfrac{{}_8P_5}{{}_8P_4}$ c) $\dfrac{{}_7P_3 + {}_6P_3}{{}_{11}P_2}$ d) $\dfrac{{}_6P_5 + {}_6P_4}{{}_6P_3}$

20 У Фидан 6 костюмов. В понедельник, во вторник и в среду она должна участвовать в семинаре. Если в каждый из этих дней Фидан будет одевать разные костюмы, то сколько разных выборов она имеет?

21 Сколькими способами можно положить 4 письма в 6 конвертов, так чтобы в каждом конверте было бы не больше одного письма.

22 В классе 20 учеников. Сколькими способами можно выбрать председателя и секретаря для проведения классного собрания.

23 Сколькими различными способами могут покинуть автобус трое пассажиров на 5-ти остановках при условии, что на каждой остановке выходит не более одного пассажира?

24 Сколько можно составить трехзначных чисел с неповторяющимися цифрами из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сколько из них будет больше 200 ?

Комбинезон, ${}_nC_k$

Пример. Пример. Для презентации проекта группа из 7 членов должна выбрать троих. Сколькими различными способами могут это сделать члены группы?

Решение. Неважно, в какой последовательности будут выбраны трое. Например, если мы закодируем студентов по буквам из их имен, то ***abc*** не отличается от ***cab*** и показывает один и тот же состав. Если выбрать любых трех учеников, построить их в ряд в той последовательности, в которой они были выбраны, то число всех возможных случаев будет ${}_7P_3$. Так как при перестановке 3! способами мест в ряду выбранных трех учеников полученные различные пермутации показывают одинаковый состав, то число различных выборов будет в 3! раза меньше, т.е.:

$$\frac{{}_7P_3}{3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$$

Всевозможная комбинация из "*n*" элементов множества по "*k*" элементов в каждой без учета их порядка расположения называется комбинезоном. Комбинезоны отличаются друг от друга только элементом. Каждое из различных к-элементных подмножеств *n* - элементного множества называется сочетанием (комбинизоном) из *n* элементов по *k*. Их число обозначается ${}_nC_k$ и читается как "комбинезон из *n* элементов по *k*". Если от каждого *k*-элементного комбинезона образуются *k*! пермутации, то количество общих пермутаций будет nPk. По принципу умножения имеем ${}_nP_k = {}_nC_k \cdot k!$ Значит,

$$ {}_nC_k = \frac{{}_nP_k}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

число множителей равно k

Примеры. ${}_7C_3 = \frac{{}_7P_3}{3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$ ${}_8C_2 = \frac{{}_8P_2}{2!} = \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2} = 28$

Формулу нахождения общего числа комбинезонов можно написать в виде:

$$ {}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

Обратите внимание на своеобразную симметрию этой формулы. Если заменить *k* на $(n-k)$, то получится та же формула. Только факториалы в знаменателе поменяются местами: $\mathbf{{}_nC_k = {}_nC_{n-k}}$.

Легко показать, что ${}_nC_0 = 1$, ${}_nC_n = 1$, ${}_nC_1 = n$.

Обучающие задания

25 Отметьте на окружности точки A, B, C, D, E, F и соедините их попарно отрезками. Сколько отрезков получилось?

26 Вычислите. a) ${}_4C_3$ b) ${}_4C_4$ c) ${}_5C_2$ d) ${}_6C_3$ e) ${}_6C_1$ f) ${}_7C_3$

27 Сравните. a) ${}_7P_3$ и ${}_7C_3$ b) ${}_{11}P_2$ и ${}_{11}C_2$ c) ${}_7C_3$ и ${}_7C_4$

28 a) Сколькими возможными способами из 12-ти видов освежающих напитков можно выбрать 3 различных напитка.
b) Сколькими возможными способами можно выбрать 2-х финалистов среди 20-ти спортсменов.

29 Напишите по одной задаче соответственно каждому данному комбинезону.

a) ${}_{10}C_3$ b) ${}_{5}C_2$ c) ${}_{7}C_4$

30 Упростите выражения.

a) $\frac{6!}{5!} - \frac{5!}{4!} + \frac{7!}{6!}$ b) $\frac{7! + 6!}{7! - 6!}$ c) $\frac{{}_{7}C_3}{{}_{6}P_3}$ d) ${}_{7}C_3 : {}_{8}P_5$

Прикладные задания

31 Определите, в каких случаях находятся пермутации, а в каких - комбинезоны и вычислите.
a) Из 20-ти видов цветов выбирают 3.
b) Трехзначный код кредитной карты.
c) Распределение 1-го, 2-го, 3-го мест среди 10 спортсменов.

32 Магазин спортивных товаров готовится закупить товары нового сезона. Есть предложение спортивных костюмов 6-ти цветов с пошивом 4-х стилей. Владелец магазина решил выбрать костюмы 4-х цветов и 2-х стилей. Сколько возможных выборов имеет владелец?

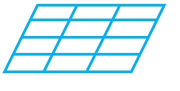
33 Наргиз хочет из букв своего имени создать пароль для e-mail из 6-ти маленьких букв. Сколькими способами она сможет это сделать?

34 Из 10-ти рекламных шитов 3 белых, 2 серых, 5 голубых. Сколькими разными вариантами можно расположить их в один ряд?

35 Сколькими разными способами могут сесть за круглый стол Азер, Анар, Али, Вели, Видади и Араз при условии, что Али и Вели не будут сидеть рядом?

36 На окружности отмечены 8 точек. Сколько треугольников можно построить с вершинами в этих точках?

37 Сколько параллелограммов можно сосчитать на рисунке?



38 Сколькими разными способами можно ответить на 10 вопросов, записав два ответа - верно и неверно.

39 Сколько различных групп из трех человек можно составить из 5-ти мальчиков и 4-х девочек при условии, что в группе будет хотя бы одна девочка?

40 В урне 5 белых и 3 красных шара. Сколькими различными способами можно вынуть из урны 3 шара так, чтобы 2 из них были белыми, а 1 красным?

10-3 Решение задач на вычисление вероятностей

В результате случайного опыта могут произойти различные случайные события. События, которые нельзя разделить на более простые, называются элементарными событиями. В каждом опыте можно выделить такие элементарные события, из которых состоят все остальные события. В результате случайного опыта обязательно наступает только одно элементарное событие. Сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1. Всякое подмножество множества элементарных событий называется событием. Поэтому действия, определенные для множеств, также определяются и для событий.

Элементарные события, при которых поступает событие A, называется благоприятствующими событию A. В опыте с равновозможными исходами вероятность события находится по формуле:

$$P(A) = \frac{\text{Число благоприятных исходов}}{\text{Число всех возможных исходов}}$$

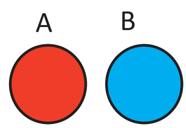
Ясно, что $0 \le P(E) \le 1$

Множество всех исходов, не входящих в событие A, называется событием, противоположным событию A (или дополнением) и обозначается $\overline{A}$

Вероятность противоположного события можно найти по формуле:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Несовместные события



События, не имеющие общих исходов называются несовместными событиями. Если события A и B несовместные, то поскольку $A \cap B = \varnothing$ имеем $P(A \cap B) = 0$.

Для любых несовместных событий A и B верно равенство:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

1. Пример. Буквы слова “МАТЕМАТИКА” разрезаны и собраны в мешочек. Фарах выиграет приз, если в первой попытке из мешочка вытащит букву М или Т. Найдите вероятность того, что Фарах выиграет приз.

Решение. Событие - наугад вытащенная буква будет буквой М- обозначим **A**, а вероятность - **P(A)**. Поскольку число букв -10, число букв М - 2, то имеем:

$$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Событие - наугад вытащенная буква будет буквой Т - обозначим через **B**, а его вероятность - **P(B)** . Поскольку число букв -10, число букв Т - 2, то имеем:

$$P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

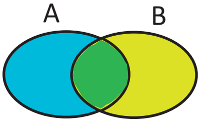
Поскольку A и B несовместные события, то вероятность того, что Фарах выиграет (вероятность события A ∪ B) будет:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Вероятность объединения событий

Для любого события A и B верно равенство:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



2. Пример. Из 20-ти участников семинара 12 человек разговаривают на английском, 10 – на немецком, а 4 из них разговаривают и на английском, и на немецком языках. Если из участников семинара будет случайным образом выбран 1 человек, то какова вероятность того, что он разговаривает на английском или на немецком языке?

Решение. Событие В. Вероятность того, что наугад выбранный участник говорит на английском: $P(A) = \frac{12}{24}$

Событие В. Вероятность того, что наугад выбранный участник говорит на немецком: $P(B) = \frac{10}{24}$

Событие А и В имеют обшие исходы. Вероятность того, что наугад выбранный участник говорит и на английском и на немецком: $P(A \cap B) = \frac{4}{24}$

По формуле находим: $P(A \cup B) = \frac{12}{24} + \frac{10}{24} - \frac{4}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

Вероятность независимых событий

Если результат появления одного события не влияет на результат появления другого события, то такие события называются независимыми. Для независимых событий A и B верно равенство $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B)$

Здесь союз "и" можно заменить знаком пересечений множеств - "$\cap$":

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

3. Пример. Игральная кость и монета бросаются одновременно. Если на игральной кости выпадет 6 очков, а на монете – рисунок, то Афаг выиграет приз. Какова вероятность выигрыша Афаг?

Решение. Пусть событием A будет выпадение 6-ти очков, вероятность события – P(A), а событием B – выпадание рисунка на монете, а вероятность – P(B).

Вычислим вероятность $A \cap B$ по формуле $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

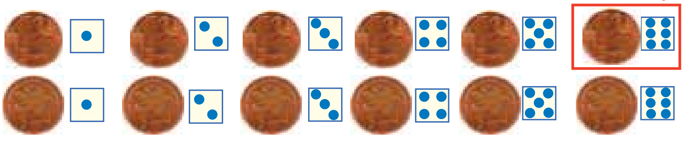
$$P(A) = \frac{1}{6}, \ P(B) = \frac{1}{2}; \ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Если вычислим вероятность этого события по определению вероятности, мы должны получить один и тот же ответ. Проверим.

Элементарные события при бросании монеты и зара:

1 благоприятный исход

12 исходов



$$P(A \cap B) = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{число возвожных исходов}} = \frac{1}{12}$$

Вероятность зависимых событий

Если результат появления одного события влияет на результат появления другого события, то такие события называются зависимыми. Обозначив вероятность события B, при условии, что произошло A, через **P(B после A),** вероятность события A и B (то есть $A \cap B$) можно найти по формуле **P(A и B) = P(A)·P(B после A)**. Это формула так же пишется в форме: $P(A \cap B) = P(A)\ P(B/A)$. Так как для независимых событий P(B после A) = P(B) то в частном случае формула приобретает вид: P(A и B) = P(A) · P(B).

