МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

7

Гюнай Гусейнзаде
Севда Исмайлова
Заур Исаев
Магомед Керимов
Агшин Абдуллаев

МАТЕМАТИКА

7

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по предмету Математика для 7-х классов
общеобразовательных заведений

Bu nəşrlə bağlı irad və təkliflərinizi **trm@arti.edu.az** və **derslik@edu.gov.az** elektron ünvanlarına göndərməyiniz xahiş olunur.
Əməkdaşlığınız üçün əvvəlcədən təşəkkür edirik!

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1 КОМПОНЕНТЫ УЧЕБНИКА

В учебный комплект по предмету математика для 7-го класса входят:
- Учебник
- Методическое пособие
- Рабочая тетрадь

В учебнике отражены учебные материалы, предназначенные непосредственно для ученика и реализующие соответствующие содержательные стандарты, установленные в куррикулуме.

Учебник состоит из двух частей и содержит всего 10 разделов. Соответствующие разделы имеют титульную страницу, и каждый раздел заканчивается заданиями, предназначенными для обобщающего урока. Каждая тема в разделе начинается с новой страницы. Все вопросы и задания каждого урока пронумерованы.

Методическое пособие, предназначенное для учителей, состоит из введения (общей части) и комментария уроков. Во введении описываются содержательная структура и методологическая концепция учебника. Они представлены ниже:
- Основные принципы обучения математике в VII классе.
- Организация обучения математике по линиям деятельности.
- Организация уроков решения задач.
- Годовое планирование.
- Таблица реализации содержания разделов и тем по стандартам.
- Организация обобщающих уроков.

В начале каждого раздела даются обзор соответствующего учебного материала и карта содержания раздела по компонентам учебника (раздел, урок, стандарт, страница и др.) В изложении каждого урока должны отражаться нижеследующие пункты:
- Результаты обучения по стандартам.
- Необходимые для урока ресурсы (наглядные пособия и электронные источники).
- Рекомендации по мотивации (побуждение).
- Рекомендации по технологии обучения.
- Рекомендации по преодолению трудностей, с которыми обычно сталкиваются ученики в процессе обучения.
- Рекомендации по решению задач и выполнению заданий.
- Рекомендации по дифференцированному обучению.
- Рекомендации по организации уроков решения задач.
- Критерии и средства формативного оценивания.
- Организация обобщающих уроков по разделу

Рабочая тетрадь. Содержит примеры и задачи для более глубокого понимания учениками содержания учебника. Рабочая тетрадь имеет особое значение для усовершенствования приобретенных знаний и формирования практических навыков. Соответственно деятельности ученика в рабочей тетради могут быть осуществлены формативное оценивание, мониторинг учебного процесса обучения и контроль за успеваемостью учащихся.

2 СТРУКТУРА УЧЕБНИКА И КОНЦЕПЦИЯ ОБУЧЕНИЯ

Модель изучения тем основана на модели: “Изучай → Закрепляй → Применяй”.

Изучай – приобретение знаний и навыков.

Закрепляй – усовершенствование приобретенных новых знаний и навыков с помощью практических заданий, упражнений, проектов и другими способами.

Применяй – применение полученных знаний и навыков для решения постепенно усложняющихся задач и математического моделирования.

Каждая тема преподается на основе пятиэтапного цикла обучения. Тема начинается с решения исследовательско-дискуссионной задачи и заканчивается применением полученных новых знаний для решения задач.

Соответствие модели обучения и рубрик в учебнике:

Изучай

- **1. Проблемно-ориентированная деятельность**(*Problem-Centered Hands-on Activity).* В учебнике дается под заголовком "ИССЛЕДОВАНИЕ-ОБСУЖДЕНИЕ".
- **2. Объяснение темы.** В учебнике дается под заголовком “ИЗУЧЕНИЕ”.

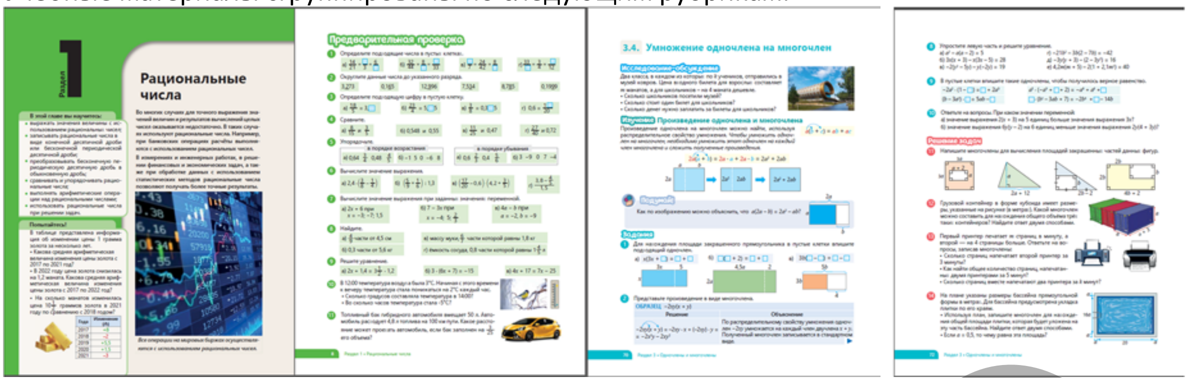
Закрепляй

- **3. Слушай, анализируй, объясняй и применяй** (работа с учителем). В учебнике дается под заголовком “ОБРАЗЕЦ”.
- **4. Ваша очередь.** В учебнике дается под заголовком “ЗАДАНИЯ”.

Применяй

- **5. Решай задачи.** В учебнике дается под заголовком “РЕШНИЕ ЗАДАЧ”.

Учебные материалы сгруппированы по следующим рубрикам:



Функции рубрик обучения, представленных в учебнике, разъясняются в разделе “Познакомимся с учебником”.

Первая страница раздела. Во вводной части разделов даются начальные представления о темах, которые будут изучены, и их применении. На этой странице представлены знания и навыки, которые будут приобретены в рамках рубрики «В этой главе вы научитесь». Задача, представленная под заголовком «Попытайтесь!», предназначена для объяснения ученикам важности навыков, которые они приобретут в разделе. Даже если не решать данную задачу, можно организовать дискуссию о стратегии решения задачи и требуемых знаниях. В конце раздела приводится решение этой задачи под заголовком «Решение исходной задачи».

Предварительная проверка. Предназначена для повторения полученных учащимися в младших классах знаний и навыков, связанных с материалами, которые будут изучены в разделе, и может быть использована в целях диагностического оценивания.

Исследование-обсуждение. Изучение каждой темы начинается с деятельности, которая позволяет сформировать важные математические мысли, помогает усовершенствовать навыки решения задач. Эта деятельность осуществляется путем использования учениками конкретных или пиктуральных моделей и путем поощрения учеников за более активное участие на уроке. В деятельности ученики могут участвовать и в группах. В связи с этим в методическом пособии для учителя будут даны краткие рекомендации и объяснения того, как осуществить проблемно-ориентированную деятельность в классе, какие вопросы и инструкции (подсказки) использовать для того, чтобы ученики могли правильно мыслить и координировать свои действия, а также обобщать результаты своей деятельности

Изучение. Объяснение новых знаний и информации. После проблемно-ориентированной деятельности во время разъяснения определенной темы будут использованы конкретные и пиктуральные модели, соответствующие “конкретно-пиктурально-абстрактному” подходу. В одной теме может быть несколько материалов для изучения. После каждого учебного материала дается задание с образцом.

Исследуется, какие преимущественно ошибки допускают учащиеся в ходе деятельности, и даются необходимые рекомендации и объяснения для их устранения. В процессе этого в учебнике и рабочей тетради даются конкретные рекомендации по фокусированию внимания на ключевых темах, базовой информации, правильном мышлении учеников, частых ошибках или недоразумениях.

Основываясь на “конкретно-пиктурально-абстрактном” подходе в процессе изучения новых понятий, ученики должны иметь возможность использовать несколько моделей, соответствующих одному и тому же понятию. С другой стороны, стратегия scaffolding (“строительные леса”) заключается в том, чтобы адаптировать учебный процесс к индивидуальным потребностям учеников. Другими словами, цель состоит в том, чтобы постепенно научить учеников лучше понимать и в итоге сделать их более независимыми в процессе урока.

Образец. Прилагаются примеры и соответствующие задачи, которые обобщают математические знания и навыки, составляющие основу объяснения темы или деятельности. Ожидается, что ученик сначала проанализирует их (или выслушает объяснение учителя), а затем объяснит. Далее предусмотрены аналогичные задания, чтобы ученики могли применить полученные знания.

Внимание. Важные знания или навыки, связанные с темой.

Запомни. Особо важные математические правила.

Из истории математики. Интересные факты из истории математики, связанные с темой.

Задания. Изучив задание, данное в виде образца, ученикам дают несколько заданий, которые предусмотрены для закрепления и приобретения соответствующих знаний и навыков. Это также поможет учителю провести формативное оценивание. Методическое пособие отражает рекомендации для заданий, предусмотренных при дифференцированном обучении. Так, ученикам, показавшим низкий результат во время самостоятельной работы, дается повторное объяснение, а ученикам, показавшим высокий результат, даются дополнительные упражнения и задания.

Решение задач. Предусмотрено решение нескольких задач по каждой теме. Навыки решения задач формируются в виде поэтапного решения поставленной задачи.

Ученикам необходимо предоставить информацию о новых блоках, добавленных в учебник 7-го класса, и их функциях.

Исправь ошибку! Этот раздел предназначен для устранения наиболее распространенных ошибок, которые ученики допускают при изучении нового материала, а также возникающих у них ошибочных представлений. В этих заданиях допущенные ошибки сначала определяются учениками индивидуально, а затем обсуждаются всем классом.

Математический калейдоскоп. В конце каждого раздела представлены углубленные и нестандартные задачи. Эти задания, как правило, решаются простыми методами, основанными на математической логике. Подобные задания способствуют повышению интереса учеников к математике, создают основу для развития более широкого, интегративного и системного мышления. Они также усиливают навыки наблюдения и анализа и побуждают применять математические знания творчески.

3 ОРГАНИЗАЦИЯ УРОКОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Решение задач является неотъемлемой частью изучения математики. Ученики должны заниматься решением задач, способ решения которых неясен и которые требуют применения не только обычных математических действий, но и более творческого подхода. В стандартах, подтвержденных *Национальным советом учителей математики (National Consil of Teachers of Mathematics), указано: “Решение задачи является не только основной целью математического обучения, но также является его основным средством. Для учеников должны создаваться условия, чтобы они составляли задачи и решали их, в основном сложные задачи, которые требуют больших усилий при решении” (NTCM, Principles Standards and for School Mathematics, p.52.)*

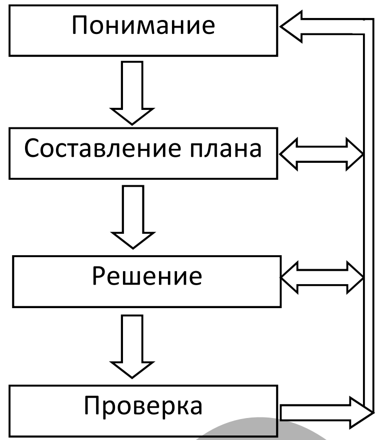
Американский исследователь в области образования Анна Ньюман (Anne Newman), которая проанализировала ошибки учеников во время решения задач, разделила эти ошибки на 5 этапов:

Характер ошибки	Пояснения	Рекомендации ученикам по устранению ошибок
Чтение	Математические термины и символы не прочитаны должным образом.	Повторно прочтите вопрос.
Понимание	Задача полностью не осознана.	Что требуется найти в задаче?
Преобразования	Неправильно выполнены преобразования.	Как вы думаете решить задачу?
Математические процедуры и факты	Допускаются ошибки в математических вычислениях.	Как бы вы вычислили результат?
Кодирование	Хотя решение найдено, ответ задачи указан неверно.	Повторно решив, напишите свой ответ в нижней строке.

Newman, M. A. (1977). *An analysis of sixth-grade pupils’ errors on written mathematical tasks. Victorian Institute for Educational Research Bulletin, 39*, 31-43.

Newman, M. A. (1983). *Strategies for diagnosis and remediation*. Sydney: Harcourt, Brace Jovanovich.

Основываясь на теории известного математика, популяризатора науки и исследователя в области обучения математике Джорджа Пойа (George Pólya, How to Solve It, 2nd ed., Princeton University Press, 1957), решение задачи проходит в 4 этапа:



1. Понять задачу (понимание).

Так как учителя часто не воспринимают этот этап всерьез, ученики испытывают трудности даже при решении самых простых задач. Для того чтобы постепенно устранить это затруднение, ученикам можно задать разные вопросы:

• Понятно ли значение всех слов в условии задачи?

• Что требуется найти и показать?

• Как своими словами вы можете пересказать условие задачи?

• Как вы представляете себе условие задачи?

• Как можно представить задачу – схемой или рисунком, чтобы лучше понять ее?

Можно также использовать краткую форму записи, таблицу, схему, рисунок и другие формы представления задачи, чтобы лучше понять ее условие.

2. Составить план решения задачи.

Можно использовать разные методы для решения одной и той же задачи. Лучший способ для формирования навыка выбора правильного метода – решать больше задач. С накоплением опыта ученики смогут выбрать более легкую стратегию для решения задачи. Основные стратегии решения задач (Alfred S. Posamentier & Stephen Krulik, “Problem Solving Mathematics”, Corwin, 2009) следующие:

• Предположение и проверка (Guess and Check) – эта стратегия предусматривает, что предположив, можно проверить ответ и усовершенствовать решение.

• Практическая деятельность (Act it Out) – практическая деятельность с применением пособий.

• Рисование (Draw) – нарисовать рисунки и диаграммы.

• Составить список и построить таблицу (Make a List and Table).

• Логическое мышление (Think) – логически мыслить, используя предшествующие знания..

3.Решение задачи.

Этот этап относительно проще этапа составления плана. Ученикам нужно объяснить, что, если выбранный метод не помогает, надо его изменить. Не надо избегать этого: даже самые выдающиеся математики вынуждены были менять метод решения, если не получалось решить задачу.

4. Проверить ответ.

Этап проверки может быть очень полезным для учеников. При обсуждении решения задачи выявляются ошибки и определяется, какой метод более эффективен для решения такого типа задач.

В целом очень важно различать понятия “решение задачи” и “обучение решению задач”. С этой точки зрения рекомендуется, чтобы во время учебного процесса рассматривался четырехфазный познавательный процесс решения каждой задачи (понимание - составление плана - решение - проверка) как подход к трехэтапному познавательному процессу деятельности ученика. Согласно Дж. Мейсону, Л. Бертону и К. Стейси (2010), обучение решению задач выполняется в три этапа: привлечение, «мозговой штурм» и обсуждение (Mason J., Burton L., & Stacey K. “Thinking Mathematically”, 2nd. ed., New York, Pearson, 2010).

1. Этап привлечения создает основу для решения задач, поэтому нужно уделить ему достаточно времени. На этом этапе важно удостовериться в том, что ученик полностью понял условие задачи и что от него требуется найти в ней. Для этого учитель руководствуется нижеследующими вопросами для размышления:

• Что я знаю?

• Что хочу сделать?

• Что я могу сделать?

Чтобы лучше понять условие задачи, можно также использовать краткую форму записи, таблицу, схемы, рисунки и другие изображения. Обычно этот этап проходит с активным участием учеников. Чтобы лучше понять и легко решить задачу, они моделируют одну и ту же задачу разными способами. Это могут быть ролевая игра, сценки, поставленные по разным сценариям, или практическая деятельность.

2. Решение задачи («мозговой штурм») – служит для построения плана и решения задачи. Учитель следит за выбором учениками правильной стратегии. Он создает условия для учеников, чтобы они могли решить задачу разными способами, и еще больше поощряет учеников с отличающимся мышлением. Для

этого им дается возможность свободно использовать разные манипулятивы (соединяющиеся кубики, счетные палочки, конструктор, магниты, десятичные кубы, рамки с десятью клетками и т.д.)

3. Обсуждение – служит для проверки и обобщения. На этом этапе:

• Проверяется правильность решения.

• Обсуждаются ключевые идеи (key ideas) и важные этапы процесса решения (рефлексивное мышление).

• Обобщаются задача и её решение.

В методическом пособии в объяснении способа решения относительно сложных задач даны рекомендации для этапа «Побуждения».

4 УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ПО МАТЕМАТИКЕ

Государственные стандарты и программы (куррикулум) общеобразовательного уровня служат для формирования у учеников математического мышления и навыков математического оценивания.

В 7-м классе предмет математикам преподается по 4 стандартным линиям, соответственно программе дисциплины: *числа и действия, алгебра и функции, геометрия, статистика и вероятность*. Основная цель всех содержательных линий – формирование у учеников навыков решения задач.

При организации обучения по содержательным линиям предполагается углубить и расширить знания и навыки от простых к сложным. Наряду с этим каждые знание и навык, входящие в содержание предмета, не ограничиваясь только данной содержательной линией, будут связываться и с другими содержательными линиями.

5 СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ СТАНДАРТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ 7-ГО КЛАССА

Содержательная линия 1. ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ

Стандарт 7-1.1. Понимает понятие рационального числа, выполняет упорядочение рациональных чисел.

7-1.1.1. Объясняет рациональное число как отношение двух целых чисел, где знаменатель не равен нулю.

7-1.1.2. Преобразует бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную и наоборот.

7-1.1.3. Показывает на числовой оси точку, соответствующую заданному рациональному числу.

7-1.1.4. Сравнивает и упорядочивает рациональные числа.

7-1.1.5. Находит абсолютную и относительную погрешности результатов измерений.

Стандарт 7-1.2. Выполняет действия с рациональными числами и применяет их при решении задач.

7-1.2.1. Выполняет арифметические действия с рациональными числами.

7-1.2.2. Находит степень рационального числа с натуральным показателем, применяет свойства степеней.

7-1.2.3. Вычисляет значение числовых выражений.

7-1.2.4. Использует действия с рациональными числами при решении задач.

7-1.2.5. Решает простые задачи на сложные проценты.

Содержательная линия 2. АЛГЕБРА И ФУНКЦИИ

Стандарт 7-2.1. Понимает понятие многочлена, выполняет действия с многочленами (сложение, вычитание, умножение), упрощает их и находит значения.

7-2.1.1. Объясняет понятия одночлена и многочлена.

7-2.1.2. Упрощает многочлен.

7-2.1.3. Находит значение многочлена при заданных значениях переменных.

7-2.1.4. Складывает, вычитает и умножает многочлены.

7-2.1.5. Применяет формулы сокращенного умножения.

7-2.1.6. Разлагает многочлен на множители.

Стандарт 7-2.2. Изучает и решает линейные уравнения и системы линейных уравнений, определяет рациональные значения переменной, удовлетворяющие простым неравенствам методом подбора.

7-2.2.1. Изучает и решает линейное уравнение с одной переменной.

7-2.2.2. Решает простые уравнения с модулем.

7-2.2.3. Решает систему линейных уравнений с двумя переменными различными способами.

7-2.2.4. Решает задачи, применяя линейные уравнения с одной переменной и системы с двумя переменными.

7-2.2.5. Определяет рациональные значения переменной, удовлетворяющие простым неравенствам.

Стандарт 7-2.3. Выражает линейные зависимости между величинами в виде функции и объясняет её смысл.

7-2.3.1. Демонстрирует первоначальные представления о понятии функции.

7-2.3.2. Объясняет понятие линейной функции.

7-2.3.3. Строит график линейной функции.

Содержательная линия 3. ГЕОМЕТРИЯ

Стандарт 7-3.1. Изучает взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей, применяет свойства углов в окружности.

7-3.1.1. Объясняет понятие касательной и секущей окружности.
7-3.1.2. Изучает взаимное расположение двух окружностей.
7-3.1.3. Применяет свойства углов в окружности.

Стандарт 7-3.2. Вычисляет длину дуги и площадь сектора круга.

7-3.2.1. Вычисляет длину дуги окружности.
7-3.2.2. Вычисляет площадь сектора круга.

Стандарт 7-3.3. Объясняет свойства четырехугольников и треугольников.

7-3.3.1. Различает выпуклые и вогнутые четырехугольники.
7-3.3.2. Применяет свойства внутренних и внешних углов четырехугольников.
7-3.3.3. Применяет свойства параллелограмма, ромба, прямоугольника, квадрата и трапеции.
7-3.3.4. Объясняет свойства средней линии треугольника и трапеции.
7-3.3.5. Применяет свойства медиан и высот треугольника.

Стандарт 7-3.4. Записывает уравнение прямой и строит ее на координатной плоскости.

7-3.4.1. Объясняет понятие углового коэффициента, применяет его свойства.
7-3.4.2. Записывает уравнение прямой и строит ее на координатной плоскости.

Стандарт 7-3.5. Решает задачи на движение.

7-3.5.1. Применяет понятие вращения на координатной плоскости.
7-3.5.2. Объясняет понятие симметрии относительно точки, строит фигуру, симметричную данной относительно точки.

Стандарт 7-3.6. Строит фигуры.

7-3.6.1. С помощью циркуля и линейки строит серединный перпендикуляр к отрезку, биссектрису угла.

Стандарт 7-3.7. Вычисляет площадь поверхности и объем пространственных фигур.

7-3.7.1. Вычисляет площадь поверхности шара.
7-3.7.2 Вычисляет объем шара.

Содержательная линия 5. СТАТИСТИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ

Стандарт 7-5.1. Собирает, описывает и анализирует данные.

7-5.1.1. Строит и интерпретирует таблицу частот для не сгруппированных данных.
7-5.1.2. Строит и интерпретирует таблицу относительных частот для не сгруппированных данных.
7-5.1.3. На основе таблицы частот вычисляет среднее арифметическое, медиану и моду.

Стандарт 7-5.2. Находит теоретическую и экспериментальную вероятность события.

7-5.2.1. Описывает событие как подмножество пространства элементарных исходов.
7-5.2.2. Вычисляет вероятность события.
7-5.2.3. Объясняет аксиомы теории вероятностей.
7-5.2.4. Объясняет простые следствия аксиом.

*Примечание: Так как содержательная линия 4. ИЗМЕРЕНИЕ в 5–11-х классах преподаётся интегративно вместе с другими линиями содержания, она не рассматривается как отдельная линия.

Таблица реализации содержательных стандартов за I полугодие

Разделы и темы / Стандарты содержания	I раздел						II раздел				III раздел					IV раздел					V раздел					
	1.1	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**	**4.5**	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**	**5.5**	**5.6**
Содержательная линия 1. Числа и действи																										
Стандарт 7-1.1. Понимает понятие рационального числа, выполняет упорядочение рациональных чисел.																										
7-1.1.1. Объясняет рациональное число как отношение двух целых чисел, где знаменатель не равен нулю.	✓		✓																							
7-1.1.2. Преобразует бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную и наоборот.		✓				✓																				
7-1.1.3. Показывает на числовой оси точку, соответствующую заданному рациональному числу.	✓		✓	✓																						
7-1.1.4. Сравнивает и упорядочивает рациональные числа.			✓																							
7-1.1.5. Находит абсолютную и относительную погрешности результатов измерений.																										
Стандарт 7-1.2. Выполняет действия с рациональными числами и применяет их при решении задач.																										
7-1.2.1. Выполняет арифметические действия с рациональными числами.				✓	✓	✓	✓	✓	✓																	
7-1.2.2. Находит степень рационального числа с натуральным показателем, применяет свойства степеней.							✓	✓	✓																	
7-1.2.3. Вычисляет значение числовых выражений.				✓	✓	✓																				
7-1.2.4. Использует действия с рациональными числами при решении задач.				✓	✓	✓				✓																
7-1.2.5. Решает простые задачи на сложные проценты.										✓																
Содержательная линия 2. АЛГЕБРА И ФУНКЦИИ																										
Стандарт 7-2.1. Понимает понятие многочлена, выполняет действия с многочленами (сложение, вычитание, умножение), упрощает их и находит значения.																										
7-2.1.1. Объясняет понятия одночлена и многочлена.											✓	✓														
7-2.1.2. Упрощает многочлен.												✓	✓		✓											
7-2.1.3. Находит значение многочлена при заданных значениях переменных.											✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓						

7-2.1.4. Складывает, вычитает и умножает многочлены.												✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓								
7-2.1.5. Применяет формулы сокращенного умножения.																✓	✓	✓		✓						
7-2.1.6. Разлагает многочлен на множители.																			✓	✓						
Стандарт 7-2.2. Изучает и решает линейные уравнения и системы линейных уравнений, определяет рациональные значения переменной, удовлетворяющие простым неравенствам методом подбора.																										
7-2.2.1. Изучает и решает линейное уравнение с одной переменной.																										
7-2.2.2. Решает простые уравнения с модулем.																										
7-2.2.3. Решает систему линейных уравнений с двумя переменными различными способами.																										
7-2.2.4. Решает задачи, применяя линейные уравнения с одной переменной и системы с двумя переменными.																										
7-2.2.5. Определяет рациональные значения переменной, удовлетворяющие простым неравенствам.																										
Стандарт 7-2.3. Выражает линейные зависимости между величинами в виде функции и объясняет её смысл.																										
7-2.3.1. Демонстрирует первоначальные представления о понятии функции.																										
7-2.3.2. Объясняет понятие линейной функции.																										
7-2.3.3. Строит график линейной функции.																										
Содержательная линия 3. ГЕОМЕТРИЯ																										
Стандарт 7-3.1. Изучает взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей, применяет свойства углов в окружности.																										
7-3.1.1. Объясняет понятие касательной и секущей окружности.																										
7-3.1.2. Изучает взаимное расположение двух окружностей.																										
7-3.1.3. Применяет свойства углов в окружности.																										
Стандарт 7-3.2. Вычисляет длину дуги и площадь сектора круга.																										
7-3.2.1. Вычисляет длину дуги окружности.																										
7-3.2.2. Вычисляет площадь сектора круга.																										
Стандарт 7-3.3. Объясняет свойства четырехугольников и треугольников.																										
7-3.3.1. Различает выпуклые и вогнутые четырехугольники.																						✓				
7-3.3.2. Применяет свойства внутренних и внешних углов четырехугольников.																						✓				
7-3.3.3. Применяет свойства параллелограмма, ромба, прямоугольника, квадрата и трапеции.																							✓	✓		✓
7-3.3.4. Объясняет свойства средней линии треугольника и трапеции.																					✓				✓	✓
7-3.3.5. Применяет свойства медиан и высот треугольника.																									✓	

Стандарт 7-3.4. Записывает уравнение прямой и строит ее на координатной плоскости.																										
7-3.4.1. Объясняет понятие углового коэффициента, применяет его свойства.																										
7-3.4.2. Записывает уравнение прямой и строит ее на координатной плоскости.																										
Стандарт 7-3.5. Решает задачи на движение.																										
7-3.5.1. Применяет понятие вращения на координатной плоскости.																										
7-3.5.2. Объясняет понятие симметрии относительно точки, строит фигуру, симметричную данной относительно точки.																										
Стандарт 7-3.6. Строит фигуры.																										
7-3.6.1. С помощью циркуля и линейки строит серединный перпендикуляр к отрезку, биссектрису угла.																										

Разделы и темы	I раздел						II раздел				III раздел					IV раздел					V раздел					
Стандарты содержания	**1.1**	**1.2**	**1.3**	**1.4**	**1.5**	**1.6**	**2.1**	**2.2**	**2.3**	**2.4**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**3.4**	**3.5**	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**4.4**	**4.5**	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**5.4**	**5.5**	**5.6**
Стандарт 7-3.7. Вычисляет площадь поверхности и объем пространственных фигур.																										
7-3.7.1. Вычисляет площадь поверхности шара.																										
7-3.7.2 Вычисляет объем шара.																										
Содержательная линия 5. СТАТИСТИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ																										
Стандарт 7-5.1. Собирает, описывает и анализирует данные.																										
7-5.1.1. Строит и интерпретирует таблицу частот для не сгруппированных данных.																										
7-5.1.2. Строит и интерпретирует таблицу относительных частот для не сгруппированных данных.																										
7-5.1.3. На основе таблицы частот вычисляет среднее арифметическое, медиану и моду.																										
Стандарт 7-5.2. Находит теоретическую и экспериментальную вероятность события.																										
7-5.2.1. Описывает событие как подмножество пространства элементарных исходов.																										
7-5.2.2. Вычисляет вероятность события.																										
7-5.2.3. Объясняет аксиомы теории вероятностей.																										
7-5.2.4. Объясняет простые следствия аксиом.																										

Таблица реализации содержательных стандартов за II полугодие

Разделы и темы / Стандарты содержания	VI раздел			VII раздел					VIII раздел								IV раздел			V раздел		
	6.1	**6.2**	**6.3**	**7.1**	**7.2**	**7.3**	**7.4**	**7.5**	**8.1**	**8.2**	**8.3**	**8.4**	**8.5**	**8.6**	**8.7**	**8.8**	**9.1**	**9.2**	**9.3**	**10.1**	**10.2**	**10.3**
Содержательная линия 1. Числа и действи																						
Стандарт 7-1.1. Понимает понятие рационального числа, выполняет упорядочение рациональных чисел.																						
7-1.1.1. Объясняет рациональное число как отношение двух целых чисел, где знаменатель не равен нулю.																						
7-1.1.2. Преобразует бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную и наоборот.																						
7-1.1.3. Показывает на числовой оси точку, соответствующую заданному рациональному числу.																						
7-1.1.4. Сравнивает и упорядочивает рациональные числа.																						
7-1.1.5. Находит абсолютную и относительную погрешности результатов измерений.																✓						
Стандарт 7-1.2. Выполняет действия с рациональными числами и применяет их при решении задач.																						
7-1.2.1. Выполняет арифметические действия с рациональными числами.																						
7-1.2.2. Находит степень рационального числа с натуральным показателем, применяет свойства степеней.																						
7-1.2.3. Вычисляет значение числовых выражений.																✓						
7-1.2.4. Использует действия с рациональными числами при решении задач.																						
7-1.2.5. Решает простые задачи на сложные проценты.																						
Содержательная линия 2. АЛГЕБРА И ФУНКЦИИ																						
Стандарт 7-2.1. Понимает понятие многочлена, выполняет действия с многочленами (сложение, вычитание, умножение), упрощает их и находит значения.																						
7-2.1.1. Объясняет понятия одночлена и многочлена.																						
7-2.1.2. Упрощает многочлен.																						
7-2.1.3. Находит значение многочлена при заданных значениях									✓													

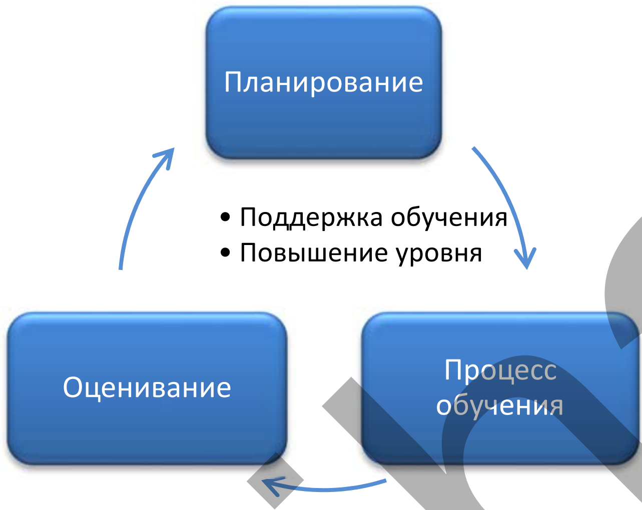
переменных.																						
7-2.1.4. Складывает, вычитает и умножает многочлены.																						
7-2.1.5. Применяет формулы сокращенного умножения.																						
7-2.1.6. Разлагает многочлен на множители.																						
Стандарт 7-2.2. Изучает и решает линейные уравнения и системы линейных уравнений, определяет рациональные значения переменной, удовлетворяющие простым неравенствам методом подбора.																						
7-2.2.1. Изучает и решает линейное уравнение с одной переменной.									✓													
7-2.2.2. Решает простые уравнения с модулем.														✓								
7-2.2.3. Решает систему линейных уравнений с двумя переменными различными способами.										✓	✓	✓	✓									
7-2.2.4. Решает задачи, применяя линейные уравнения с одной переменной и системы с двумя переменными.											✓	✓	✓									
7-2.2.5. Определяет рациональные значения переменной, удовлетворяющие простым неравенствам.															✓							
Стандарт 7-2.3. Выражает линейные зависимости между величинами в виде функции и объясняет её смысл.																						
7-2.3.1. Демонстрирует первоначальные представления о понятии функции.	✓	✓	✓																			
7-2.3.2. Объясняет понятие линейной функции.			✓																			
7-2.3.3. Строит график линейной функции.			✓																			
Содержательная линия 3. ГЕОМЕТРИЯ																						
Стандарт 7-3.1. Изучает взаимное расположение прямой и окружности, двух окружностей, применяет свойства углов в окружности.																						
7-3.1.1. Объясняет понятие касательной и секущей окружности.				✓		✓																
7-3.1.2. Изучает взаимное расположение двух окружностей.				✓																		
7-3.1.3. Применяет свойства углов в окружности.					✓	✓																
Стандарт 7-3.2. Вычисляет длину дуги и площадь сектора круга.																						
7-3.2.1. Вычисляет длину дуги окружности.							✓															
7-3.2.2. Вычисляет площадь сектора круга.							✓															
Стандарт 7-3.3. Объясняет свойства четырехугольников и треугольников.																						
7-3.3.1. Различает выпуклые и вогнутые четырехугольники.																						
7-3.3.2. Применяет свойства внутренних и внешних углов четырехугольников.																						
7-3.3.3. Применяет свойства параллелограмма, ромба, прямоугольника, квадрата и трапеции.																						
7-3.3.4. Объясняет свойства средней линии треугольника и трапеции.																						