4. Пример. В коробке 6 черных, 4 красных карандашей. Тогрул вытащил наудачу один карандаш и взял себе. Потом Гюльнар вытащила один карандаш. Какова вероятность того, что карандаши, вытащенные и Тогрулом, и Гюльнар, окажутся черного цвета?

Решение: Эти события зависимые, потому что после того, как Тогрул вытащит черный карандаш, количество карандашей изменится, и это повлияет на вероятность того, что Гюльнар достанет черный карандаш.

Тогрул: Возможные исходы - 10, благоприятные исходы - 6

Вероятность: $P(T_{qara}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Гюльнар после Тогрула: Возможные исходы - 9, благоприятные исходы - 5

Вероятность: $P(Г_{черн.\ после}\ T_{черн.}) = \frac{5}{9}$

Вероятность того, что и Тогрул, и Гюльнар достанут карандаш черного цвета: $P(T_{черн.} \text{ и } Г_{черн.}) = P(T_{черн.}) \cdot P(Г_{черн\ после}\ T_{черн}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Обучающие задачи

1 Определите, какими являются события: совместные или несовместные и вычислите их вероятность.

1) Каждая буква Азербайджанского алфавита записана на отдельный карточке и помещена в урну. В случайно вынутой карте: a) будет буква A или какая-либо гласная. b) будет одна из букв L, M или же N.

2) При бросании одной игральной кости:

a) P(1 или 5); b) P(нечетное число или же число, меньше 5-ти).

2 Сначала определите, являются ли события зависимыми или независимыми, а потом вычислите вероятность.

1) Одна игральная кость была брошена подряд два раза:

a) P(2, потом 3); b) P(два раза 6); c) P(3, любое очко)

2) В коробке имеются карты с буквами - A, B, G, N, L, Ə, M. Вынимают подряд две карты. Найдите вероятность события. a) P (A, после Ə), если карты не возвращаются; b) P(L, после N), если карты возвращаются.

3 Супермаркет проводит призовую кампанию, предложив 10 упаковок семечек, в которых разыгрывается 6 телевизоров, 3 компьютера, 1 автомобиль. Вычислите вероятность событий.

a) первый выигрыш компьютер, а второй автомобиль;

b) выигрывается подряд 2 телевизора.

Вычисление вероятности с применененем формул комбинаторики

Во многих задачах для нахождения количества возможных и количества благоприятных исходов приходится применять формулы комбинаторики.

1. Пример. Из 6-ти дисков, находящихся в коробке, на которой нет никакой информации, два - с народной музыкой, два - с джазовой, два -с эстрадной. Какова вероятность того, что из случайно выбранных двух дисков первый будет с джазом, а второй с эстрадой?

Решение. По принципу умножения число благоприятных исходов $2 \cdot 2$, потому что имеется два эстрадных и два джазовых диска. Число возможных результатов выбора двух дисков из 6-ти: ${}_6P_2$

$$P(\text{джаз, эстрада}) = \frac{2 \cdot 2}{{}_6P_2} = \frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{4}{6 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

Ответ: вероятность того, что первый диск джаз, а второй эстрада $\frac{2}{15}$.

2. Пример. В мешочке 12 теннисных мячей, из которых 4 с дефектом. Из мешка наугад извлекаются два шара. Какова вероятность того, что оба шара будут с дефектом?

Решение. Число возможных результатов равно ${}_{12}C_2$. В данном случае число благоприятных исходов равно ${}_4C_2$

$$P(\text{2 дефектных}) = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{число возможных результатов}} = \frac{{}_4C_2}{{}_{12}C_2}$$

$${}_4C_2 = \frac{{}_4P_2}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6 \qquad {}_{12}C_2 = \frac{{}_{12}P_2}{2!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

$$P(\text{2 дефектных}) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

3. Пример. В урне 5 красных и 3 голубых шара. Наудачу вынимаются 2 шара. Какова вероятность того, что хотя бы один из вынутых шаров будет красным.

Решение. Обозначим E событие, когда один из вынутых шаров красный. Однако нахождение числа возможных вариантов одного красного шара утомительно. Сначала мы найдем вероятность E′, дополняющую это событие - из 2-х шаров ни один не является красным, т.е. событие, что оба шара будут голубыми. В этом случае число благоприятных исходов: ${}_3C_2$.

Число возможных исходов: ${}_8C_2$

$$P(E') = \frac{n(E')}{n(S)} = \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}}{\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}} = \frac{3}{28}$$

Вероятность события E: $P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28} \approx 0{,}89$

Обучающие задания

4 Сколько трехзначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 2, 3, 5, и 7. Найдите вероятность того, что одно случайно выбранное из этих чисел будет четным?

5 a) При бросании одной игральной кости найдите вероятность выпадения нечетного или простого числа.
b) Одновременно бросают две игральные кости. Найдите вероятность выпадения чисел, сумма которых равна 7 или 11.

6 Монету бросают 3 раза. Какова вероятность того, что во всех трех случаях выпадет рисунок?

7 Среди трех девочек и пяти мальчиков классный руководитель должен выбрать троих представителей в школьную организацию.
a) Сколькими разными способами он сможет это сделать?
b) В скольких случаях все три представителя будут мальчиками?
c) Найдите вероятность, что все три представителя будут мальчиками.

8 Из 5-ти синих и 4-х красных шаров в коробке любые три могут быть выбраны различными способами. Найдите вероятность того, что хотя бы один из вынутых шаров будет синего цвета.

9 В коробке 60 карточек, на каждом из которых записан один экзаменационный вопрос. На экзамене студент, который подготовил ответы на 45 из этих вопросов, вытаскивает наугад 2 карточки. Найдите вероятность того что:
a) Студент знает ответ на оба вопроса;
b) Студент не знает ответа на оба вопроса;
c) Студент знает ответ только на один вопрос.

10 Числа 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, и 13 записаны на карточках и сложены в мешочек. Если вытащить случайным образом три числа, то какова вероятность, что это Пифагорова тройка.

11 Ученик, который собирается звонить другу, забыл последние две цифры номера. Но он помнит, что эти цифры разные. Найдите вероятность того, что случайно выбранный номер будет верным.

12 Три девочки и два мальчика строятся в один ряд. Найдите вероятность того, что все мальчики будут стоять рядом.

13 Рена, ее подруга Лейла и еще пять учеников участвуют в выборах председателя и заместителя школьной организации. a) Какова вероятность выбора Рены председателем, а Лейлы заместителем? b) Какова вероятность, что на эти должности будут выбраны подруги?

14 В урне находятся 8 красных и 5 желтых шаров. Из нее наугад и без возврата последовательно вынимают 2 шара. Найдите вероятность того, что первый из них красный, а второй - желтый.

15 В урне 4 белых и 3 черных шара. Найдите вероятность того, что случайно вынутые 2 шара:
a) оба белые; b) оба черные; c) один белый, а другой черный.

16 12 учеников из 9^a, 8 учеников из 9^b хотят добровольно участвовать в организационных работах олимпиады. Если подряд будут выбраны два ученика, то какова вероятность того, что: a) оба будут из 9^b;
b) один из 9^a; а другой из 9^b; c) оба из 9^a?

17 В коробку собраны карты с числами от 1-до 30-ти. Если вытащить одну карту из коробки, найдите вероятность того, что это число: a) делится на 2 или на 3; b) делится на 2 и не делится на 3; c) делится и на 2, и на 3. .

18 В урне 45 желтых и зеленых шаров. Число шаров соотносятся соответственно как 5:4. Если вынуть из урны 2 шара, то какова вероятность, что оба шара окажутся желтыми?

19 Решите задачу по диаграмме Венна.

Вычислите вероятность по данным условиям, если выберется один ученик:
a) P (музыка или рисование)
b) P(драма или рисование)
c) P (драма и музыка или драма и рисование)

20 Опрос о том “Откуда люди получают последние новости” выявил следующие результаты: 85 % из интернета, 40 % читают из газет, 25 % из обоих источников. Представьте информацию диаграммой Венна. Если среди респондентов случайно выберут одного, найдите соответствующую вероятность:
a) человек, который получает информацию не из газет, а из интернета;
b) человек, который получает информацию из обоих источников.

21 В кошельке три 20-ти манатные, две 10-ти манатные и пять 5-ти манатных купюры. Если из кошелька, не возвращая, взять 3 купюры, то какова вероятность того, что первая купюра будет 5-ти манатная, вторая - 10-ти манатная, а третья – 20-ти манатная?

22 Буквы слова “ARABA” написаны на отдельных карточках и собраны в коробку. Карточки вытаскиваются поочередно и кладутся друг за другом. Найдите вероятность образования слова “ARABA”.

Обобщающие задания

1 В таблице дана сумма очков, набранных Сананом в компьютерной игре. Если не учитывать наименьшее очко, то какой показатель центральной тенденции изменится больше: среднее арифметическое или медиана?

Очки набранные Сананом			
164	128	151	138
158	162	130	162
109	134	157	137

2 По данным постройте таблицу частот.
Рост детей. Число классов: 5, Информация: рост 30-ти детей:

67 76 69 68 72 68 65 63 75 69 66 72 67 66 69
73 64 62 71 73 68 72 71 65 69 66 74 72 68 69

3 По данным постройте полигон частот и полигон относительных частот.

a)

Рост девочек	Число
140-145	3
146-151	7
152-157	12
158-163	6
164-169	2

b)

Рост мальчиков	Число
145-150	2
151-156	3
157-162	8
163-168	11
169-174	6

4 Найдите средний возраст участников марафона по заданной информации об их возрасте.

Возраст	Число
[18-22)	24
[22-26)	19
[26-30)	5
[30-34)	2

5 1) Информация показывает заработную плату и число работников на фирме.
a) По информации постройте таблицу относительной частоты. b) У скольких работников зарплата меньше 351-го маната?
d) Если случайным образом выбрать одного работника, то какова вероятность, что его зарплата меньше 401-го маната?

Зарплата	Число
251 - 300	5
301 - 350	6
351 - 400	4
401 - 450	3
451 - 500	7

2) На фирме, во время праздничной вечеринки разыгрываются в качестве подарка-приза 2 холодильника путем случайного вытаскивания 2-х карт из коробки с именами сотрудников. Найдите:
a) чему равна вероятность выигрыша обоих холодильников работниками, получающими зарплату меньше, чем 301 манат; b) чему равна вероятность выигрыша хотя бы одного холодильника работниками, получающими меньше 301-го маната?