7-3.3.5. Применяет свойства медиан и высот треугольника.																						
Стандарт 7-3.4. Записывает уравнение прямой и строит ее на координатной плоскости.																						
7-3.4.1. Объясняет понятие углового коэффициента, применяет его свойства.				✓																		
7-3.4.2. Записывает уравнение прямой и строит ее на координатной плоскости.				✓						✓												
Стандарт 7-3.5. Решает задачи на движение.																						
7-3.5.1. Применяет понятие вращения на координатной плоскости.																	✓					
7-3.5.2. Объясняет понятие симметрии относительно точки, строит фигуру, симметричную данной относительно точки.																		✓				
Стандарт 7-3.6. Строит фигуры.																						
7-3.6.1. С помощью циркуля и линейки строит серединный перпендикуляр к отрезку, биссектрису угла.																			✓			

Разделы и темы / Стандарты содержания	VI раздел			VII раздел					VIII раздел								IX раздел			X раздел		
	6.1	6.2	6.3	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	9.1	9.2	9.3	10.1	10.2	10.3
Стандарт 7-3.7. Вычисляет площадь поверхности и объем пространственных фигур.																						
7-3.7.1. Вычисляет площадь поверхности шара.								✓														
7-3.7.2 Вычисляет объем шара.								✓														
Содержательная линия 5. СТАТИСТИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ																						
Стандарт 7-5.1. Собирает, описывает и анализирует данные.																						
7-5.1.1. Строит и интерпретирует таблицу частот для не сгруппированных данных.																				✓		
7-5.1.2. Строит и интерпретирует таблицу относительных частот для не сгруппированных данных.																				✓		
7-5.1.3. На основе таблицы частот вычисляет среднее арифметическое, медиану и моду.																				✓		
Стандарт 7-5.2. Находит теоретическую и экспериментальную вероятность события.																						
7-5.2.1. Описывает событие как подмножество пространства элементарных исходов.																					✓	
7-5.2.2. Вычисляет вероятность события.																					✓	✓
7-5.2.3. Объясняет аксиомы теории вероятностей.																						✓
7-5.2.4. Объясняет простые следствия аксиом.																						✓

6 Планирование

Наряду с повышением эффективности процесса обучения компоненты, входящие в комплект учебников, служат также для повышения результатов обучения у учеников. Предложенный комплект учебников служит для полной реализации подстандартов по математике VII класса и помогает учителям при годовом и ежедневном планировании.



Ежедневное планирование

Основную часть пособия для учителей составляют рекомендации по ежедневному планированию уроков. Доступно описывается преподавание каждой темы и даются рекомендации по использованию разных методов представления материалов обучения. В зависимости от уровня подготовки учеников и технического оснащения класса учитель может повысить уровень достижения целей обучения, используя разную цифровую технику (интерактивная доска, проектор и др.).

Организация обобщающих уроков

Основной целью обобщающих уроков в разделах является систематизация и закрепление знаний, полученных в ходе преподавания тем. Такие уроки помогают связывать и углублять знания, полученные в разделе, а также улучшить предполагаемые навыки. Проведя общий опрос по разделу, можно определить темы, которые вызывают трудности у учеников и в которых относительно слабо реализованы стандарты. В этом случае более целесообразно построить урок, направленный на устранение слабых сторон учеников.

В дополнение к задачам, приведенным в учебнике и рабочей тетради, учитель может задать ученикам дополнительные вопросы и задания на основе подстандартов, которые предполагается реализовать в разделе.

Учитель обязательно должен контролировать динамику развития учеников. Еще одной целью урока является наблюдение за уровнем усвоения учениками тем раздела на основе заданий.

ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ НА STEAM ПРОЕКТАХ

Проекты STEAM (Sйence, Technology, Engieneering, Art, Mathematics направлены на объединение математических знаний учеников, применение математических знаний и навыков в повседневной жизни. Проекты предполагают проведение учащимися самостоятельных исследований по определенной теме. Уточняется время работы над проектом, учащимся даются рекомендации и советы. Проблема ставится конкретно. Учителя и ученики определяют продолжительность работы над проектом, используемые средства (литература, источники, вспомогательные средства и т.д.), способы их получения, формы работы. В процессе работы учитель может направлять учащихся. Ученики же ответственны за выполнение работы. Результат исследования может быть представлен в виде готового продукта, презентации, иллюстрации, фотографии, видеоматериала, альбома и др. формах.

Проект представляет собой подготовленную и реализованную по рекомендации учителя творческую самостоятельную работу учеников, направленную на изучение темы, раздела.

Работа над проектом осуществляется по следующим этапам:

1. Подготовка. 2. Планирование. 3. Деятельность. 4. Презентация.

VII класс. Математика (1-я часть)
Планирование за I полугодие (17×5 = 85 часов)

№	Раздел, глава и темы	часы
РАЗДЕЛ 1. Рациональные числа		
	Предварительная проверка	1
1.1.	Рациональные числа	2
1.2.	Представление рационального числа в виде десятичной дроби	2
1.3.	Сравнение и упорядочивание	2
	Задачи и примеры	1
1.4.	Сложение и вычитание рациональных чисел	2
1.5.	Умножение и деление рациональных чисел	2
1.6.	Вычисление значений числовых выражений	3
	Обобщающий урок. STEAM "Океанология"	2
	МСО-1	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	18
РАЗДЕЛ 2. Степень с натуральным показателем и ее свойства		
	Предварительная проверка	1
2.1.	Степень с натуральным показателем	2
2.2.	Умножение и деление степеней	2
2.3.	Степень произведения и дроби	2
2.4.	Вычисление сложного процента	2
	Обобщающий урок. STEAM. "Музыка и математика: камертон"	2
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	11
РАЗДЕЛ 3. Одночлены и многочлены		
	Предварительная проверка	1
3.1.	Одночлены	2
3.2.	Многочлены	2
3.3.	Сложение и вычитание многочленов	2
	Задачи и примеры	1
3.4.	Умножение одночлена на многочлен	2
3.5.	Умножение многочлена на многочлен	3
	Обобщающий урок. STEAM. "Возобновляемые источники энергии"	2
	МСО-2	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	16
РАЗДЕЛ 4. Формулы сокращенного умножения		
	Предварительная проверка	1
4.1.	Квадрат суммы и разности	2
4.2.	Произведение суммы и разности двух чисел	2
4.3.	Куб суммы и разности. Сумма кубов и разность кубов	3
	Задачи и примеры	2
4.4.	Разложение многочлена на множители	2
4.5.	Разложение на множители с помощью формул сокращённого умножения	2
	Обобщающий урок. STEAM. "Аквариум АкваДом"	2
	МСО-3	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	17
РАЗДЕЛ 5. Четырехугольники		
	Предварительная проверка	1
5.1.	Начальные понятия геометрии	2
5.2.	Четырехугольники	2

5.3.	Параллелограмм
5.4.	Виды параллелограммов. Прямоугольник, ромб, квадрат
5.5.	Свойства средней линии и медиан треугольника
5.6.	Трапеция
	Обобщающий урок. STEAM. "Арочные конструкции в архитектуре"
	МСО-4
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ
	Повторение за I полугодие
	БСО-1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ЗА I ПОЛУГОДИЕ

VII класс. Математика (2-я часть)
Планирование за II полугодие (17×5 = 85 часов)

№	Разделы и темы	часы
РАЗДЕЛ 6. Функция		
	Предварительная проверка	1
6.1.	Функция	2
6.2.	График функции	2
6.3.	Линейная функция и ее график	4
	Обобщающий урок. STEAM. "Путешествие в галактику Андромеды"	2
	МСО-1	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	12
РАЗДЕЛ 7. Окружность, круг и сфера		
	Предварительная проверка	1
7.1.	Окружность	2
7.2.	Центральный угол. Вписанный угол	3
7.3.	Углы между хордами, секущими и касательными	4
7.4.	Длина дуги. Площадь сектора	4
7.5.	Шар. Площадь поверхности и объем шара	2
	Обобщающий урок. STEAM. "Планетарий"	2
	МСО-2	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	19
РАЗДЕЛ 8. Линейное уравнение. Система уравнений. Неравенство		
	Предварительная проверка	1
8.1.	Линейное уравнение с одной переменной	2
8.2.	Линейное уравнение с двумя переменными и его график	3
8.3.	Система уравнений	2
	Задачи и примеры	1
8.4.	Решение системы линейных уравнений методами подстановки и сложения	3
8.5.	Решение задач с помощью систем уравнения	4
8.6.	Уравнения с модулем	2
8.7.	Неравенства	2
8.8.	Приближённые вычисления. Абсолютная и относительная погрешность	2
	Обобщающий урок. STEAM. "Умные светофоры"	2
	МСО-3	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	25
РАЗДЕЛ 9. Вращение и симметрия. Задачи на построение		
	Предварительная проверка	1
9.1.	Вращение в координатной плоскости	3
9.2.	Симметрия относительно точки	2
9.3.	Задачи на построение	3
	Обобщающий урок. STEAM. "Ковры Азербайджана"	2
	МСО-4	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	12
РАЗДЕЛ 10. Статистика и вероятность		
	Предварительная проверка	1
10.1.	Частота события	2
10.2.	Элементарное событие	3
10.3.	Несовместимые события	3
	Обобщающий урок. STEAM. "Система электронной очереди"	2
	МСО-5	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	12
	Повторение за учебный год	4
	БСО-2	1
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ЗА II ПОЛУГОДИЕ	85

1-й РАЗДЕЛ	Рациональные числа

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	8	
Тема 1.1	Рациональные числа	2	9	3
Тема 1.2	Представление рационального числа в виде десятичной дроби	2	13	6
Тема 1.3	Сравнение и упорядочивание рациональных чисел	2	17	9
	Задачи и примеры	1	21	12
Тема 1.4	Сложение и вычитание рациональных чисел	2	22	13
Тема 1.5	Умножение и деление рациональных чисел	2	26	16
Тема 1.6	Вычисление значений числовых выражений	3	29	19
	Обобщающий урок. STEAM. “Океанология”	2	34	21
	МСО-1	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**18**		

Краткий обзор раздела

В разделе ученикам даются сведения о рациональных числах, выражении значения величины рациональным числом, записи рациональных чисел в виде конечных десятичных или бесконечных периодических десятичных дробей, а также о правилах преобразования бесконечной периодической десятичной дроби в обычную дробь. Ученики научатся сравнивать и упорядочивать рациональные числа, выполнять различные арифметические действия с ними и решать задачи.

На что стоит обратить внимание?

Иногда ученики считают, что между двумя рациональными числами существует конечное количество чисел. Целесообразно давать задания, связанные с нахождением чисел между двумя рациональными, особенно между двумя отрицательными рациональными числами.

При преобразовании бесконечных периодических десятичных дробей в обычные ученики испытывают трудности при правильном определении числа, записываемого в знаменателе. Чтобы устранить эту трудность, можно предложить ученикам преобразовать ответ в обычную дробь, выполнить деление и снова перевести в периодическую дробь. Это поможет проверить результат и найти собственную ошибку.

При сравнении рациональных чисел ученики иногда ошибаются в нахождении большего и меньшего числа. Таких учеников можно направить на изображение данных чисел на числовой оси и нахождение ответа путем перевода всех чисел в десятичные дроби и сравнения их модулей.

Некоторые ученики неправильно определяют порядок выполнения действий с рациональными числами, а некоторые допускают ошибки из-за невнимательности. Это особенно наблюдается при выполнении действий с отрицательными рациональными числами. Целесообразно организовать работу над ошибками с такими учениками.

Развитие математического языка

Правильное определение понятий «отрицательные дроби», «рациональные числа», «конечная десятичная дробь», «бесконечная периодическая десятичная дробь» и «периодическая часть» позволяет оценить, насколько эти понятия усвоены.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Отрицательные дроби, рациональные числа, множество рациональных чисел (Q), абсолютное значение (модуль) рационального числа, конечная десятичная дробь, бесконечная периодическая десятичная дробь и т. д.

Необходимые предварительные знания и умения:

• Натуральные числа, целые числа и их сравнение
• Целые числа и действия с ними
• Действия с обычными и десятичными дробями
• Порядок выполнения действий

Междисциплинарная интеграция

Во многих ситуациях, встречающихся в повседневной жизни, например при выражении температуры, доходов и расходов, уровня воды, глубины и высоты, изменений атмосферного давления, массы и размера товаров, используются рациональные числа. В таких случаях можно, используя как положительные, так и отрицательные рациональные числа, вычислять разницу значений величин, сравнивать их и определять наибольшие и наименьшие значения.

ТЕМА 1.1 Рациональные числа

ПОДСТАНДАРТЫ	7-1.1.1. Объясняет рациональное число как отношение двух целых чисел (при этом знаменатель не равен нулю). 7-1.1.3. Показывает на числовой оси точку, соответствующую рациональному числу.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет понятие «отрицательная дробь». • Объясняет понятие «рациональное число». • Показывает на числовой оси точку, соответствующую рациональному числу. • Находит абсолютное значение (модуль) рационального числа.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры.
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/152* *https://www.geogebra.org/m/yj3zgxya* *https://www.begalileo.com/math-games/grade-7/understanding-rational-numbers*

Обсуждение исходной задачи

На первой странице раздела ученикам даётся информация о сферах, в которых используются рациональные числа. Можно спросить мнение учеников о числах, представленных на рисунке. Анализируется таблица из задания «Попытайтесь!», организуется обсуждение для ответа на вопросы. Ученики пытаются ответить на вопросы, опираясь на свои предыдущие знания. Подчёркивается, что после изучения новых знаний и навыков в течение раздела задание будет снова обсуждено в конце раздела.

500 ABŞ dolları	6051.45	▼32.74	-0,54%
ABŞ 30	43873	▼275	-0,62%
100 ABŞ dolları	21630	▼134	-0,61%
JP225	39645	▲273	0,69%
GB100	8312	▲ 10	0,12%
DE40	20426	▲ 27	0,13%
FR40	7421	▼ 2	-0,03%
IT40	34857	▲ 126	0,36%

Побуждение

Учитель рисует на доске таблицу, отражающую изменение валют. С классом обсуждается, что означают числа, приведённые в таблице. Можно зайти на сайт, показывающий ежедневное изменение валют, и обсудить с учениками, как меняются числа и что они означают: *https://tradingeconomics.com/*

Исследование-обсуждение

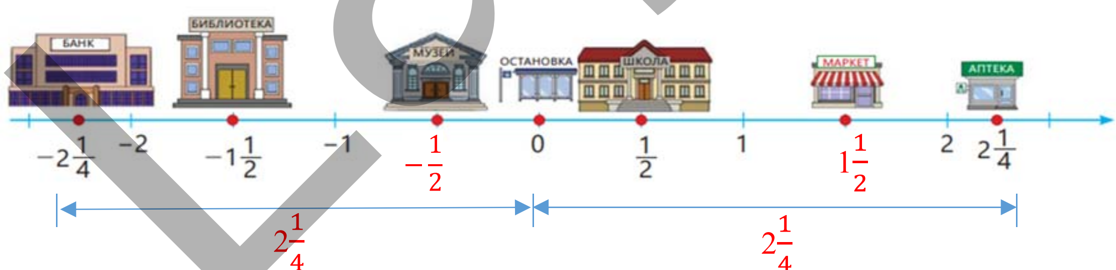
Отмечается, что библиотека и магазин, музей и школа находятся на одинаковом расстоянии от остановки по прямой линии.

• Обсуждается, как можно найти координату одного из этих объектов, если известна координата другого.

Ученикам задаются наводящие вопросы:

– Какова координата библиотеки? Какова координата магазина? Какова координата школы? Какова координата музея? Ученики показывают ответы на числовой оси и объясняют, как они их нашли.

• Определяется расстояние от остановки до банка и аптеки. Так как банк расположен на расстоянии $2\frac{1}{4}$ единицы от остановки и аптека — также на расстоянии $2\frac{1}{4}$ единицы, делается вывод, что эти два объекта находятся на одинаковом расстоянии от остановки.



Изучение **Положительные и отрицательные числа**

Ученикам дается информация о положительных и отрицательных дробях, приводятся примеры. Обсуждается расположение дробей на числовой оси. Подчеркивается, что противоположные числа располагаются на числовой оси по разные стороны от нуля и на одинаковом расстоянии от него. Приводятся примеры на числовой оси.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные игры:
https://apps.mathlearningcenter.org/number-line/
https://www.purposegames.com/game/rational-numbers-on-a-number-line

Подумай!

На числовой оси отмечаются числа $-\frac{3}{4}$ и $\frac{3}{4}$. Отмечается, что противоположным числом для $\frac{3}{4}$ является $-\frac{3}{4}$. На основании того, что противоположные числа находятся на одинаковом расстоянии от нуля, показывается, что противоположным числом для $-\frac{3}{4}$ является $\frac{3}{4}$.

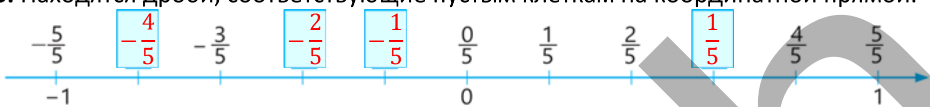
Задания

2. В пустые клетки вписываются соответствующие знаки «+» и «–».

$-\left(+\frac{3}{7}\right)=\boxed{-}\frac{3}{7}$ $\quad -(-3{,}2)=\boxed{+}3{,}2$ $\quad -(-(-1{,}5))=\boxed{-}1{,}5$ $\quad -\left(\boxed{-}\frac{6}{5}\right)=\frac{6}{5}$

Ученикам объясняется, что если отрицательных знаков нечетное количество, то результат отрицательный, а если четное — положительный.

3. Находятся дроби, соответствующие пустым клеткам на координатной прямой.



Изучение **Рациональные числа**

Ученикам дается информация о записи рациональных чисел. Подчеркивается, что знак минус перед дробью можно ставить как перед дробью целиком, так и перед числителем или знаменателем. Приводятся несколько примеров.

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$$

Ученикам объясняется, что десятичные дроби, в записи которых после запятой стоит конечное число цифр, также являются рациональными числами, приводятся примеры. На основе основного свойства дроби обсуждается, как любое рациональное число (при натуральном знаменателе) можно записать в виде несократимой дроби.

Подумай!

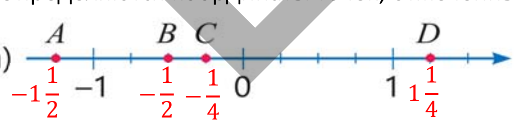
Ученикам напоминается, что если числитель делится на знаменатель нацело, то результат — натуральное число. Чтобы объяснить, что любое целое число является рациональным, ученики приводят примеры, используя это правило.

Например, $-2=\frac{-2}{1}=\frac{-4}{2}=\frac{6}{-3}$

6. В пустые клетки записываются соответствующие целые числа. Например, обращается внимание на знаменатели 1-й и 2-й дробей. Поскольку знаменатель уменьшился в 2 раза, числитель также уменьшается в 2 раза. Так как в знаменателе 3-й дроби ищется число, обращается внимание на числители 2-й и 3-й дробей. Поскольку числитель умножен на –3, знаменатель также умножается на –3.

$$\frac{-14}{16}\xrightarrow{:2}\frac{\boxed{-7}}{8}\xrightarrow{\cdot(-3)}\frac{21}{\boxed{24}}\qquad \frac{-14}{16}=\frac{\boxed{-7}}{8}=-\frac{21}{\boxed{24}}$$

8. Определяются координаты точек, отмеченных на координатной прямой.

а)


В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные игры:
https://wordwall.net/resource/15659400/math/labelled-diagram-rational-numbers-on-a-number-line-5th

Запомни!

Ученикам объясняется понятие множества рациональных чисел. Подчеркивается, что множество рациональных чисел обозначается Q, множество натуральных чисел — N, а множество целых чисел — Z.

$N \subset Z \subset Q$.

Ученикам показываются соответствующие выражения и изображения, приводятся примеры.

10. Приведя примеры, обосновывается, верны или нет утверждения.

а) Каждое натуральное число — рациональное. *Верное утверждение.*

б) Каждое целое число — рациональное. *Верное утверждение.*

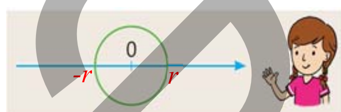
в) Каждое рациональное число — целое. *Ложное утверждение.*

г) Каждое целое число — натуральное. *Ложное утверждение.*

11. В пустые клетки вписываются соответствующие знаки ∈ или ∉.

$5 \in N$ $\quad 5{,}5 \notin N$ $\quad -5 \in Q$ $\quad -2{,}3 \notin Z$ $\quad 0 \notin N$ $\quad \frac{1}{5} \in Q$ $\quad -\frac{1}{2} \in Q$ $\quad \frac{1}{5} \notin Z$ $\quad -5 \notin N$

12. Сабина чертит окружность радиуса r с центром в начале координат. Определяются координаты точек пересечения этой окружности с осями координат. Для выполнения задания ученики могут выполнить соответствующую деятельность в классе. Построив окружность радиуса r с центром в начале координат, ученики увидят, что она пересекает данную числовую ось в точках r и $-r$.

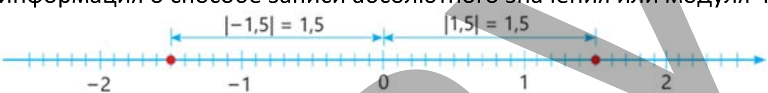


r и $2r$ $\quad$ 0 и r $\quad$ $\boxed{-r \text{ и } r}$ $\quad$ $-r$ и $2r$

В других случаях рекомендуется отметить, что точки с данными координатами находятся на разном расстоянии от начала координат.

Изучение Модуль рационального числа

Отмечается, что расстояние от точки, соответствующей рациональному числу на координатной оси, до начала координат называется **абсолютным значением** или **модулем** этого числа. Ученикам даётся информация о способе записи абсолютного значения или модуля числа.



Точки, соответствующие противоположным числам, расположены по разные стороны от 0 и на одинаковом расстоянии. На основании этого отмечается, что их модули равны. Приводятся примеры.

В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные игры:
https://phet.colorado.edu/az/simulations/number-line-integers

Запомни!

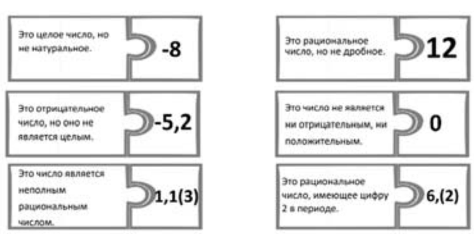
Обсуждаются приведенные идеи с учениками. Для каждой идеи показывается несколько примеров.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель записывает на доске несколько рациональных чисел. Ученикам предлагается выразить эти числа в виде дробей с натуральным знаменателем.

Углубление. Учитель записывает на доске несколько рациональных чисел. Ученикам предлагается выразить эти числа в виде дробей. Ученики объясняют, как они записывали рациональные числа в виде дробей. Для каждого рационального числа приводится несколько примеров (с натуральным знаменателем, с целым знаменателем).

Практическая работа. Класс делится на несколько групп. Каждой группе выдается рабочий лист с пазлами, разрезанными на части. Учителям предлагается дать задание: соединить часть с условием с частью, где записано число, соответствующее этому условию. Важно, чтобы все числа были соединены с соответствующими частями пазла.



Рабочий лист можно скачать по этой ссылке.
https://drive.google.com/file/d/1kRsGLtsVNILtNHANXt9LMqgYdQMzJJvt/view?usp=drive_link

Решение задач

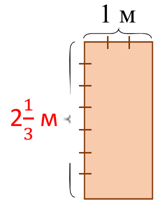
17. В задаче требуется найти высоту двери, если ее ширина равна 1 м.

Решение задачи

• Отмечается, что ширина двери равна 3 длинам палки, а высота 7 длинам палки. Соответственно, если ширина двери равна 1 м, для определения её высоты составляется пропорция и находится неизвестный член пропорции.

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{x}$$

$$x = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

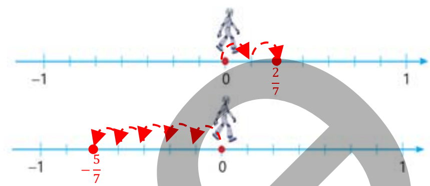


Ответ. Высота двери равна $2\frac{1}{3}$ м.

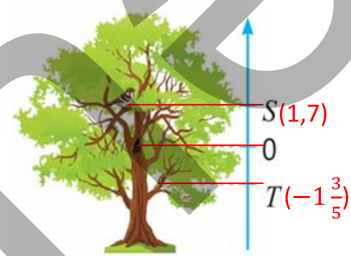
18. Отмечается, что каждый шаг робота равен $\frac{1}{7}$ единицы. Чертится числовая ось.

а) После команды «двигаться вперед на 2 шага» робот окажется в точке $\frac{2}{7}$.

б) После команды «5 шагов назад» робот окажется в точке $-\frac{5}{7}$.



19. Отмечается, что на стволе дерева дупло дятла соответствует точке *0* на вертикальной числовой оси, воробей - точке S (1,7), а гусеница – точке T (-1, $\frac{3}{5}$). Требуется определить, кто ближе к дуплу — воробей или гусеница.



Решение задачи

• Строится вертикальная числовая ось, на которой отмечаются соответствующие точки.

• Находится расстояние от каждой точки до точки О. Чтобы определить, какая точка ближе к дуплу, находят расстояние от каждой точки до дупла.

Расстояние между воробьем и дуплом: $|1{,}7| = 1{,}7$

Расстояние между гусеницей и дуплом: $\left|-1\frac{3}{5}\right| = 1\frac{3}{5}$

Сравниваются полученные числа. $1{,}7 > 1\frac{3}{5}$.

Ответ. Гусеница ближе к дуплу.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Объясняет понятие «рациональное число».	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Показывает на числовой оси точку, соответствующую рациональному числу.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Находит абсолютное значение (модуль) рационального числа.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

ТЕМА 1.2. Представление рационального числа в виде десятичной дроби

ПОДСТАНДАРТЫ	7-1.1.2. Преобразует бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную дробь и наоборот. 7-1.1.3. Показывает на числовой оси точку, соответствующую рациональному числу.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет понятия конечной десятичной и бесконечной периодической десятичной дроби. • Записывает рациональное число в виде конечной десятичной или бесконечной периодической десятичной дроби. • Округляет бесконечные периодические десятичные дроби.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: https://video.edu.az/video/13992 *https://www.geogebra.org/m/sdzwhh5b* *https://www.geogebra.org/m/rddvbmdn* *https://www.geogebra.org/m/jjrg3bbq* *https://www.geogebra.org/m/drapuubq*

Побуждение

С учениками можно заранее выбрать тему и провести опрос. Например: «Любимый фрукт», «Любимое занятие», «Любимый цвет», «Способ добираться до школы» и т. д. После выбора темы учитель организует опрос и представляет результаты ученикам в виде таблицы. Чтобы заполнить таблицу, учитель задает разные вопросы, например: «Какой части учеников нравится яблоко?» Ответ сначала записывается в виде обыкновенной дроби, затем эта дробь преобразуется в десятичную. Желательно сначала привести примеры, где получаются конечные десятичные дроби, а затем перейти к примеру с бесконечной периодической десятичной дробью. В этот момент учитель переходит к этапу урока «Исследование-обсуждение», объясняя, что на этом занятии ученики узнают, какие дроби превращаются в конечные, а какие — в бесконечные периодические десятичные дроби.

Исследование-обсуждение

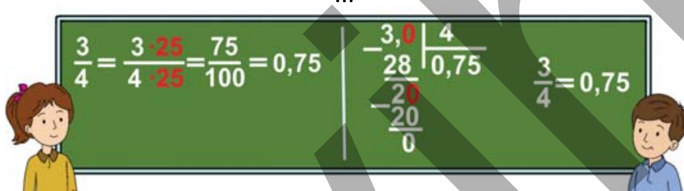
Лала и Самир записали дробь $\frac{3}{4}$ в виде десятичной дроби.

- Определяются и объясняются методы решения, использованные детьми. Лала преобразовала дробь $\frac{3}{4}$, приведя знаменатель к 100, а Самир — делением 3 на 4 с помощью деления в столбик, чтобы получить десятичную дробь.

Каждый метод решения можно записать на доске и обсудить с учениками.

Любимый фрукт	Число учеников	Часть (обыкн. дробью)	Часть (десят. дробью)
Яблоко			
Банан			
Апельсин			
...			

Приведя знаменатель к 100



Делением в столбик

- Обсуждается с классом, как с помощью этого способа можно записать дробь $\frac{2}{3}$ в виде десятичной дроби.

Подчёркивается, что при записи дроби $\frac{2}{3}$ в виде десятичной невозможно привести знаменатель к степени числа 10. Потому что не существует такого натурального числа, при умножении 3 на которое получилось бы 10, 100, 1000 и т.д. Следовательно, записать дробь $\frac{2}{3}$ в виде десятичной с помощью способа Лалы невозможно. С помощью способа Самира предпринимается попытка записать дробь $\frac{2}{3}$ в виде десятичной. Делят 2 на 3 и наблюдают, что цифры после запятой начинают повторяться. Ученикам сообщается, что способ записи таких дробей в виде десятичных будет рассмотрен в учебном материале.

$$\begin{array}{r|l} 2,0 & 3 \\ \underline{18} & 0,666... \\ 20 & \\ \underline{18} & \\ 20 & \\ \underline{18} & \\ ... & \end{array} \qquad \frac{2}{3}=0,666\ldots$$

Изучение Конечные десятичные дроби

Ученикам даётся информация о конечных десятичных дробях. Отмечается, что если знаменатель несократимой дроби не имеет простых делителей, кроме 2 и 5, то такую дробь можно записать в виде десятичной. Примеры объясняются ученикам. Также ученикам показывают, как получаются конечные десятичные дроби и как их находят с помощью деления.

I способ. Преобразование знаменателя в степень числа 10

$$\frac{3}{20}=\frac{3\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{15}{100}=0,15$$

II способ. Деление числителя дроби на знаменатель

$$\frac{3}{20}=3:20=0,15$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 20 \\ \underline{0} & 0,15 \\ 30 & \\ \underline{20} & \\ 100 & \\ \underline{100} & \\ 0 & \end{array}$$

Подумай!

Если в знаменателе несократимой дроби есть простой множитель, отличный от 2 и 5, обсуждается с классом, можно ли привести знаменатель к степени этих чисел. Ученики, вспоминая ответы, данные в задании «Исследование–обсуждение», могут объяснить, что это невозможно.

Задания

1. Данные дроби преобразуются в десятичные двумя способами.

1) Дополнением знаменателя до степени 10

$$\frac{21}{25} = \frac{21 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{84}{100} = 0{,}84$$

2) Делением числителя на знаменатель

$$\begin{array}{r|l} 21{,}0 & 25 \\ \underline{-200} & 0{,}84 \\ 100 & \\ \underline{-100} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\frac{84}{100} = 84 : 100 = 0{,}84$$

Изучение Бесконечные периодические десятичные дроби

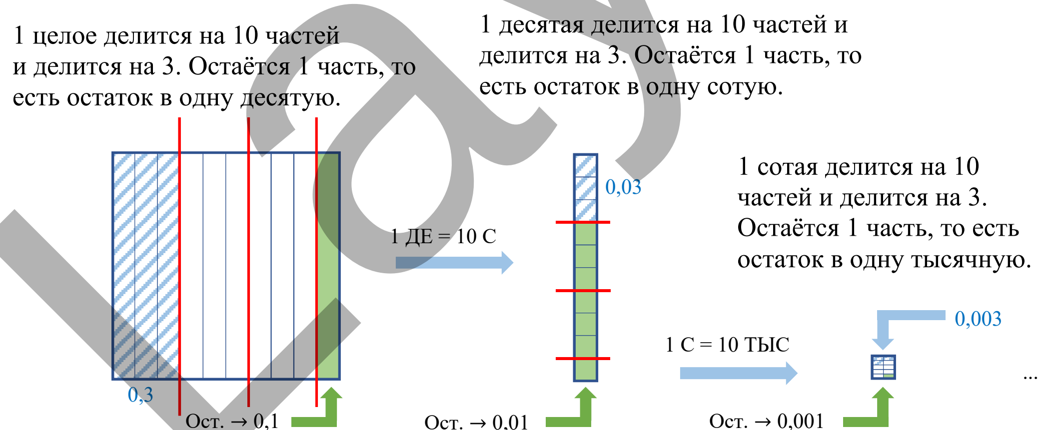
Если знаменатель несократимой дроби имеет простые делители, отличные от 2 и 5, то отмечается, что при делении числителя на знаменатель в частном бесконечно повторяется одна цифра или группа цифр, и повторяющаяся часть является периодом дроби.

Ученикам показывают несколько примеров записи периодических десятичных дробей. Также рекомендуется приводить примеры нахождения периодических десятичных дробей с помощью калькулятора. Этот подход помогает ученикам лучше усвоить тему.

К сведению учителя! Периодические десятичные дроби делятся на два вида: «чисто периодические» и «смешанные периодические». Чтобы не усложнять тему, в учебнике эти понятия не используются. Однако при необходимости учитель может кратко объяснить их как дополнительную информацию.

Бесконечные периодические десятичные дроби	**Объяснение**	**Пример**
Чистая периодическая дробь	Период начинается сразу после запятой	0,(3); 1,(5); 12,(6) и т.д.
Смешанная периодическая дробь	Период начинается через несколько цифр после запятой	0,1(8); 3,12(7); 5,0(4) и т.д.

Ученики уже изучали в младших классах, как преобразовывать дроби в десятичные с помощью деления в столбик. Например, дробь $\frac{1}{3}$ можно показать схематически — как при делении единицы на три равные части получается периодическая десятичная дробь



Суммируются частные, полученные в результате трех шагов. 0,3 + 0,03 + 0,003 = 0,333.

При продолжении процесса видно, что закономерность сохраняется. Таким образом, в частном после запятой повторяется цифра 9. По мере уменьшения остатка получаемое число приближается к 1.

3. Требуется указать период бесконечной десятичной дроби и записать дробь в краткой форме.