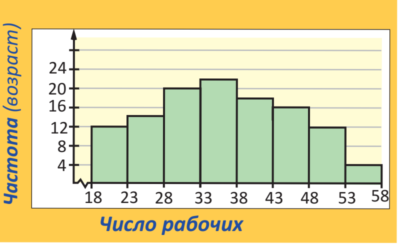
6 На гистограмме представлены данные по распределению рабочих по возрастным группам. Найдите:

a) Число рабочих в возрасте от 18 до 23 лет?

b) возрастную группу, к которой относится наибольшее число рабочих

c) Общее число рабочих.

d) Определите среднее арифметическое.



7 В школе 56% школьников составляют девочки. Половина их занимается спортом. Число этих девочек равно 140. 65 % мальчиков школы так же занимаются спортом. a) Сколько учеников в этой школе?

b) Сколько мальчиков и сколько девочек в школе?

c) Если случайным образом выбрать одного ученика, то чему равна вероятность того, что он занимается спортом?

8 Из 3-х шестиклассников, 5-ти семиклассников, 4-х восьмиклассников школы для дежурства выбирают 3-х учеников.

a) Найдите вероятность того, что все дежурные из седьмого класса;

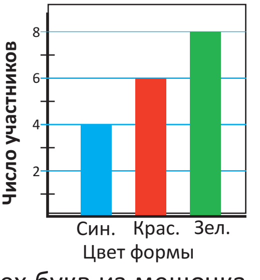
b) Найдите вероятность того, что ни один дежурный не является семиклассником.

9 Школьники участвуют в соревнованиях в спортивных формах голубого, красного и зеленого цветов. Данные о количестве участников в соответствии с цветом формы представлены на барграфе.

Найдите вероятность того, что:

1) Случайно выбранный участник выступает в форме голубого цвета.

2) Случайно выбранные два участника оба выступают в форме голубого цвета.



10 Найдите число возможных вариантов вытянутых трех букв из мешочка с данными буквами. Если из мешочка вытянуть три буквы, найдите вероятность того, что хотя бы одна буква гласная.

a) A B C D E   b) E F G H I J K   c) M N O P

11 В урне 6 желтых и 8 белых шаров.

a) Сколькими возможными вариантами можно вытянуть 3 шара?

b) Найдите вероятность того, что все три шара белые.

12 Переставляя буквы в слове “ХОРДА” получаются разные “слова”. В скольких из них: a) гласные записаны рядом;

b) гласные не записаны рядом.

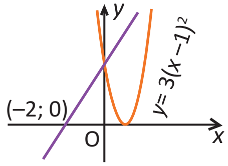
13 Найдите n из уравнения.

a) $(n+2)! = 20 \cdot {}_nP_n$ b) ${}_nP_2 = 90$ c) ${}_nC_2 - {}_nC_1 = 9$

Обобщающие задания

1 Посуда, полностью заполненная сахарным песком, весит 14,5 кг, а заполненная наполовину весит 7,7 кг. Найдите вес пустой посуды.

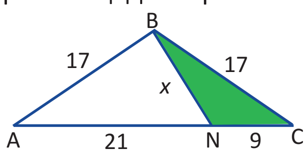
2 Прямая $y = kx+b$ пересекает ось абсцисс в точке $(-2; 0)$, а параболу $y = 3(x-1)^2$ на оси ординат. В какой еще точке пересекается прямая и парабола?



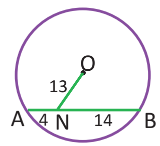
3 Найдите значение выражения:

a) $x^2 - 8x + 15$ при $x = 4 - \sqrt{5}$, b) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ при $x = \sqrt[3]{7}$.

4 По данным рисунка найдите периметр и площадь закрашенной части.



5 Найдите радиус окружности с центром в точке O.



6 Для размещения 56-ти туристов были установлены трехместные и пятиместные палатки. Если всего было установлено 16 палаток, то сколько из них трехместные.

7 В арифметической прогрессии $a_1 = -2$, $a_5 = 18$. Найдите десятый член прогрессии. Вычислите сумму членов этой прогрессии, меньших 50-ти.

8 Напишите уравнение окружности с центром в начале координат и проходящей через данную точку. Найдите площадь сектора, соответствующего центральному углу в 45°.

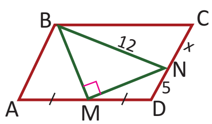
a) $(0; -10)$ b) $(-3; -1)$ c) $(-4; -4)$ d) $(-6; 4)$

9 Решите неравенства.

a) $2(x-3) < 5x$ b) $\dfrac{x-3}{1-\sqrt{2}} > \sqrt{2} + 1$ c) $1 < 3 - 2x \le 7$ d) $2|x-3| - 1 < 3$

10 $\begin{cases} \dfrac{S}{x+y} = 3 \\ \dfrac{S}{x-y} = 5 \end{cases}$ по системе уравнений найдите сумму $\dfrac{S}{x} + \dfrac{S}{y}$

11 ABCD - параллелограмм. По данным на рисунке найдите x.



12 В пустые клетки запишите соответствующие знаки сравнения (>, <, =).

a) Если $a > b$, то $(-a) + b$ ☐ 0 b) Если $a > b$, то $(-a) - (-b)$ ☐ 0

13 Если Сеймур за 32 минуты читает 24 страницы книги, то:
a) сколько страниц прочитает за 40 минут?
b) за какое время он прочитает книгу, в которой 264 страницы.

14 Урожайность повысилась с 25-ти центнеров до 30-ти центнеров. На сколько процентов повысилась урожайность?

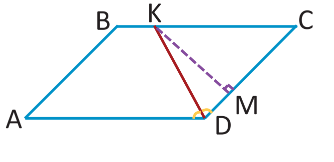
15 Сторона правильного многоугольника равна 8 м, а периметр 64 м.
a) Найдите градусную меру каждого внутреннего угла.
b) Сколько диагоналей можно провести из одной вершины?
c) Найдите количество всех диагоналей.

16 Вычислите значение выражения:
a) $(7x-y)^2-2(7x-y)(x-y)+(x-y)^2$, при $x=\sqrt{2}$
b) $\dfrac{2\sqrt{2}-ab^2}{2+b^2}+\dfrac{\sqrt{2}b^2-2a}{2+b^2}$, при $a=\sqrt{2}-1$

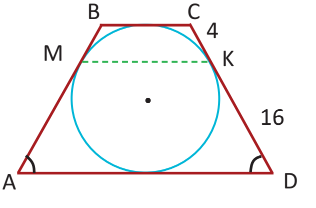
17 За 3 часа автомобиль проехал 240 км.
a) Какое расстояние проедет автомобиль за 5 часов?
b) За сколько часов проедет автомобиль 560 км с той же скоростью?

18 Число желтых шаров в урне относится к числу зеленых шаров как 4 : 1. Если вытащить из урны половину желтых шаров, то число оставшихся в урне желтых шаров будет на 2 больше зеленых.
1) Сколько всего шаров было вначале в урне?
2) Если вытащить два шара, какова вероятность того, что оба шара будут:
a) желтого цвета b) разного цвета.

19 ABCD – параллелограмм, DK – биссектриса, $KM \perp CD$, BK= 2см, KM = 3 см и $S_{\Delta CKD} = 9$ см^2. Найдите периметр и площадь параллелограмма ABCD.



20 По данным на рисунке найдите периметр и площадь равнобедренной трапеции ABCD и длину отрезка MK.
(M и K точки касания)



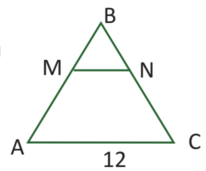
21 a) Длины сторон треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите длины сторон треугольника, если его периметр равен 54 см.
b) Боковая сторона равнобедренного треугольника 10 см, высота, проведенная к основанию, 8 см. Найдите периметр, площадь треугольника и радиусы вписанной и описанной окружностей.

22 a) Диагонали ромба 6 см и 8 см. Найдите периметр, площадь, высоту ромба и радиус вписанной окружности.
b) Найдите площадь параллелограмма с периметром 28 см и высотами 3 см и 4 см.

23 Вычислите
a) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}-\sqrt{117^2-108^2}$ b) $(\sqrt{14}-3\sqrt{2})^2+6\sqrt{28}$ c) $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$

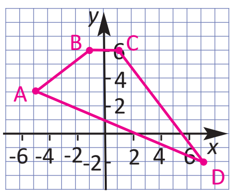
24 Окружность задана уравнением $x^2-2x+y^2+1=4$.
a) Найдите координаты центра.
b) Найдите радиус.
c) Вычислите площадь соответствующего круга.

25 $MN \parallel AC$
$S_{AMNC}=8\cdot S_{\Delta MBN}$
$AC=12$
Найдите MN.



26 Учитель, вычисляя средний балл тестов 30-ти учеников, ошибочно показал вместо 50-ти баллов одного ученика 350 и, поэтому средний бал составил 70. Если устранить допущенную ошибку, то каким будет средний балл учеников?

27 Вычислите периметр и площадь многоугольника, изображенного на координатной плоскости.



28 Вычислите.
a) $\dfrac{9^5\cdot 2^9}{36^4}$ b) $\dfrac{4^{-3}\cdot 9^{-2}}{6^{-5}}$
c) $2^{\frac{7}{3}}\cdot 32^{\frac{5}{6}}:8^{\frac{3}{2}}$

29 a) Найдите сумму и произведение корней уравнения $2x^2-3x-1=0$
b) Сумма корней уравнения $x^2+(1-2m)x+m-3=0$ на 3 единицы больше их произведения. Найдите m и решите уравнение.

30 a) Если число 300 увеличить на 20%, а затем полученное число уменьшить на 20 %, то какое число получится?
b) Цену товара уменьшили на 10%, а потом новую цену увеличили на 10%. Как изменилась цена товара?

31 1) В равнобедренном треугольнике длины двух сторон равны 8,4 м и 3,2 м. Найдите периметр треугольника. Сколько решений имеет задача?
2) Какому целому числу может равняться длина третьей стороны треугольника, если угол между сторонами равными 6 и 8 единиц:
a) меньше 90° b) больше 90°

32 При каком значении c уравнение $(c^2-1)x=c-1$ имеет
a) единственное решение ?
b) бесконечное число решений; c) не имеет решений?

33 Решите уравнения.

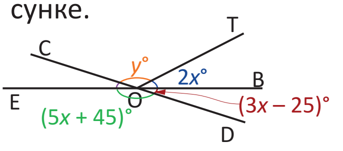
a) $\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{x}{3} = 1$ b) $\dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{2}{x}$ c) $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{8}{x^2-4}$

34 a) Какие измерения должен иметь прямоугольник с периметром 64 см, чтобы его площадь была наибольшей?

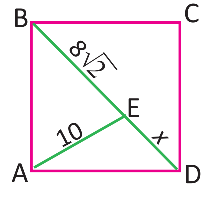
b) Какие измерения должен иметь прямоугольник с площадью 25 м^2, чтобы его периметр был наименьшим?

35 Какое наибольшее число одинаковых букетов можно составить из 16-ти фиалок, 32-х ромашек, 24-х нарциссов? Сколько цветов каждого вида будет в одном букете в этом случае?

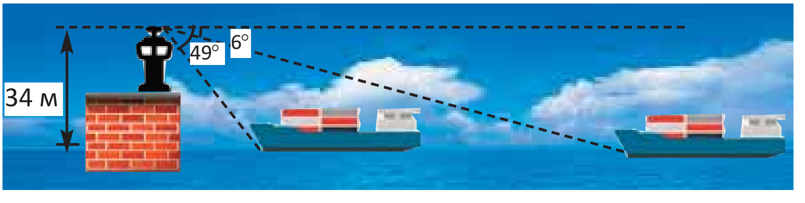
36 Найдите градусные меры углов, показанных на рисунке.



37 ABCD - квадрат. Найдите x по данным на рисунке.



38 Наблюдатель со смотровой башни увидел катер, который двигался в направлении маяка под углом 6°. Через 5 минут катер наблюдался под углом 49°. Вычислите скорость катера (м/мин), если наблюдатель находился на высоте 34 метров от поверхности моря.



39 Деньги Сабины составляют $\dfrac{4}{5}$ части денег Гюляр. Деньги Канана составляют $\dfrac{7}{8}$ части денег Сабины. Если у Канана 28 манат, то сколько денег у Сабины и у Гюляр?

40 1) Найдите длину дуги окружности с радиусом равным 15 см, соответствующим центральному углу в 60°.

2) Найдите радиус окружности, если длина дуги в 60° равна:

a) 3π b) 5π

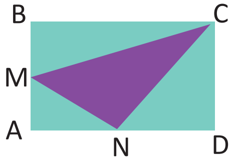
41 Найдите вершины, точки пересечения с координатными осями и постройте параболы. Запишите квадратичные функции в виде $y = a(x-m)^2 + n$.

a) $y = x^2 + 8x + 7$ b) $y = x^2 + 4x$ c) $y = 2x^2 + 4x + 6$

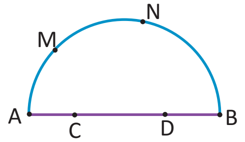
42 Вычислите. a) $\dfrac{7{,}1^2-1{,}5^2+8{,}6\cdot 2{,}4}{6{,}3^2-2{,}3^2}$ b) $\dfrac{2{,}1^3-0{,}9^3}{1{,}2}+0{,}9\cdot 2{,}1$

43 Освободите знаменатель от иррациональности. a) $\dfrac{8}{3\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}$ c) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{36}}$

44 В прямоугольнике ABCD M и N средние точки сторон AB и CD. Если $S_{ABCD}=64$ см^2, $S_{MNC}=$?



45 Сколько треугольников можно построить с вершинами в точках, отмеченных на полуокружности и диаметре?



46 Запишите числа в стандартном виде.

a) 3560 b) 0,000204 c) 21 020 000 d) $0{,}32\cdot 10^7$ e) $3580\cdot 10^9$

47 Если участники одного мероприятия сядут за столы по 5 человек, то трое останутся на ногах. Если сядут по 8 человек, то три стола останутся свободными. Сколько человек присутствуют на этом мероприятии?

48 Даны точки A (1 ; 3) , B (– 2 ; 1) и C (4 ; 2). Выразите компонентами вектор $\overrightarrow{AB}-2\cdot\overrightarrow{CA}$ и найдите модуль этого вектора.

49 Оценки Лятифа по суммативному оцениванию по предмету математика за год следующие: одна “2”, четыре “3”, три “4”, две “5”. По этим данным найдите среднюю арифметическую, моду и медиану.

50 Решите систему уравнений:

a) $\begin{cases}3x-2y=\dfrac{1}{2}\\ 4y-x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{x-1}{y+2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ c) $\begin{cases}x(y-1)=0\\ x+5xy+y=4\end{cases}$ d) $\begin{cases}x^2+xy=15\\ y^2+xy=10\end{cases}$

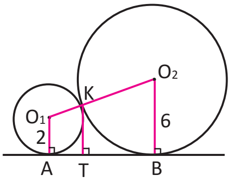
51 При параллельном переносе точка A (–2; 1) переходит в точку A' (–1; 3). При этом параллельном переносе:

a) В какую точку переходит точка B(–1; 1);

b) Какая точка переходит в точку C'(–3; 1)?

52 Самир один выполняет некоторую работу за 9 часов, а вместе с Надиром за 6 часов. За сколько часов выполнит эту работу Надир, работая один?

53 Две окружности радиусами 2 и 6 касаются извне в точке K. Найдите расстояние от точки K до общей касательной AB.



54 Расположите числа в порядке возрастания.

$$a = \frac{71}{72},\ b = \frac{72}{73},\ c = \frac{75}{74},\quad d = \frac{76}{75}$$

55 Первый автобус подъезжает к остановке через каждые 30 минут, второй через каждые 36 минут, третий через каждые 45 минут. Если все три автобуса с первой остановки выезжают в одно и то же время, то через какое время они опять встретятся на этой остановке.

56 Решите уравнения

a) $4x = x^3$ b) $x^3 - x^2 - 2x = 0$ c) $x^3 + x^2 = 4x + 4$

d) $(5x + 1)^2 + 6\,(5x + 1) - 7 = 0$ e) $(x^2 + 2x + 4)^2 - 7\,(x^2 + 2x + 4) + 12 = 0$

57 Один из двух насосов заполняет бассейн за 15 часов, а другой за 10 часов. Третий насос опорожняет полный бассейн за 18 часов. За сколько часов заполнится бассейн, если все три насоса будут подключены одновременно.

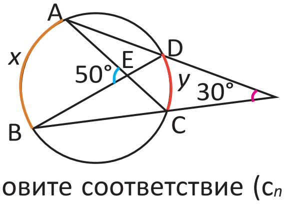
58 Сначала продали $\frac{1}{3}$ часть мешка сахара, потом $\frac{3}{5}$ часть оставшегося.

a) Какую часть всего сахара составляет проданный сахар?

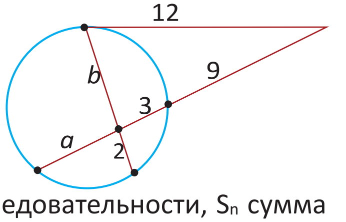
b) если всего было 45 кг сахара, то сколько сахара осталось в мешке.

59 По данным рисунка найдите переменные

a)



b)



60 Установите соответствие (c_n - n-ый член последовательности, S_n сумма n-первых членов).

1. $S_n = n^2 + n$ A) $c_3 = 12$ B) $c_3 = 5$ C) $c_3 = 6$
2. $S_n = n^2$ D) геометрическая прогрессия E) $c_n = 2n - 1$
3. $S_n = 3(2^n - 1)$

61 Если яблоки из корзины разложить на тарелки по четыре, по шесть, по восемь, то каждый раз 3 яблока останутся лишними. Какое наименьшее число яблок было в корзине?

62 Зерно со склада 6 грузовиков перевозят за 80 дней. За сколько дней перевезут это зерно 8 таких грузовиков? Сколько грузовиков требуется для перевозки зерна за 30 дней.

63 В какую точку N ($x; y$) преобразуется точка A (3; 5) при гомотетии с центром в точке C (–1; 2) и с коэффициентом $к = 2$. Найдите длины отрезков CA и CN и сравните.

64 Напишите квадратичную функцию, проходящую через точку (0; –3) и с вершиной в точке (1; –5) в виде $y = a(x - m)^2 + n$ и постройте параболу.

65 Укажите коэффициент и степень одночлена $(2ab^2)^3 \cdot (3a^2b)^2$.

66 Из 60% раствора соли массой 400 г вылили 25 % раствора и добавили такое же количестве воды. Найдите процентное содержание полученного раствора?

67 Найдите сумму $a + b$, если $a, b \in \mathbb{N}$, $a : b = 2 : 5$, НОК(a; b) – НОД (a; b) = 45

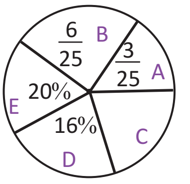
68 Градусные меры внешних углов треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Найдите внутренние углы треугольника.

69 Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде 20 км/ч, проплыла 18 км против течения и 11 км по течению, потратив на весь путь полтора часа. Найдите скорость течения реки.

70 Решите неравенства.

a) $x^2 + 3x - 18 \geq 0$	c) $3x^2 - 16x + 5 \leq 0$	e) $4x^2 < 25$
b) $-x^2 - 12x < 32$	d) $2x^2 - 4x + 5 > 0$	f) $0{,}5\,x^2 + 3x \leq -6$

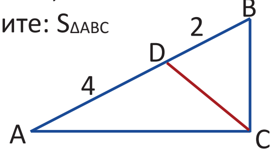
71 На круговой диаграмме показано распределение правильных ответов из 125 вопросов на экзамене. В какой части наибольшее количество правильных ответов? Сколько правильных ответов соответствует этой части?