а) Поскольку 7 повторяющаяся цифра, период дроби равен 7. 0,777... = 0,(7)

б) Поскольку 2 повторяющаяся цифра, период дроби равен 2. 0,5222... = 0,5(2)

в) Поскольку 36 повторяющаяся группа цифра, период дроби равен 36. –1,363636... = –1,(36)

5. Данная таблица дополняется.

Бесконечная периодическая десятичная дробь	Краткая запись	Целая часть	Цифры до периода	Период	Читается
0,444...	0,(4)	0	нет	4	Ноль целых и четыре в периоде
2,777...	2,(7)	2	нет		7 Две целых и семь в периоде
1,282828...	1,(28)	1	нет		28 Одна целая и двадцать восемь в периоде
0,3666...	0,3(6)	0	3		6 Ноль целых три десятых и шесть в пер.
5,12333...	5,12(3)	5	12		3 Пять целых двенадцать сотых и три в пер.

6. Требуется представить дробь в виде бесконечной периодической десятичной дроби, разделив числитель на знаменатель.

в)
```
 5,0 | 18
-36  |0,2777...
 140
-126
  140
 -126
   140
  -126
   ...
```
$-\frac{5}{18} = -0,2(7)$

г)
```
 23,0 | 45
-225  |0,51111....
   50
  -45
    50
   -45
     50
    -45
    ...
```
$\frac{23}{45} = 23 : 45 = 0,5(1)$

Запомни!

Подчеркивается, что любое рациональное число можно записать в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби. Также отмечается, что любое целое число или конечная десятичная дробь может рассматриваться как бесконечная периодическая дробь с периодом 0. Примеры обсуждаются вместе с классом.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель записывает на доске несколько рациональных чисел.
Ученикам предлагается определить, принадлежат ли эти числа множеству натуральных, целых или рациональных чисел.

Углубление. Учитель просит учеников привести примеры чисел, соответствующих заданным условиям. Например, рациональные числа, не являющиеся натуральными, рациональные числа, не являющиеся целыми, и т. д. Ученики приводят примеры и объясняют свои ответы

9. Записываются три бесконечные периодические десятичные дроби, расположенные между данными числами.

а) 3,5 и 4,5 → 3,6; 3,9; 4,2

в) 0,30 и 0,40 → 0,31; 0,35; 0,38

Так как целая часть одинакова, а цифры после запятой следуют подряд, к концам чисел добавляется ноль

г) 2,(1) = 2,111...
2,2(3) = 0,233... → 0,218; 0,225; 0,232

Периодические десятичные дроби записываются с тремя цифрами после запятой.

К сведению учителя! В этом задании у учеников формируется умение находить числа, расположенные между положительными рациональными числами. Этот навык помогает ученикам правильно размещать рациональные числа на числовой оси, определять другие рациональные числа, находящиеся между двумя данными, визуально понимать взаимосвязи между числами. В следующей теме ученики узнают, что между любыми двумя рациональными числами существует бесконечное количество других чисел. Важно отслеживать развитие этого навыка в процессе преподавания данной темы.

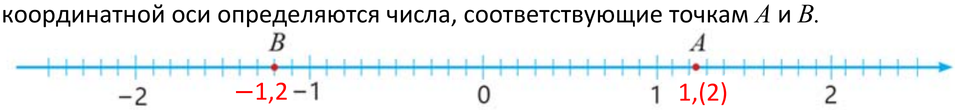
11. Данные рациональные числа записываются в виде десятичных дробей.

$-\frac{5}{3}$ $\frac{8}{9}$ $-\frac{6}{5}$ $\frac{11}{9}$ $\frac{4}{3}$

$-\frac{5}{3} = -1\frac{2}{3} = -1,(6)$ $\quad -\frac{6}{5} = -1,2$ $\quad \frac{4}{3} = 1,(3)$

$\frac{8}{9} = 0,(8)$ $\quad \frac{11}{9} = 1,(2)$

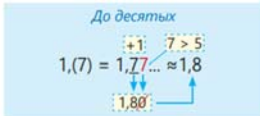
- На координатной оси определяются числа, соответствующие точкам A и B.

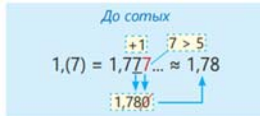


- Определяются положения остальных точек на оси, соответствующих данным числам.

Изучение **Округление бесконечных периодических десятичных дробей**

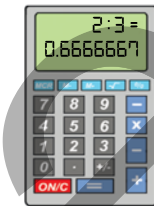
Подчеркивается, что для округления бесконечной периодической десятичной дроби до требуемого разряда используется общее правило округления. Учителю рекомендуется напомнить ученикам это правило, если они испытывают затруднения. Примеры обсуждаются с классом, определяется, по какому правилу выполняется округление, в каком случае к предыдущему разряду прибавляется 1.





15. Делением числителя на знаменатель с помощью калькулятора определяется период дроби. Таким образом, данная дробь записывается в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

К сведению учителя! При использовании калькулятора последняя цифра результата может быть округлена. В этом случае ученики могут не заметить, что это число является периодической десятичной дробью. Чтобы избежать этой ошибки, рекомендуется заранее показать им соответствующие примеры. Например, при вычислении выражения 6 ÷ 9 с помощью калькулятора ученики увидят результат 0.6666667 вместо точного значения 0.6666666.... Рекомендуется обсудить с классом причину такого результата. Таким образом, ученики поймут, что при ручном делении цифра 6 повторяется бесконечно, но на экране калькулятора отображается ограниченное количество цифр, и последняя из них автоматически округляется, из-за чего результат кажется неточным.



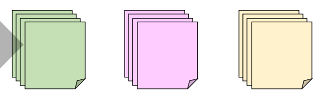
$$\begin{array}{r|l} 2{,}0 & 3 \\ -\underline{18} & 0{,}666... \\ 20 & \\ -\underline{18} & \\ 20 & \\ -\underline{18} & \\ ... & \end{array}$$

$\frac{2}{3} = 0,(6)$

Решение задач

17. Требуется определить, каким частям диаграммы соответствуют данные числа. Рекомендуется обсудить с учениками, что означает каждая цветная часть диаграммы.

Привлечение. На доске записываются различные рациональные числа и рисуется диаграмма. На стол кладутся стикеры трех цветов — зеленые, розовые и желтые. Ученики по очереди выходят к доске, выбирают число, записывают его на стикере соответствующего цвета и прикрепляют к нужной части диаграммы. После того, как все числа размещены, результаты обсуждаются с классом.



Решение задачи

• Каждое число произносится вслух. Определяется, какой части диаграммы оно соответствует.

• Обосновывается, почему выбрана именно эта часть.

Таким образом размещаются все числа.

Также можно задать ученикам выполнить задание, представив данные числа как элементы множества. Например:

$-14 \in Q$; $-14 \in Z$; $-14 \notin N$

$57 \in Q$; $57 \in Z$; $57 \in N$

$-1,(3) \in Q$; $-1,(3) \notin Z$; $-1,(3) \notin N$

К сведению учителя! Ученики иногда испытывают затруднения при определении множеств рациональных, целых и натуральных чисел. Например, когда нужно определить, какое число является рациональным, но не целым, некоторые ученики ошибочно выбирают натуральные числа. Или, наоборот, говоря, что целое число является также рациональным, утверждают, что такого числа не существует. Задание 17 помогает устранить подобные трудности. Ученикам, которые сталкиваются с такими ошибками, рекомендуется попросить изобразить соответствующие числа на диаграмме, чтобы они могли наглядно определить их принадлежность к нужным множествам.

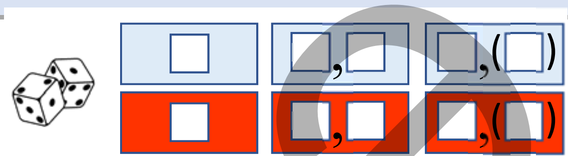
Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Объясняет понятия конечной и бесконечной периодической десятичной дроби.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Записывает рациональное число в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Округляет бесконечные периодические десятичные дроби.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

ТЕМА 1.3. Сравнение и упорядочивание

ПОДСТАНДАРТЫ	7-1.1.3. Показывает на числовой оси точку, соответствующую рациональному числу. 7-1.1.4. Сравнивает и упорядочивает рациональные числа.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Сравнивает рациональные числа, используя числовую ось. • Сравнивает отрицательные рациональные числа, опираясь на их модули. • Располагает рациональные числа в порядке возрастания или убывания.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/11272* *https://www.geogebra.org/m/vtkdnfzn* *https://www.geogebra.org/m/muqg6awk* *https://www.geogebra.org/m/xqedrqns* *https://www.geogebra.org/m/tj4S4KF9*

Побуждение

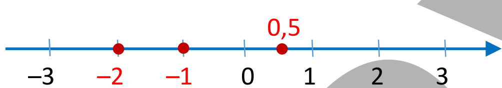


На стол кладутся четыре вида карточек лицевой стороной вниз, и ученикам сообщается, что на синих карточках будут положительные числа, а на красных — отрицательные. Учитель вызывает к доске двух учеников, каждому выдается по кубику. По заданию учителя каждый ученик выбирает одну карточку. Если карточка красная, то в пустых клетках слева ставится знак «–». Затем ученики поочередно бросают кубики и записывают выпавшие очки слева направо. Чтобы сравнить полученные числа, учитель задает наводящие вопросы:

– Какое из полученных чисел будет находиться левее на числовой оси? Как это можно определить? Как, исходя из положения на прямой, понять, какое число больше, а какое меньше?

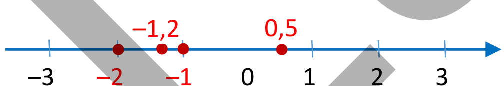
Исследование-обсуждение

В таблице приведены данные о температуре воздуха в разных городах в одно и то же время. Данные температуры отмечаются на числовой оси. Определяется, в каком городе температура самая высокая, а в каком — самая низкая.



Город	Температура (°C)	
Баку	–1	
Гянджа	0,5	← *Самая высокая температура*
Шуша	–2	← *Самая низкая температура*

Температура в Гяндже оказалась самой высокой, а в Шуше — самой низкой. В это же время в Ленкорани температура составляла –1,2°C. Эта температура также отмечается на числовой оси. Добавив Ленкорань, города располагаются в порядке возрастания температуры, и составляется новая таблица.



Город	Температура (°C)
Гянджа	0,5
Баку	–1
Ленкорань	–1,2
Шуша	–2

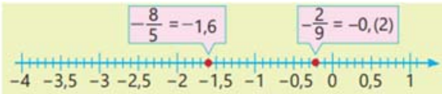
Если расположить города в порядке возрастания температуры воздуха, то Ленкорань окажется на втором месте.

Изучение **Сравнение рациональных чисел с помощью числовой оси**

При сравнении рациональных чисел рекомендуется использовать числовую ось и показывать примеры. На доске чертится числовая ось, на ней отмечаются различные рациональные числа, и на основе их расположения ученикам объясняются правила сравнения. Подчеркивается, что любое положительное рациональное число больше любого отрицательного рационального числа.

На числовой оси число −1,3 расположено справа от числа −2,4:

$-1{,}3 > -2{,}4$

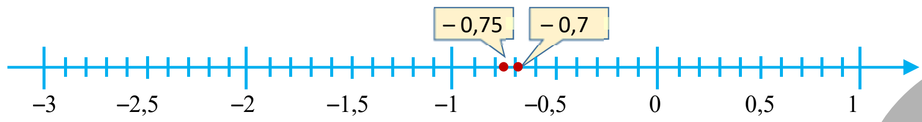


На числовой оси число $-\frac{8}{5}$ расположено слева от числа $-\frac{2}{9}$:

$-\frac{8}{5} < -\frac{2}{9}$

Подумай!

Чертится числовая ось, на ней отмечаются числа $-\frac{3}{4}$ и $-0{,}7$. Чтобы определить положение дроби $-\frac{3}{4}$ и сравнить, целесообразно записать это число в виде десятичной дроби.



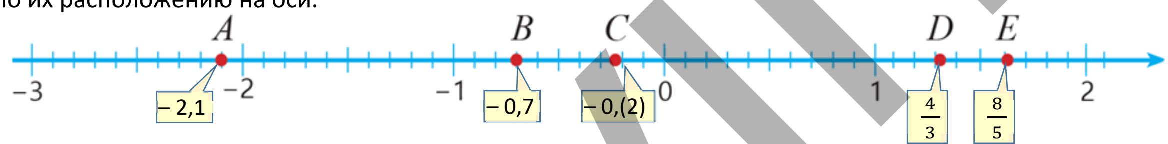
$-\frac{3}{4} < -0{,}7$

Задания

1. На числовой оси определяются и сравниваются точки, соответствующие данным числам. Задание можно выполнить двумя способами.

1) Ученики записывают каждое из данных чисел в виде десятичной дроби. Определяются числа, соответствующие каждой точке на числовой оси, а затем сравниваются.

2) Определяется, какой точке на числовой оси соответствуют два данных числа, и эти числа сравниваются по их расположению на оси.



а) $-2{,}1 < \frac{8}{5}$ б) $-0{,}7 < -0{,}(2)$ в) $-0{,}(2) > -2{,}1$ г) $\frac{4}{3} > -0{,}(2)$ е) $\frac{8}{5} > \frac{4}{3}$

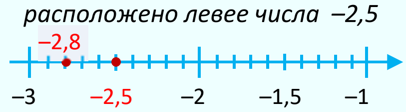
Выполняя задание, ученики учатся находить положение каждого рационального числа на числовой оси в различных формах записи, а также визуально видеть, между какими числами оно расположено. Это способствует развитию навыков сравнения рациональных чисел.

2. В отличие от предыдущего задания, здесь числовая ось не дана. Ученики должны начертить соответствующую прямую и определить положение данных чисел. Учитель, задавая вопросы, может направлять учеников к сравнению чисел, показывая, какое число расположено слева, а какое — справа.

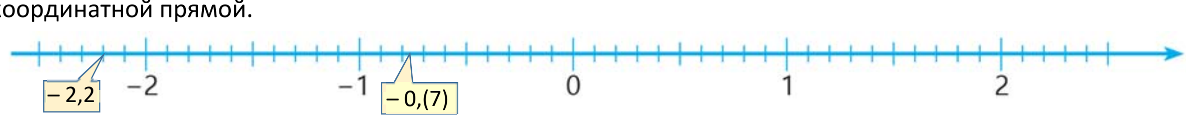
Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики, сравнивая отрицательные рациональные числа с одинаковой целой частью, ориентируются только на цифры после запятой. Это приводит к неправильному выполнению сравнения. Целесообразно направить учеников, допускающих такие ошибки, на сравнение рациональных чисел с помощью их изображения на числовой прямой. В этом случае они смогут увидеть, что сравнение только по цифрам после запятой является неверным. Ученики, допускающие подобные ошибки, в дальнейшем могут столкнуться с определёнными трудностями при упорядочивании чисел. Поэтому важно организовать работу над ошибками.

Ложное $-2{,}8 > -2{,}5$. *Т.к., 8 > 5*

Верное $-2{,}8 < -2{,}5$. *Т.к., число −2,8 расположено левее числа −2,5*



4. Определяется, между какими двумя последовательными целыми числами расположено каждое из данных чисел. Сравнение проводится, исходя из положения точек, соответствующих этим числам, на координатной прямой.



Например, число −2,2 находится между −3 и −2, а число −0,(7) — между −1 и 0. Следовательно, −2,2 находится левее. Так как число, расположенное левее, меньше, то $-2{,}2 < -0{,}(7)$.

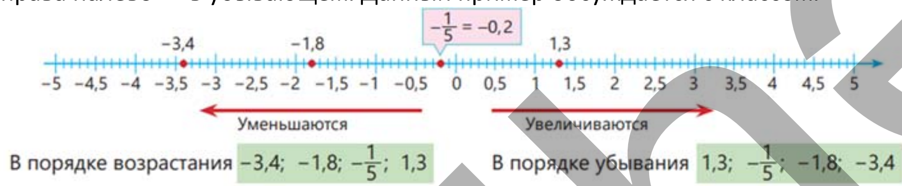
Изучение Сравнение отрицательных чисел по их модулям

Также отмечается, что отрицательные числа можно сравнивать и по их модулю. Пример задания обсуждается в классе. Ученикам объясняется, что из двух отрицательных рациональных чисел больше то, у которого модуль меньше, и наоборот — меньше то, у которого модуль больше.

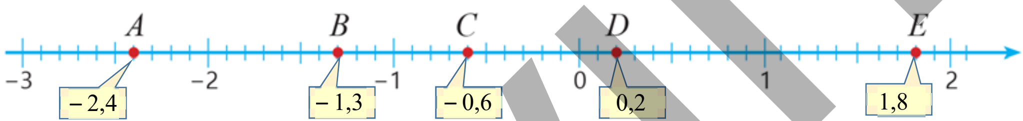
К сведению учителя! При сравнении рациональных чисел важно учитывать наиболее частые ошибки учеников и регулярно контролировать процесс выполнения заданий, чтобы вовремя их исправлять. Сравнение одного отрицательного и одного положительного числа обычно не вызывает трудностей, так как ученики понимают, что положительное число всегда располагается правее на числовой оси, а значит, оно больше. Однако при сравнении двух отрицательных чисел ученики часто ошибаются. В таких случаях рекомендуется напомнить им, как они сравнивали два отрицательных целых числа по расстоянию от нуля (по модулю), а затем распространить это правило на множество рациональных чисел.

Изучение Упорядочивание рациональных чисел

Отмечается, что упорядочивание чисел возможно как через их сравнение, так и через обозначение их на числовой оси. Напоминается, что на числовой оси числа располагаются в возрастающем порядке слева направо, а справа налево — в убывающем. Данный пример обсуждается с классом.



8. Определяется, какому числу соответствует каждая буква на числовой оси.



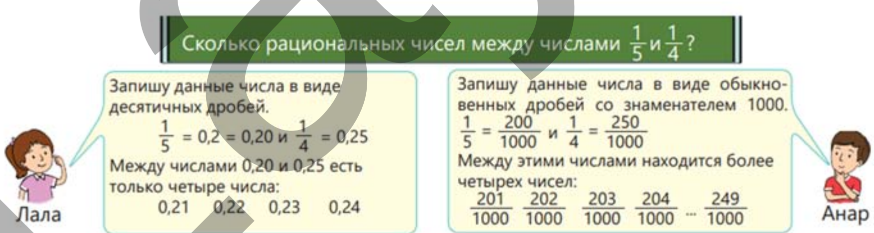
Данные числа располагаются в порядке убывания. 1,8; 0,2; –0,6; –1,3; –2,4.

10. В пустые клетки определяются подходящие цифры.

a) $-0{,}8 < -0{,}\boxed{7} < -0{,}(6)$ b) $-3{,}6 < -3{,}\boxed{5}9 < -3{,}5$ c) $-3{,}5 < -\boxed{3}{,}4 < -3$

11. Записываются целые числа, находящиеся между данными числами. Ученикам, у которых возникают трудности, можно предложить выполнить его, отметив данные числа на числовой оси.

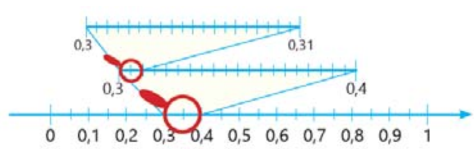
13. Мнения по вопросу, записанному на доске, обсуждаются с классом. Это создает возможность развивать аналитическое мышление и умение делать выводы.



Для выполнения задания ученики сначала внимательно обсуждают мнение Лалы, затем — мнение Анара. Чтобы сделать обсуждение более активным и логичным, рекомендуется использовать метод дебатов. Одна группа учеников поддерживает мнение Лалы, другая — соглашается с мнением Анара. От обеих групп требуется обосновать свою позицию, то есть объяснить, почему они согласны с выбранным мнением. На этом этапе учитель должен создать условия для того, чтобы ученики применяли навыки аргументированного мышления, приведения примеров и логического вывода.

В результате обсуждения ученики определяют, что мнение Лалы неверно, а мнение Анара логично и правильно. Затем учитель переходит к рубрике «Запомни».

Запомни!



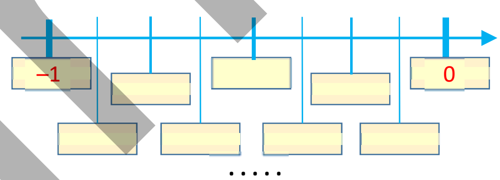
Подчеркивается, что между двумя рациональными числами существует бесконечное множество других

рациональных чисел. Изображение на числовой оси обсуждается с учениками.
В классах с техническими возможностями можно, увеличивая изображение числовой оси, показать несколько чисел, расположенных между двумя числами:
https://www.mathsisfun.com/numbers/number-line-zoom.html

К сведению учителя! Половина суммы любых двух чисел является их средним арифметическим и соответствует точке, расположенной ровно посередине между ними на числовой оси. По этому правилу между любыми двумя числами можно указать хотя бы одно число.
Особо подчёркивается, что любое рациональное число можно представить в виде десятичной дроби. Это включает две основные идеи:

- ✓ Каждое рациональное число можно преобразовать в десятичную дробь.
- ✓ эта десятичная дробь либо конечная, либо бесконечная периодическая.

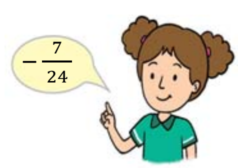
Для развития логического мышления учеников на уроке целесообразно задать вопрос:
«Существует ли бесконечная, но непериодическая десятичная дробь?».
Ответы учеников выслушиваются и организуется обсуждение. Его можно направить в следующем направлении:
между любыми двумя рациональными числами на числовой оси существует бесконечно много других чисел.
Этот факт показывает, что существуют числа, не ограничивающиеся только рациональными.
Такие числа выражаются в виде бесконечных непериодических десятичных дробей. Отмечается, что с такими числами ученики подробнее познакомятся в старших классах.
Практическая работа. Ученикам раздаются рабочие листы, как в примере. Ученики выбирают любые два числа, находят половину их суммы и записывают число, расположенное точно между ними, в соответствующую ячейку. Затем, находя половину суммы найденного числа и одного из исходных чисел, определяют новое число, расположенное между ними. Процесс повторяется несколько раз. Таким образом можно объяснить, что между двумя числами существует бесконечно много чисел.



14. Требуется определить, какие из данных чисел находятся между –1,2 и –1,3 на числовой оси. Чтобы выполнить задание, ученики могут записать все числа с двумя знаками после запятой и определить, расположены ли они между –1,20 и –1,30. Ученикам, которым трудно выполнить это задание, можно предложить найти ответ, изобразив числа на числовой оси.
15. Определяются числа, соответствующие данным условиям:
а) Наибольшее целое число, меньшее 0,2: 0. б) Наименьшее целое число, большее –3,(4): –3

Решение задач

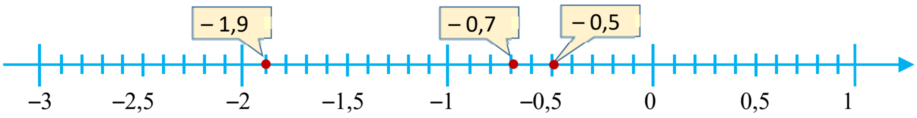
16. Число, задуманное Сабиной, является дробью со знаменателем 24. Указывается, что эта дробь больше $-\frac{1}{3}$ и меньше $-\frac{1}{4}$. Требуется найти это число



Решение задачи
Записываются эквивалентные дроби для $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{4}$ со знаменателем 24.
$-\frac{1}{3} = -\frac{8}{24}$ $-\frac{1}{4} = -\frac{6}{24}$
Число, находящееся между ними, — это $-\frac{7}{24}$.
Ответ. $-\frac{7}{24}$
17. Температура замерзания морской воды зависит от содержания соли: чем больше соли, тем ниже температура замерзания. В таблице приведены температуры замерзания воды различных морей.

Море	Температура замерзания воды (°C)
Азовское	–0,7
Каспийское	–0,5
Японское	–1,9

а) Числа, соответствующие температурам замерзания воды в морях, можно расположить на числовой оси в порядке возрастания слева направо.



Море	Температура замерзания воды (°C)
Японс	– 1,9
Азовс	– 0,7
Каспи	– 0,5

б) Моря упорядочиваются по температуре замерзания. Ученикам можно предложить составить новую таблицу, расположив названия морей в порядке убывания температуры замерзания.
в) Поскольку вода с большей солёностью замерзает при более низкой температуре, определяется море с самой низкой температурой замерзания. Это Японское море.

Работа в парах. В классе проводится соревнование, кто сможет записать больше чисел. На стол выкладываются карточки с числами лицевой стороной вниз. Каждый ученик в течение одной минуты старается записать как можно больше рациональных чисел, которые находятся между числами, указанными на карточке. Таким образом можно организовать групповую или парную работу. Побеждает ученик, записавший больше всего чисел, после чего его результаты сравниваются с записями других учеников.

$\frac{1}{9}$ və $\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{2}$ və $-\frac{1}{3}$
0,1 və 0,(15)	–2,12 və –2,(5)

Эта деятельность помогает достичь нескольких целей. Ученики осознают, что между любыми двумя рациональными числами существует бесконечно много других. Работа развивает творческое и логическое мышление, умение аргументировать, устанавливать связи и сотрудничать.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Сравнивает рациональные числа, используя числовую ось.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Сравнивает отрицательные рациональные числа, опираясь на их модули.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Располагает рациональные числа в порядке возрастания или убывания.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

Ученики на предыдущих уроках познакомились с понятиями «отрицательные дроби», «рациональное число», «конечная десятичная дробь», «бесконечная периодическая десятичная дробь». Они научились записывать обыкновенные дроби в виде бесконечных периодических десятичных дробей, сравнивать рациональные числа и применять правила округления. На этом уроке ученики будут решать различные задачи и примеры, чтобы закрепить изученные темы.
В технически возможных классах можно использовать видеоматериалы с примерами решения задач:
https://video.edu.az/video/4237
https://video.edu.az/video/13953
Решение заданий
2. Если одно из данных чисел представлено в виде обыкновенной дроби, а другое — в виде периодической десятичной дроби, для их сравнения целесообразно привести оба числа к одному виду — либо к десятичным дробям, либо к обыкновенным. Сравнение ответов учеников, использующих разные подходы, и требование объяснить правильность своих решений способствует развитию логического мышления и математической гибкости.
3. Требуется записать между двумя числами, отмеченными на числовой оси, два конечных десятичных и два бесконечных периодических десятичных числа, а затем расположить их в порядке возрастания и сравнить. Так как задание является открытым, ответы учеников могут отличаться. Поэтому они могут сравнить свои решения и проверить их правильность. Рекомендуется выполнять задание в парах, то есть сотрудничая с соседом по парте. Такой подход способствует взаимному обучению и развивает навык аргументированного ответа.
4. Среди данных чисел нужно определить те, которые находятся между –0,3 и –0,4 на числовой оси. Каждое число записывается в виде десятичной дроби. Используя правила сравнения рациональных чисел, определяется, какие из них находятся между –0,3 и –0,4.

Чтобы упростить сравнение, к числам –0,3 и –0,4 добавляются нули в конце. Проверяется, находится ли число –0,23 между этими числами.

$-0{,}3 = -0{,}300\ldots$
$-0{,}4 = -0{,}400\ldots$

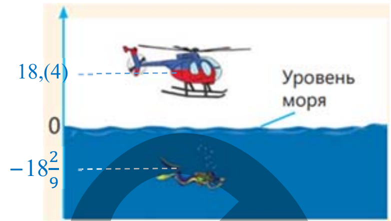
$-0{,}3 < -0{,}23 \quad -0{,}23 > -0{,}4$. Следовательно, число –0,23 не находится между числами –0,3 и –0,4.
Аналогичным образом определяется, какие другие числа расположены между –0,3 и –0,4.

$-0,(3) = -0{,}333\ldots$ ✓ $\quad -\frac{4}{11} = -0{,}3636\ldots$ ✓ $\quad -0{,}4(2) = -0{,}422\ldots$ ✗ $\quad -1\frac{1}{2} = -1{,}5$ ✗

$-\frac{5}{6} = -0{,}833\ldots$ ✗ $\quad -0{,}5$ ✗ $\quad -0{,}5(4) = -0{,}544\ldots$ ✗ $\quad -0,(6) = -0{,}666\ldots$ ✗

Ученики могут отметить данные числа на числовой оси, чтобы наглядно определить ответ.

5. На основе данных координат требуется определить, кто ближе к поверхности воды — вертолёт или водолаз. Чертится вертикальная числовая ось, на которой приблизительно отмечаются положения чисел $-18\frac{2}{9}$ и 18,(4).



Сравниваются модули чисел. $\left|-18\frac{2}{9}\right| < 18,(4)$ Следовательно, водолаз находится ближе к поверхности воды.
Ответ. Водолаз ближе к поверхности воды.

6. Отмечается, что в пекарню доставили 41,5 кг муки, из которых использовали $\frac{2}{3}$ части. Требуется найти, сколько муки осталось.
Решение задачи

• Определяется, сколько муки было использовано. $41{,}5 \cdot \frac{2}{3} = 27\frac{2}{3}$

• Находится, сколько муки осталось. Полученные числа записываются в виде десятичных дробей и округляются до тысячных.

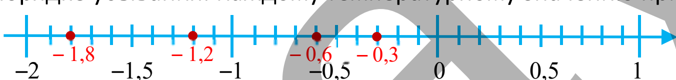
$41{,}5 - 27\frac{2}{3} = 13\frac{5}{6} = 13{,}8(3) \approx 13{,}833$ (кг)
Ответ. 13,833 кг

7. В таблице приведены данные о средней температуре в различных регионах в декабре. Требуется расположить названия городов в порядке убывания температуры.

Средняя температура в декабре

Город	Температура (°C)
Баку	–0,6
Гянджа	–0,3
Шамахы	–1,8
Губа	–1,2

Числа, данные в таблице, отмечаются на числовой оси и сравниваются. Отмечается, что число, расположенное левее, — меньшее, а число, расположенное правее, — большее. Числа записываются справа налево в порядке убывания. Каждому температурному значению приписывается соответствующий город.



$-0{,}3; \ -0{,}6; -1{,}2; -1{,}8.$
Гянджа; Баку; Губа; Шамахы.

Можно также использовать сравнение отрицательных чисел по их модулям.
Ученики составляют новую таблицу, расположив города по убыванию температуры.
В классах с техническими возможностями можно поручить ученикам составить таблицу на компьютере.
Ответ: Гянджа, Баку, Губа, Шамахы.
Обсуждение. Рассматриваются разные способы решения задачи, предложенные учениками.

8. В таблице приведены данные об уровне воды относительно причала в течение недели. Ученикам предлагается, начиная со вторника, определить, как менялся уровень воды каждый день по сравнению с предыдущим.

Дни недели	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
Уровень воды (м)	$-\frac{2}{25}$	0,15	$-\frac{9}{50}$	$-\frac{9}{40}$	0	0,12	$-\frac{2}{33}$

а) Ученикам предлагается определить, как менялся уровень воды каждый день по сравнению с предыдущим, начиная со вторника. Каждый день уровень воды сравнивается с уровнем предыдущего дня

Вторник: $-0{,}15 < -\frac{2}{25}$ *уровень воды снизился.*

Среда: $-\frac{9}{50} < -0{,}15$ *уровень воды снизился.*

Четверг: $-\frac{9}{40} < -\frac{9}{50}$ *уровень воды снизился.*

Пятница: $0 > -\frac{9}{40}$ *уровень воды повысился.*

Суббота: $0{,}12 > 0$ *уровень воды повысился.*

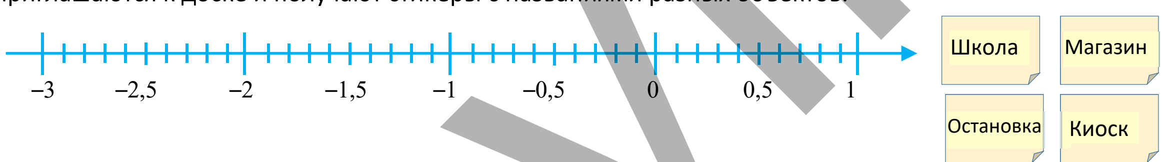
Воскресенье: $-\frac{2}{33} < 0{,}12$ *уровень воды повысился.*

б) Отметив данные числа на числовой оси, можно определить, в какой день уровень воды был самым высоким, а в какой — самым низким. Учитывая, что числа, расположенные левее, меньше, ученики делают вывод, что в четверг уровень воды был самым высоким, а в субботу — самым низким.
К сведению учителя! при сравнении данных чисел, особенно когда их много, ученикам может быть трудно прийти к правильному выводу. Это особенно заметно, когда даны одновременно отрицательные числа, десятичные и обыкновенные дроби. В таких случаях изображение чисел на числовой оси является эффективным способом облегчить сравнение. Используя этот подход, ученики сначала правильно размещают числа на числовой оси, а затем легко располагают их в порядке возрастания или убывания. Такой метод не только облегчает сравнение, но и развивает числовое представление и логическое мышление учеников. Ученикам, испытывающим трудности, рекомендуется регулярно выполнять аналогичные задания, чтобы укрепить навыки по данной теме.

ТЕМА 1.4. Сложение и вычитание рациональных чисел

ПОДСТАНДАРТЫ	7-1.2.1. Выполняет арифметические действия с рациональными числами.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Складывает рациональные числа. • Вычитает рациональные числа. • На числовой оси находит расстояние между двумя рациональными числами.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/13954* *https://wordwall.net/resource/10227745/adding-rational-numbers* *https://www.geogebra.org/m/cusgSC4w* *https://www.geogebra.org/m/ev8uxmv9* *https://www.geogebra.org/m/uxjqcxsn* *https://www.geogebra.org/m/edfphdy3*

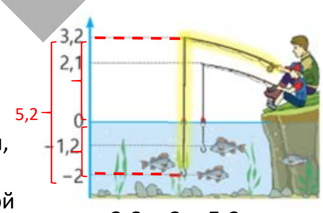
Побуждение
На доске проводится числовая ось, на которой отмечаются числа, как на рисунке. Четверо учеников приглашаются к доске и получают стикеры с названиями разных объектов.