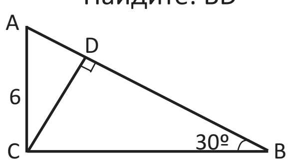
72 Определите координаты точек пересечения данных окружностей.

a) $x^2 + (y + 2)^2 = 13$ и $x^2 + (y - 3)^2 = 8$	b) $(x + 1)^2 + y^2 = 5$ и $(x - 4)^2 + y^2 = 10$	c) $x^2 + y^2 = 25$ и $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 25$

73 Дано: $\angle ACB = 90°$, CD биссектриса, AD = 4 см, BD = 2 см.
Найдите: $S_{\Delta ABC}$



74 Дано: $\angle C = 90°$, $CD \perp AB$, $\angle B = 30°$, AC = 6.
Найдите: BD



1. Корень *n*-й степени.Степень с рациональным показателем

s. 7-11 №6 b) $2\sqrt{2}$; c)4 №9 b) $\frac{8}{9}$ №11 1) B верно №14 f) 1 və $\sqrt{3}-1$; g) 3 və $\sqrt{5}-2$
№17 a) 2; b)$2\sqrt{3}$;c)0. №18 b) 1; c)4 №22 e)[3;9); f)(0;4] №23 d){–4} №26 2) $A\cap(B\cup C)$
s.13-20 №3 c)4; g)3; k)2. №7 d)$\sqrt[3]{9}>2$, e)$\sqrt[3]{25}<3$ №8 a)$\sqrt[3]{1,2}<\sqrt[3]{7}<2<\sqrt[3]{9}$ №9 a)$\sqrt[4]{17}>2>\sqrt[4]{15}$
№12 b) 2 və 3; c) 1 və 2 №13 b) 2; e) –3; f) 1 №14 b) 2;$\sqrt[3]{9}-2$; e) 1;$\sqrt[3]{28}-3$ №15 c)48;
d) –128 №16 b) $x=17$; d) $x=-29$ №17 b) Ø;c)±3;d)±2 №18 a)6; b)2; c)–8;d)0
№19 a)$2x$; b)0 №20 1 №21 2)8^3;8;3)9^3;9 №22 1)1014м²; 2)1:2 №23 a) 6 см; b)5,01м
№24 ≈4,5см №25 ≈37,3м №27 c)6; d)0,4;e)1,5 №28 b)3; d)14; e)6; h)6 №30 a) 2;
d) 40; e)1 №31 a)12 b) 6 №33 c)2; f)6 №34 a)4; c)2 №35 a)2; c)–9; d)6№37 2 раза
№38 a)2м²; b)6см³ №40 a)x; d)a; h) xy №41 a) $\frac{y}{x}$; d) $|x|$ №42 f)$\sqrt[3]{x}$; j)$\sqrt[4]{y}$
№43 a) a^2+4a+4; c) x^2-1 №44 b) $2\sqrt[3]{3}$; c) $2\sqrt[4]{2}$ №45 a) $4x\sqrt{x}$; b) $3a\sqrt[3]{a^2}$ №46 a) $x\geq 0;6x\sqrt{x}$,
h) $x\geq 0$, $y>0$, $x\sqrt[4]{2y}$; №47b)$\sqrt[4]{x}$; c)$x\sqrt[5]{2x^3}$ №48 a)$\sqrt[3]{54}$; d) $-\sqrt[4]{48}$ №49 d)$\sqrt[4]{2x}$, $x>0$; e) $-\sqrt[4]{-3c^3}$;
$c<0$ №50a) $\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{3}$; b) $2\sqrt[3]{3}<3\sqrt[3]{2}$ №52 a)$2\sqrt[6]{2}$; c)$\sqrt[4]{2}$; d) $\sqrt[15]{x^2}$ №53 a)3; b)1. №54 a)$\sqrt[3]{b}$;
b) $2\sqrt[3]{ab}$ №55 b) $\sqrt{a}$; c) $\sqrt[3]{x^2}$; d)$\sqrt[6]{a}$ №56 b) не верно №57 a)$\sqrt[6]{4}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$; b)$\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}$
№58 a)$3\sqrt[4]{3}$; c) $2\sqrt[5]{4}$ №59 a)1; b)2 №60 a) 4; b) 2; c) $1,5\sqrt{3}$

s.21-25 №3 f) 10; h) 1 №5 a) 0,5; b) 6 №7 c) $3^{1/2}>3^{1/3}$ №8 a) $x\geq 0$; b) $x\in R$;c) $x>1$;
d) $x\geq -1$ №9 c)b^2; d) a^3 №10 b)$y^{1/3}$; d) c^2 №11 b) $m^{1/2}$; d) $c^{1/2}$ №12 b) 2 №13 a) 6; b)$\frac{1}{6}$;
c)70 №14 b)$3x$; c) $\frac{1}{4c^2}$; d) $\frac{3}{x^2}$ №17 a)$0,1a$; c)$10a$ №18 a) $x=a^2$; b) $x=a^{-3}$ №19 b) $\frac{1}{8}$; c)3
№20 c) $x^{11/24}$ №21 c) $x^{0,5}$ №22 a) $2x$; c) $y-1$ №23 a) $c^{3/2}+4c^{1/2}$; c) $c^{4/3}-1$
№24 c) $(c-3^{0,5})(c+3^{0,5})$; g)$(x^{1/3}-3)(x^{1/3}+3)$ №25 a)$a^{1/2}+b^{1/2}$; d)$b^{1/6}$ №26 a)5 №28 10%;
№29 2) 5 часов №30 a) 17 см; b) 12 см №32 b) ≈1587,4 см² №34 d) $A=P(1+r)^n$

s.26-27 №1 a) 1; b) 6; c) –2 №2 a) $\sqrt[5]{3}<\sqrt[15]{30}<\sqrt[3]{2}$ №3 a) $4\sqrt[3]{9}$; c)$\sqrt[4]{8}$; d)$\sqrt[3]{9}$ №4 a) $x\geq 3$;
b) $x\in R$;c) $x\leq 2$ №5 a) $x=2$; b)$x=\pm 2$; f) $x=6$ №6 a)1,5 м; b) ≈1,2м №7 d)$-\sqrt[4]{3a^4}$; e)$\sqrt[4]{2c^3}$;
f) $-\sqrt[4]{-2c^3}$ №8 a) –1; b)1; c)1; e)5; f)2 №9 b)$\sqrt[5]{b}$; c)$\sqrt[6]{a}$; f) $x^{1/3}$ №10 1 → B; 2 → C; 3 → A
№11 $2a^3$ №12 $\frac{2}{a}$ №13 a) $3\frac{1}{3}$; b)14 №14 b) 8%; c) 5% №15 a) ≈90г b) ≈342 г

2. Окружность

s.29-31 №3 $\smile AB=72^\circ$, $\smile BC=90^\circ$, $\smile CD=108^\circ$, $\smile DF=54^\circ$, $\smile AF=36^\circ$ №4 a) ≈ 5,24 см
d) ≈4,19 мм №5 a) $\frac{3}{4}\pi$; c) $\frac{16}{3}\pi$ №6 b) $4\frac{1}{6}\pi$; $2,5\pi$; $3\frac{1}{3}\pi$ №7 ≈62,83 см №8 4) 5π м;
s.32-36 №2 a) 4 №3 a) 27; b) 8; №4 a) 16; b) 30 №5 a) $7,5\sqrt{2}$; №6 25 №10 a)5;12 b) 48; 26
№11 a)10 b)3см №12 21 №13 1см; 7см. №14 a)12 см; b)10 см; c)48см. №16 144 м.
s.37-38 №1 a)40° №2 a)95°, c)120°. №5 1) a) 63°; b) 110° №7 90°; 110°; 90°; 70°
s.40-42 №4 a) 8,5; b)9; c)15. №6 a) 3,9 м; c) 36° №8 b)4; c)12 №9 a)AD=14 см,
AB=16см, DC = 17см, BC =19см, P = 66 см; b)SR=17см, SQ = 12 см, QR=13 см,
P=42 см №10 1) 8; 2)30; 3)12 №11 a) $15\sqrt{3}$; b) 36 №12 $9\sqrt{7}$ см
s.43-46 №2 a)60° b) 50° c) 120° №3 a)55° b) 75° c) 110° №5 a)19°;b)17° №6 b) 94°;
d)14°; e)26° №7 a)30° b) 44° c) 15° №8 40° №9 15 ° №10 c)55°
s.47-48 №4 a)2; b) 25; c) 2 №5 a)2; b) 8; c) 5 №6 a) $c=5$, $d=6$; b) $a=4$, $b=3$; c) $a=12$,
$x=18$ №7 6,5м №8 a)5,8 км; b) ≈36,4 км №9 a) 2,25 м
s.49-50 №1 30° №2 50° №3 a) $4\sqrt{3}$; b)3; c)6 №4 a)139°; b) 140°; c) 30° №5 a)36°; b) 8;
c) $x=58$; $y=32$ №7 89°; 41° №8 c) $a=154$, $b=76$; d) $a=38$, $b=52$, $c=104$, $d=90$; f) $a=55$,
$b=72$, $c=178$, $d=89$ №9 $\angle D=\angle G=24^\circ$, $\angle F=\angle E=84^\circ$; №10 a) ≈11,5 км; №11 a) 120°

3. Функции. Графики

s.51-66 №2 a) 4; b) 9; c)1 №3 a) –1; 2 №4 7 №8 1) $a=\frac{1}{4}$ №9 a) a>1; b) 0<a<1; c) a<–1; d)–1<a<0 №17 b) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+2$, $y=2(x-3)^2+2$ №18 4) (2;–1); x= 2; 6) (–1; 3); x= –1 №19 2) (–1; 4); x= –1; (1;0), (–3; 0), (0; 3) №21 a) x = 5; c) x = 2 №22 x = 13 №23 c) $y=-4(x-2)^2+5$; d) $y=\frac{1}{5}(x+3)^2-10$ №24 a) $y=-(x-2)^2-1$; b) $y=-x^2-2$; c) $y=(x-2)^2-1$ №26 a) 2; b) 1; c) 2; №27 1) b) (15; –100); c) x=15; d) 2; 3) b) (–18; –8); c) x = –18; d) 2; №28 a) $f(x)=(x-8)(x+3)$; $g(x)=(x-1)^2$; $p(x)=4(x-2)(x-3)$; b) $f(x)$: (8; 0), (–3; 0), (0; –24); $g(x)$: (1; 0), (0; 1); $p(x)$: (2; 0), (3; 0), (0; 24) №29 a) $y=(x-10)(x-4)$ №30 1→d; 2→c; 3→ g; 4→h; 5→a; 6→ f; 7→e; 8→b; №31 a) (1; – 8); b) $(-2{,}5; -\frac{1}{6})$; c) (–1; 4) №32 a) $y=(x+4)^2-8$; b) $y=2(x-4)^2-11$; c) $y=-(x-4)^2+3$; №33 1) a) $y=(x-1)^2-4$; b) $y=-(x+2)^2+9$; 3) a) (–1; 0), (3; 0); (0; –3); b) (1; 0); (–5; 0), (0; 5); 4) a) x=1; b) x =–2 №36 2) a) 2; b)6; d) 4; 3)a) x= 2; b) x= –1; d) x = 1 №37 вниз; (3; 0), (–1; 0), (0;6); x=1; T(1; 8); НбЗ = 8; область определения (–∞;+∞); множества значений (–∞; 8];(–∞; 1] возрастает, [1; +∞) убывает. №38 a) вверх; (2; 0), (6; 0), (0; 12); x=4; T(4; –4); НмЗ = –4; область определения. (–∞;+∞); множества значений [–4; +∞);(–∞; 4] убывает, [4; +∞) возрастает. №39 a) НмЗ = 8; [8; +∞); b) НбЗ = 4; (–∞; 4] №41 a) (–2;–1)d) (1; 14); f) (2; 48) №42 $y=-\frac{1}{20}(x-5)^2+20$ №46 a) b=–2, c=–3; b) b= –4, c=3; c) b= –4, c= 4;

s.67-69 №1 c) $S=12x-x^2$; d) при ширине 6 см S_{max} =36 см² №2 24,5 см² №3 по набережной 30 м, ширина 15 м №4 b)–0,5 №5 3-ий день; 290 билетов №6 a) *после 5-го подорожания* b) 1125₼ №7 c) (25;450), самый высокий доход на 25-й неделе - 450 ₼ №9 20 м №10 a) t_1 = 1 сек, t_2 = 3 сек; b) t = 2 сек, h_{max} = 21м

s.72-73 №3 1→b; 2→c; 3→ a №4 a) $y=2|x|$; b) $y=1-|x-3|$ №5 b) 6-й месяц, 5000₼ №9 1) (0,6; 1,5); 2) (0; 0), (1,2; 0); 4) основание 1,2 м, высота 1,5 м

s.74 №1 c) m= –2 №3 (1; 1) №5 A(1; 3), D(–2; –6) №6 a) 512 см³ b) увелич.61 см³

s.75-76 №1 $y=(x+3)^2-2$ №2 a) b = –3, c = 2; b) (5; 0), (–3; 0), (0; –15) №3 a) k=10; b) [2; +∞) №4 b = ±4 №5 $y=x^2-x-2$ №6 1→A; 2→C; 3→ B,D №7 b) 20 м №8 b)20 тысяч книг №9 по набержн. 50 м, ширина 25 м №10 a) b = –12; c = 24, b) b = 2, c = 3 №11 a>0, b<0, c>0; b) a<0, b<0, c>0 №12 осн. 4 м, высота 1,5м №14 b) 20-я неделя, 4000 альбом №15 перес. в 3-х точках: (–1; –1), (0; 0), (1; 1) №16 1) $y=2{,}24-\frac{8}{7}x^2$ (x и y в метрах) 2) a) 1,68 м; b) ≈ 2,19 м

4. Уравнение окружности

s.78-81 №3 a) 1) 10; 2) 5; 3) 13 b) RQ = $\sqrt{68}$, PT = 5 №4 1) a) x=10, y=10; b) $2\sqrt{13}$ №5 1) a) T(–1; 7); b)10 №6 1) 18; 2) $4\sqrt{17}$ №7 5 №8 5 №9 (–2; –2) №10 k=–1; k= –7, *две точки* №11 (6; 0); №12 a) прямоуг. треугольник №14 a) P = 12 №16 10 км №18 a) $y=2x+4$ и $y=2x-1$; c) $\sqrt{5}$ №19 15 м

s.83-89 №1 b) $x^2+y^2=12$; c) $x^2+y^2=15$ №2 b) $(x+4)^2+(y-2)^2=1$; f) $(x+5)^2+(y-9)^2=20$ №3 a) ±12; b) ±13 №4 b) M(1; 2), r=4; d) M(–4;2), r=3 №5 b) M(–4; –8), r =10; d) M(2; –1), r = 1; e) M(0; 3), $r=\sqrt{14}$; f) M(1;–3), r = 5 №10 a)$(x-3)^2+(y-3)^2=17$, (–1; 2), (–1; 4); c)$(x+3)^2+(y+5)^2=16$ №11 a)$(x-3)^2+(y+2)^2=49$; b) (10; –2), (–4; –2)

№12 (2; 0), (4; 0), (0; –1), (0; –8) №13 $(x-12)^2 + y^2 = 64$ №14 10 №15 5 №16 a)10; b)7
№18 b) $y = -\frac{4}{5}x - \frac{41}{5}$; c) $y=8x+65$ №19 a) *касат.*; b) *секущ.* №20 $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 82$
№23 c)$(-2{,}5;\ 2{,}5\sqrt{3})$ №25 a) верно; c) неверно. №26 b) $\cos\theta = 0{,}8$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$;
c) $\cos\theta = -0{,}6$; $\tan\theta = -\frac{4}{3}$ №27 a) 60°; b) 135°; c) ≈64° №29 a) $9\sqrt{3}$; c)$12\sqrt{3}$
№30 $12\sqrt{2}$ см² №31 81 см² №32 13; $\frac{7\sqrt{3}}{26}$

s.90-91 №1 a) ≈ 39,3 см² b) ≈ 37,7 мм² №2 a) $\pi-2$ №3 a) 32π см²; b) 4 м; c) 135°
№4 a) $\frac{2\pi}{3}$, π; b) $\frac{4\pi}{3}$, 3π №5 a) M(1; –1), $r = 2$; b) $0{,}5\pi$ c) $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$; $\frac{8\pi}{3}+\sqrt{3}$
№6 1) $x^2 + (y-2)^2 = 8$ 2) 4 3) $2\pi-4$; $6\pi+4$ №7 a) $\frac{75\pi+50}{4}$ c) $\frac{25\pi-48}{4}$ №8 ≈44,22 мм²
№9 ≈ 10,88 см² №11 ≈ 0,61 м²
s.92-93 №2 1) 1600м 2) 1900м №3 a) $y = -x+6$ №4 $(x-3)^2 + y^2 = 25$; b) (8; 0), (–2; 0), (0; 4), (0; –4); c)40 №5 a) (4; 3); b) 5π; c)$12{,}5\pi + 24$ d) $y = -\frac{4}{3}x$ №6 1→A; 2→B, D; 3→ C №7 $12{,}5\pi$ №8 a) 108°, b)144°, c) 30π см² №9 $16\sqrt{3} - 8\pi$ №10 a) $2\pi-\sqrt{3}$ см²
№11 ≈0,19 м² №12 $8\pi - 16$ №13 24 №14 ≈7540 см²

5. Уравнения. Системы уравнений

s. 94-96 №1 a)3; e) ±1 №2 b) 0;2 c) 0; ±2; e) 0; ±4; №3 1) 0; 4; –5, 3)–2; ± 0,5 10) ±3; 1,5 №4 a) 2 *деств. числа;* b) 1 *действ. корень*; c) 3 *действ. корень* №5 c) ±2 i) ±2; ±3 №6 –2; 1; 3; $a = -2$ №7 a)5;b) 1; ±3; c)±3; 1; –2; d)1; –2; 5; –3 №8 10 *лет* №12 a)± 3; d) ±2; ±1; f)1; 2; i)–5; –1 №13 a) ±1; ±2 b)3; ±1 c)±1; –2;–4; f)±1; g) 2; 3;
s. 97-99 №1 d)–1; 0; e) 2; f) 4 №2 a) 1;6 b)Ø; e)4; g)–3;0; h)–3; 3 №3 a) –0,5; 4
b) $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}$; c)1 d)1;8 e) 2;3;1;6 f) –0,5; –2; 1 №4 c) $r = \frac{A-P}{Pt}$; d) $q = \frac{rt}{r-t}$ №5 a) $k=2$
b) $k = -1$ №6 20 игр №8 a) 10; b) 8 №9 6 час., 3 час. №11 4 час., 12час. №12 a) 56;
b) если 4-х недел. средний бал- 52,5 №13 40 стр. №14 10₼, 12,25₼ №15 a)4 кг
s. 101-103 №1 a) ±4; b) ±13; c) 0; d) Ø №2 a)14; –6; c)1 №3 a) –1; 5; b) 2; 1
№5 a) –1; 2; g) ±3; h)–1;3; j) $\frac{2}{3}$; k) 2; $\frac{4}{3}$ №7 b) –1; 1,8; c) –2,4; 1; e) 1,1; f) 1,5
№10 b) ±1; ±3; d) ±2 №12 $|x-48| = 2{,}4$ №13 $|x-110| = 15$

s.104-105. №1 a) 13; b) –4; d) 3; e) –1,6; f) ±3; h) 8 №4 a) 9; b) 8; d) 3; e) 11
№5 a) 9; c) 1; e) 27 №6 a) 8; d) 1 №7 1) $\sqrt{h^2+25}$, $\sqrt{h^2+256}$; 2) 12 №8 8 км
s.106-113 №4 a) –12; b) –6 №7 $a = 3$; $b = 1$ №8 1→a; 2→c; 3→b №9 c) одно решен.
№10 b) (1;4),(4;1); d) (–3; 9), (2;4) №11 2) $y = 4-(x+3)^2$, $y = -x-1$ №15 b)(2;2), (1;3); c)(4;2), d)(–1;3), (–3;1); e)(6;3)(1;–2); h) (2;–1) №16 a) (2;2); b) (0;–1),(–1;0)
№17 a)(–1; 1),(3; 9); b) (1; 2),(–2;5); c) (2;–9),(3;–8); d) (1;–1),(9;3) №18 b) –2, (2;–1), (1;–2) №19 a) (–2;–4), (4; 2) №20 $b=4$, (0;4) и (3; 1) №21 c) два решен.: (–1; –4), (5; 20) d) одно реш.: (1; 1) №22 a)$b>7$; b)$b=-5$ №23 $k=-2$ və $k=10$ №24 1) $b<0$;2) $b=1$
№25 a) 15 сек. b) 375 *м* №26 $t_1 = 1$ сек, $t_2 = 3$ сек №28 d) (1; 3)
№30 a) (1; –2), (–1; 2); b) (0; 4), (–1,25; –1); c) $(\sqrt{3}; 0)$, $(-\sqrt{3}; 0)$, (2; 1), (–2; 1)
s.114-115 №1 24 №2 b)11;4 или 7;6 №3 1000₼, 3000₼ №4 6 *l*, 4 *l* №5 88кг,32кг №6 108см² №7 60см² №8 6 *см*, 9 *см* №9 20 мин, 30 мин. №10 15 день, 30 день №11 96 км/час, 64 км/час №12 56 сек.

s.116-117 №1 d)–0,5; –1;1 i)$\frac{3}{4}$; $\frac{4}{3}$ j)–1 №2 300г №3 1) (1; –4),(2;–1); 2)(3;3),(–3;–3) 3)(1;–2),(–1;2); 6)(3;–1); 9)(1;1) №4 4 км/час, 5 км/час №5 1→B, D, 2→A, 3→C
№6 6;8;10 №7 b) (2; 1),(–2;5); c)(3;2) №8 a) 1; 7; b) ±1; c)±1;±7 d)–2 №9 a)10; b)10
№10 1→C; 2→A,D; 3→B №11 4м/сек, 3 м/сек №13 длину на 20м, ширину на 2 м;
№14 a) $a = 0$; b) $a = \pm6$ №15 a) $-2<a<2$; b) $a = -2$