Ученикам предлагается для каждого «объекта» выбрать точку на числовой оси и приклеить стикер. После того как ученики определят координаты объектов, учитель обращается к классу. На основе известных координат можно составить вопросы, связанные со сложением и вычитанием:
– Если сделать шаг вправо на 1,2 единицы от магазина, к какой точке мы придем? Число, обозначающее место какого объекта больше, а какого меньше? Какой объект находится справа от школы? Сколько единиц нужно пройти, чтобы дойти до этого объекта? Какой объект находится слева от школы? Как найти расстояние между школой и этим объектом?
После каждого вопроса ученикам целесообразно предложить записать соответствующие примеры

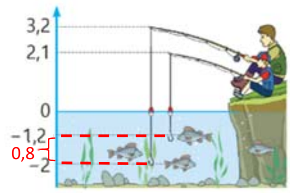
Исследование-обсуждение
В задаче требуется определить, на сколько отец Самира раскрутил леску удочки и на сколько глубже крючок отца опустился по сравнению с крючком Самира. Ученики обращают внимание к вертикально изображенной числовой оси.

От верхней и нижней частей крючка, как показано на рисунке, проводятся горизонтальные линии, отмечаются точки их пересечения с числовой осью. Определяется, что отец Самира размотал леску крючка на 5,2 м.



3,2 + 2 = 5,2

От нижней части крючков проводятся горизонтальные линии, и отмечаются точки их пересечения с числовой осью. По расстоянию между двумя точками на числовой оси определяется, что крючок, брошенный отцом, опустился на 0,8 м глубже, чем крючок Самира.



2 – 1,2 = 0,8

Изучение **Сложение рациональных чисел**

Отмечается, что сумма рациональных чисел также является рациональным числом. Подчеркивается, что сумма любых рациональных чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ вычисляется по правилам сложения обыкновенных дробей.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d + c\cdot b}{b\cdot d}$$

Примеры обсуждаются в классе. В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы и интерактивные задания.
https://video.edu.az/video/8991
https://video.edu.az/video/9904
https://www.mathgames.com/skill/7.86-add-and-subtract-rational-numbers
https://www.mathmammoth.com/practice/rational-numbers

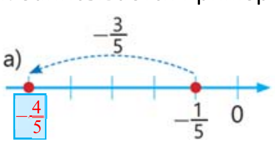
Задания

3. Выполняются действия сложения. Сначала смешанные числа записываются как дроби с натуральным знаменателем. Целесообразно выполнить один из пунктов, обсудив его вместе с учениками.

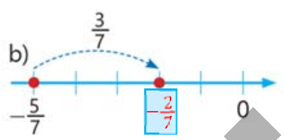
a) $\frac{-4}{5} + (-1\frac{1}{5}) = \frac{-4}{5} + \frac{-6}{5} = \frac{-4-6}{5} = \frac{-10}{5} = -2$

b) $\frac{-1}{2} + 2\frac{1}{4} = \frac{-1\cdot 2}{2\cdot 2} + \frac{9}{4} = \frac{-2}{4} + \frac{9}{4} = \frac{-2+9}{4} = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$

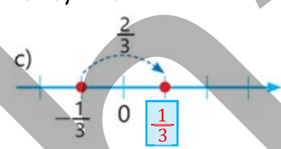
4. Записывается пример сложения на числовой оси и находится сумма.



$-\frac{1}{5} + \boxed{\frac{-3}{5}} = \boxed{-\frac{4}{5}}$



$-\frac{5}{7} + \boxed{\frac{3}{7}} = \boxed{-\frac{2}{7}}$



$-\frac{1}{3} + \boxed{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Запомни!

Для сложения двух отрицательных рациональных чисел суммируются их модули, а перед результатом ставится знак минус. При сложении чисел с разными знаками вычисляются их модули, вычитается меньший модуль из большего, а перед результатом ставится знак числа с большим модулем. Примеры обсуждаются в классе.

6. Значение выражения сначала сравнивается без вычислений. Затем проверяется правильность ответа с помощью вычислений.

К сведению учителя! Сравнивать приблизительные значения выражения без вычислений — один из важных навыков для учеников. Выполнение таких заданий развивает устные навыки счета. В этом процессе ученики учатся быстро определять, какое число по модулю больше при сложении или вычитании чисел с разными знаками. Визуальное представление (например, с использованием числовой оси) помогает усвоить этот навык легче. Эти умения позволяют ученикам сравнивать выражения без вычислений, выбирать правильный ответ и отвечать без потери времени. Это, в свою очередь, помогает быстро принимать решения в определенных ситуациях и глубже понимать содержание. Для учеников, испытывающих трудности, полезно сначала выполнять аналогичные задания на целых числах, а затем расширять их на множество рациональных чисел.

Внимание!

Отмечается, что свойства сложения справедливы и для рациональных чисел. Напоминаются свойства перестановки и группировки, примеры обсуждаются с учениками.

7. С помощью свойств сложения вычисляется сумма.

К сведению учителя! В данном задании удобнее находить ответ, используя свойства сложения. Чтобы это показать, можно найти сумму двумя способами: сначала выполняя действия по порядку, затем применяя свойства, и сравнить результаты. Использование свойств сложения для нахождения суммы — один из удобных способов, который упрощает и ускоряет вычисления. Этот метод направляет учеников на сравнение различных способов и выбор подходящего. Таким образом, он способствует формированию логического мышления и ускорению устных вычислений.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания для работы в группах.
https://jeopardylabs.com/play/adding-and-subtracting-rational-numbers12

Изучение Вычитание рациональных чисел

Разность рациональных чисел также является рациональным числом. Подчеркивается, что разность любых рациональных чисел вычисляется по правилам вычитания обыкновенных дробей.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$$

Примеры обсуждаются с классjv.
В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания.
https://www.begalileo.com/math-games/grade-7/add-and-subtract-rational-numbers

Запомни!

Отмечается, что разность рациональных чисел можно найти так же, как с целыми числами — добавляя к уменьшаемому противоположное вычитаемое. Ученикам демонстрируются примеры вычитания как обыкновенных дробей, так и десятичных дробей.

$$p - q = p + (-q)$$

К сведению учителя! Многие ученики, успешно выполняющие действия с целыми числами, при переходе к рациональным числам сталкиваются с определёнными логическими и техническими трудностями. Эти трудности проявляются в разных аспектах. Хотя сложение и вычитание отрицательных целых чисел изучены, применение этих правил к рациональным числам вызывает затруднения. Например, операция типа «–4 + (–2)» может быть понятна, а –0,8 + (–1,8) или $\frac{4}{5} + (-\frac{1}{4})$ иногда выполняется с ошибками. Целесообразно определить, с каким именно навыком связана ошибка при сложении и вычитании рациональных чисел, и организовать работу над ошибками.

11. Вычисляется значение выражения при заданном значении переменной. Следует обратить внимание, чтобы при подстановке отрицательного значения переменной ученики не допускали ошибок со знаками.

12. Решаются данные уравнения. Рекомендуется напомнить ученикам правила решения уравнений. Ученикам, испытывающим трудности, можно предложить сначала решить более простые уравнения в множестве целых чисел. Затем они смогут самостоятельно решить уравнения из задания.

Изучение Расстояние между двумя точками на оси координат

Отмечается, что расстояние между двумя точками на координатной оси равно модулю разности их координат. Ученикам показывается общее правило на числовой оси.

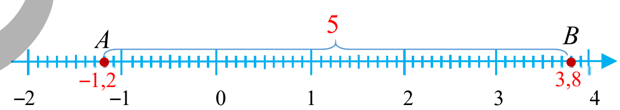
$AB = |p - q|$ или $AB = |q - p|$

Примеры обсуждаются в классе.
В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания:
https://phet.colorado.edu/sims/html/number-line-distance/latest/number-line-distance_all.html?locale=az

14. Вычисляется расстояние между заданными точками и изображается на координатной оси.

а) A (–1,2) и B (3,8)

$AB = |3{,}8 - (-1{,}2)| = 5$

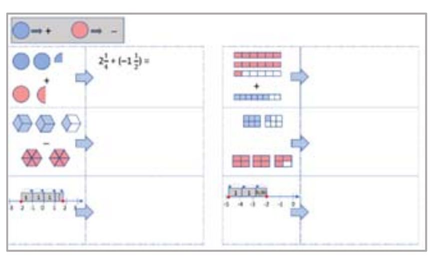


Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель записывает на доске несколько рациональных чисел. Ученикам предлагается вычислить их сумму и разность, затем они проверяют правильность результатов друг друга. *Углубление*. Учитель записывает несколько рациональных чисел на доске. Ученикам предлагается определить числа, соответствующие различным условиям, и обосновать ответ. Например, два числа с суммой меньше 4, три числа с суммой меньше –10, числа, разность которых равна 2 и т.д.

Практическая работа

Класс делится на группы. Группам раздаются рабочие листы. Члены группы выполняют задания. Отмечается, что положительные числа изображаются синим цветом, отрицательные — красным. К каждому рисунку составляется соответствующий пример, записывается в пустую клетку справа и решается. За правильные ответы группы получают 1 балл, за неправильные — теряют 1 балл.



Ошибки обсуждаются, анализируются и исправляются. Задания можно выполнять в парах или индивидуально.
Рабочий лист можно загрузить по ссылке:
https://drive.google.com/file/d/15M4DgljCb3aT9hBM3o-5Mm9BrZqysAW7/view?usp=drive_link

Решение задач

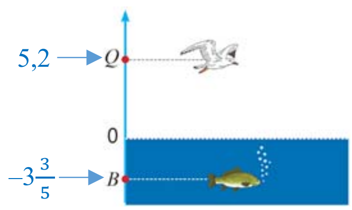
15. В таблице приведены изменения температуры воды в озере в течение 5 дней недели. В начале наблюдения температура воды была –0,3°C. Необходимо определить температуру воды в конце наблюдения.

Дни	1	2	3	4	5
Изменение температуры (°C)	–0,5	–1,2	+0,45	–0,2	+0,25

Решение задачи
1-й способ.
Учитывая, что начальная температура была –0,3°C, и что в первый день температура снизилась на –0,5°C, вычисляется температура воды в этот день.
1-й день: –0,3 + (–0,5) = –0,8 (°C)
Аналогичным образом рассчитываются изменения температуры в последующие дни, чтобы определить новую температуру воды для каждого дня.
2-й день: –0,8 + (–1,2) = –2 (°C)
3-й день: –2 + 0,45 = –1,55 (°C)
4-й день: –1,55 + (–0,2) = –1,75 (°C)
5-й день: –1,75 + 0,25 = –1,5 (°C)
В таблицу можно добавить дополнительную строку, где для каждого дня будет указана соответствующая температура воды. Это позволит ученикам наблюдать, как температура меняется день за днем, и проще определить итоговую температуру воды.

Дни	1	2	3	4	5
Изменение температуры (°C)	–0,5	–1,2	+0,45	–0,2	+0,25
Температура (°C)	–0,8	–2	–1,55	–1,75	–1,5

2- й способ.
Сначала суммируются все изменения температуры, чтобы определить, насколько температура уменьшилась или увеличилась.
–0,5 + (–1,2) + 0,45 + (–0,2) + 0,25 = –1,2 (°C)
К –0,3°C добавляется итоговое изменение температуры.
–0,3 + (–1,2) = 1,5 (°C)
Ответ. В конце наблюдения температура воды составила –1,5°C.
Обсуждение. Выслушиваются мнения учеников, решивших задачу разными способами.
16. Отмечается, что что чайка летела на высоте 5,2 м над уровнем моря, а рыба плавала на глубине $3\frac{3}{5}$ м.



Решение задачи
• Координаты чайки и рыбы выражаются положительными и отрицательными числами относительно уровня моря.
Чайка: $5\frac{2}{10}$ Рыба: $-3\frac{3}{5}$.
• Определяется расстояние между точками Q и B, соответствующими уровням чайки и рыбы.
$\left|5{,}2-\left(-3\frac{3}{5}\right)\right|$ = 8,8 м.
Ответ. Расстояние между чайкой и рыбой относительно уровня моря равно 8,8 метра.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Складывает рациональные числа.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Вычитает рациональные числа.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
На числовой оси находит расстояние между двумя рациональными числами.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

ТЕМА 1.5. Умножение и деление рациональных чисел

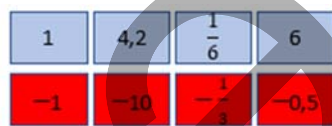
ПОДСТАНДАРТЫ	7-1.2.1. Выполняет действия над рациональными числами.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Умножает рациональные числа. • Делит рациональные числа. • Применяет свойства умножения для рациональных чисел .
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/13846* *https://www.geogebra.org/m/tztysc46* *https://www.mathmammoth.com/practice/rational-numbers*

Побуждение

Учитель записывает на доске выражение с пустыми клетками и действием умножения или деления. В соответствии с ответом ученикам предлагается выбрать подходящие числа для заполнения пустых клеток из чисел, представленных на карточках.

$\square \times \square = -6$ $\quad \square \times \square = 5$ $\quad \square \times \square = -2$

$\square : \square = -10$ $\quad \square : \square = 36$ $\quad \square : \square = -8{,}4$



Учитель задаёт ученикам направляющие вопросы:

– Как определить знак чисел, которые нужно вписать в пустые клетки? Как меняется знак числа при умножении или делении на –1? В каком случае произведение или частное чисел будет положительным, а в каком — отрицательным?

Обсуждается, как определяется число для каждой клетки.

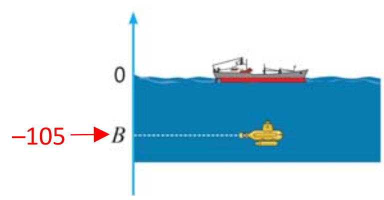
Исследование-обсуждение

Отмечается, что батискаф опускается на 7 м каждую минуту и через 15 минут достигает нужного уровня для исследования. С использованием отрицательных чисел требуется найти координату точки B, показывающей этот уровень, рассчитать, за сколько минут батискаф достигнет требуемого уровня, если опускаться он будет на $7\frac{1}{2}$ м в минуту.

Внимание учеников обращают на изображении на числовой оси.

• Для нахождения координаты точки B на вертикальной прямой ученики вычисляют произведение скорости на время. $7 \cdot 15 = 105$ (м). Следовательно, через 15 минут батискаф достигнет глубины 105 м, то есть координата точки B равна –105.

• Если батискаф опускается на $7\frac{1}{2}$ м в минуту, то находят, за сколько минут он достигнет нужной глубины. $105 : 7\frac{1}{2} = 14$ (мин)



Учитывая, что глубина выражается отрицательным числом, целесообразно направить учеников к нахождению ответа через деление отрицательного числа на отрицательное. $-105 : (-7\frac{1}{2}) = 14$ (мин)

Изучение Умножение рациональных чисел

Отмечается, что произведение рациональных чисел можно находить по правилу умножения обыкновенных дробей. Общее правило напоминается ученикам, примеры обсуждаются в классе.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Ученики могут приводить дополнительные примеры произведений рациональных чисел с одинаковыми и разными знаками. Рекомендуется сначала определять, будет ли результат положительным или отрицательным, а затем вычислять

Подумай!

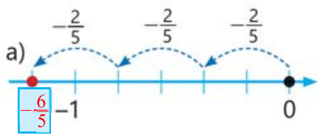
На вопрос: «Может ли произведение рационального числа на само себя быть отрицательным?» ученики приводят примеры и обосновывают мнение.

Перечисляют возможные случаи.

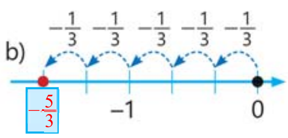
1) Оба числа положительные. Произведение положительных чисел положительное.
2) Оба числа отрицательные. Произведение отрицательных чисел положительное.
3) Поскольку ноль также является рациональным числом, то произведение на само себя равно нулю. Подчеркивается, что произведение рационального числа на само себя либо положительное, либо равно нулю. Следовательно, результат не может быть отрицательным.
В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания.
https://www.begalileo.com/math-games/grade-7/multiply-rational-numbers

Задания

2. На числовой оси записываются примеры на умножение и вычисляется результат.

a) 

$-\frac{2}{5} \cdot 3 = -1\frac{1}{5}$

b) 

$-\frac{1}{3} \cdot 5 = -1\frac{2}{3}$

4. Сначала определяется знак произведения, затем выполняется операция умножения.
К сведению учителя! Ученикам, испытывающим трудности с определением знака произведения, рекомендуется напомнить правила умножения целых чисел. Сначала можно показать примеры для целых чисел, а затем для рациональных: произведение двух положительных чисел положительное, произведение двух отрицательных чисел также положительное. Обобщая, подчеркивается, что произведение чисел с одинаковыми знаками положительное, а произведение двух чисел с разными знаками — отрицательное. Однако рекомендуется обращать внимание на случаи, когда количество чисел увеличивается, и учитывать, четное оно или нечетное.

Запомни!

Если $a \neq 0$, $b \neq 0$, отмечается, что числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ взаимно обратные. Примеры обсуждаются в классе.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$$

5. Определяется, являются ли данные числа взаимно обратными.
а) $\frac{-2}{5} \cdot \frac{-5}{2} = 1 \rightarrow \frac{-2}{5}$ и $\frac{-5}{2}$ взаимно обратные числа. г) $-3 \cdot \frac{1}{3} = -1 \rightarrow -3$ и $\frac{1}{3}$ не являются взаимно обратными числами.

Внимание!

Свойства умножения верны и для рациональных чисел. Напоминаются свойства перестановки, группировки и распределения, обсуждаются примеры.
6. С помощью свойств умножения значения выражений вычисляются удобными способами. Для каждого примера, как указано в образце, целесообразно спрашивать у учеников, какие свойства были использованы.
К сведению учителя! Как и при сложении, использование свойств умножения является одним из удобных способов вычисления — на это обращается внимание учеников. Чтобы показать удобство применения свойств умножения, можно сначала выполнить умножение по порядку, а затем найти ответ, применяя свойства, и сравнить результаты. Такой подход помогает ученикам сравнивать разные способы и выбирать наиболее удобный и эффективный. В целом рекомендуется побуждать учеников обосновывать свои решения, используя свойства умножения.
8. Когда множители отличны от нуля, проверяется правильность утверждений. Ученики могут приводить примеры для обоснования своего мнения.
а) Если количество отрицательных множителей нечетное, то произведение отрицательное. Чтобы проверить правильность этого утверждения, берут нечетное количество отрицательных чисел. Эти числа группируют по два. Известно, что произведение двух отрицательных чисел положительное. Согласно этому правилу, находят произведение чисел, где только одно отрицательное, а остальные положительные. Так как произведение отрицательного числа на положительное отрицательное, при нечетном количестве отрицательных множителей получается отрицательное произведение. *Это верное утверждение.*
Схематически можно так обосновать правильность этого утверждения.

$$\underbrace{(-)\times(-)\times(-)\times(-)\times\ldots\times(-)}_{\text{Нечетное}}=\underbrace{(-)\times(-)}_{(+)}\times\underbrace{(-)\times(-)}_{(+)}\times\ldots\times(-)=(+)\times(+)\times\ldots\times(-)=(-)$$

б) Если количество отрицательных множителей четное, то произведение положительное. Это тоже верное утверждение. Для каждого утверждения учащиеся могут привести примеры. Эти числа также группируют по два. Известно, что произведение двух отрицательных чисел положительное. Согласно этому правилу, находят произведение положительных чисел, следовательно, произведение положительное. *Это тоже верное утверждение.*

Схематически можно так обосновать правильность этого утверждения.

$$\underbrace{(-)\times(-)\times(-)\times\ldots\times(-)}_{\text{Четное}}=\underbrace{(-)\times(-)}_{(+)}\times\underbrace{(-)\times(-)}_{(+)}\times\ldots\times\underbrace{(-)\times(-)}_{(+)}=(+)\times(+)\times\ldots\times(+)=(+)$$

К сведению учителя! Для каждого утверждения учащиеся могут приводить примеры. Отмечается, что здесь речь идет о количестве отрицательных множителей. Чтобы увеличить количество множителей, можно использовать и положительные множители. В этом случае знак полученного числа не изменяется. Иногда учащиеся в таких случаях допускают определенные ошибки. Целью является демонстрация подобных примеров и организация работы над ошибками.

Изучение **Деление рациональных чисел**

При делении рациональных чисел важно подчеркнуть, что делимое умножается на обратное к делителю, и именно таким образом находится частное. Частное, полученное при делении рациональных чисел, также является рациональным числом. Приводятся примеры и проводится обобщение.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания.

https://www.begalileo.com/math-games/grade-7/divide-rational-numbers-

10. Сначала определяется знак частного, затем находится числовое значение. При выполнении задания учитель может подчеркнуть, что, как и при правилах умножения, решение 10-го задания выполняется аналогично решению 4-го задания. Правила повторяются. Задание выполняется.

11. Для того чтобы равенство было верным, в пустую клетку записывается соответствующее число. При этом важно, чтобы ученики одновременно запомнили правила умножения на 0, на 1 и на –1.

a) $-0{,}9\cdot\boxed{-1}=0{,}9$ b) $\boxed{-\frac{2}{3}}\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)=1$ c) $-1{,}4\cdot\boxed{0}=0$ d) $\boxed{0}:\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

12. С учениками сначала повторяются правила нахождения неизвестного множителя, делимого, делителя и т.д., после чего их можно направить на решение уравнений на основе этих знаний. Ученикам, испытывающим трудности с решением уравнений, рекомендуется сначала предложить соответствующие уравнения с целыми числами и поручить пошаговое объяснение их решения. Затем ученики могут самостоятельно решать аналогичные уравнения, укрепляя эти навыки.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель записывает на доске несколько рациональных чисел. Ученикам дается задание умножить и поделить эти числа. Затем ученики проверяют правильность результатов друг друга.

Углубление. Учитель записывает на доске несколько рациональных чисел. Ученикам дается задание определить числа в соответствии с разными условиями и обосновать ответ. Например, два или три числа, произведение которых больше –5 и меньше –4; два числа, отношение которых меньше –1; числа, произведение которых равно 1,(6) и т.д.

Решение задач

13. Подчеркивается, что при подъеме на каждые 100 м температура воздуха снижается на 0,65°С. Необходимо определить, какая будет температура воздуха на высоте 2000 м, если температура на уровне моря составляет 14°С, и на сколько метров еще должен подняться самолет с высоты 2000 м, чтобы температура на этой высоте была –18,5°С.

Решение задачи

• Если температура воздуха на уровне моря 14°С, необходимо найти температуру на высоте 2000 м.

2000 : 100 = 20
20 · 0,65 = 13
14 + (–13) = 1 (°С)

• Высота, на которую поднимется самолет с 2000 м, обозначается через x, и составляется уравнение, исходя из того, что температура на этой высоте –18,5°С, затем решается.

$0{,}65 \cdot \frac{2000 + x}{100} + 14 = -18{,}5 \quad \rightarrow x = 3000$

Ответ. На высоте 2000 м температура составит 1°C. Если самолет поднимется еще на 3000 м, температура воздуха будет –18,5°C

Обсуждение. Обсуждаются мнения учеников, которые решали задачу различными способами

Дни	Изменение атмосферного давления (мм рт. ст.)
1	–0,3
2	–0,6
3	+0,3

14. В таблице приведены данные об изменении атмосферного давления за 3 дня. Необходимо определить среднее арифметическое изменения давления за эти три дня и найти, какое изменение давления на следующий день сделает среднее за 4 дня равным среднему за предыдущие три дня.

Решение задачи

• Находится среднее арифметическое изменения давления за 3 дня. $\frac{-0{,}3 + (-0{,}6) + 0{,}3}{3} = -0{,}2$ (мм рт. ст.)

• Изменение давления на следующий день обозначается через x, составляется соответствующее уравнение и решается.

$(-0{,}3 + (-0{,}6) + 0{,}3 + x) : 4 = -0{,}2$

$x = -0{,}2$ (мм рт. ст.)

Ответ. Среднее арифметическое изменения давления за 3 дня –0,2 мм рт. ст., изменение давления на следующий день –0,2 мм рт. ст.

К сведению учителя! Для проверки знаний учащихся о давлении и миллиметрах ртутного столба можно задать определенные вопросы:

– Как вы понимаете, что такое давление? Где с ним сталкиваемся? Почему единица атмосферного давления — миллиметр ртутного столба? Почему именно ртуть? Почему не вода или другая жидкость? Можно предложить ученикам эти вопросы и поручить им провести исследование по данной теме. Такие задания обеспечивают межпредметную интеграцию и одновременно расширяют знания учеников об атмосферном давлении.

Выслушиваются мнения учеников, организуется обсуждение, затем даётся обобщённая краткая информация:

«мм ртутного столба — это единица измерения давления. 1 мм ртутного столба равен давлению, создаваемому столбом ртути высотой 1 мм. Ртуть — очень плотная жидкость, поэтому для измерения атмосферного давления достаточно короткого столба (примерно 760 мм). Кроме того, ртуть не смачивает стекло, что повышает точность измерений. Вода имеет гораздо меньшую плотность, чем ртуть. Если бы использовалась вода, потребовался бы столб высотой около 10 метров, что непрактично. Нормальное атмосферное давление также равно 760 мм ртутного столба».

Знание этого понятия поможет ученикам лучше понять задачу.

В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы.

https://youtu.be/Id2Ti1ZGN1g

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Умножает рациональные числа.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Делит рациональные числа.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Применяет свойства умножения для рациональных чисел.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

ТЕМА 1.6. Вычисление значений числовых выражений

ПОДСТАНДАРТЫ	7-1.2.1. Выполняет действия над рациональными числами. 7-1.2.3. Находит значение числового выражения. 7-1.2.4. Применяет действия с рациональными числами при решении задач.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Преобразует бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную дробь. • Вычисляет значение числовых выражений, содержащих рациональные числа
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/5275* *https://www.geogebra.org/m/uxjqcxsn* *https://contrib.pbslearningmedia.org/WGBH/mgbh/mgbh-int-decring/index.html* *https://www.ixl.com/math/grade-8/convert-between-repeating-decimals-and-fractions*

Побуждение

Учитель записывает на доске выражения с пустыми клетками и действиями, как указано ниже. К доске приглашаются два ученика. Из перевернутых стикеров выбираются карточки, и соответствующие числа записываются в пустые клетки в соответствии с условием. Один ученик начинает заполнять числитель слева, другой — знаменатель справа. Один из учеников решает первый пример, другой — второй.

$$\frac{\square + \square \times \square}{\square - \square + \square} \qquad \frac{\square \times \square - \square}{\square + \square : \square}$$

0,(3)	4,2(1)	– 1,5
$2\frac{3}{7}$	–3,25	$-\frac{5}{6}$

Учитель задает направляющие вопросы:
– Чем отличаются примеры, записанные в каждом столбце? Учитывая порядок действий, какое действие нужно выполнять первым? Сравниваются полученные в конце ответы.

Исследование-обсуждение

В таблице указано, что объем молока в кувшине выражен в литрах, а в бидоне молока в 10 раз больше, чем в кувшине.

Молоко в кувшине	Молоко в бидоне $10x$	Разность $10x - x$
0,(5)	5,(5)	5
0,(7)	7,(7)	7
1,(2)	12,(2)	12

$10 \cdot 0{,}555... = 5{,}555...$

$$\begin{array}{r} 5{,}555... \\ -\ 0{,}555... \\ \hline 5{,}000... \end{array}$$

• Обсуждается, как Лала вычислила, насколько литров больше молока в бидоне, если в кувшине было 0,(5) литра. Учитель может задать направляющие вопросы:
– Чем отличается дробь, полученная при умножении периодической десятичной дроби на 10 или 100, от исходной дроби? Как объяснить, что если из десятикратного значения числа 0,(5) вычесть саму дробь, получается целое число?
• Аналогичным образом вычисляется, насколько литров больше молока в бидоне, если в кувшине 0,(7) или 1,(2) литра молока, и таблица дополняется.
Учитель отмечает, что таким способом можно преобразовать периодическую дробь в обыкновенную, и переходит к материалу для изучения.

Изучение **Преобразование бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную дробь**

Объясняется, как преобразовать бесконечные периодические десятичные дроби в обыкновенные. Составляются соответствующие уравнения, и процесс преобразования показывается пошагово. Отдельно объясняется правило для случаев, когда целая часть дроби отлична от нуля.

$x = 0{,}444...$	*Число 0,(4) обозначается через x.*
$10x = 4{,}444...$	*Поскольку в периоде одна цифра, обе стороны равенства умножаются на 10.*
$10x - x = 4{,}(4) - 0{,}(4)$	*Из второго равенства вычитается первое почленно.*
$9x = 4$	*Упрощается.*
$x = \frac{4}{9}$	*Находится выражение числа 0,(4) в виде обыкновенной дроби.*
Таким образом, $0{,}(4) = \frac{4}{9}$	Ответ можно проверить с помощью деления или калькулятора.

$$\begin{array}{r} 4{,}444... \\ -\ 0{,}444... \\ \hline 4{,}000... \end{array}$$

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания:
https://contrib.pbslearningmedia.org/WGBH/mgbh/mgbh-int-decring/index.html

Подумай!

Отмечается, что для преобразования числа 0,(21) в обыкновенную дробь нужно умножить обе части равенства x = 0,2121… на 100 и вычесть равенства почленно. Поскольку период числа 0,(21) состоит из двух цифр, число умножается на 100. Так как при этом период повторяется, при вычитании полученных уравнений разность соответствующих чисел будет равна целому числу. Продолжите решение и преобразуйте число 0,(21) в обыкновенную дробь.

$x = 0{,}2121...$

$100x = 21{,}2121...$

$100x - x = \boxed{21}$

$99x = 21$

$x = \frac{21}{99}$

$$\begin{array}{r} -\,21{,}2121... \\ 0{,}2121... \\ \hline 21 \end{array}$$

Задания

1. Заполняя таблицу, учащиеся преобразуют периодические десятичные дроби в обыкновенные. После заполнения таблицы они могут наблюдать связь между данной периодической десятичной дробью и полученной обыкновенной дробью. Ответ можно также найти, записав уравнение, как показано в примере.

a)

x	$10x$	$10x - x$	Adi kəsr
0,222...	2,222...	2	$\frac{2}{9}$
0,(7)	7,(7)	7	$\frac{7}{9}$
1,(2)	12,(2)	11	$\frac{11}{9} = 1\frac{2}{9}$

2. Периодическая десятичная дробь преобразуется в обыкновенную. Числитель полученной дроби сравнивается с числом в периоде, а знаменатель — с количеством цифр в периоде.

а) $x = 0{,}(5) = 0{,}55...$

$10x = 5{,}5...$

$10x - x = \boxed{5}$

$9x = 5$

$x = \frac{5}{9}$

$$\begin{array}{r} -\,5{,}555... \\ 0{,}555... \\ \hline 5 \end{array}$$

$0{,}(5) = \frac{5}{9}$

в) $x = 0{,}(126) = 0{,}126...$

$1000x = 126{,}126...$

$1000x - x = \boxed{126}$

$999x = 126$

$x = \frac{126}{999} = \frac{14}{111}$

$$\begin{array}{r} -\,126{,}126... \\ 0{,}126... \\ \hline 126 \end{array}$$

$0{,}(126) = \frac{14}{111}$

Учитель может задать направляющие вопросы: "У каких чисел период состоит из одной цифры? Сколько девяток записано в знаменателе у этих дробей? Как можно объяснить связь между числителем и числом в периоде? Почему в знаменателе обыкновенной дроби записывается столько девяток, сколько цифр в периоде?

Такие вопросы помогают ученикам понять правило не заучивая, проводить сравнения и устанавливать связь между правилом и результатом. Обращается внимание, если после записи периодической десятичной дроби в виде обыкновенной дроби ее можно сократить или нет.

Запомни!

При преобразовании десятичной дроби, у которой период начинается сразу после запятой, целая часть остается без изменений, в числителе записывается цифра (или группа цифр) периода, а в знаменателе — столько девяток, сколько цифр в периоде. Приводятся примеры.

$0{,}(4) = \frac{4}{9}$ — *В периоде есть одна цифра. В знаменателе пишется 9.*

$0{,}(32) = \frac{32}{99}$ — *В периоде есть две цифры. В знаменателе пишется 99.*

$3{,}(412) = 3\frac{412}{999}$ — *В периоде есть три цифры. В знаменателе пишется 999.*

3. Определяются числа, подходящие для пустых клеток.

a) $0{,}(4) = \frac{\boxed{4}}{9}$ b) $0{,}(7) = \frac{7}{\boxed{9}}$ c) $0{,}(23) = \frac{23}{\boxed{99}}$ d) $0{,}(45) = \frac{45}{\boxed{99}} = \frac{\boxed{5}}{11}$ e) $0{,}(114) = \frac{\boxed{114}}{999} = \frac{38}{\boxed{333}}$ f) $1{,}(5) = \boxed{1}\frac{\boxed{5}}{\boxed{9}}$

Ученики могут проверить свои ответы, составив и решив соответствующее уравнение.

Запомни!

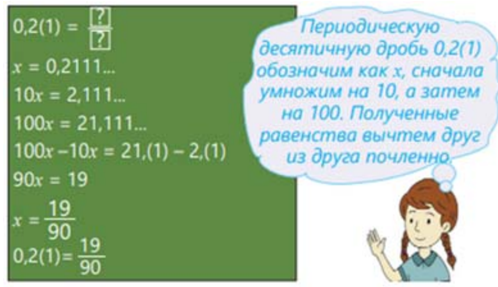
Правило преобразования бесконечной периодической десятичной дроби, у которой период начинается через несколько цифр после запятой и которая записывается в сокращенной форме, объясняется учащимся на примерах.

$0{,}2(1) = \frac{21-2}{90} = \frac{19}{90}$ $5{,}1(32) = 5\frac{132-1}{990} = 5\frac{131}{990}$ $0{,}75(4) = \frac{754-75}{900} = \frac{679}{900}$

3. Определяются числа, соответствующие пустым клеткам.

a) $0,1(6)=\frac{16-\boxed{1}}{90}=\frac{1}{\boxed{6}}$ b) $0,8(24)=\frac{\boxed{824}-8}{990}=\frac{136}{\boxed{165}}$ c) $0,12(6)=\frac{126-12}{\boxed{900}}=\frac{\boxed{19}}{150}$

5. Обсуждаются способ решения примера на доске и рассуждения Айнур.
Учитель может задать направляющие вопросы:
– Какое число образуется в периоде, если умножить 0,2(1) на 10? Как объяснить, что при умножении 0,2(1) на 100 в периоде остается то же число? Почему Айнур сначала умножила 0,2(1) на 100, а затем на 10 и вычла полученные равенства?



• С помощью этого метода данные десятичные дроби выражаются в виде обыкновенных дробей. При этом устанавливается связь между числами в числителе и знаменателе обыкновенной дроби и цифрами до и внутри периода.

$0,3(2)=\frac{\boxed{32-3}}{90}=\frac{29}{90}$ $2,0(4)=2\frac{4}{90}=2\frac{2}{45}$ $1,0(18)=1\frac{18}{990}=1\frac{1}{55}$

8. Проверяется правильность равенства.
a) $0,(9)=\frac{9}{9}=1$ c) $0,3(9)=\frac{39-3}{90}=\frac{36}{90}=0,4$

Ученикам разъясняется, что при преобразовании обыкновенной дроби в десятичную дробь не образуется период, состоящий из девяток, и обычно такие случаи не рассматриваются.

К сведению учителя! Иногда ученики считают, что число 0,(9) меньше 1. Это число можно разными способами показать равным 1. Например, обозначив его за x и записав соответствующее уравнение, при решении мы получим x = 1. Позже, при изучении темы геометрическая прогрессия, ученики познакомятся с другим способом доказательства этого равенства.
В вычислениях с периодическими десятичными дробями подобные случаи встречаются. Так как бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9 обычно не рассматриваются, ученики должны уметь при необходимости записывать 0,(9) = 1; 0,0(9) = 0,1 и т. д.

a) $x=0,(9)=0,99...$
$10x=9,9...$
$10x-x=\boxed{9}$
$9x=9$
$x=\frac{9}{9}=1$

$$\begin{array}{r} 9,999... \\ -\;0,999... \\ \hline 9 \end{array}$$

$0,(9)=1$

9. Периодические десятичные дроби преобразуются в обыкновенные, и выполняются требуемые действия.
a) $0,(2)+1,(7)=\frac{2}{9}+1\frac{7}{9}=1\frac{9}{9}=2$

В некоторых случаях ответ можно получить, выполняя сложение или вычитание «в столбик». Например, при нахождении значения выражения 0,(2) + 1,(7) можно использовать этот способ.

$$\begin{array}{r} 0,222... \\ +\;1,777... \\ \hline 1,999... \end{array}$$

0,(2) + 1,(7) = 1,(9)
Так как получилась бесконечная периодическая дробь с периодом 9, записывается: 1,(9) = 2.

Изучение Числовые выражения с рациональными числами

Подчеркивается, что действия с рациональными числами выполняются по общему правилу: если в выражении есть скобки, то сначала выполняются действия в скобках. Примеры разбираются в классе.
В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания.
https://www.math-play.com/7th-Grade-Numbers-and-Operations-Jeopardy/7th-Grade-Numbers-and-Operations-Jeopardy.html

12. Вычисляется значение выражения. Пример задания разбирается с классом. Остальные задания можно распределить между учениками и выполнить в парах. После вычислений ученики сравнивают ответы и обсуждают их.
К сведению учителя! При решении примеров, где в числителе и знаменателе дроби встречаются другие дроби и арифметические действия, ученики часто сталкиваются с трудностями. Поэтому полезно напомнить им необходимые знания и умения для выполнения задания. Важно наблюдать, с какими трудностями сталкиваются ученики при решении, и организовать работу над ошибками.
Каждый ученик может сначала самостоятельно выполнить действия с рациональными числами, а затем

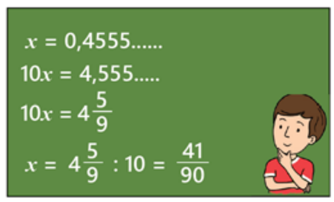
сравнить ответы с соседом по парте. Можно попросить учеников показать свои решения на доске. При необходимости конструктивная обратная связь поможет отслеживать прогресс учеников.

Из истории математики

Отмечается, что слово «рациональный» происходит от латинского ratio, что означает «отношение». Подчеркивается, что сумма, разность, произведение и частное (если делитель не равен нулю) двух рациональных чисел также являются рациональными числами. Приводятся примеры. В отличие от натуральных и целых чисел, рациональные числа обладают важным свойством: между любыми двумя рациональными числами существует бесконечно много рациональных чисел. Ученикам можно дать задание: указать одно число, находящееся между двумя данными рациональными числами. Разъясняется, что учащиеся часто не представляют, какие числа являются не рациональными. Учителю следует пояснить, что не рациональные числа — это иррациональные числа, и в качестве примера привести число π. Целесообразно сформировать у учеников начальное представление об иррациональных числах и отметить, что этот материал будет изучен подробнее в старших классах.

14. Решаются уравнения. При решении уравнений с рациональными числами ученики иногда испытывают трудности. Чтобы помочь им, можно предложить выполнить аналогичные уравнения, где коэффициенты — целые числа, что позволит перейти к самостоятельному решению более сложных примеров.

Дифференцированное обучение.
Поддержка. Учитель записывает на доске несколько рациональных чисел. Ученикам предлагается найти частное суммы этих чисел и их разности, определить, является ли полученное число бесконечной периодической или конечной десятичной дробью. Затем ученики проверяют правильность решений друг друга.
Углубление. Учитель записывает на доске несколько рациональных чисел. Ученикам предлагается составить выражения по различным условиям и найти ответ. Например: отношение суммы этих чисел, умноженной на два, к их разности; половина квадрата разности этих чисел и т. п. Дополнительно можно предложить определить, на какое число нужно умножить полученное значение, чтобы получить целое число, если оно выражено в виде бесконечной периодической десятичной дроби.



15. Обсуждается способ решения, предложенный Анаром.
Учителю рекомендуется задать направляющие вопросы:
– С какой целью Анар умножал число 0,4(5) на 10? Как он записал полученное число в виде обыкновенной дроби? Почему снова разделил на 10? Что он таким образом нашел? Правильность ответа можно проверить разными способами.
1) *Преобразовав бесконечную периодическую десятичную дробь, у которой период начинается через несколько цифр после запятой*

$0,4(5) = \frac{45-4}{90} = \frac{41}{90}$

2) *Составив уравнение*

а) $x = 0,4(5) = 0,455...$

$10x = 4,5...$

$100x = 45,5$

$100x - 10x = \boxed{41}$

$90x = 41$

$x = \frac{41}{90}$

$$\begin{array}{r} -\ 45,555... \\ \underline{4,555...} \\ 41 \end{array}$$

$0,4(5) = \frac{41}{90}$

Решение задач

16. В комнате «Кривые зеркала» развлекательного центра человек в зеркале кажется в 1,(4) раза выше. В задаче требуется определить, каким будет отраженный рост Самира, если его настоящий рост равен 162 см.
Решение задачи
• Вычисляется рост Самира в зеркале.
$162 \cdot 1,(4) = 162 \cdot 1\frac{4}{9} = 162 \cdot \frac{13}{9} = 234$ (см)

Ответ. Самир выглядит в зеркале ростом 234 см.

18. Указывается, что отношение веса тела на Луне к его весу на Земле равно 0,1(6), а отношение веса тела на Марсе к его земному весу равно 0,3(7).

В задаче требуется найти вес космонавта на Луне, если его вес на Земле 800 Н; вес космонавта на Земле, если на Марсе его вес 510 Н.

Решение задачи

• Вычисляется вес космонавта на Луне, если его вес на Земле 800 Н.

$800 \cdot 0{,}1(6) = 800 \cdot \frac{1}{6} = 133{,}(3)$ (Н)

• Вычисляется вес космонавта на Земле, если его вес на Марсе 510 Н.

$510 : 0{,}3(7) = 510 : \frac{37-3}{90} = 510 : \frac{17}{45} = 510 \cdot \frac{45}{17} = 1350$ (Н)

Ответ. 133,(3) Н; 1350 Н

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Преобразует бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную дробь.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Вычисляет значение числовых выражений, содержащих рациональные числа.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение

В учебнике повторяются понятия, приведенные в заключении раздела. Учитель напоминает ученикам слова, изученные в разделе. При назывании каждого понятия ученики объясняют его содержание и приводят примеры.

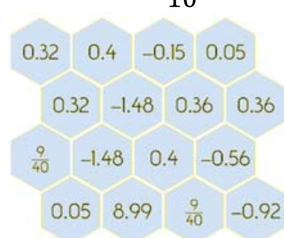
Отрицательные дроби, рациональные числа, множество рациональных чисел (Q), абсолютное значение рационального числа, конечная десятичная дробь, бесконечная периодическая десятичная дробь

Напоминаются сведения, приведенные на первой странице раздела, и задание «Попробуйте!». Обсуждается, как при решении задания использовались действия с рациональными числами, и вместе с классом рассматривается решение исходной задачи.

Практическая работа.

Ученикам раздаются рабочие листы с различными примерами. Задания выполняются, и среди данных чисел выбираются ответы. Таким образом учащиеся решают три примера, связанных с действиями над рациональными числами. За правильный ответ получают 1 балл, за ошибку — теряют 1 балл. Ошибки обсуждаются, анализируются и исправляются. Задание можно выполнять в парах или индивидуально.
В классах с техническими возможностями можно выполнить аналогичное интерактивное задание.
https://www.mathmammoth.com/practice/rational-numbers

$-0{,}8 \cdot \frac{7}{10}$



РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

1. В пустые клетки записываются соответствующие числа.

$\frac{-24}{36} = \frac{\boxed{-2}}{3} = -\frac{10}{\boxed{-15}}$ $\quad \frac{39}{-52} = \frac{\boxed{-3}}{4} = -\frac{9}{\boxed{-12}}$ $\quad -\frac{2}{5} = \frac{\boxed{-8}}{20} = \frac{4}{\boxed{-10}}$ $\quad -\frac{-32}{-48} = -\frac{2}{\boxed{-3}} = \frac{\boxed{-6}}{9}$

2. В соответствии с условием записываются дроби, равные данным числам.

а) Дробь со знаменателем 12.

$\frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{20}{12}$ $\quad \frac{3}{-4} = \frac{3 \cdot (-3)}{-4 \cdot (-3)} = \frac{-9}{12}$ $\quad \frac{-7}{-6} = \frac{-7 \cdot (-2)}{-6 \cdot (-2)} = \frac{14}{12}$ $\quad -3 = \frac{-3 \cdot 12}{12} = \frac{-36}{12}$

Аналогично записываются другие дроби, равные данным числам, со знаменателем, указанным в условии.

3. Данные дроби приводятся к общему знаменателю, рациональные числа сравниваются, и в соответствующую клетку записывается соответствующее число.

а) Требуется найти рациональное число между числами –0,3 и –0,2 с знаменателем 15. Для дробей находится общий знаменатель. НОК(10, 15) = 30. Для данных дробей записываются равные дроби со знаменателем 30.

$-0{,}3 < \frac{\square}{15} < -0{,}2$ $\quad -0{,}3 = \frac{-3}{10} = \frac{-9}{30}$ $\quad -0{,}2 = \frac{-2}{10} = \frac{-6}{30}$

Учитывая, что рациональное число со знаменателем 15 ищется среди рациональных чисел со знаменателем 30, в числителе выбирается четное число между –9 и –6. $\frac{-9}{30} < \frac{-8}{30} < \frac{-6}{30} \rightarrow \frac{-8}{30} = \frac{-4}{15}$

Таким образом, находится число, соответствующее пустой клетке. $-0{,}3 < \frac{\boxed{-4}}{15} < -0{,}2$

4. Числители отрицательных дробей делятся на знаменатель, и числа записываются в виде десятичных дробей. Полученное слово читается.

$-\frac{32}{99}$	$-0{,}3$	$-0{,}3(4)$	$-\frac{32}{90}$
R	K	A	P

Числители отрицательных дробей делятся на знаменатель, и числа записываются в виде десятичных дробей.

$-\frac{32}{99} = -0{,}(32)$ $\quad -\frac{32}{90} = -0{,}3(5)$

$-0{,}(32) = -0{,}3232...$
$-0{,}3 = -0{,}3000...$
$-0{,}3(4) = -0{,}3444...$
$-0{,}3(5) = -0{,}3555...$

Используется правило сравнения рациональных чисел по их модулям.
Числа 0,(32); –0,3; –0,3(4); –0,3(4) записываются с несколькими цифрами после запятой.

Сравниваются соответствующие разряды, и числа располагаются в порядке

$-0{,}3(5);\ 0{,}3(4);\ -0{,}(32);\ -0{,}3$

Полученное слово читается.

$-\frac{32}{90}$	$-0{,}3$	$-\frac{32}{99}$	$-0{,}3(4)$
P	A	R	K

8. Находится значение выражения.

К сведению учителя! При нахождении значения выражений, содержащих несколько действий, рекомендуется напомнить учащимся порядок выполнения действий. Ученики часто испытывают трудности при вычислении, если в числителе и знаменателе дроби встречаются другие дробные выражения или разные операции. В таких случаях следует задавать направляющие вопросы, помогая определить, какое действие выполняется первым. В некоторых случаях порядок выполнения действий не влияет на результат. Рекомендуется показать учащимся примеры таких случаев. Например, задание 8 в) $\frac{\frac{1}{4} - 0{,}5}{0{,}4 - \frac{3}{5}}$. Чтобы найти значение выражения, можно отдельно вычислить числитель и знаменатель, а затем выполнить деление. Показ таких примеров важен для того, чтобы учащиеся научились упрощать выражения с дробями в числителе и знаменателе и избегали ошибок.

10. Определяются числа, соответствующие пустым клеткам.

$0{,}(2) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \rightarrow -\frac{1}{6} + 0{,}5 \rightarrow \frac{1}{3} : \left(-\frac{5}{6}\right) \rightarrow -\frac{2}{5} - (-1{,}4) \rightarrow -1$

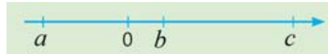
$-5\frac{11}{12} + \frac{2}{3} \rightarrow -5\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \rightarrow -6 : \frac{1}{6} \rightarrow -1 \times (-1) \rightarrow$

11. Для данных значений переменных находится значение выражения.

а) Если a = 0,(4) и $b = -\frac{1}{4}$, вычисляется значение выражения $-\frac{3}{4}a + 0{,}(6)b$.

$-\frac{3}{4} \cdot 0{,}(4) + 0{,}(6) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

13. На координатной оси отмечаются числа a, b, c. $|b| < |a| < |c|$. Согласно данному условию, требуется определить, верны или неверны предложения. Ученики обосновывают свои мысли по каждому предложению, ориентируясь на числовую ось и данное условие. Им также можно предложить объяснить правильность или неправильность предложений на примерах.



а) $a + c > 0$. $|a| < |c|$ и $a < 0$, то по правилу сложения чисел с разными знаками значения выражения $a + c$ больше нуля. *Утверждение верно.*

Пример: если $a = -3$, $c = 5$, то $-3 + 5 = 2 > 0$

б) $a - b < 0$. $a < b$, то при вычитании из меньшего числа большего результат отрицателен. *Утверждение верно.*

Пример: Если $a = -2$, $b = 6$, то $-2 - 6 = -8 < 0$

в) $a + b > 0$. $a < 0$, $|b| < |a|$, то по правилу сложения чисел с разными знаками значения выражения $a + b$ отрицательное. *Утверждение верно.*

Пример: $a = -2$, $b = 1$ $-2 + 1 = -1 < 0$

14. Определяется закономерность и записываются следующие два числа.

а) 2,(1), 3,(2), 4,(3), 5(4) ...

Из 2-го числа вычитается 1-е, из 3-го — 2-е, из 4-го — 3-е

$3,(2) - 2,(1) = 3\frac{2}{9} - 2\frac{1}{9} = 1\frac{1}{9} = 1,(1)$

$4,(3) - 3,(2) = 4\frac{3}{9} - 3\frac{2}{9} = 1\frac{1}{9} = 1,(1)$

$5,(4) - 4,(3) = 5\frac{4}{9} - 4\frac{3}{9} = 1\frac{1}{9} = 1,(1)$

Отмечается, что разности равны. По закономерности записываются следующие два числа.

$5,(4) + 1,(1) = 5\frac{4}{9} + 1\frac{1}{9} = 6\frac{5}{9} = 6,(5)$

$6,(5) + 1,(1) = 6\frac{5}{9} + 1\frac{1}{9} = 7\frac{6}{9} = 7,(6)$

+1,(1) +1,(1) +1,(1) +1,(1) +1,(1)

2,(1) 3,(2) 4,(3) 5,(4) 6,(5) 7,(6)

б) 0,(2), 1,(4), 2,(6), 3,(8) ...

Из 2-го числа вычитается 1-е, из 3-го — 2-е, из 4-го — 3-е

$1,(4) - 0,(2) = 1\frac{4}{9} - \frac{2}{9} = 1\frac{2}{9} = 1,(2)$

$2,(6) - 1,(4) = 1\frac{6}{9} - 1\frac{4}{9} = 1\frac{2}{9} = 1,(2)$

$3,(8) - 2,(6) = 3\frac{8}{9} - 4\frac{6}{9} = 1\frac{2}{9} = 1,(2)$

Отмечается, что разности равны. По закономерности записываются следующие два числа.

$3,(8) + 1,(2) = 3\frac{8}{9} + 1\frac{2}{9} = 4\frac{10}{9} = 5\frac{1}{9} = 5,(1)$

$5,(1) + 1,(2) = 5\frac{1}{9} + 1\frac{2}{9} = 6\frac{3}{9} = 6,(3)$

+1,(1) +1,(1) +1,(1) +1,(1) +1,(1)

0,(2) 1,(4) 2,(6) 3,(8) 5,(1) 6,(3)

К сведению учителя! В задании 14 закономерность можно показать по-разному.

+1 +1 +1 +1 +1

2,(1) 3,(2) 4,(3) 5,(4) 6,(5)

+1 +1 +1 +1 +1

а) Целая и периодическая части у каждого следующего числа увеличиваются на 1. Согласно этому правилу, следующие два числа будут: 6(5), 7(6).

б) Целая часть равна 1, а периодическая часть у каждого следующего числа увеличивается на 2. Однако при попытке найти следующее число по этому правилу возникает трудность, так как сумма периодических частей становится больше 9. Причина в том, что не учитывается сложение периодических десятичных дробей. Например, чтобы избежать ошибки при нахождении значения выражения 3,(8) + 1,(2), целесообразно сначала перевести числа в обыкновенные дроби и затем выполнять сложение.

15. Отмечается, что вершина айсберга находится на 35,5 м выше уровня моря, а отношение высоты над водой к глубине под водой равно 1:9.

Решение задачи

• Определяется расстояние от вершины айсберга до его самой глубокой точки. $35{,}5 \cdot 9 = 319{,}5$ (м)

• Если принять уровень моря за начало отсчета, на числовой оси отмечается координата, соответствующая самой нижней точке айсберга.

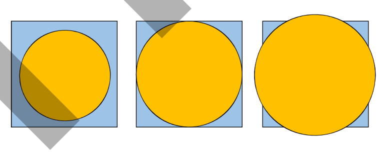
Ответ. Расстояние от вершины айсберга до самой глубокой точки 319,5 м. Если уровень моря принять за начало отсчета, координата самой нижней точки айсберга будет отрицательным числом.

16. Отмечается, что основание коробки представляет собой квадрат со стороной $24\frac{1}{6}$ см. Требуется определить, поместится ли в эту коробку торт цилиндрической формы с диаметром 24,(3) см.

Привелечение. Из цветной бумаги вырезаются три квадратные фигуры одинакового размера и три круга, диаметры которых меньше, равны и больше стороны квадрата.

Учитель обращается к классу:

– Какой круг, если его поместить внутрь квадрата, не будет касаться сторон? Какой круг коснется сторон квадрата? А какой не поместится в квадрате полностью? Можно ли определить это, сравнив диаметры? Как вы это объясните?



Ответы обсуждаются, демонстрируются иллюстрации. В конце отмечается, что если диаметр больше стороны квадрата, круг не помещается внутрь квадрата.

Решение задачи

• Сравниваются сторона квадратной коробки и диаметр основания цилиндра. Оба числа переводятся в десятичную форму. В результате сравнения отмечается, что диаметр цилиндра больше.

$24\frac{1}{6} = 24{,}166...$

$24{,}(3) = 24{,}333...$ $\Rightarrow$ $24\frac{1}{6} < 24{,}(3)$

Тогда торт не помещается в коробку.

Ответ. Торт цилиндрической формы в эту коробку не помещается.

17. В задаче требуется определить, сколько воды выпил Самир, записать это число в виде десятичной дроби и округлить до тысячных.

Решение задачи

• Находится, сколько воды выпил Самир. $\frac{7}{9} - \frac{1}{8} = \frac{56}{72} - \frac{9}{72} = \frac{47}{72}$

• Числитель делится на знаменатель и результат записывается в виде десятичной дроби. Ответ округляется до тысячных. $\frac{47}{72} = 0{,}652(7) \approx 0{,}653$ (*л*)

Ответ. Самир выпил 0,653 *л* воды.

18. В сосуде содержится 40 г соли. Отмечается, что в сосуде осталось 0,(3) его объема соли и для эксперимента требуется 27,5 г соли. Нужно определить, достаточно ли соли в сосуде для проведения эксперимента, и определить, сколько соли достаточно, а сколько — в избытке.

Решение задачи

Определяется количество соли, оставшейся в сосуде. $40 \cdot 0{,}(3) = 13\frac{1}{3}$

Чтобы определить достаточно ли соли для эксперимента сравниваются числа $13\frac{1}{3}$ и 27,5. $13\frac{1}{3} < 27{,}5$ Следовательно, недостаточно.

Вычисляется, сколько не хватает. 27,5 – $13\frac{1}{3}$ = $14\frac{1}{6}$ (г)

Ответ. Соли недостаточно, не хватает $14\frac{1}{6}$ г соли.

19. В мобильном приложении качество услуги доставки оценивается по шкале от –5 до 5. Отмечается, что в течение дня различным курьерам компании пользователи выставили следующие оценки:

2,4 3,6 4 0 –1,24 –1 3,2 –2

Требуется найти среднее арифметическое и обсудить, какой вывод можно сделать о качестве услуги доставки.

Решение задачи

• Находится среднее арифметическое. $\frac{2{,}4 + 3{,}6 + 4 + 0 + (-1{,}24) + (-1) + 3{,}2 + (-2)}{8} = 1{,}12$

• Организуется обсуждение. На основе среднего арифметического баллов, поставленных 8 клиентами, проводится обмен мнениями о качестве услуги доставки курьера. Мнения обобщаются, и можно сделать вывод. Например, услуга среднего уровня. Видно, что качество доставки низкое, и существует необходимость во внедрении новшеств, усовершенствований и изменений. У учеников можно попросить перечислить проблемы и трудности, которые могли снизить качество, и высказать свои мнения о предложениях по их решению. В конце мнения обобщаются. Причиной снижения среднего балла могут быть задержки, повреждение заказа, неправильная доставка, грубое поведение курьера, трудности в связи с колл-центром, сложности при оплате наличными и картой и т. д. Для устранения проблем можно провести анализ, опрос для улучшения качества обслуживания и в итоге устранить недостатки в службе доставки.

Ответ. 1,12; качество услуги доставки низкое.

Математический калейдоскоп

1. Находится значение выражения. В пункте А дано направление для решения, и, продолжая его, находится ответ. Следующий пример выполняется самостоятельно

а) $\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8}=\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}_{\frac{1}{2\cdot3}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{\frac{1}{3\cdot4}}+\underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}_{\frac{1}{4\cdot5}}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}_{\frac{1}{5\cdot6}}+\underbrace{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}}_{\frac{1}{6\cdot7}}+\underbrace{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}_{\frac{1}{7\cdot8}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

б) $\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{5\cdot7}+\frac{2}{7\cdot9}+\frac{2}{9\cdot11}+\frac{2}{11\cdot13}+\frac{2}{13\cdot15}=\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}_{\frac{2}{3\cdot5}}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{7}}_{\frac{2}{5\cdot7}}+\underbrace{\frac{1}{7}-\frac{1}{9}}_{\frac{2}{7\cdot9}}+\underbrace{\frac{1}{9}-\frac{1}{11}}_{\frac{2}{9\cdot11}}+\underbrace{\frac{1}{11}-\frac{1}{13}}_{\frac{2}{11\cdot13}}+\underbrace{\frac{1}{13}-\frac{1}{15}}_{\frac{2}{13\cdot15}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{15}=$

При решении подобных задач нужно обратить внимание на несколько закономерностей. Ученики могут установить связь между полученным ответом, количеством слагаемых, числами в числителе и знаменателе, а также между множителями в знаменателе и числом, записанным в числителе.

2. Требуется определить, в каком мешке вероятность случайно вынутого желтого шарика будет наибольшей.

Для каждого мешка находится вероятность того, что вынутый шарик окажется желтым.

1-й мешок: $\frac{4}{4+4}=\frac{1}{2}$ 2-й мешок: $\frac{9}{9+8}=\frac{9}{17}$

2-й мешок: $\frac{5}{3+5}=\frac{5}{8}$ 1-й мешок: $\frac{7}{7+5}=\frac{7}{12}$

	1-й	2-й	3-й	4-й
Красные шары	4	3	8	5
Желтые шары	4	5	9	7

Вероятность того, что вынутый шар будет желтого цвета $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{9}{17}$ $\frac{7}{12}$

Полученные числа сравниваются. Так как ищется наибольшее значение, и дроби $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$ и $\frac{9}{17}$ больше, чем $\frac{1}{2}$, наибольшая дробь ищется среди этих трех. Чтобы определить, какая из них больше, можно привести дроби к общему знаменателю. Рекомендуется объяснить ученикам и другие способы сравнения таких дробей.

Если из данных дробей вычесть $\frac{1}{2}$, то в полученной разности числители дробей будут равны

$$\frac{5}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8} \qquad \frac{7}{12}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12} \qquad \frac{9}{17}-\frac{1}{2}=\frac{1}{17}$$

Используя правило сравнения дробей с равными числителями, находится ответ.

$$\frac{1}{8}>\frac{1}{12}>\frac{1}{17}$$

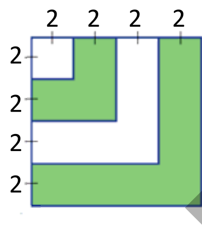
Ответ. Вероятность вынуть один шар желтого цвета из 2-го мешка более высокая.

3. Требуется найти, какой процент от площади всей фигуры составляет площадь зеленой части. Эту задачу можно решить несколькими способами.

1-й способ

Так как площадь малого квадрата равна 4 см², находится его сторона.
Площадь зеленой части находится с использованием разности площадей соответствующих квадратов

$4^2 - 2^2 + 8^2 - 6^2 = 40$ (см^2)

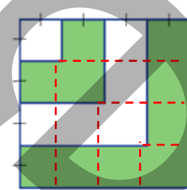


Находится площадь всей фигуры. $8^2 = 64$

Находится, сколько процентов от площади всей фигуры составляет площадь зеленой части. $\frac{40}{64} \cdot 100\% = 62{,}5\%$

2- й способ

Не используя площадь малого квадрата, ответ можно найти следующим образом: фигура делится на равные маленькие квадраты.



Определяется, сколько процентов от всех квадратов составляют зеленые квадраты. $\frac{10}{16} \cdot 100\% = 62{,}5\%$

4. 27 Требуется найти фальшивую монету среди 27 одинаковых металлических монет, сделав всего три взвешивания.

Монеты делятся на три равные группы, по 9 монет в каждой.
Фальшивая монета находится, если трижды применить один и тот же алгоритм.
1-й раз. Монеты из одной группы кладут на одну чашу весов, из другой — на другую.
Возможны два случая.
1) Если одна чаша тяжелее, то фальшивая монета среди монет этой чаши.
2) Если чаши в равновесии, то фальшивая монета среди третьей группы.
При применении этого алгоритма 3 раза: после первого взвешивания из 27 металлических монет остается 9, после второго — 3, а при третьем взвешивании определяется фальшивая монета среди оставшихся 3 металлических монет.
В технически оснащенных классах можно использовать интерактивные задания:
https://demonstrations.wolfram.com/27CoinsBalancePuzzle/
https://www.mathgametime.com/games/coin-weighing

Океанология

Океанология — это наука, изучающая океан и происходящие в его различных частях физические, химические и биологические процессы. Ученикам рассказывается о системах звуковой навигации SONAR. Отмечается, из сокращения каких слов образовано это слово. Подчеркивается, что с помощью этих систем определяется, за какое время звук достигает дна воды и возвращается обратно. Технологии, используемые для измерения глубины в воде, в основном основаны на акустических волнах или электронных сенсорах. Эти технологии применяются в научных исследованиях, судоходстве, подводных исследованиях и гидрологических измерениях.

1. Исходя из того, что скорость звука в воде составляет 1449 м/с, а время, за которое звуковая волна достигает дна океана и возвращается обратно, равно 1,2 секунды, вычисляется, сколько метров составляет глубина. $\frac{1}{2} \cdot 1449 \cdot 1{,}(2) = 885{,}5$ (м)
2. В интернете собирается информация о самых глубоких местах Мирового океана. Определяется, за какое время звук с помощью SONAR достигает дна океана и возвращается обратно.
3. Исследуются технологии, используемые для измерения глубины, и подготавливается презентация. Ученикам рекомендуется предоставить полезные ссылки для изучения этой темы.
https://www.teledynemarine.com/
https://www.hydro-international.com/themes/bathymetric-lidar

2-й РАЗДЕЛ

Степень с натуральным показателем и ее свойства

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	38	
Тема 2.1	Степень с натуральным показателем	2	39	24
Тема 2.2	Умножение и деление степеней	2	42	26
Тема 2.3	Степень произведения и дроби	2	47	29
Тема 2.4	Вычисление сложного процента	2	50	31
	Обобщающий урок. STEAM. “Музыка и математика: Камертон”	2	54	33
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**11**		

Краткий обзор раздела

В разделе ученики научатся вычислять натуральные степени рациональных чисел, находить произведение и частное степеней с одинаковыми основаниями, степень степени, а также возводить в степень произведение и дробь. Они будут находить значение выражений, содержащих степень. Одновременно ученики освоят навыки решения задач, связанных с вычислением сложного процента.

На что стоит обратить внимание?

Некоторые ученики считают, что любая степень отрицательного рационального числа является отрицательным или положительным рациональным числом. Рекомендуется показать ученикам примеры, объясняющие, почему степень с четным показателем дает положительное число, а степень с нечетным показателем — отрицательное.

При вычислении выражений, содержащих степени, следует уделить внимание ученикам, допускающим ошибки в порядке выполнения действий.

Целесообразно показать ученикам примеры вычисления степени рационального числа на калькуляторе.

Следует определить учеников, которые неправильно вычисляют показатели степеней при нахождении произведения или частного степеней с одинаковыми основаниями, а также при возведении степени в степень.

При возведении произведения или дроби в степень ученики иногда забывают возвести в степень один из множителей, числитель или знаменатель, и не обращают внимания на вычисление степени каждого из них. С такими учениками следует повторить правила и показать примеры.

Иногда ученикам бывает трудно определить, используется ли при решении задачи простой или сложный процент.

Можно задать ученикам определить, какой метод является более удобным для решения задач, связанных с вычислением сложных процентов.

Развитие математического языка

Правильное определение понятий «натуральная степень», «показатель степени», «основание степени», «степень рационального числа», «произведение степеней», «частное степеней», «степень степени», «степень произведения», «степень дроби» и «сложный процент» позволяет оценить, насколько хорошо усвоены эти понятия.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Степень рационального числа, произведение степеней, отношение степеней, степень степени, степень произведения, степень дроби и сложный процент

Необходимые предварительные знания и умения:

- Степень натурального числа
- Рациональные числа и действия с ними
- Последовательность действий
- Процент. Вычисление простого процента

Междисциплинарная интеграция

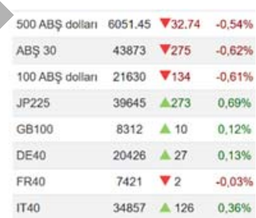
Степень и ее свойства используются для ускорения математических вычислений и повышения точности результатов. Например, в компьютерных программах при расчетах, связанных со скоростью и объемом памяти, а также при вычислении сложных процентов и определении цены, применение степени и ее свойств имеет важное значение. Ученикам демонстрируются примеры, показывающие как с помощью выражений со степенями выражать энергию, работу, скорость и другие величины на уроках физики, а также количество атомов и молекул в химии и биологии. Вычисление сложных процентов также является одной из областей применения степени. Ученики смогут применять полученные в этом разделе знания при решении задач по указанным темам.

ТЕМА 2.1 Степень с натуральным показателем

ПОДСТАНДАРТЫ	7-1.2.1. Выполняет арифметические действия с рациональными числами. 7-1.2.2. Находит натуральную степень рационального числа, применяет свойства степени. 7-1.2.3. Находит значение числового выражения.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Находит натуральную степень рационального числа. • Находит значение выражений, содержащих степень.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/13973* *https://video.edu.az/video/1295* *https://www.mathplayground.com/ASB_Otter_Rush.html* *https://wordwall.net/resource/4398504/math/amados-exponents*

Обсуждение исходной задачи

На первой странице раздела ученикам предоставляется информация о том, в каких областях используется степень рациональных чисел. Подчеркивается, что при вычислении годовых доходов по вкладам в банке, изменяющейся ежегодно стоимости оборудования и автомобилей применяется степень (сложные проценты). Отмечается, что в разделе будет представлена более подробная информация о сложных процентах.