6. Многоугольники

s.119-122 №4 a) 20; 54 b) 10; 15 №5 a) 7; b) 12; №6 2) 540°; 3) 900°; №7 1) a) 12; b) 54; 2) a) 120°; 60°; b) 144°; 36° №9 1260° №10 $n = 10$ №11 a) 127°; c) 108° №12 140° №13 160°, 20° №14 1) 5; 2) 9; 3) 10; 4) 12 №15 1) 6; 2) 12; 3) 9; 4) 18 №17 b) 10 №18 24

s.124-130 №1 a) 30°; b) 7,5 №3 a) $x = 90^\circ$, $y = 60^\circ$; b) $x = 90^\circ$, $y = 50^\circ$; №4 96 см^2 №6 20 м; 22 м №7 b) AP=AR=3см, PB=BQ=7см, QC=RC=5см №8 a) $\sqrt{3}$ см, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см №9 2 см, 5 см №10 1) 3; 2) $3\frac{1}{3}$ №11 b) 2 №13 10 см №14 b) $6\frac{1}{4}$ №15 b) 8 см, 18 см №18 22см, 20см, 26см №19 a) $x=85$, $y=80$ №21 a) P=40, S=80 b) P=18, S=18 №22 130 см^2 №23 $2{,}4\pi$ см №24 6 см, $27\sqrt{3}$ см^2 №25 4,8см №27 a) $2\sqrt{3}$см, $\sqrt{3}$см №28 b) 10см, $5\sqrt{2}$см №29 a) $3\sqrt{3}$см, 6см №31 a) 3см b) $3\sqrt{3}$ см №32 $3\sqrt{3}$ см №33 36

s.133-136 №2 a) $9\sqrt{3}$ №4 a) 48 см^2; b) 24 см^2 c) 20 см^2 №5 a) 256; c) $288\sqrt{3}$ №6 c) $54\sqrt{3}$ №7 a) P = 42; S = $\frac{147\sqrt{3}}{2}$; c) P≈56; S=243 №8 b) $24\sqrt{3}$ м^2 №9 ≈889,92 см^2 №10 $3\sqrt{3}$ см №11 b) $3\sqrt{3}$ см №12 1,92м^2 №13 c) 9 №15 4 №16 b) 3) $x=84^\circ$ №17 18; №18 3

s. 137-138 №3 a) 126°; b) 45° №4 a) 35; b) 7; c) 1080° №5 36 см №7 a) 1:4 №8 4 см №9 c) 3,5 см, 12 см №10 $\sqrt{5}$ №11 $72\sqrt{3}$ см^2 №12 a) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; $\frac{\sqrt{3}}{18}$ c) 1; $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

7. Неравенства

s.140-142 №2 a) $[-4; 2)$; b) $(1; 10)$ c) $\varnothing$ №3 a) $[2; 4)$ b) $(-\infty; 4)$; c) $(-5; -1]$ №4 $(4; 8)$ №5 a) $(-4; 1)$; c) $(-10; 2)$ №6 a) $(-1; 8)$; c) $(-0{,}5; +\infty)$ №7 a) $[5; 7]$; c) $[-2; +\infty)$ №8 36 №9 не меньше 10,8 кг; не больше 32,4 кг №10 больше 3 м, *меньше* 9 м №11 a) $(-\infty; -3) \cup (5; +\infty)$; c) $(1; +\infty)$ №12 b) $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ d) $[-3; 6]$ №13 a) $(1; 3)$; b) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ №14 15 №15 b) при $a<10$

s.143-144 №1 a) $(-\infty; -3{,}2] \cup [2; +\infty)$; b) $[2; 3]$; c) $(-6; 0)$; h) $(-\infty; -2)$; i) $(1{,}5; +\infty)$ №3 b) $(-5; 3)$; c) $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$ №4 a) $[-5; 2]$; d) $(-\infty; 0)$ №5 $|x - 45| \le 30$ №6 a) голубой, b) зелён.

s.147-152 №2 a) $(-\infty; 2) \cup (5; +\infty)$; b) $(1; 3)$; c) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ №3 a) $(-\infty; -10] \cup [4; +\infty)$ d) $[-2{,}5; -1]$; e) $(-1{,}5; 1)$ №5 a) $(-\infty; +\infty)$; c) $\varnothing$ №7 b) $x = 7$; c) $\varnothing$; d) $(-\infty; +\infty)$ №8 a) $(1; 8)$; b) $(-\infty; -5) \cup (-1; +\infty)$; d) $[-4; 6]$; i) $x \neq 2$ №10 a) $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$ b) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ №11 a) $(-2{,}5; 2)$; b) $(1; 7)$ №12 $(-1; 6)$ №13 a) $(-\infty; -6] \cup [3; +\infty)$ b) $[1; 5]$; e) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$ №14 b) $[-5; -1]$ c) $(-\infty; 2{,}5] \cup [3; +\infty)$; d) $(2{,}5; 4)$ e) $(-\infty; -12) \cup (2; +\infty)$ №18 c) $(-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$; f) $(0; 4)$ №20 a) $[-5; 3]$; b) $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ №20 не меньше 6 см №23 больше 7 см, меньше 12см №24 c) $x > 56{,}6$ №25 a) 5 см; b) 4 см, 5 см №26 a) $t \in (1; 3)$ №27 от левого столба - с точки соотв. 50 м до 480 м №29 a) меньше 54 кг №30 b) меньше 2 м; c) меньше 3,437 м

s.153-156 №1 a) $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$; c) $[-4; 7]$; d) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; g) $(-\infty; -2) \cup (0; 2)$; h) $[-3; 0] \cup [3; +\infty)$; i) $(-1; 0) \cup (2; +\infty)$ №2 c) $[-4; -3] \cup [3; 5]$; f) $(-\infty; -5) \cup (-2; 0) \cup (2; 5)$; g) $(0; 4) \cup (4; 8)$; h) $[0; 2] \cup \{-5\}$; i) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; j) $\{-4\} \cup [5; +\infty)$ №3 a) 7; $(\infty; 5) \cup (7; +\infty)$; $(5; 7)$ №4 a) $(-7; 3)$; b) $(-\infty; -8) \cup (5; +\infty)$; e) $(-\infty; -5] \cup (5; +\infty)$ f) $[-5\frac{1}{3}; -2\frac{1}{2})$
№5 a) $(-\infty; -4] \cup [0; 4]$; b) $[2; 6]$; c) $(-\infty; -2) \cup (-1; 2)$ №6 1) a) $(-6; 6)$; b) $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$ №7 a) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; b) $(1; 2)$ №8 b) от 27,9 см до 28,6 см №9 b) при стоимостьи одного стола - 65₼ недельний доход становится максимум -1225₼, 55 стол

s. 158. №2 a) $[4; 13)$; b) $(2{,}5; +\infty)$; d) $[3; 19)$ №4 a) $(-5; -3] \cup [3; 5)$; b) $(-1; 1)$; c) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; d) $[1; 5]$ №5 a) $(9; +\infty)$; b) $[1; +\infty)$

s.159-160 №1 4000⌃-5500⌃ №6 c) $x \neq 0{,}5$; g) $\varnothing$; h) $(-\infty;+\infty)$ №7 9 и 11; 10 и 10
№8 a) 3;4;5;6 b) $x=4$ №9 d) $(-2;-1)\cup(1;3)$; e) $[-3;0)\cup[20;+\infty)$ f) $[-1;3)\cup(3;+\infty)$; h) $(-\infty;-3)\cup(-2;2)$; i) $(-\infty;-4)\cup[-2;5]$; №10 от 10-см до 12 см

№11 a) 41,25 м; b) $t\in[1;2]$ №12 b) $(-\infty;-1\frac{1}{6})\cup(\frac{1}{4};+\infty)$ №13 $a\in[0;4)$
№14 1→B; 2→C, D; 3→A №15 $a\in(-3;0)$ №16 a) 4 м; b) меньше 2 м

8. Векторы

s. 165-170. №1 a) $\langle 3;4\rangle$; 5 b) $\langle 12;5\rangle$; 13 c) $\langle -6;-8\rangle$;10 №2 a) $\langle 2;4\rangle$ c) $\langle 2;-4\rangle$
№4 1) a) (3; 6) b) (1; 3); 2) a) (5; 1) c) (5;–1) №6 a) 10 b) 4 c)20 №8 $\overrightarrow{PQ}=\langle 3;4\rangle |\overrightarrow{PQ}|=5$, $v=50$ км/час №10 a) $k=-0{,}5$; b) $k=-1{,}5$; c) $k=1$ №14 a) $5\sqrt{2}$, 45°; c) $\sqrt{2}$, 135°; d) 10, ≈127°
№15 b) 5; ≈127° №20 $\vec{v}=\langle 100\cos 25°;100\sin 25°\rangle$, $v_{\text{горз.}}\approx 90{,}63$км/час, $v_{\text{верт.}}\approx 42{,}26$ км/час
№21 a) $\langle 10\sqrt{2};10\sqrt{2}\rangle$ №22 a) ≈893,5 м/сек, b) $v_{\text{вос.}}\approx 37{,}5$ км/час, $v_{\text{сев.}}\approx 64{,}95$ км/час,
№23 $F_{\text{горз.}}\approx 159{,}35$ H, $F_{\text{верт.}}=103{,}48$H №24 a) $\vec{u}=\langle 2;2\sqrt{3}\rangle$, $\vec{v}=\langle -2;0\rangle$, $\vec{w}=\langle -3\sqrt{3};3\rangle$

s.172-178 №2 a) 220 H №6 a) 5; ≈143°, b) 500 м №7 300м, ≈36,9° №8 ≈41,23км, ≈14°
№10 b) ≈10,2 км/час, ≈78,7° №11 2) a) $\overrightarrow{AC}$, b) $\overrightarrow{DB}$ №13 a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{DB}$; c) $\overrightarrow{BD}$; d) $\overrightarrow{AD}$; e) $\overrightarrow{0}$ №16 a) $\langle 4;7\rangle$; $\sqrt{65}$; ≈60,3° №17 a) $\langle 650;80\rangle$; ≈ 654,9 км/час, ≈83° №18 a) 20 сек.; b) 20 м; c) ≈80,6° №19 500 м; ≈81,9° №20 ≈98 H

s.179-180 №1 a) $2\vec{u}$; c) $3\vec{u}+2\vec{v}$ №4 a) коллинеар №5 1) $\vec{v}-\vec{u}$; 2) $\vec{u}+\frac{3}{4}\vec{v}$ №6 ≈ 588 H, ≈ 96H

s.181 №1 a) $\langle -8;21\rangle$; b) $\langle -6;13\rangle$ №2 a) $\langle -6;-8\rangle$, 10; №4 b) $k=\pm 6$ №5 C(0;3) №6 M(3; 5)

s.183-184 №4 a) B′(1;2) C′(–6;3), $(x;y)\to(x-3;y)$ №5 a) L; b) K; c) H №7 a) F′(–1;–1), A′(1;3), S′(2;2), N′(2;0) №10 1) $\langle 5;3\rangle$, 2) A′$\langle 2;1\rangle$ №11 a) $\langle 4;4\rangle$; b) $\langle -9;-2\rangle$

s.186 №2 a) $x=7$, $y=36$, $z=3$ №4 a) $b=4$, $d=8$, $c=14$, $e=2$ №6 a) A; b) B; c) D
№7 a) A′(3;–2), B′(6;1),C\`(7;–5) №9 a) A′(–3;–5) b) D′(–3;–4) c) E′(1; 9)
№11 b) C(5;0) c) C(3;0)

s.188 №1 T(–2;5) №2 a) $\langle 4;-3\rangle$, 5 №3 $F_{\text{ü}}\approx 37{,}09$H, $F_{\text{ş}}\approx 14{,}98$H, №4 1) $\vec{v}=\langle 6;6\sqrt{3}\rangle$
№5 a) 50 сек. b) 65м c) ≈67,4° №8 F(2;8) №9 a) $\langle -4;2\rangle$; c) $\langle 2;-1\rangle$ №13 c) $A_3(-4;-1)$, $B_3(1;-1)$, $C_3(-4;-7)$ №14 5) B′(–1; 1), A′(3;–1), C′(–1;–4); 7) A′(1;5), B′(–3;–3), C′(7;–3)