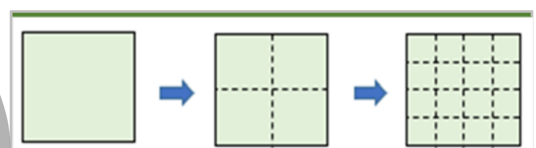


500 ABŞ dollan	6051.45	▼32.74	-0,54%
ABŞ 30	43873	▼275	-0,62%
100 ABŞ dollan	21630	▼134	-0,61%
JP225	39645	▲273	0,69%
GB100	8312	▲10	0,12%
DE40	20426	▲27	0,13%
FR40	7421	▼2	-0,03%
IT40	34857	▲126	0,36%

Задание «Попытайтесь» обсуждается с классом. Ученики, опираясь на ранее усвоенные знания, пытаются ответить на вопросы. Подчеркивается, что после изучения новых знаний и навыков в разделе задание будет вновь обсуждено в конце темы.

Побуждение

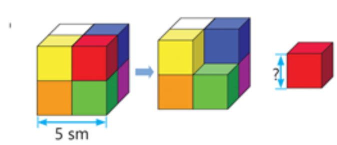
Берётся квадратный лист бумаги и с помощью ножниц делится на 4 равные части. Ученикам предлагается полученные квадраты также разделить на 4 равные части. Ученикам задаются вопросы:



– Сколько получилось маленьких квадратов? Как можно найти площадь исходного квадрата на основе площадей маленьких квадратов? Как это можно сделать с использованием степени? Если сторона маленького квадрата равна 2 см, обсуждаются способы нахождения площади большого квадрата.

Исследование-обсуждение

Отмечается, что из одинаковых по размеру маленьких кубиков составлен большой куб, как показано на рисунке.



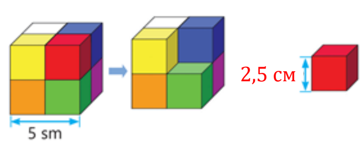
• Если ребро большого куба равно 5 см, вычисляется его объем.

$V_{\text{большой}} = 5^3 = 125$ (см^3)

• Обсуждается, как двумя способами можно найти объем маленького куба.

1-й способ. Учитывая, что большой куб составлен из 8 маленьких кубов, объем большого куба делится на 8 равных частей. $V_{\text{маленький}} = 125 : 8 = 15{,}625$ (см^3)

2-й способ. Находится сторона маленького куба и возводится в куб.



$5 : 2 = 2{,}5$ (см)

$V_{\text{мал}} = (2{,}5)^3 = 15{,}625$ (см^3)

• Отмечается, что площадь полной поверхности куба равна шести площадям одной грани, и вычисляется площадь полной поверхности маленького куба. $S_{\text{полн}} = 6 \cdot (2{,}5)^2 = 37{,}5$ (см^2)

Изучение Степень с натуральным показателем рационального числа

$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множителей}} = a^n$

показатель степени

основание степени

Обсуждаются примеры заданий на запись произведения одинаковых множителей в виде степени. Отмечается, что произведение n одинаковых множителей, равных рациональному числу a, называется степенью числа a с натуральным показателем n. Ученикам разъясняются понятия показатель степени и основание степени. Показывается, что степень отрицательного числа с четным показателем положительна, а с нечетным показателем — отрицательна, приводятся примеры.

$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$ $\qquad$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$

Подумай!

Используя тот факт, что произведение двух отрицательных чисел является положительным числом, на примерах объясняется, что чётные степени противоположных чисел равны, а нечётные степени противоположных чисел являются противоположными числами.

Показывается, что 4-я степень отрицательного числа является положительным числом.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = -\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

Противоположные числа в четной степени равны.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

Показывается, что 3-я степень отрицательного числа является отрицательным числом.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

Противоположные числа в нечетной степени противоположны. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\left(\frac{2}{3}\right)^3$

К сведению учителя!

Использование степеней позволяет кратко, компактно и математически точно записывать очень большие или очень маленькие числа. Такая запись называется научной формой записи (scientific notation).

Рекомендуется ознакомить учеников с тем, что эта форма записи широко применяется в математике, физике, химии, астрономии. С записью малых чисел в виде степеней ученики познакомятся при изучении понятия степени с целым показателем. На данном этапе можно привести примеры записи больших чисел в виде степени, например:

Расстояние между Землей и Солнцем: 1.5×10^8 км; Объем памяти компьютера: $2^{10} = 1024$ (байт) и т. д.

Ложные представления, возникающие у учеников

Иногда ученики забывают, что если основание степени отрицательное число или обыкновенная дробь, его необходимо записывать в скобках. Это может привести к ошибкам в знаках и вычислениях при нахождении степени числа. Поэтому целесообразно приводить примеры, сравнивающие результаты,

	Ложное	Верное
Если основание отриуательное число:	$-1{,}2\cdot(-1{,}2) = -1{,}2^2$	$-1{,}2\cdot(-1{,}2) = (-1{,}2)^2$
Если основание обыкновенная дробь:	$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3^3}{4}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

когда основание степени записано в скобках и когда без скобок.

Задания

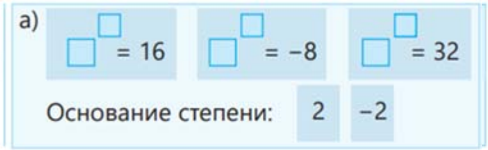
3. Сравниваются. Иногда можно сравнить степени и без вычислений. Например, так как степень отрицательного числа с нечетным показателем — отрицательное число, ученикам можно показать примеры сравнения положительных и отрицательных чисел, степеней с одинаковыми основаниями, а также степеней с одинаковыми показателями без выполнения вычислений.

Показатель степени четное число. Квадрат отрицательного числа положительное число.

$(-0{,}2)^2 > (-0{,}2)^3$

Показатель степени нечетное число. Куб отрицательного числа отрицательное число.

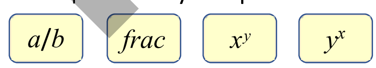
7. Определяется, какие из данных чисел могут быть основаниями степени. Подбирается соответствующий показатель степени.



$(-2)^4 = 16$ $\quad (-2)^3 = -8 \quad 2^5 = 32$

$2^4 = 16$

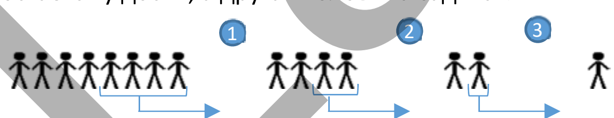
8. Вычисляются степени, числа располагаются в порядке возрастания или убывания.
а) В порядке возрастания: $-5{,}4$; $5{,}4$; $(-5{,}4)^2 = 29{,}16$; $-5{,}4^2 = -29{,}16$.
Чтобы расположить два отрицательных и два положительных числа в порядке возрастания, сначала упорядочиваются отрицательные, затем положительные числа.
$-29{,}16; -5{,}4; 5{,}4; 29{,}16 \rightarrow -5{,}4^2; -5{,}4; 5{,}4; (-5{,}4)^2$.
При выполнении задания ученики должны обращать внимание на вычисление степеней, на то, записано ли основание степени в скобках, а также на порядок расположения отрицательных и положительных чисел. Желательно, чтобы ученики выполняли задание самостоятельно, а учитель наблюдал и организовывал работу над ошибками.
К сведению учителя! Ученики знакомы с порядком вычисления степени целого числа на калькуляторе. Целесообразно кратко напомнить это правило и расширить объяснение с примерами нахождения степени рационального числа. Например, можно пошагово показать, как вводить в калькулятор выражения $0{,}5^3$, $(-1{,}2)^2$, $(\frac{2}{3})^4$ При этом нужно четко показать ученикам, какие кнопки используются и в каком порядке выполняются действия.
Таким образом, ученики лучше усвоят, как находить степень числа с помощью калькулятора.



Отмечается, что в некоторых калькуляторах для ввода дробей используются специальные клавиши «a/b» или «frac», а для обозначения показателя степени — символы “^”, “x^y”, “y^x” или “y^x”. Такой подход помогает ученикам не только освоить разные интерфейсы калькуляторов, но и глубже понять понятие степени на практике.
В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы и калькулятор для объяснения вычислений выражений на научном калькуляторе:
https://youtu.be/Gp_pwaZQbGc *https://www.youtube.com/watch?v=nyJv-Xt1sDY*
https://www.desmos.com/scientific

Решение задач

12. В результате лабораторного исследования установлено, что радиоактивное вещество распадается, и его масса каждые 2 минуты уменьшается вдвое. В задаче требуется найти массу вещества через 2 минуты и через 5 минут, если его начальная масса составляет 64 г, а также определить выражение для вычисления оставшейся массы.
Привлечение. Учитель приглашает к доске 8 учеников. Каждый раз после подсчета половина учеников остается у доски, а другая половина садится.



Учитель задает вопросы ученикам:
– На каком шаге у доски останется 4 ученика? На каком шаге — 2? На каком шаге — 1 ученик? Какое выражение можно записать, чтобы найти ответы?
Обсуждается, как можно было бы ответить на эти вопросы, если бы у доски было 16 или 32 ученика.
Решение задачи
• Находится масса вещества, первоначальная масса которого равна 64 г, через 2 минуты. $64 : 2 : 2 = 16$ или $64 : 2^2 = 16$.
• Чтобы найти массу оставшегося вещества через 5 минут, составляется выражение.

$64 - 5 \cdot 2$ $\quad \boxed{64 : 2^5} \quad$ $64 : 5^2$

• Составляется таблица, с помощью которой определяется, через сколько минут останется 0,5 г вещества.
Определяется выражение для вычисления массы вещества, оставшегося через 5 минут.

Минуты	1	2	3	4	5	6	7
Масса вещества	32	16	8	4	2	1	0,5
	$64 : 2 = 32$	$64 : 2^2 = 16$	$64 : 2^3 = 8$	$64 : 2^4 = 4$	$64 : 2^5 = 2$	$64 : 2^6 = 1$	$64 : 2^7 = 0,5$

Ответ. Через 5 минут осталось 2 г, через 7 минут — 0,5 г вещества.
Обсуждение. Выслушиваются мнения учеников, решивших задачу разными способами.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Находит натуральную степень рационального числа.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Находит значение выражений, содержащих степень.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

ТЕМА 2.2 Умножение и деление степеней

ПОДСТАНДАРТЫ	7-1.2.1. Выполняет арифметические действия с рациональными числами. 7-1.2.2. Находит натуральную степень рационального числа, применяет свойства степени. 7-1.2.3. Находит значение числового выражения.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Находит произведение степеней с одинаковым основанием. • Находит частное, полученное при делении степеней с одинаковым основанием. • Находит значение выражений, содержащих степени.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *http://video.edu.az/video/9045* *https://video.edu.az/video/9382* *https://www.geogebra.org/m/msvursdp* *https://www.geogebra.org/m/gp7wpqbx*

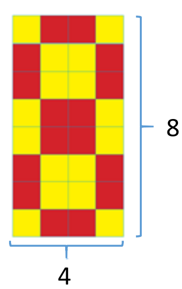
Побуждение

На доске строится таблица, связанная с вычислением степеней. Учитель приглашает учеников к доске. Каждый ученик заполняет по одной строке. Затем учитель обращается к классу:
– Если квадрат числа 2 умножить на 2, степень какого порядка получится? А если куб? Как, зная квадрат и куб числа 2, можно найти 2^5 и 2^6?
Используя значения в таблице, ученикам можно предложить вычислить 2^8, 2^9, 2^{10}.
Целесообразно обсудить с классом различные способы решения, предложенные учениками.

Степень	Повторное умножение	Значение выражения
2^1	2	2
2^2	$2 \cdot 2$	4
2^3	$2 \cdot 2 \cdot 2$	8
2^4	...	
2^5		
2^6		
2^7		

Исследование-обсуждение

Самир использовал квадраты со стороной, равной единице, чтобы сложить прямоугольную мозаику.



• Внимание обращается на рисунок, и обсуждается, как записать стороны фигуры в виде степеней числа 2, чтобы найти ее площадь.

$8 \cdot 4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{8} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{4} = 2^3 \cdot 2^2 = 32$

• Для выражения площади фигуры через степени можно использовать разные способы.
Можно показать, что $32 = 2^5$, записав числа 4 и 8 как произведение одинаковых множителей.
$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

Изучение Умножение степеней с одинаковыми основаниями

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m} = a^{m+n}$$

Отмечается, что для упрощения записи и вычисления выражений, содержащих степени, используют свойства степеней. При умножении степеней с одинаковым основанием основание остается тем же, а показатели складываются. Вывод формулы для умножения двух степеней с одинаковым основанием обсуждается с классом.

Подумай!

Для записи произведения $a^n \cdot a^m \cdot a^k$ в виде степени числа a обращается внимание на то, как получается равенство $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. По этому же правилу записывается и произведение трех степеней с одинаковым основанием.

$$3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^5 = \underbrace{(3 \cdot 3)}_{2\text{ множ}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{4\text{ множ}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{5\text{ множ}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 3}_{2+4+5=11\text{ множ}} = 3^{2+4+5} = 3^{11}$$

Затем записывается буквенное выражение, показывающее произведение $a^n \cdot a^m \cdot a^k$ в виде степени числа a.

$$a^n \cdot a^m \cdot a^k = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{k} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n+m+k} = a^{n+m+k}$$

Для классов с техническими возможностями можно использовать интерактивные игры: *https://www.quia.com/rr/180013.html*

Задания

6. Требуется устно сравнить данные выражения.

а) 5^5 и $5^4 \cdot 5^3$
5^5 и 5^7

Выражение 5^7 произведение семи множителей 5, а 5^5 произведение пяти множителей 5. Следовательно, $5^5 < 5^7$

в) $(-3)^2 \cdot (-3)^3$ и $(-3)^4$
$(-3)^5$ и $(-3)^4$

Выражение $(-3)^5$ отрицательное, а $(-3)^4$ положительное. Следовательно, $(-3)^5 < (-3)^4$

К сведению учителя! При устном сравнении важно учитывать несколько случаев. Рекомендуется напомнить их ученикам и привести примеры.

1) *Значения данных выражений имеют противоположные знаки*.

В случае различных знаков можно сравнивать без вычислений, зная, что положительное число больше

2) *Значения данных выражений имеют одинаковые знаки*. Обращается внимание на степени с одинаковыми основаниями. Если основание больше единицы, ученики могут определить, что выражение с большим показателем степени имеет большее значение. Рекомендуется привести примеры случаев, когда основание меньше единицы, и задать ученикам сравнить такие выражения. Можно сообщить ученикам, что в дальнейшем они получат более подробную информацию об этом

8. Для того чтобы равенство было верным, в пустые клетки записываются соответствующие числа.

$2^{\boxed{3}} \cdot 2^2 = 2^5$ $\quad 5 \cdot 5^{\boxed{3}} = 5^4$ $\quad 0{,}3^2 \cdot 0{,}3^5 = 0{,}3^{\boxed{7}}$ $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\boxed{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$ $\quad 4^3 \cdot 4^3 = 4^5 \cdot 4^{\boxed{1}}$

Изучение Деление степеней с одинаковыми основаниями

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}^{n} \cdot \overbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}^{m-n}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}} = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m-n} = a^{m-n}$$

Отмечается, что выражения, содержащие частные степеней с одинаковым основанием, также можно упростить. При делении степеней с одинаковым основанием основание остается тем же, а показатели вычитаются. Ученикам объясняется общее правило и показываются примеры. Вывод формулы для деления степеней с одинаковым основанием обсуждается с классом. Отмечается, что здесь $m > n$, $a \neq 0$.

• С помощью правила деления степеней с одинаковым основанием объясняется, что $a^0 = 1$ ($a \neq 0$). Также отмечается, что поскольку $a^n : a^n = 1$, принимается, что $a^0 = 1$. Это можно пояснить и на примере последовательного деления степени числа а на а.

В каждой строке показатель степени уменьшается на 1.

$$\begin{aligned} a^3 &= a \cdot a \cdot a \quad &:a \\ a^2 &= a \cdot a \quad &:a \\ a^1 &= a \quad &:a \\ a^0 &= 1 \end{aligned}$$

Показатель степени в каждой строке делится на а.

Для классов с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы:
https://video.edu.az/video/9638

К сведению учителя! Иногда ученики, считая, что любое число в нулевой степени равно 1, ошибочно думают, что $0^0 = 1$. Важно объяснить ученикам, что 0^0 не определено. На приведённых примерах можно показать, что по одной закономерности 0^0 должно быть равно 1, а по другой равно 0. Поскольку возникает противоречие, считается, что 0^0 не определено.

$3^0 = 1$	$0^3 = 0$
$2^0 = 1$	$0^2 = 0$
$1^0 = 1$	$0^1 = 0$
$0^0 = ?$	$0^0 = ?$

Это можно обосновать и иначе. По свойствам степеней можно записать:

$0^0 = 0^{n-n} = \frac{0^n}{0^n} = \frac{0}{0}$

Так как полученное выражение является неопределённостью, подчёркивается, что 0^0 не определено.

13. В пустые клетки записываются соответствующие числа.

a) $7^{\boxed{11}} \cdot 7^8 = 7^{19}$ c) $8^{17} : 8^{\boxed{16}} = 8$ e) $11^{17} : 11^{\boxed{7}} = 11^{22} : 11^{12}$

Изучение **Возведение степени в степень**

Иногда основание степени само является степенью некоторого числа. В этом случае выражение можно записать в виде степени этого числа. Ученикам объясняется, что при возведении степени в степень основание остается тем же, а показатели перемножаются. Для закрепления темы приводятся примеры.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n}} = a^{m \cdot n}$$

Подумай!

Чтобы обосновать равенство $((a^m)^n)^k = a^{mnk}$ обращается внимание на то, как получается равенство $(a^m)^n = a^{mn}$. Используя это правило, сначала выражается показывается для числового выражения. А затем выражение $((a^m)^n)^k$ записывается в виде степени.

$((3^2)^3)^2 = (\underbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}_{3\ \text{множ}})^2 = \underbrace{3^{2 \cdot 3} \cdot 3^{2 \cdot 3}}_{2\ \text{множ}} = 3^{2 \cdot 3 \cdot 2}$

$((a^m)^n)^k = (\underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n})^k = \underbrace{a^{mn} \cdot a^{mn} \cdot \ldots \cdot a^{mn}}_{k} = a^{mnk}$

Для классов с техническими возможностями можно использовать интерактивные игры:
https://www.geogebra.org/m/gp7wpqbx

17. Ученикам напоминается, что при делении делитель не должен быть равен нулю, и выражения упрощаются. Целесообразно спросить у учеников, какие свойства степеней использовались при упрощении.

19. Чтобы записать число 2^{24} в виде степени с заданным основанием, ученикам напоминают свойства степеней.

а) $2^{24} = (2^2)^{12}$

е) Сначала число 64 записывается в виде степени числа 2: $64 = 2^6$.

Тогда 2^{24} записывается в виде степени с основанием 2^6: $2^{24} = (2^6)^4$

К сведению учителя! В 7 классе одной из новых для учеников рубрик является «Исправь ошибку!». Учителю рекомендуется напомнить о ней, ссылаясь на раздел «Познакомьтесь с учебником».

Цель рубрики — показать ученикам наиболее частые ошибки по теме. Сначала задания выполняются индивидуально, затем проводится обсуждение с классом. Следует отметить, что в каждом примере этой рубрики допущена определенная ошибка.

Исправь ошибку!

Ошибки определяются, ученики объясняют, почему они возникли, и вносят исправления.

$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$ — *При нахождении произведения степеней с одинаковыми основаниями*
$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ — *показатели степеней не перемножаются, а складываются*

$5^4 \cdot 5^3 = (5+5)^{4+3} = 10^7$ — *При нахождении произведения степеней с одинаковыми основаниями*
$5^4 \cdot 5^3 = 5^{4+3} = 5^7$ — *основания не складываются, остаются прежними, а показатели степеней складываются.*

$(7^3)^2 = 7^{3+2} = 7^5$
$(7^3)^2 = 7^{3 \cdot 2} = 7^6$ — *При возведении степени в степень показатели не складываются, а перемножаются*

22. Решаются уравнения. Отмечается, что неизвестное не связано с основанием и показателем степени. При решении таких уравнений с использованием свойств натуральных степеней учащиеся испытывают трудности при нахождении неизвестного. Чтобы устранить эти трудности, рекомендуется давать простые задания, связанные с нахождением неизвестного множителя, делимого и делителя.

f) $x \cdot 9^{17} \cdot 9^{13} = 9^{32}$
$x \cdot 9^{30} = 9^{32}$
$x = 9^{32} : 9^{30}$
$x = 9^2$
$x = 81$

Дифференцированное обучение.
Поддержка. На столе раскладываются карточки с буквами A, B, C и D. Учитель задает вопросы:
– Во сколько раз число A меньше числа B? Чему равно произведение чисел A и C?

A	B	C	D
16	$4 \cdot 2^5$	$5 \cdot 2^4$	2^{10}

Углубление. На столе раскладываются карточки с буквами A, B, C и D. Учитель задает вопросы:
– Во сколько раз число A меньше числа C? Во сколько раз наибольшее число больше наименьшего? Во сколько раз произведение чисел A и B меньше D? Что больше: $A \cdot C$ или $B \cdot D$?

A	B	C	D
243	54	$6 \cdot 3^4$	3^{10}

Ученики отвечают на вопросы, объясняя решение с использованием свойств степеней.

Решение задач

23. Подчеркивается, что из каждой из двух труб в пустой бак за одну минуту поступает 2^4 *л* воды. Учитывая, что обе трубы работают одновременно, требуется найти, сколько воды наливается в бак за одну минуту и за сколько минут заполнится пустой бак объемом 2^{13} *л*.

Решение задачи

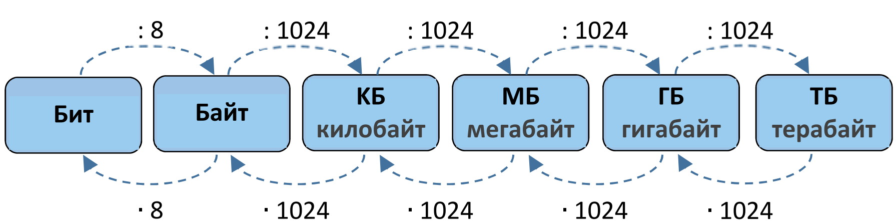
• Находится, сколько воды поступит в бак за 1 минуту, если обе трубы работают одновременно.
$2^4 + 2^4 = 2 \cdot 2^4 = 2^5$ или $2^4 + 2^4 = 16 + 16 = 32$ (*л*)

• Вычисляется, за сколько минут наполнится пустой бак объемом 2^{13} литров, если обе трубы работают одновременно.
$2^{13} : 2^5 = 2^8 = 256$ (мин).

Ответ. 32 *л*; 256 минут.

25. Ученикам дается информация об объеме запоминающих устройств компьютера.
Обращается внимание на рисунок, требуется ответить на вопросы.

Привлечение. В классе дается информация о единицах измерения объема памяти. Демонстрируется схема преобразования между единицами.



Учитель задает вопросы:

– Как записать числа 8 и 1024 в виде степеней числа 2? Сколько байт в 8 битах? Как найти, сколько байт в 32 КБ? Можно ли записать ответ в виде степени числа 2? На какую степень числа 2 нужно умножить, чтобы перевести мегабайты в байты?

Решение задачи

•Определяется, сколько байт составляет общий объем диска С: 512 ГБ переводится в байты. $512 \cdot 2^{30} = 2^{9} \cdot 2^{30} = 2^{39}$ (байт)

Определяется, сколько байт составляет свободное место диска С: 128 ГБ переводится в байты. $128 \cdot 2^{30} = 2^{7} \cdot 2^{30} = 2^{37}$ (байт)

Ответ. 2^{39} байт; 2^{37} байт

Обсуждение. Выслушиваются мнение учеников, решившие задачу разными способами.

К сведению учителя! Рекомендуется повторить знания учеников о диске С. “Основная информация на компьютерах обычно хранится на диске С. Этот диск является основной частью, где расположена операционная система (например, Windows) и другие программы. Объем памяти компьютера — то есть общий объем и количество оставшегося свободного места — имеет большое значение для его работы.”

Такое дополнительное объяснение поможет учащимся не только вспомнить сведения о памяти компьютера, но и лучше понять решение задачи с использованием степеней. В классах с техническими возможностями рекомендуется продемонстрировать на проекторе информацию о диске С компьютера.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Находит произведение степеней с одинаковым основанием.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Находит частное, полученное при делении степеней с одинаковым основанием.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Находит значение выражений, содержащих степени.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

ТЕМА 2.3 Степень произведения и дроби

ПОДСТАНДАРТЫ	7-1.2.1. Выполняет арифметические действия с рациональными числами. 7-1.2.2. Находит натуральную степень рационального числа, применяет свойства степени. 7-1.2.3. Находит значение числового выражения.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Возводит произведение в степень. • Находит произведение степеней с одинаковыми показателями. • Возводит дробь в степень.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/9216* *https://video.edu.az/video/9312* *https://video.edu.az/video/9382* *https://video.edu.az/video/9385* *http://www.math-play* [illegible] *tm*

Побуждение

На доске строится таблица, связанная с вычислением степени произведения. Учитель приглашает учеников к доске. Каждый ученик заполняет по одной строке. Затем учитель обращается к классу:

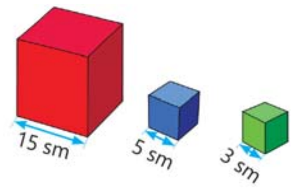
Произведене	**Повторное умножение**	**Значение выражения**
$2^1 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	6
$2^2 \cdot 3^2$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2$	36
$2^3 \cdot 3^3$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$	8
$2^4 \cdot 3^2$	...	
$2^4 \cdot 3^4$		

– Какое из выражений является полным квадратом, а какое — полным кубом? Как это определить, не вычисляя ответ?

Исследование-обсуждение

Требуется показать, как можно определить, во сколько раз объем куба с длиной ребра 15 см больше объемов кубов с длинами ребер 5 см и 3 см, используя степень. Если длина ребра одного куба равна b, а другого 2b, ученикам предлагается найти, во сколько раз отличаются их объемы.

Чтобы определить, во сколько раз объем куба с длиной ребра 15 см больше объема куба с длиной ребра 5 см, ученики могут использовать несколько способов.



Вычисляя объемы кубов

$V_{\text{красн}} = 15^3 = 3375$ $\quad V_{\text{син}} = 5^3 = 125$ $\quad V_{\text{зел}} = 3^3 = 27$

$3375 : 125 = 27$ $\quad 3375 : 27 = 125$

Записывая объемы кубов в виде произведений множителей

$\frac{\cancel{15}^{5} \cdot \cancel{15}^{5} \cdot \cancel{15}^{5}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ $\quad \frac{15 \cdot 15 \cdot 15}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Каждый объем куба выражается в виде куба числа, и составляется выражение для нахождения ответа делением.

Записывая объемы кубов в виде степени

$V_{\text{красн}} = 15^3$ (см^3) $\quad V_{\text{син}} = 5^3$ (см^3) $\quad V_{\text{зел}} = 3^3$ (см^3)

$15^3 : 3^3 = 125$ $\quad 15^3 : 5^3 = 27$

Ученики отмечают, что объем куба с длиной ребра 15 см больше объема куба с длиной ребра 3 см в 125 раз, а объема куба с длиной ребра 5 см — в 27 раз.

- Чтобы найти, во сколько раз отличается объем куба с длиной ребра b от куба с длиной ребра 2b, вычисляют объем каждого куба и делят больший объем на меньший.

$(2b)^3 : b^3 = 8b^3 : b^3 = 8.$

- Для установления связи между отношением длин ребер кубов и отношением их объемов ученики сначала рассматривают изображенные кубы, а затем пример, данный с буквенными обозначениями.

$15 : 3 = 5 \quad 5^3 = 125 \qquad 15 : 5 = 3 \quad 3^3 = 27$

$2b : b = 2 \quad 2^3 = 8.$

Они приходят к выводу, что отношение объемов кубов равно кубу отношения длин их ребер.

Изучение Возведение произведения в степень

Подчеркивается, что степень произведения двух чисел равна произведению их степеней, и приводится пример. Чтобы вычислить степень произведения, каждое из множителей возводится в данную степень, а результаты перемножаются. Ученикам объясняется, что для нахождения произведения одинаковых степеней сначала перемножаются основания, а затем полученное произведение возводится в ту же степень.

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n} = a^n \cdot b^n$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы: *https://video.edu.az/video/9358*

Подумай!

Для обоснования равенства $(a \cdot b \cdot c)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$ внимание обращается на то, как получается равенство $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ Тем же способом записывается выражение для нахождения степени произведения трех чисел.

$$(a \cdot b \cdot c)^n = \underbrace{(a \cdot b \cdot c) \cdot (a \cdot b \cdot c) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b \cdot c)}_{n} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n} \cdot \underbrace{(c \cdot c \cdot \ldots \cdot c)}_{n} = a^n \cdot b^n \cdot c^n$$

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные игры:
https://www.geogebra.org/m/hmcncrna

Задания

4. В пустые клетки вписываются соответствующие числа.

$4^{\boxed{4}} \cdot 3^4 = 12^4$ $\qquad 20^{\boxed{3}} = 4^3 \cdot 5^3$ $\qquad (-0{,}3)^7 \cdot 10^7 = \boxed{-3}^{\,7}$ $\qquad 0{,}5^5 \cdot \boxed{2}^{\,5} = 1$

Изучение **Возведение дроби в степень**

Отмечается, что при возведении дроби в степень используется определение степени и правило умножения дробей. Пример объясняется ученикам, при возведении дроби в степень числитель и знаменатель возводятся в данную степень. Этот процесс обсуждается с учениками. Также показывается, что верно и обратное правило.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n}} = \frac{a^n}{b^n},\ b\neq 0$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\ b\neq 0$$

6. Показатель степени записывается в виде дроби. Отмечается, что при этом используются свойства степеней и дробей.

a) $\left(\frac{7}{6}\right)^{17} = \frac{7^{17}}{6^{17}}$ b) $\left(\frac{3}{-5}\right)^6 = \frac{3^6}{(-5)^6} = \frac{3^6}{5^6}$ f) $\left(\frac{-y}{7}\right)^6 = \frac{(-y)^6}{7^6} = \frac{y^6}{7^6}$

7. В пустые клетки вписываются соответствующие числа и переменные.

$\frac{8^3}{24^3} = \left(\frac{\boxed{1}}{3}\right)^3$ $\left(\frac{6}{\boxed{8}}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5}$ $\frac{m^6}{5^3} = \left(\frac{m^{\boxed{2}}}{5}\right)^3$

$\frac{8^3}{24^3} = \left(\frac{8}{24}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3$ $\frac{3^5}{4^5} = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{6}{8}\right)^5$ $\frac{m^6}{5^3} = \left(\frac{m^2}{5}\right)^3$

9. Проводятся вычисления.

k) $\frac{5^{12}\cdot 2^{12}}{2^{10}\cdot 5^8\cdot 25} = \frac{5^{12}\cdot 2^{12}}{2^{10}\cdot 5^8\cdot 5^2} = 5^2\cdot 2^2 = 100$ j) $\frac{6^8\cdot 5^4}{9^4} = \frac{2^8\cdot 3^8\cdot 5^4}{(3^2)^4} = \frac{2^8\cdot 3^8\cdot 5^4}{3^8} = 2^8\cdot 5^4 = 2^4\cdot 2^4\cdot 5^4 = 160000$

К сведению учителя! Обучение учащихся целесообразному и удобному использованию свойств степеней очень важно для ускорения вычислений и развития логического мышления. Можно привести примеры рационального применения свойств степеней. Например:

$2^4\cdot 5^4 = 10^4 = 10000$ $2^8\cdot 5^4 = 2^4\cdot 2^4\cdot 5^4 = 160000$

Исправь ошибку!

$3^2\cdot 5^2 = (3\cdot 5)^{2+2} = 15^4$
$3^2\cdot 5^2 = (3\cdot 5)^2 = 15^2$

При нахождении произведения квадратов чисел результат возводится не в степень, равную сумме показателей, а в квадрат..

$2^3\cdot 7^3 = (2+7)^3 = 9^3$
$2^3\cdot 7^3 = (2\cdot 7)^3 = 14^3$

При нахождении произведения кубов чисел возводится не сумма оснований, а произведение — в куб.

$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}a^2$
$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}a^2$

При нахождении квадрата произведения вычисляется квадрат каждого множителя

$\left(-\frac{a}{3}\right)^4 = -\frac{a^4}{81}$
$\left(-\frac{a}{3}\right)^4 = \frac{a^4}{81}$

При возведении дроби в степень числитель и знаменатель возводятся в данную степень. Степень числа с показателем 4 всегда положительна.

Дифференцированное обучение.

Поддержка. Учитель раздает ученикам рабочие листы. Ученики объясняют правильность равенств и обосновывают, какие свойства степеней при этом использовались.

$(3\cdot 6)^2 = (3^2\cdot 2)^2$	$(4\cdot 6)^3 = 2^9\cdot 3^3$
$\frac{2^3\cdot 3^2}{81} = \frac{8}{9}$	$\frac{(-12)^3}{27} = -64$

Углубление. Учитель приглашает к доске двух учеников. Они объясняют правильность равенств и указывают, какие свойства степеней использовались, а также показывают, какой способ решения является более удобным.

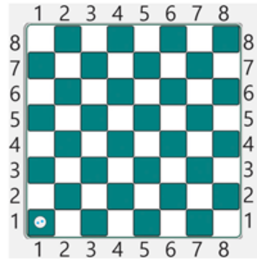
$(3\cdot 6\cdot 8)^2 = (3^2\cdot 2^4)^2$	$(4\cdot 5\cdot 6)^3 = 2^9\cdot 15^3$
$\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 6}{81} = 5\frac{1}{3}$	$\frac{(-2)^5\cdot 0{,}25}{4} = -2$

Решение задач

12. В задаче, основанной на игре Лалы и Самира, требуется ответить на вопросы согласно правилам игры.