9. Числовые последовательности

s.191-193 №5 1) a) $b_4=33$; b) $b_5=51$; 2) a) $c_n=27$, $n=7$ №6 a) $a_n=20$, $n=10$;
№7 16; $a_n=3n+1$ №8 b) $P_n=10n+10$ №12 a) 1; 5; 17; 53; 161 №13 a) 11; 34; 17; 52

s.195-204 №2 a) $x_1=9$, $x_3=1$ №6 b) $a_6=11$, $a_{15}=38$ №7 a) $a_1=-40$, $a_8=-19$ №8 11,2; 18,4; 25,6; 32,8 №10 a) $n\geq 15$, $a_n>0$ №11 a) $a_{14}=1{,}5$ первый 12 член; b) $a_{22}=-0{,}1$,
№14 b) $a_6=-23$, $d=-4$ №15 a) $a_4=\sqrt{48}$; b) 12; c) 13 №17 a) $d=3$, $a_1=12$, $a_6=27$
№18 a) 1; 4; 7 №21 152; 208 №26 $a_n=4n-1$ №27 46000 ⌃ №28 24 см²

№31 2) a) 6; b) 3 №32 b) $x=0$, $x=2$. №35 $a_2+a_8=2c$ №37 8 см №38 10 см
№39 b) 9см;12см; 15см №41 100 мг,150 мг, 200 мг, 250 мг, 300 мг

№43 b) 70; c) 92; f) 6 №44 a) 195; b) n^2-2n №45 $a_{11}=127$, $S_{11}=737$; b) 170; c) 100
№46 a) 3240; c) 1683; d) 2112 №47 a) 5000; b) 1426 №48 122,5 №50 1) a) 820; b) 10
№51 a) $a_1=1$; $a_2=9$ c) 5-ый член №52 4) $a_1=-11$, d =4,5 №53 a) $\frac{n(n+1)}{2}$; b) $n(n+1)$; c) n^2 №54 a) 8 b) 78 №56 78 №57 a) 19 №58 0,25 №59 c) ≈125,5 м

s.206-215 №3 a) $y_1 = 2$, $y_4 = 0{,}25$. №7 2) $q = 2$; 3) $q = 0{,}5$ №9 c) $b_4 = 12$, $b_5 = -24$
№10 c) –9 №12 a) $n = 5$; b) $n = 6$ №13 2) $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ №15 3; 6; 12; 24 №16 1,5 см
№17 3 см² №18 145800₼ №19 29282 м³ №20 72,9% №21 2^{72} №22 a) $b_n = 2^{11-n}$;
b) $n = 11$ №23 2) b) 6 №24 a) $x = 5$, $x = -15$ №25 b) 4 или –4 №28 a) 31,5; c) 3069
№29 1) a) 728; b) 5 №30 a) $b_1 = 3$ №31 a) 186 №32 364 №34 a) $n^3 + 1$ №35 a) $\frac{y^n - 1}{y - 1}$ $(y \neq 1)$ №37 a) 20736; b) 74416 №38 1364 №39 c) $\frac{27\sqrt{3}}{256}$ №40 c) 10-ая неделя

№42 a) 27 №44 e) $q = \frac{1}{3}$ №45 a) $\frac{1}{1-a}$; d) $\frac{1}{1+a^3}$ №47 24π см №48 27м

s.216-217 №2 27 №5 b) 84 №6 $S_4 = S_9 = 54$ №7 30,6 №8 $a_1 = 5$, $d = 4$ №9 b) 4 года
№10 b) 14 №11 $a=3$, $b=6$ или $a=27$, $b=18$ №12 1→D, 2→A, 3→B,C №13 a) 880 м;
b) 48 сек. №14 72 см² №16 12 №18 462 лот или 5913,6 г №19 a) $\frac{3}{4}$

10. Представление информации. Комбинаторика. Вероятность

s.220-227 №8 1) a) 7; 7; b) 10; 5 №9 b) ≈24 №12 b) 12% №14 274₼.
№15 1,29 ₼. №16 a) 26; b) ≈2,87 кг №17 b) 7
s.228-234 №1 c) 42 №2 125; 25-i №3 30 №4 24 №5 720 №6 96 №7 d) 2 №8 24 №9 2! · 7! №10 5! №11 5! · 3! №12 a) 3!· 5!; c)8! №13 a) 6; b) 12; c) 180; d) 840 №14 10
№15 a) 6 елементов, 3 елемента каждый повторяется 2 раза; №16 12 №17 a) 720
№18 a) ${}_8P_2 < {}_6P_3$ №19 b) 4; c) 3 №20 120 №21 360 №22 380 №23 60 №24 120; 100
№25 15 №26 a) 4; d) 20 №27 a) ${}_7P_3 > {}_7C_3$; №28 a)220; b)190 №31 a) *комбинезон*;
b) *пермутация*; №32 90 №33 6! №34 2520 №35 72 №36 56 №37 60 №38 2^{10}
№39 74 №40 30

s.237-240 №1 1) b) $\frac{3}{32}$; 2) b) $\frac{5}{6}$ №2 1) a) $\frac{1}{36}$; c) $\frac{1}{6}$; 2) a) $\frac{1}{42}$; b) $\frac{1}{49}$ №3 a) $\frac{1}{30}$; b) $\frac{1}{3}$
№4 24; $\frac{1}{4}$ №5 a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{9}$ №6 $\frac{1}{8}$ №7 a) 56; b)10; c) $\frac{5}{28}$ №8 $\frac{20}{21}$ №9 a) $\frac{33}{59}$; b) $\frac{7}{118}$; c) $\frac{45}{118}$
№10 $\frac{1}{28}$ №11 $\frac{1}{90}$ №12 $\frac{2}{5}$ №13 a) $\frac{1}{42}$ №14 $\frac{10}{39}$ №15 a) $\frac{2}{7}$; b) $\frac{1}{7}$; c) $\frac{4}{7}$ №16 a) $\frac{14}{95}$; c) $\frac{33}{95}$
№18 $\frac{10}{33}$ №19 b) $\frac{53}{89}$ №20 a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{1}{4}$ №21 $\frac{1}{24}$ №22 $\frac{1}{20}$

s.241-242 №1 медиана №4 22,8 №5 1) b) 11; c) 0,6; 2) b) $\frac{11}{30}$ №6 a) 12; b) в возрасте 33-38 (22 человека) c) 118; e) 36,3 №7 a) 500; c) 0,586 №8 b) $\frac{21}{22}$ №9 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{2}{51}$
№10 a)10; 0,9 c) 4; $\frac{3}{4}$ №11 b) $\frac{2}{13}$ №13 a) $n=3$, b) $n=9$, c) $n=6$

s.243-249 №1 0,9 кг №2 (2,5; 6,75) №3 a) 4; b) 34 №4 P = 36, S = 36 №5 15 №6 12
№7 $a_{10} = 43$, $S_{11} = 253$ №8 a) 12,5π №9 d) (1;5) №10 18,75 №11 2 №13 a) 30 saat. №14 20% №15 a) 135°; b) 5; c) 20 №16 a) 72; b) 1 №17 b) 7час №18 1) 10; 2) b) $\frac{16}{45}$
№19 P=28 см, S=24 см², №20 12,8 №24 a) (1:0); b) 2; c) 4π №25 4 №26 60
№27 P=30; S=36 №29 b) $м=1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ №30 b) 1% уменш. №32 a) $c \neq \pm 1$;
b) $c = 1$; c) $c = -1$ №35 8 букетов №37 $6\sqrt{2}$ №38 ≈58,8м/мин №40 1) 5π см
№44 24 см² №45 16 №57 9 *час* №61 27 №66 45% №67 35 №69 2 км/час
№71 пункт C, 28%, 35 верный ответ №72 c) (5; 0), (3; 4) №73 7,2 см²

Buraxılış məlumatı

RİYAZİYYAT 9

Ümumtəhsil məktəblərinin 9-cu sinfi üçün
Riyaziyyat fənni üzrə

Dərslik

Rus dilində

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər: **Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova**
Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
İlham Heydər oğlu Hüseynov

Məsləhətçi: **Çingiz Qacar**

İxtisas redaktoru: **Əbdürrəhim Quliyev**
Tariyel Talıbov

Tərcüməçilər **Güllü Həsənova**
Əlixan Qarayev

Kompüter tərtibatı: **Fuad Qəhrəmanov**
Bədii tərtibatı: **Leyla Bəşirova**
Korrektoru: **Tərlan Qəhrəmanova**

Hesab-nəşriyyat həcmi: 14,5. Fiziki çap vərəqi: 16.
Formatı: 70×100 1/16. Səhifə sayı: 256.
Şriftin adı və ölçüsü: Calibri, 11-12 pt. Ofset kağızı. Ofset çapı.
Sifariş __ . Tiraj 11157 Pulsuz. Bakı – 2020.

Əlyazmanın yığıma verildiyi və çapa imzalandığı tarix: 28.08.2020

Çap məhsulunu hazırlayan:
"Radius" nəşriyyatı (Bakı, Binəqədi şossesi, 53)

Çap məhsulunu istehsal edən:
Çaşıoğlu Elm-İstehsalat MMC (Bakı, M.Müşfiq küç., 2A)

PULSUZ

Əziz məktəbli!

Bu dərslik sizə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir. O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sizə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, siz də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaqsınız, təmiz və səliqəli saxlayacaqsınız ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşınız ondan sizin kimi rahat istifadə edə bilsin.

Sizə təhsildə uğurlar arzulayırıq!