Решение задачи

• По правилам вычисляется, сколько пуговиц находится в клетке (2; 5).
$(2 \cdot 5)^2 = 10^2 = 100$.
• Определяются клетки, в которых находится 64 пуговицы.



Найти такие числа a и b, чтобы в клетке (a; b) было 64 пуговицы. По правилам игры $(a \cdot b)^2 = 64 \rightarrow a \cdot b = 8$
Записываются координаты соответствующих клеток: (1; 8), (2; 4), (4; 2) и (8; 1)
• В клетке (a; b) количество пуговиц определяется по формуле $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$.
• Определяется, во сколько раз количество пуговиц в клетке (4; 8) больше, чем в клетке (2; 4).
$\frac{(4 \cdot 8)^2}{(2 \cdot 4)^2} = (\frac{4 \cdot 8}{2 \cdot 4})^2 = 4^2 = 16$
Ответ. количество пуговиц в клетке (4; 8) больше, чем в клетке (2; 4), в 16 раз.
В классах с техническими возможностями можно показать ученикам объяснение решения аналогичной задачи:
https://video.edu.az/video/13973

Формативное оценивание

Критерии оценивания	**Материалы оценивания**
Возводит произведение в степень.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Находит произведение степеней с одинаковыми показателями.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Возводит дробь в степень.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

ТЕМА 2.4. Вычисление сложного процента

ПОДСТАНДАРТЫ	7-1.2.3. Находит значение числового выражения. 7-1.2.5. Решает простые задачи, связанные со сложными процентами.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Находит цену после увеличения, вычисляя сложный процент. • Находит цену после скидки, вычисляя сложный процент. • Решает задачи, связанные с вычислением сложного процента.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/1254* *https://www.geogebra.org/m/cfxyfwhg* *https://youtu.be/jTW777ENc3c* *https://youtu.be/lNK95khKvSk* *http://www.slidermath.com/wjava/Interest.shtml*

Побуждение
Учитель приглашает к доске двух учеников. Одному из учеников поручается увеличить число на 10%, а затем полученное число ещё раз увеличить на 10%; другому — увеличить число два раза по 10%. Полученные результаты обсуждаются.

Исследование-обсуждение

Клиент хочет положить в банк 10 000 манат на срок 2 года. Банк предлагает два варианта.

1. Ежегодный прирост составляет 10% от первоначальной суммы вклада.
2. Ежегодный прирост составляет 10% от суммы, находящейся на счете в конце предыдущего года.
• Требуется определить, какой вариант принесет клиенту больший доход через два года, и сколько денег будет на его счету в этом случае.
Доход по каждому варианту рассчитывается за 2 года.

Доход	1 гд	2 года	Итого
1.	$10000 \cdot 0,1 = 1000$	$10000 \cdot 0,1 = 1000$	$1000 + 1000 = 2000$
2.	$10000 \cdot 0,1 = 1000$	$11000 \cdot 0,1 = 1100$	$1000 + 1100 = 2100$

Если клиент выберет второй вариант, его доход за два года будет больше.
• При этом на счету клиента будет:

1. 10000 + 2000 = 12000
2. 10000 + 2100 = 12100

Изучение Вычисление сложного процента

Подчеркивается, что если сумма вклада в банке увеличивается через год на определенный процент, то во второй год увеличение происходит уже на сумму, полученную в конце первого года, а в третий год — на сумму в конце второго года. Это называется вычислением сложного процента. Рассматривается пример и обсуждаются различные способы его решения.

Года	Сумма денег на счету в начале года (₼)	Прирост (₼)	Сумма денег на счету в конце года (₼)
1	2000	10% от 2000 ➡ $\frac{2000 \cdot 10}{100} = 200$	2000 + 200 = 2200
2	2200	10% от 2200 ➡ $\frac{2200 \cdot 10}{100} = 220$	2200 + 220 = 2420
3	2420	10% от 2420 ➡ $\frac{2420 \cdot 10}{100} = 242$	2420 + 242 = 2662

1-ci il. $2000 \cdot 1{,}1 = 2200$ (₼)
2-ci il. $(2000 \cdot 1{,}1) \cdot 1{,}1 = 2000 \cdot 1{,}1^2 = 2420$ (₼)
3-cü il. $(2000 \cdot 1{,}1^2) \cdot 1{,}1 = 2000 \cdot 1{,}1^3 = 2662$ (₼)

Выражение $2000 \cdot 1{,}1^3$ можно вычислить с помощью научного калькулятора, нажимая на кнопки в этой последовательности.

2 0 0 0 × 1 , 1 x^y 3 =

Ученикам объясняется, как с помощью калькулятора решать примеры на вычисление сложного процента с использованием степеней. Приводятся несколько примеров. В классах с техническими возможностями, можно использовать видеоматериалы и онлайн-калькуляторы:

https://video.edu.az/video/1254 *https://www.geogebra.org/m/txsfesp7*

Запомни!

Отмечается, что в отличие от простого процента, сложный процент изменяется каждый год. Для учеников рекомендуется показать соответствующие примеры.
В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы:
https://youtu.be/79HS3N1IBt8 *https://youtu.be/qX5eHj0VQII*

Задания

2. В городе с населением 200000 человек каждый год число жителей увеличивается на 3% по сравнению с предыдущим годом. Требуется вычислить, сколько человек будет в городе через три года. С помощью степеней вычисляется численность через 3 года. $200000 \cdot 1{,}03^3 = 2\,185\,454$. Выслушиваются мнения учеников, решивших разными способами.

Запомни!

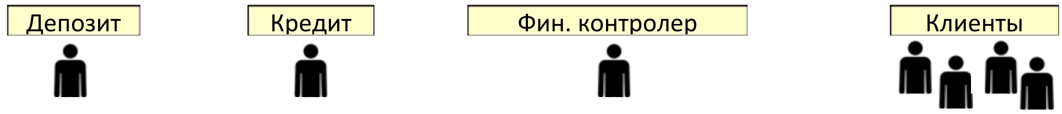
Отмечается, что иногда величина ежегодно уменьшается на определенный процент от предыдущего значения, и новая величина также вычисляется по сложному проценту. Обсуждается решение примера разными способами.

Года	Цена автомобиля в начале года (₼)	Уменьшение (₼)	Цена автомобиля в конце года (₼)
1	30 000	10% от 30 000 ➡ $\frac{30\,000 \cdot 10}{100} = 3000$	30 000 – 3000 = 27 000
2	27 000	10% от 27 000 ➡ $\frac{27\,000 \cdot 10}{100} = 2700$	27 000 – 2700 = 24 300
3	24 300	10% от 24 300 ➡ $\frac{24\,300 \cdot 10}{100} = 2430$	24 300 – 2430 = 21 870

1-ci il. $30\,000 \cdot 0{,}9 = 27\,000$ (₼)
2-ci il. $(30\,000 \cdot 0{,}9) \cdot 0{,}9 = 30\,000 \cdot 0{,}9^2 = 24\,300$ (₼)
3-cü il. $(30\,000 \cdot 0{,}9^2) \cdot 0{,}9 = 30\,000 \cdot 0{,}9^3 = 21\,870$ (₼)

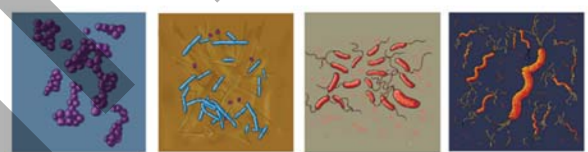
Деятельность. Симуляция денежного оборота

Определяются процентные ставки по вкладам и кредитам. Среди учеников распределяются роли: «депозит», «кредитополучатель» и «финансовый контролер», им даются инструкции.
К доске приглашаются 3 ученика и назначаются на соответствующие роли. Затем учитель предлагает другим ученикам роль «клиентов» и приглашает их наблюдать и участвовать в процессе. Ученикам выдаются ресурсы (карточки, фальшивые деньги и т.п.).



Учитель объясняет правила:
Клиент подходит к столу депозитов и сообщает, что вносит в банк определенную сумму. Ученик за столом депозитов принимает депозит и рассчитывает доход по процентам. Другой клиент подходит к столу кредитов и просит кредит для предпринимательских целей. Ученик за столом кредитов выдает соответствующую сумму и рассчитывает общую сумму возврата с процентами. Финансовый контролер проверяет оба расчета и подтверждает правильность или делает исправления.
Учитель обращается к классу:
– Если вкладчик положил 200 манат под 10% годовых, какой будет его доход в конце года?
Клиент берет кредит в размере 1000 манат под 15% годовых. Какова будет его общая задолженность банку?
Проверь расчет на столе депозитов: 500 манат, 12%. Верен ли расчет процентов? Почему?
Если депозит и кредит рассчитываются не ежегодно, а каждый год с учетом 10% от предыдущего года, как можно найти ответы?
Ответы на вопросы обсуждаются с классом.

Решение задач



5. В определенной среде количество микроорганизмов увеличивается каждый час на 10% по сравнению с предыдущим. Требуется вычислить, сколько будет микроорганизмов через три часа, если изначально их было 100000. Для этого ученики поочередно вычисляют количество через 1 час, 2 часа и 3 часа.
$100000 \cdot 1{,}1^3 = 133100$
Ответ. Через три часа количество микроорганизмов составит 133100.
Обсуждение. Выслушиваются мнения учеников, решивших задачу разными способами.
8. В задаче говорится, что в магазине продаются обои типов А и В.
Записывается краткое условие задачи.

Обои типа А:
Цена за 1 рулон – каждый месяц на 20% дороже предыдущего.
Цена через два месяца – 144 ман.

Обои типа В:
Цена за 1 рулон – каждый месяц на 20% дороже предыдущего.
Цена через два месяца – 168 маната

Решение задачи
• Определяется, какая из исходных цен выше.

Пусть начальная цена одного рулона обоев типа А равна x.
$x \cdot 1{,}2^2 = 144$
$x = 144 : 1{,}44$
$x = 100$

Пусть начальная цена одного рулона обоев типа В равна y.
$y \cdot 1{,}4 = 168$
$y = 168 : 1{,}4$
$y = 120$

Ответ. Начальная цена обоев типа В больше.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Находит цену после увеличения, вычисляя сложный процент.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Находит цену после скидки, вычисляя сложный процент.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Решает задачи, связанные с вычислением сложного процента.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение

Понятия, приведенные в заключении раздела учебника, повторяются с учениками. Учитель напоминает ученикам слова, изученные по разделу. Когда каждое понятие произносится, ученики объясняют его содержание и приводят примеры.

Рациональное число в степени, основание степени, показатель степени, произведение степеней, частное степеней, степень степени, степень произведения, степень дроби, сложный процент

На первой странице раздела вспоминается информация о значении натуральных степеней, сферах их применения и задание «Попытайтесь!». Обращается внимание на то, как в решении задания использовались натуральные степени. Решение исходной задачи обсуждается с классом.

Практическое задание

Класс делится на группы. Каждой группе выдаются несколько строк из рабочего листа. Учитель может подготовить дополнительные аналогичные задания. Ученики отмечают в своих рабочих листах выражения, значения которых равны в каждой строке. Группа, выполнившая задание быстрее и правильнее, объявляется победителем.

Рабочий лист можно скачать по ссылке:

https://drive.google.com/file/d/1BM4EGiTYPh7foBh0Ko_O2znaQIB9Swef/view?usp=sharing

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

5. Вычисляются степени, числа располагаются в порядке возрастания или убывания.

а) В порядке возрастания: $-0{,}4^2 = -0{,}16$; $0{,}4$; $(-0{,}4)^2 = 0{,}16$; $-0{,}4$

Сначала располагаются отрицательные числа, затем положительные.

$-0{,}4; -0{,}16; 0{,}16; 0{,}4 \rightarrow -0{,}4; -0{,}4^2; (-0{,}4)^2; 0{,}4.$

6. Определяется, каким из данных чисел может быть основание степени. Находится соответствующий показатель степени.

б) $\square^{\square} = \frac{1}{4}$ $\square^{\square} = -\frac{1}{8}$ $\square^{\square} = \frac{1}{32}$

Основание степени: $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$

a) $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ b) $(-\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ b) $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$

$(-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

Иногда ученики не обращают внимания на то, что основание степени записано в скобках, и в результате неправильно вычисляют степень. Целесообразно, чтобы ученики выполняли задание самостоятельно, а учитель наблюдал за их действиями и организовывал работу над ошибками.

9. В пустые клетки подставляются соответствующие числа. Рекомендуется спросить у учеников, какими свойствами степеней они пользовались при этом.

$0{,}3^{12} = (0{,}3^3)^{\boxed{4}}$ $(3^{\boxed{2}})^3 = 3^6$ $(-0{,}2)^5 \cdot 10^5 = \boxed{-2}^5$ $12^{10} = 12^5 \cdot 12^{\boxed{8}} : 12^3$ $(m^{\boxed{7}} \cdot m^5)^2 = m^{24}$

14. Число 2^{60} записывается в виде степени данного числа.

а) $2^{60} = (2^3)^{20}$

б) Число 16 записывается как степень числа 2, затем находится степень степени. $16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$. Определяется, какой степенью числа 2^{12} является число 2^{60}. $2^{60} = (2^{12})^5 \rightarrow 2^{60} = (16^3)^5$

17. Вычисляется значение выражений.

е) $(-4)^3 + 16 : (-1\frac{1}{3})^2 \cdot (-5)^2 = -19$

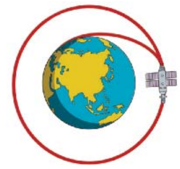
1) $(-4)^3 = -64$ 4) $16 : (-\frac{1}{3})^2 = 16 : \frac{16}{9} = 9$

2) $(-1\frac{1}{3})^2 = \frac{16}{9}$ 5) $9 \cdot (-5)^2 = 225$

3) $(-5)^2 = 25$ 6) $-64 + + 225 = 161$

К сведению учителя! При выполнении вычислений со степенями, содержащими рациональные выражения, ученики испытывают трудности в определении порядка действий. Целесообразно выявить таких учеников и повторить с ними соответствующие правила, организовав работу над ошибками..

21. Космический корабль выводится на околоземную орбиту ракетой, движущейся с первой космической скоростью ($8 \cdot 10^3$ м/с).



• Вычисляется, во сколько раз скорость света ($3 \cdot 10^8$ м/с) больше первой космической скорости.

$\frac{3 \cdot 10^8}{8 \cdot 10^3} = 37500$

• Вычисляется, за сколько минут ракета, движущаяся с первой космической скоростью, преодолеет путь, который свет проходит за 10 секунд.

$\frac{3 \cdot 10^8 \cdot 10}{8 \cdot 10^3} = 375000$ (с) = 6250 (мин)

Ответ. в 37500 раз больше; 6250 минут

22. В задаче приводится информация о предложениях банков A и B, связанных с депозитов. Требуется определить, в каком банке клиент, вложивший первоначально 20000 манат на два года, получит больший доход.

Краткое условие задачи записывается.

Банк A: Каждый год прирост составляет 12,5% от первоначальной суммы

Банк B: Каждый год прирост составляет 12% от суммы на конец предыдущего года.

Решение задачи

Вычисляется доход клиента в каждом банке за два года.

Банк A:
$20000 + 20000 \cdot 0{,}125 \cdot 2 = 25000$ (ман)

Банк B:
$20000 \cdot 1{,}12^2 = 25088$ (ман)

Полученные результаты сравниваются. 25000 < 25088.

Ответ. Клиент за 2 года получит больший доход в банке B.

Обсуждение. Обсуждаются мнения учеников, решивших задачу разными способами.

Математический калейдоскоп

2. На основе закономерности требуется устно определить последнюю цифру значения выражений.

а) Определяется, что степени числа 4 с нечетным показателем оканчиваются на 4, а с четным — на 6.

$4^1 = 4$ $4^3 = 64$ … $4^{17} = …4$

$4^2 = 16$ $4^4 = 256$ …

Так как 17 нечетное число, последняя цифра числа 4^{17} равна 4.

б) В выражении $4^{18} + 4^{15}$ находится последняя цифра каждого слагаемого и затем суммируется

18 четное число. $4^{18} = …6$ 15 нечетное число. $4^{15} = …4$ Следовательно, $4^{18} + 4^{15} = …6 + …4 = …0$

Последняя цифра выражения $4^{18} + 4^{15}$ равна 0.

в) Последнюю цифру выражения 2^{25} можно найти разными способами.

1-й способ. Чтобы использовать закономерность, связанную с последними цифрами степеней числа 4, записывается $2^{25} = 4^{12} \cdot 2$. Так как последняя цифра 4^{12} равна 6, то последняя цифра этого выражения равна $6 \cdot 2 = 12$, то есть 2.

$2^{25} = 2^{24} \cdot 2 = (2^2)^{12} \cdot 2 = 4^{12} \cdot 2 = …6 \cdot 2 = …2$

2-й способ. Определяется закономерность для степеней числа 2. Выясняется, что в выражениях, где последние цифры повторяются, разница между показателями степеней равна 4. Используя это свойство степеней, находится последняя цифра.

$2^1 = 2$	$2^5 = 32$
$2^2 = 4$	$2^6 = 64$
$2^3 = 8$	$2^7 = 128$
$2^4 = 16$	$2^8 = 256$

$2^{25} = (\underbrace{2^5}_{…2})^5 = …2^5 = = …2$

$2^{25} = (\underbrace{2^5}_{…2})^3 \cdot (\underbrace{2^5}_{…2})^2 = \underbrace{…2^3}_{…8} \cdot \underbrace{…2^2}_{…4} = …2$

3-й способ. Так как основание степени равно 2, записываются последние цифры степеней числа 2.: 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, ...

Определяется, через сколько шагов (4) они повторяется цифра 2.

Показатель степени делится на 4, берется остаток. 25 : 4 = 6 (остаток 1).

Вычисляется первая степень числа 2: $2^1 = 2$.

Следовательно, последняя цифра выражения 2^{25} равна 2.

К сведению учителя! Один из способов быстрее определить последнюю цифру степени числа заключается в выявлении повторяющейся последовательности последних цифр соответствующих степеней. Этот метод основан на принципе повторения последних цифр степеней в определенном порядке; после нахождения длины цикла выбирается цифра, соответствующая положению показателя степени в этом цикле.

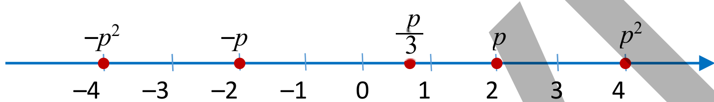
Ученикам можно поручить провести вычисления для оснований степеней от 2 до 10 и представить результаты в таблице.

Основание степени	Цикл повторения последних цифр	Длина цикла
2	2, 4, 8, 6, 2, ...	4
3	3, 9, 7, 1, 3, ...	4
4	4, 6, 4, ...	2
...	...	...

3. Если p > 1, требуется расположить данные выражения в порядке возрастания.

$-p$ p $-p^2$ $\frac{p}{3}$ p^2

Берется число, большее 1, вычисляются значения выражений, числа отмечаются на числовой прямой и располагаются в порядке возрастания. $p = 2$



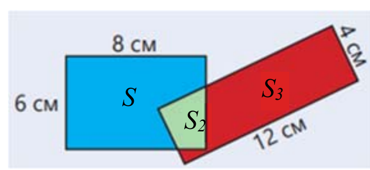
$-p^2, -p, \frac{p}{3}, p, p^2$

В результате обобщения можно отметить:

✓ Натуральная степень числа (p^2) больше самого числа (p), поэтому их противоположные значения (–p и $-p^2$) располагаются симметрично относительно нуля.

✓ Если разделить положительное число на 3, получится меньшее положительное число.

4. На рисунке изображены два прямоугольника. Требуется сравнить площади красной и синей частей.



Каждая часть обозначается.

Площадь синей части – S_1

Площадь зеленой части – S_2

Площадь красной части – S_3

Для нахождения площадей синей и красной частей записываются выражения.

Площадь синей части: $S_1 = 6 \cdot 8 - S_2 = 48 - S_2$

Площадь красной части: $S_3 = 4 \cdot 12 - S_2 = 48 - S_2$

Так как правые части равенства равны, то равны и левые. Следовательно, $S_1 = S_3$.

Ответ. Площади синей и красной частей равны.

5. В племени каждый человек либо всегда лжёт, либо всегда говорит правду. Путешественник встретил двух жителей племени. Требуется определить, говорит ли отвечающий правду или лжёт. Рассматриваются два случая:

1) отвечающий — лжец; 2) отвечающий говорит правду.

Сначала объясняется высказывание: «По крайней мере один из нас лжец». Это означает, что либо один из нас, либо оба — лжецы.

1) Предположим, что говорящий лжёт, тогда высказывание «По крайней мере один из нас лжец» ложно. Это означает, что оба говорят правду. Но это невозможно, так как по предположению говорящий — лжец. Следовательно, 1-й случай невозможен.

2) Предположим, что отвечающий говорит правду, тогда высказывание «По крайней мере один из нас лжёт» истинно. Значит, говорящий говорит правду. По условию хотя бы один из них лжёт, следовательно, другой житель — лжец.
Таким образом, возможен только 2-й случай.
Ответ: этот человек говорит правду.

STEAM ***МУЗЫКА И МАТЕМАТИКА: КАМЕРТОН***

Отмечается, что для настройки музыкальных инструментов, в том числе фортепиано, используется камертон. Подчеркивается, что камертон — это устройство, издающее звук определенной высоты точно и чисто. При ударе по двузубчатому устройству, напоминающему длинную вилку, слышится звук с частотой $55 \cdot 2^3$ герц, что соответствует ноте «ля» первой октавы на фортепиано.

1. Если частота одной и той же ноты в каждой следующей октаве в два раза выше, чем в предыдущей, то вычисляется частота ноты «ля» в пятой октаве.

1-я октава звук “ля”: $55 \cdot 2^3$ герц
2-я октава звук “ля”: $55 \cdot 2^3 \cdot 2 = 55 \cdot 2^4$ (герц)
3-я октава звук “ля”: $55 \cdot 2^4 \cdot 2 = 55 \cdot 2^5$ (герц)
4-я октава звук “ля”: $55 \cdot 2^5 \cdot 2 = 55 \cdot 2^6$ (герц)
5-я октава звук “ля”: $55 \cdot 2^6 \cdot 2 = 55 \cdot 2^7$ (герц)

2. Частота каждой следующей клавиши примерно на 5,95% выше частоты клавиши слева. Под левой клавишей подразумевается полутон. Например, в первой октаве нота «си» расположена на два полутона выше ноты «ля», а нота «до» — на три полутона ниже. На основе этого записывается выражение для нахождения частот нот «си» и «до».
1-я октава звук “си”: $55 \cdot 2^3 \cdot 0{,}10595^2$
1-я октава звук “до”: $55 \cdot 2^3 : 0{,}10595^3$

Можно воспроизвести соответствующие звуки на виртуальном фортепиано. Ученики могут выполнить задание, перейдя по ссылке, указанной в учебнике. Также можно воспользоваться упражнениями по игре на фортепиано, представленными на сайте:
https://www.musicca.com/exercises/notes
3. Ученики исследуют, какие математические закономерности можно показать в музыке, и готовят презентацию о связи математики и музыки. Рекомендуется дать ученикам несколько ссылок, которые они могут использовать при подготовке презентации.
Можно привести некоторые сведения о взаимосвязи музыки и математики. Чтобы донести математику до общества, использовался универсальный язык музыки. С тех времен, когда Пифагор применял числовые термины для выражения интервалов между нотами и музыкальных тонов, полученных из геометрических узоров, математики стали связывать музыку с числами. В 2010 году на ежегодной конференции SIAM (Общество промышленной и прикладной математики) Тимочко использовал графику и звук, чтобы показать связь математики с музыкой Шопена, Моцарта и Шуберта.
https://youtu.be/2A4Tt62pWaI
Первые 31 десятичных цифр числа π были соотнесены с нотами (цифры 1–9 соответствовали тонам C–D), и на основе этого была создана мелодия. На YouTube популярно видео “What Pi Sounds Like”, где можно услышать, как звучат цифры числа π, преобразованные в ноты r.
https://youtu.be/YOQb_mtkEEE

3-й РАЗДЕЛ	Одночлены и многочлены

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	58	
Тема 3.1	Одночлены	2	59	36
Тема 3.2	Многочлены	2	63	39
Тема 3.3	Сложение и вычитание многочленов	2	66	41
	Задачи и примеры	1	69	43
Тема 3.4	Умножение одночлена на многочлен	2	70	44
Тема 3.5	Умножение многочлена на многочлен	3	73	46
	Обобщающий урок. STEAM. “Возобновляемые источники энергии”	2	78	49
	МСО-2	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**16**		

Краткий обзор раздела

В разделе ученикам будет предоставлена информация об одночлене и его стандартном виде, степени одночлена, коэффициенте одночлена, многочлене и его стандартном виде, степени многочлена, свободном члене многочлена. Они будут выполнять действия над одночленами и многочленами и решать различные задачи.

На что стоит обратить внимание?

Необходимо хорошо знать свойства умножения и правильно применять их в примерах. С этой целью полезно вместе с учениками повторить распределительное свойство умножения.

Некоторые ученики под одночленом понимают буквенное выражение с одним членом, а под многочленом — с большим количеством членов. Для устранения таких неправильных представлений следует приводить соответствующие примеры.

В стандартном виде записи одночлена каждый буквенный множитель указывается только один раз.

При записи одночленов в стандартном виде важно правильно использовать свойства степеней с одинаковыми основаниями.

При приведении многочленов к стандартному виду необходимо правильно приводить подобные члены.

Нужно чётко объяснить ученикам разницу между тождеством и уравнением. Целесообразно подчеркнуть, что тождество верно при всех значениях переменной, а уравнение — только при определённых значениях.

Ученики должны уметь отличать выражения, не являющиеся тождествами.

Развитие математического языка

Правильное понимание понятий «одночлен», «стандартный вид одночлена», «коэффициент», «буквенная часть», «подобные одночлены», «многочлен», «члены многочлена», «стандартный вид многочлена», «двучлен», «трёхчлен», «тождество» позволяет оценить уровень усвоения темы.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Одночлен, стандартный вид одночлена, коэффициент, буквенная часть, подобные одночлены, многочлен, члены многочлена, стандартный вид многочлена, двучлен, трёхчлен, тождество, тождественное преобразование выражений

Необходимые предварительные знания и умения:

- Сложение, вычитание, умножение и их свойства
- Свойства степени
- Последовательность действий
- Выражения с переменной

Междисциплинарная интеграция

Одночлены и многочлены широко используются при моделировании различных задач. Одночлены упрощают вычисления простых зависимостей в физике, химии и экономике. Многочлены играют важную роль при описании более сложных процессов — таких как изменения расстояния, скорости, цены. Например, одночлены применяются при вычислении расстояния на уроках физики по формулам $s = vt$ или энергии по формуле $E = mgh$, а в химии — при выражении количества атомов $N = n \cdot N_A$. Многочлены же встречаются в сложных экономических расчётах, например, при определении изменения цены: $P(x) = 2x^2 + 5x + 10$ и т.п. Приведение подобных членов и запись многочлена в стандартном виде облегчает вычисления. Ученики, встречая формулы в других предметах, распознают одночлены и многочлены и лучше понимают их применение. Развивается умение анализировать ситуации с помощью математических моделей.

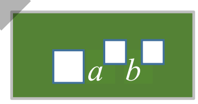
ТЕМА 3.1 Одночлены

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.1.1. Объясняет понятия одночлен и многочлен.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет понятие одночлена. • Определяет коэффициент и степень одночлена. • Записывает одночлены в стандартном виде.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/8746* *https://youtu.be/7EplN4Ch98Q* *https://www.geogebra.org/m/jecf5huk* *https://youtu.be/iHnzLETGz2I*

Обсуждение исходной задачи. На первой странице раздела ученикам дается информация о многочленах, выражении величин через переменные, построении математических моделей, а также отмечается, в каких областях используются многочлены. В задании «Попытайтесь» обсуждается с учениками, какое выражение нужно записать, чтобы найти расстояние между автомобилями А и В при движении в одном направлении и в противоположных направлениях. Подчеркивается, что после изучения знаний и навыков в течение раздела это задание будет снова обсуждено в конце.

Побуждение

Учитель записывает на доске аналогичное выражение и предлагает ученикам записать показатель степени *a* равным количеству гласных в их имени, показатель степени *b* — количеству согласных, а перед *a* указать число, которое каждый ученик считает для себя «счастливым». Ученики записывают соответствующие выражения в тетрадях. Учитель приглашает нескольких учеников к доске записать выражение, которое они написали в тетради, и обращается ко всему классу с вопросами:



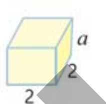
– У кого в имени больше гласных? У кого больше согласных? В чьих именах количество букв одинаковое? Как это можно определить по степеням *a* и *b* в выражении? Есть ли одинаковые «счастливые числа»?

На основе записанных выражений ученики отвечают на вопросы, организуется обсуждение.

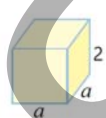
Исследование-обсуждение

Отмечается, что размеры нескольких кубоидов на рисунке даны в сантиметрах.

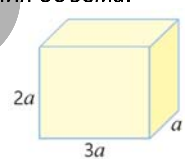
• Для каждого кубоида записывается выражение для нахождения объема.



$V_1 = 2 \cdot 2 \cdot a = 4a$



$V_2 = 2 \cdot a \cdot a = 2a^2$



$V_3 = 2a \cdot 3a \cdot a =$
$= 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot a = 6a^3$

• Чтобы определить, во сколько раз увеличивается объем каждого кубоида, вместо *a* подставляется число, затем значение переменной *a* увеличивается вдвое. Например, можно подставить вместо *a* сначала 3, затем 6, и найти ответы.

$V_1 = 4a$
$a = 3 \rightarrow V_1 = 4 \cdot 3 = 12$
$a = 6 \rightarrow V_1 = 4 \cdot 6 = 24$

$V_2 = 2a^2$
$a = 3 \rightarrow V_2 = 2 \cdot 3^2 = 18$
$a = 6 \rightarrow V_2 = 2 \cdot 6^2 = 72$

$V_3 = 6a^3$
$a = 3 \rightarrow V_3 = 6 \cdot 3^3 =$
$a = 6 \rightarrow V_3 = 6 \cdot 6^3 = 1296$

С помощью наводящих вопросов учеников можно направить к тому, чтобы подставить *2a* вместо *a* и найти соответствующий результат.

$V_1 = 4a$
$V_1 = 4 \cdot 2a = 8a$

$V_2 = 2a^2$
$V_2 = 2 \cdot 2a \cdot 2a = 8a^2$

$V_3 = 6a^3$
$V_3 = 2 \cdot 2a \cdot 3 \cdot 2a \cdot 2a = 24a^2$

Таким образом, объем первого кубоида увеличивается в 2 раза, второго — в 4 раза, третьего — в 8 раз. Учитель может предложить ученикам, с помощью наводящих вопросов, объяснить, почему для разных кубоидов получаются разные результаты.

Изучение Одночлен и его стандартный вид

Подчеркивается, что выражение, состоящее из произведения чисел, переменных или их натуральных степеней, называется одночленом. Приводятся примеры выражений, являющихся и не являющихся одночленами. Отмечается, что в записи одночленов обычно не пишут знак умножения между множителями. Ученикам объясняют примеры упрощения одночленов с использованием свойств умножения.

Дается информация о стандартном виде одночлена, коэффициенте одночлена и степени одночлена. Отмечается, что любое ненулевое число считается одночленом степени 0, а число 0 также является одночленом, но его степень не определяется.

Степень одночлена: 3 + 4 = 7

$-20a^3c^4$

Коэффициент: −20 Буквенная часть: a^3c^4

Задания

3. Находятся коэффициент и степень данных одночленов.

К сведению учителя! В этой теме ученики получают фундаментальные знания: что такое одночлен, его коэффициент и степень. Эти знания важны для изучения последующих тем. Иногда ученики забывают, что если перед одночленом нет числа, коэффициент равен 1, а если у переменной не указан показатель степени, то он равен 1. Например, находя степень одночлена x^2y, некоторые ученики не учитывают, что степень y равна 1, и считают степень одночлена равной 2. Рекомендуется приводить соответствующие примеры.

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики думают, что одночлен может содержать только одну переменную. Таким ученикам рекомендуется показать одночлены с несколькими переменными.

Следует обратить внимание учеников на то, что для определения коэффициента и степени одночлена его нужно сначала записать в стандартном виде. Некоторые пытаются определить степень и коэффициент без приведения к стандартному виду и допускают ошибки. Одна из распространенных ошибок — перемножать показатели степеней вместо их сложения. Бывает, что если коэффициент записан в виде степени, ученики ошибочно принимают этот показатель за степень всего одночлена. Чаще всего такие ошибки возникают, когда ученики не приводят одночлен к стандартному виду. В таких случаях целесообразно провести работу над ошибками с учениками, допускающими такие ошибки.

Ложное	Верное
$3a^2a \cdot 2b$ Коэффициент: 3	Одночлен приводится к стандартному виду. $3a^2a \cdot 2b = 6a^3b$ Коэффициент: 6
$4a^2b^5$ Степень: $2 \cdot 5 = 10$	Степени буквенных множителей одночлена складываются. Степень: 2 + 5 = 7
3^2a^3b Степень: 2 + 3 + 1 = 6	Степени буквенных множителей одночлена складываются. Степень: 3 + 1 = 4

4. Одночлены записываются в стандартном виде. Подчеркиваются моменты, на которые следует обратить внимание. Стандартный вид – это такая запись выражения, при которой оно представлено в наиболее простом виде. Если выражение можно упростить, значит оно еще не записано в стандартном виде. Приводятся примеры.

Изучение Умножение одночленов

Ученикам объясняется на примере, что произведение одночленов также является одночленом, и для нахождения произведения двух одночленов используется переместительное и сочетательное свойства умножения.

$$-4xy \cdot 2xy^3 = \underbrace{(-4 \cdot 2)}_{-8} \cdot \underbrace{(x \cdot x)}_{x^2} \cdot \underbrace{(y \cdot y^3)}_{y^4} = -8x^2y^4$$

В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы.
https://www.geogebra.org/m/jecf5huk

9. В пустые клетки определяются соответствующие числа.

a) $-2ab^3 = -2b \cdot ab^{\boxed{2}}$ b) $8x^5y = -4x^{\boxed{2}} \cdot \boxed{-2}x^3y$ c) $\boxed{-2}c^5e^3 = -ec^{\boxed{2}} \cdot 2c^3e^{\boxed{2}}$

10. Записываются одночлены, произведение которых равно данному одночлену. Задание рекомендуется выполнять в парах. После того как ученики запишут подходящие одночлены, можно предложить им проверить правильность, найдя произведение одночленов своего соседа по парте.

а) 2 одночлена

$6a^2$
$6a$ и a
$3a$ и $2a$
4 и $1{,}5a^2$

$0{,}4x^3y^3$
$0{,}4x^3$ и y^3
$0{,}2x^3$ и $2y^3$
$4x^2$ и $0{,}1xy^3$

б) 3 одночлена

$6a^2$
a; a и 6
$3a$; 2 и a
4; a и $1{,}5a$

$0{,}4x^3y^3$
$0{,}4x^2$; x и y^3
$0{,}1x^2$; $2xy$ и $2y^2$
x^2; $0{,}1x$ и y^3

11. В пустые клетки определяются подходящие условию числа.

а) В пустые клетки записываются такие числа, чтобы в стандартном виде одночлена коэффициент был равен 12, а степень 6.

$2a^{\boxed{5}} \cdot \boxed{6}\,b$ $\qquad -3x^{\boxed{2}}y^2x \cdot \boxed{-4}\,x$ $\qquad m^{\boxed{3}}n^2 \cdot \boxed{8}\,m \cdot 1\frac{1}{2}$ $\qquad -1{,}2a^{\boxed{3}} \cdot \boxed{3}\,b^3$

Запомни!

Отмечается, что одночлены с одинаковой буквенной частью называются подобными; такие одночлены либо равны друг другу, либо отличаются только коэффициентом, приводятся примеры. В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы. *https://www.geogebra.org/m/wxp5ntwh*

12. Одночлены приводятся к стандартному виду, определяются подобные одночлены. Подобные одночлены можно выделить, проводя под ними одинаковое количество линий.

в) $acab \Rightarrow \underline{a^2bc}$; $\quad abbc \Rightarrow \underline{\underline{ab^2c}}$; $\quad 2aba\cdot(-0{,}5)c \Rightarrow \underline{-a^2bc}$; $\quad 2abcb \Rightarrow \underline{\underline{2ab^2c}}$

г) $a^2ba \Rightarrow \underline{a^3b}$; $\quad -aba^2 \Rightarrow \underline{-a^3b}$; $\quad -b\cdot(-3)b^2a^2 \Rightarrow \underline{\underline{3a^2b^3}}$; $\quad 3bab^2 \Rightarrow \underline{3ab^3}$

К сведению учителя! Навык учеников определять подобные одночлены поможет им в дальнейшем при нахождении суммы или разности одночленов, а также при упрощении выражений. Иногда ученики считают, что x^2y и xy^2 подобные одночлены. Рекомендуется обсудить с учениками, почему эти одночлены не являются подобными, выявить учеников, допускающих подобную ошибку, и привести дополнительные примеры.

Изучение **Степень одночлена**

Подчеркивается, что при возведении одночлена в степень используются свойства степеней. Пример обсуждается с учениками. При необходимости можно привести дополнительные примеры.

15. Требуется записать выражение в виде квадрата одночлена.

б) $\frac{1}{81}b^2c^2 = (\frac{1}{9}bc)^2$ $\qquad$ в) $0{,}49e^6f^8 = (0{,}7e^3f^4)^2$ $\qquad$ г) $1\frac{9}{16}a^{10}d^6 = \frac{25}{16}a^{10}d^6 = (\frac{5}{4}a^5d^3)^2 = (1\frac{1}{4}a^5d^3)^2$

16. Требуется записать выражение в виде куба одночлена.

в) $-64m^9n^3 = (-4m^3n)^3$ $\qquad$ г) $3\frac{3}{8}a^3d^{12} = \frac{27}{8}a^3d^{12} = (\frac{3}{2}ad^4)^3 = (1\frac{1}{2}ad^4)^3$ $\qquad$ д) $0{,}125b^{30}c^{15} = (0{,}5b^{10}c^5)^3$

К сведению учителя!

Умение определить, квадратом или кубом какого одночлена является данное выражение, в дальнейшем поможет ученикам раскладывать многочлены на множители, применять формулы сокращенного умножения и использовать эти знания в разных ситуациях. Рекомендуется выявлять учеников, испытывающих трудности с такими заданиями, и выполнять с ними дополнительные задания.

17. Для того чтобы равенство было верным, в пустые клетки определяются соответствующие числа.

$(-2b^2)^{\boxed{3}} = -8b^6$ $\qquad \boxed{2\frac{1}{4}}\,m^6n^{\boxed{4}} = \left(1\frac{1}{2}m^3n^2\right)^2$ $\qquad \boxed{0{,}008}\,c^6 = (0{,}2c^2)^{\boxed{3}}$ $\qquad (2x^3y^2)^{\boxed{2}} = \boxed{4}\,x^6y^{\boxed{4}}$

18. Определяется одночлен, который должен быть записан в пустой клетке. При выполнении задания ученики должны учитывать правила умножения многочленов.

а) $b^2 \cdot \boxed{b^4} = b^6$ $\qquad$ c) $\boxed{2a^4} \cdot 2a^2 = 4a^6$ $\qquad$ e) $-3b^2 \cdot \boxed{9ab^4} = -27ab^6$ $\qquad$ g) $\boxed{8z^3} \cdot \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 2y^2z^3$

В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы. *https://video.edu.az/video/8759*

Дифференцированное обучение

На стол выкладываются карточки с буквами A, B, C и D.

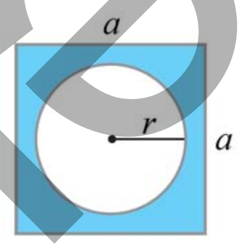
Учитель задает вопросы ученикам.

A	B	C	D	E
$8a^2b^4$	$(1\frac{1}{3}ab)^3$	$4aba^2$	$0{,}2aab^3$	$(ab^4)^2$

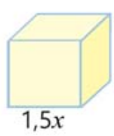
Поддержка. Какова степень одночлена, записанного на карточке A? У какого одночлена степень наибольшая? У какого одночлена самый большой коэффициент?
Углубление. При произведении одночленов на каких карточках получается одночлен, записанный на карточке C? Какой одночлен записан в стандартной форме? У какого одночлена произведение его степени и коэффициента равно 8? У какого одночлена степень больше: у квадрата одночлена с карточки A или у произведения одночленов с карточек B и D?
Ученики отвечают на вопросы, используя свойства степеней.

Решение задач

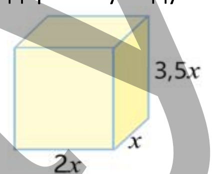
21. Находятся ответы на вопросы.
а) Требуется найти значение n, при котором степень одночлена $2a^3 \cdot a^{2n-1}$ равна 8. Ученики записывают данный одночлен в стандартном виде. $2a^3 \cdot a^{2n-1} = 2a^{2n+2}$
Так как степень равна 8, составляется и решается уравнение.
$2n + 2 = 8$
$2n = 6$
$n = 3$
Следовательно, при $n = 3$ степень данного одночлена будет равна 8
22. Окружность радиуса r расположена внутри квадрата со стороной a. Требуется записать выражение для нахождения площади закрашенной части и длины окружности, а также объяснить, является ли это выражение одночленом.



Решение задачи
Записываются выражения для нахождения площади закрашенной части и длины окружности.
$S_{\text{закрашенной}} = a^2 - \pi r^2$
$L_{\text{окружности}} = 2\pi r$
Так как произведение чисел, переменных и их натуральных степеней образует одночлен, отмечается, что площадь закрашенной фигуры не является одночленом, а длина окружности является одночленом.
23. На основе рисунка записываются выражения для нахождения объема и полной поверхности куба, а также объема параллелепипеда.
• Полученные одночлены приводятся к стандартному виду.



Объем куба:
$V = 1{,}5x^3 = 3{,}375x^3$
Площадь полн. поверхн. куба:
$S = 6 \cdot (1{,}5x)^2 = 6 \cdot 2{,}25x^2 = 13{,}5x^2$



Объем параллелепипеда: X
$V = 2x \cdot x \cdot 3{,}5x = 7x^3$.
Площадь полн. поверхн. параллелепипеда:
$S = 2(2x \cdot x + 2x \cdot 3{,}5x + x \cdot 3{,}5x) = 25x^2$

• Определяются коэффициент и степень этих одночленов.
$3{,}375x^3$ коэффициент: 3,375 степень: 3 $7x^3$ коэффициент: 7 степень: 3
$13{,}5x^2$ коэффициент: 13,5 степень: 2 $25x^2$ коэффициент: 25 степень: 2
• Определяется, какие одночлены являются подобными.
$3{,}375x^3$ и $7x^3$; $13{,}5x^2$ и $25x^2$

Формативное оценивание

Критерии оценивания	**Материалы оценивания**
Объясняет понятие одночлена.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Определяет коэффициент и степень одночлена.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Записывает одночлены в стандартном виде.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

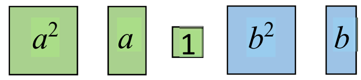
ТЕМА 3.2. Многочлены

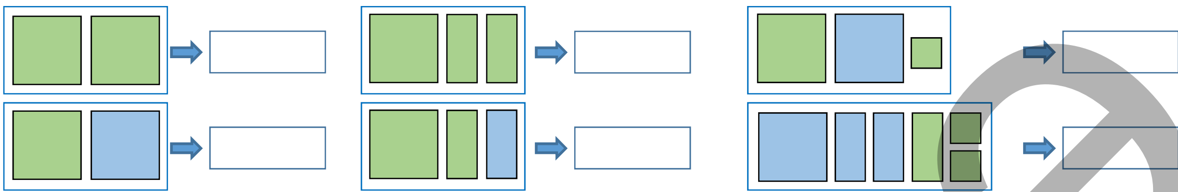
ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.1.1. Объясняет понятия одночлена и многочлена.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет понятие многочлена. • Записывает многочлены в стандартном виде. • Определяет степень многочлена.

ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/8578* *https://video.edu.az/video/8779* *https://video.edu.az/video/11488* *https://video.edu.az/video/11318* *https://www.geogebra.org/m/jz67gqab*

Побуждение

Учитель рисует на доске несколько квадратов и прямоугольников и предлагает ученикам записать рядом их площади. Затем учитель рисует следующие фигуры и предлагает выразить их площади, используя площади предыдущих фигур.



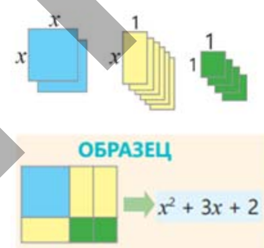


Ученикам можно дать выражения вида $a^2 + b$, $2b^2 + 3$, $a^2 + a + 1$ и т. п. и предложить описать их с помощью данных фигур.

Исследование-обсуждение

Целесообразно заранее подготовить фигуры, вырезанные из цветной бумаги, как указано в принадлежностях. Ученики составляют из этих фигур различные прямоугольники. Полученные прямоугольники выражают как сумму площадей меньших фигур. Побеждает тот игрок, который за отведённое время составит наибольшее количество прямоугольников и правильно запишет выражения, соответствующие их площади.

Также можно написать на доске различные выражения и предложить ученикам составить соответствующий прямоугольник, используя фигуры.



Изучение Многочлен

Отмечается, что сумму одночленов называют многочленом, а одночлены, входящие в его состав, — его членами. Приводятся примеры многочленов, перечисляются их члены. Ученикам объясняется, что такое свободный член, двучлен и трёхчлен. Указывается, что одночлен также считается многочленом, имеющим один член.

Подумай!

Чтобы объяснить, почему выражение $x^2 + \frac{3}{x} +$ не является многочленом, напоминают его определение. Отмечается, что суммой одночленов называют многочлен. Так как выражение $\frac{3}{x}$ не является одночленом, то $x^2 + \frac{3}{x} + 5$ также не является многочленом.

К сведению учителя! Многочлен — одно из основных понятий алгебры. Его усвоение играет важную роль в дальнейшем развитии навыков сложения, вычитания, умножения и разложения многочленов на множители. Для укрепления понятия и формирования наглядного представления используются алгебраические карты. С их помощью обычно изображаются квадратные трёхчлены с одной переменной: маленькие квадраты, прямоугольники и большие квадраты представляют соответственно свободный член, переменную и её квадрат. Разные цвета могут обозначать положительные и отрицательные числа. Это помогает ученикам в дальнейшем легко приводить подобные члены и выполнять действия с многочленами.

Задания

2. Записываются изображённые многочлены. При этом ученики могут перечислить их члены. В классах с техническими возможностями можно выполнить аналогичные задания.
https://polypad.amplify.com/p#algebra-tiles

Изучение Стандартный вид многочлена

Подчёркивается, что сумма подобных членов заменяется одним одночленом — это называется приведением подобных членов. Пример обсуждается вместе с учениками. Объясняется, что такое стандартный вид многочлена.

4. Определяются многочлены, записанные в стандартном виде. Можно спросить у учеников, как определить, что многочлен записан не в стандартном виде.

5. Многочлены приводятся к стандартному виду путём приведения подобных членов. Иногда ученики забывают привести одночлены к стандартному виду. Им рекомендуется сначала обратить внимание на одночлены, записать их в стандартном виде, а затем определять и приводить подобные члены.

Ложные представления, возникающие у учеников. Некоторые ученики допускают ошибки при определении, является ли выражение многочленом, а также при приведении многочлена к стандартному виду. Например:

Ложное	Верное
У многочлена обязательно должно быть много членов.	Одночлен, двучлен, трёхчлен — всё это виды многочленов
Свободный член не может быть многочленом.	Свободный член является многочленом нулевой степени.
Многочлен может быть записан только в стандартном виде.	$x^3 + 2x^2 - 3{,}5x^2 + x^3$ многочлен, но не записан в стандартном виде.

Целесообразно обсуждать с учениками ошибки, подобные приведённым в примерах, и давать рекомендации по их устранению.

Изучение Степень многочлена

Подчёркивается, что в многочлене, записанном в стандартном виде, степенью многочлена называют наибольшую степень его членов, приводятся примеры.

Степени членов $\underbrace{2x^4y}_{4+1=5} + \underbrace{5xy^2}_{1+2=3} - \underbrace{x}_{1}$

Члены многочлена: $2x^4y$, $5xy^2$, $-x$
Степень многочлена: 5

Отмечается, что чтобы найти степень многочлена, записанного не в стандартном виде, сначала необходимо привести его к стандартному виду.

Исправь ошибку!

$x^2x + 2x^2 + 2x^4$ Степень многочлена: $\underline{2 + 1 = 3}$

$x^2x + 2x^2 + 2x^4 = x^3 + 2x^2 + 2x^4$
Степень многочлена: 4

Данный многочлен записывается в стандартном виде, и видно, что наибольшая степень его членов не является степенью первого члена. Степень многочлена равна 4.

$-x^3 + 3x^4 - xx^3 + x - 2xx^3$ Степень многочлена: $\underline{4}$

$-x^3 + 3x^4 - xx^3 + x - 2xx^3 = -x^3 + \cancel{3x^4} - \cancel{x^4} + x - \cancel{2x^4} = -x^3 + x$
Степень многочлена: 3

Данный многочлен приводится к стандартному виду, одночлены степени 4 являются подобными членами и приводятся. Степень многочлена равна 3.

9. Многочлены записываются в стандартном виде. При подстановке значений переменной вычисляется значение выражения. Некоторые ученики допускают ошибки при возведении отрицательных чисел в степень. Важно организовать работу над такими ошибками.

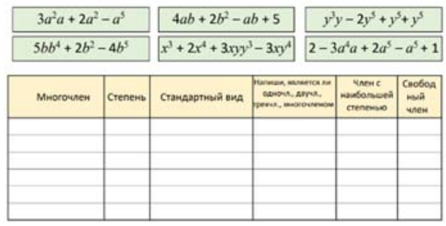
В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы. *https://video.edu.az/video/8578*

Дифференцированное обучение

Поддержка. Несколько учеников вызываются к доске. Учитель предлагает записать двучлены, трёхчлены, многочлены степени 2, 3, 4. Ученики перечисляют их члены и объясняют, как определили степень.

Углубление. Несколько учеников вызываются к доске. Учитель пишет на доске многочлен с 4 или 5 членами. Ученики должны, изменяя коэффициенты или степени членов, получить двучлены, трёхчлены, многочлены степени 2, 3, 4. Они перечисляют члены и объясняют, как определили степень.

Практическое задание. Класс делится на группы. На стол лицевой стороной вниз выкладываются карточки с многочленами. Каждой группе выдаются рабочие листы. По мере выбора карточек ученики записывают многочлен в таблицу рабочего листа и заполняют его.



$3a^2a + 2a^2 - a^5$ | $4ab + 2b^2 - ab + 5$ | $y^3y - 2y^5 + y^5 + y^5$

$5bb^4 + 2b^2 - 4b^5$ | $x^3 + 2x^4 + 3xyy^3 - 3xy^4$ | $2 - 3a^4a + 2a^5 - a^5 + 1$

Многочлен	Степень	Стандартный вид	Напиши, является ли одночл., двучл., трехчл., многочленом	Член с наибольшей степенью	Свободный член

Рабочий лист можно скачать по ссылке:
https://drive.google.com/file/d/1M7p6goAt84n7BjrzRJBkHlJYgvkNgX-z/view?usp=drive_link

Решение задач

10. После приведения многочленов к стандартной форме отмечается, что у Лалы получился многочлен степени 4, а у Анара — степени 5. Необходимо определить, какие числа должны быть вписаны в стёртые места. Используя условие, ученики записывают многочлены и по степени определяют нужные числа.

Если одночлены степени 5 будут приведены, Лала получит многочлен степени 4. Поэтому в пустую клетку необходимо записать число 2.

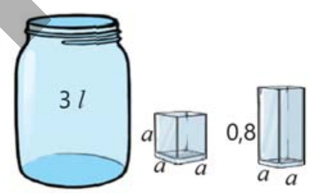
$4xy^4 - 4x(y^2)^{\mathbf{2}} - x^3y + 4 = 4\cancel{xy^4} - 4\cancel{xy^4} - x^3y + 4 =$
$= - x^3y + 4$

Если одночлены степени 6 будут приведены, Анар получит многочлен степени 5. Поэтому в пустую клетку необходимо записать число 4.

$\mathbf{5}a^4a^2 - a^3aa - a^2 \cdot 2a^{\mathbf{4}} - 3a^6 + 4 =$
$= 5\cancel{a^6} - a^5 - \cancel{2a^6} - \cancel{2a^6} + 4 = - a^5 + 4$

Ученикам, испытывающим трудности при нахождении ответа напрямую, можно предложить использовать метод перебора. Записывая в пустую клетку числа, начиная с 1, они смогут определить правильный ответ.
Ответ. 3, 5, 4

12. Отмечается, что из банки, содержащей 3 литра воды, каждым стаканом зачерпнули воду по 2 раза.



Решение задачи
• Определяется, сколько воды осталось. Так как объём стаканов дан в дм, составляется соответствующий многочлен.
$3 - (2a^3 + 2 \cdot 0{,}8a^2) = 3 - 2a^3 - 1{,}6a^2$
• Определяется степень многочлена: наибольшая степень — 3, значит, степень многочлена равна 3.
• При $a = 0{,}5$ дм вычисляется оставшийся объём. $3 - 2 \cdot 0{,}5^3 - 1{,}6 \cdot 0{,}5^2 = 2{,}35$ ($л$)
Ответ. $3 - 2a^3 - 1{,}6a^2$; В банке осталось 2,35 $л$ воды.

Формативное оценивание

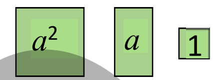
Критерии оценивания	Материалы оценивания
Объясняет понятие многочлена.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Записывает многочлены в стандартном виде.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Определяет степень многочлена.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

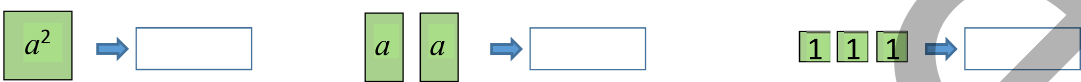
ТЕМА 3.3. Сложение и вычитание многочленов

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.1.2. Упрощает многочлен. 7-2.1.4. Складывает, вычитает, умножает многочлены.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Складывает многочлены. • Вычитает многочлены.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, алгебраические карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/4138* *https://video.edu.az/video/7786* *https://video.edu.az/video/7849* *https://video.edu.az/video/9079* *https://video.edu.az/video/7830* *https://video.edu.az/video/9635*

Побуждение

Учитель изображает многочлен на доске. Ученикам задаются вопросы, связанные с определением того, какой многочлен получится, если добавить указанные члены. К каждому многочлену рисуется соответствующее изображение и записывается

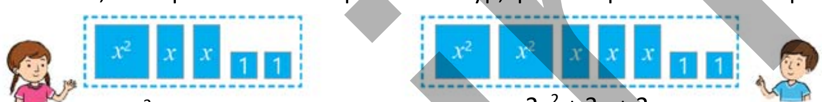




выражение.

Araşdırma-müzakirə

Ученикам можно заранее дать задание подготовить карточки, вырезанные из цветной бумаги. Чтобы определить многочлены, изображённые Анаром и Айнур, рассматриваются алгебраические карточки.



$x^2 + 2x + 2$ $2x^2 + 3x + 2$

Записываются многочлены, которые они изобразили.

• Эти карточки собираются вместе, и когда ученики объединяют одинаковые карточки, по наличию 3 карточек x^2, 5 карточек x, 4 карточек с числом 1 записывается многочлен.

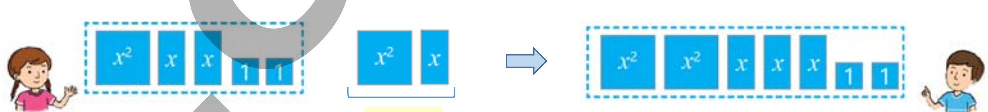
• Обсуждается вопрос: какие карточки должна добавить Айнур, чтобы получить многочлен, изображённый Анаром. Ученики определяют ответ с помощью алгебраических карточек.

Учитель может направлять учеников с помощью уточняющих вопросов:

– Из каких членов состоят данные многочлены? Каких членов, имеющихся в многочлене Анара, нет в

$3x^2$ $5x$ 4 $3x^2 + 5x + 4$

многочлене Айнур? Как можно записать многочлен, содержащий эти члены?

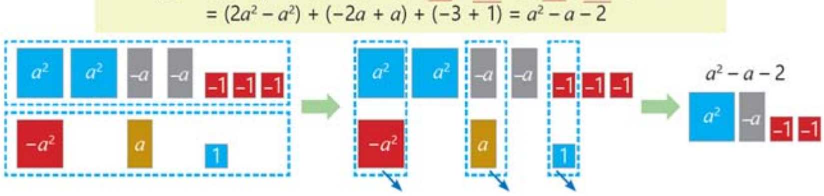


$x^2 + x$

Изучение Сложение многочленов

Каждый многочлен заключается в скобки и отмечается, что находится сумма. Ученикам сообщается значение скобок. Ученики знакомы со скобочными выражениями с младших классов. Если есть подобные члены, они определяются и приводятся. Пример обсуждается вместе с классом.

$$(2a^2 - 2a - 3) + (-a^2 + a + 1) = \underline{\underline{2a^2}} - \underline{2a} - 3 - \underline{\underline{a^2}} + \underline{a} + 1 =$$
$$= (2a^2 - a^2) + (-2a + a) + (-3 + 1) = a^2 - a - 2$$



Способ нахождения суммы двух многочленов в стандартном виде путём записи их столбиком объясняется на примере.

$$\begin{array}{r} 2a^2-2a-3 \\ +\ -a^2+a+1 \\ \hline a^2-a-2 \end{array}$$

В классах с техническими возможностями можно использовать манипулятивы.
https://en.oryxlearning.com/manipulatives/algebra-tiles

К сведению учителя! Во время сложения многочленов подчеркивается важность внимания к подобным членам. Ученикам демонстрируются примеры типичных ошибок. Рекомендуется работа над ошибками с теми учениками, которые допускают аналогичные ошибки.

Ошибки	Объяснение	Пример и рекомендация
Сложение не подобных членов	Не подобные члены не складываются и остаются в выражении без изменений.	*Неверно:* $3x^2+4x=7x^3$ *Рекомендация:* остаётся в таком виде, так как подобных членов нет.
При сложении подобных членов складываются не только коэффициенты, но и степени	Некоторые ученики ошибочно складывают и коэффициенты, и степени.	*Неверно:* $2x^2+3x^2=5x^4$ *Рекомендация:* объяснить ошибочность такого вычисления.
Неверное определение подобных членов	Если многочлен не в стандартном виде, при определении подобных членов допускаются ошибки.	*Неверно:* $6x^2+4xx^2=10xx^2$ *Рекомендация:* сначала привести к стандартному виду, а затем определить подобные члены. $6x^2+4x^3$
Невнимательность к знакам	Часто забывается отрицательный знак, и результат получается неверным	*Неверно:* $-5x+3x=2x$ *Рекомендация:* после сложения коэффициентов обязательно проверить ответ.

Задания

3. Требуется записать данный многочлен в виде суммы двух многочленов различными способами.
Для каждого пункта приводятся три соответствующих примера.

d) $3y^2-y^3+2xy-5$ → $(3y^2-y^3)+(2xy-5)$; $(2y^2-y^3)+(2y^2+2xy-5)$; $(3y^2-y^3+xy)+(xy-5)$

e) $5ab-a^2+3a$ → $(5ab-a^2)+(a+2a)$; $(2ab-a^2)+(3a)$; $(ab-a^2)+(4ab+3a)$

Ученикам можно показывать примеры не только с положительными коэффициентами, но и с отрицательными коэффициентами, а также примеры нахождения многочленов, удовлетворяющих условию после изменения порядка слагаемых.

d) $3y^2-y^3+2xy-5$ → $(3y^2-y^3-xy)+(3xy-5)$; $(xy-y^3+y^2)+(3y^2+xy-5)$; $(3y^2-4)+(2xy-y^3-1)$

e) $5ab-a^2+3a$ → $(5ab-2a^2)+(a^2+3a)$; $(ab-a^2-a)+(4ab+4a)$; $(5ab+3a)+(4ab-a^2)$

Задание может быть организовано как соревнование в парах. Учитель даёт парам определённое время, за которое необходимо составить как можно больше таких многочленов. После окончания времени пары обмениваются листами и проверяют работу друг друга. Побеждает пара, написавшая больше правильных и разных выражений. Этот метод развивает мышление, внимание и скорость.
В классах с техническими возможностями можно выполнить интерактивное задание по сложению многочленов.
https://www.geogebra.org/m/zqcg8vpj

Изучение Вычитание многочленов

Каждый многочлен заключается в скобки и отмечается, что находится разность. Ученикам объясняется значение скобок. При раскрытии скобок демонстрируются примеры влияния знака перед скобками на знаки членов внутри неё.

$$(2a^2-3a-3)-(-a^2+2a+1)=2a^2-3a-3+a^2-2a-1=$$
$$=(2a^2+a^2)+(-3a-2a)+(-3-1)=3a^2-5a-4$$

Чтобы найти разность двух многочленов в стандартном виде, обычно каждый член вычитаемого многочлена записывается с противоположным знаком, затем многочлены складываются.
Отмечается, что этот способ удобен для вычитания.

$$\begin{array}{r} 2a^2-3a-3 \\ -\ -a^2+2a+1 \\ \hline 3a^2-5a-4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 2a^2-3a-3 \\ +\ a^2-2a-1 \\ \hline 3a^2-5a-4 \end{array}$$

6. Для правильности равенства подставляется соответствующий член в пустую клетку.

a) $x + \boxed{2x} + x^2 - 2 = x^2 + 3x - 2$	c) $(3ab + \boxed{2a} - (ab + a) = 2ab + 3a$
b) $x^3 + 4x^2 + 1 = x^3 + 3x^2 + 1 + \boxed{x^2}$	d) $(5m^2n + mn) - (m^2n + 3m) = 4m^2n + \boxed{mn} - 3m$

7. Требуется записать данный многочлен в виде разности двух многочленов различными способами. Поскольку в 3-м задании уже устранены ошибки и закреплены знания, ученики способны выполнить это задание самостоятельно. Здесь важно обратить внимание на то, что знак «минус» перед скобками влияет на знаки членов внутри скобок.

9. Выражения упрощаются. Определяется степень полученного многочлена. При этом можно направить внимание учеников на то, как изменяется степень при сложении или вычитании многочленов, сравнивая степень результата со степенями исходных многочленов.

a) $M - N = 3a^2 - a - 2 - (2a^2 - 2a) = \underline{3a^2} - \underline{\underline{a}} - 2 - \underline{2a^2} + \underline{\underline{2a}} = a^2 + a - 2$ *Степень многочлена*: 2

При нахождении суммы или разности некоторых многочленов степень уменьшается. Причиной этого является то, что члены наибольшей степени оказываются подобными и сокращаются. Целесообразно акцентировать внимание на подобных случаях. Например:

c) $M - (N + P) = 3a^2 - a - 2 - (2a^2 - 2a + a^2 - 1) = \underline{3a^2} - \underline{\underline{a}} - 2 - \underline{2a^2} + \underline{\underline{2a}} - \underline{a^2} + 1 = a - 1$ *Степень многочлена*: 1

10. Скобки расставляются так, чтобы получилось верное равенство. При сложении и вычитании многочленов правильное определение новых скобок повышает внимание к действиям, формирует навыки контроля последовательности операций и изменения знаков.

В задании в левой части равенства не записывается тот же многочлен, что и на правой. Но сравнение выражений помогает избежать вычислительных ошибок.

$x^2 - 5x + 4 - (x^2 - 5x) - 3 = 1$	$x^2 - 5x + 4 - (x^2 - 5x - 3) = 7$	$x^2 - (5x + 4) - (x^2 - 5x - 3) = -1$

12. Выражение упрощается. Определяется, какое выражение не зависит от переменных. Это означает, что результат выражения является числом и остаётся неизменным при любых значениях переменных. При упрощении уделяется внимание раскрытию скобок.

a) $(2a^2 + b^2 - 3) + (b^2 + 2 - a^2) - (a^2 + 2b^2 - 4) =$
$= 2a^2 + b^2 - 3 + b^2 + 2 - a^2 - a^2 - 2b^2 + 4 = 3$ *Не зависит от переменной*

b) $(a - 2b + c) - (a - b - 3) + (a - c + b) - (b - c + 6) =$
$= a - 2b + c - a + b + 3 + a - c + b - b + c - 6 = a - b + c$ *Зависит от переменной*

c) $(m - n + p - 1) - (m - p + n + 1) - (p - m - n - 1) - (m - n + p + 1) =$
$= m - n + p - 1 - m + p - n - 1 - p + m + n + 1 - m + n - p - 1 = -2$ *Не зависит от переменной*

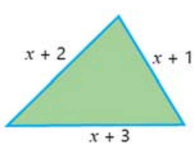
Дифференцированное обучение

Поддержка. К доске вызываются три ученика. Учитель просит двух учеников записать многочлен. Другие ученики находят сумму или разность этих многочленов. Результат обсуждается. Учащиеся меняются ролями и задание повторяется.

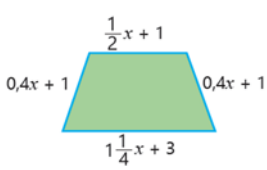
Углубление. К доске вызываются четыре ученика. Двум ученикам предлагается записать многочлен. Третий ученик определяет, какой многочлен нужно добавить к одному, чтобы получить другой, и объясняет ход решения.

Решение задач

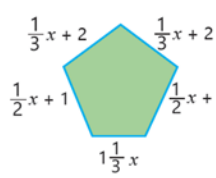
13. Записывается выражение для нахождения периметров фигур. Определяется, периметры каких фигур равны.



$x + 2 + x + 1 + x + 3 =$
$= 3x + 6$

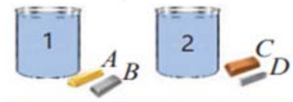


$0{,}4x + 1 + \frac{1}{2}x + 1 + 0{,}4x + 1 + 1\frac{1}{4}x + 3 =$
$= 2\frac{11}{20}x + 6$



$\frac{1}{3}x + 2 + \frac{1}{2}x + 1 + 1\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{3}x + 2 =$
$= 3x + 6$

Ответ. Периметры треугольника и пятиугольника равны.
14. Тело, погружённое в жидкость, вытесняет жидкость в объёме, равном его объёму.
На основе таблицы плотностей записываются выражения и отвечается на вопросы:



Тело	Плотность (г/см³)
A	20
B	10
C	8
D	2

• В первый сосуд поместили тело A массой m граммов и тело B массой n граммов. Объём вытесненной воды равен: $20m + 10n$
• Во второй сосуд поместили тело C массой m граммов и тело D массой n граммов. Объём вытесненной воды равен: $8m + 2n$
• Записывается выражение, показывающее общий объём вытесненной воды из двух сосудов: $20m + 10n + 8m + 2n = 28m + 12n$
• Записывается выражение, показывающее, насколько объём воды, вытесненной из второго сосуда, больше объёма воды, вытесненной из первого сосуда: $20m + 10n - (8m + 2n) = 12m + 8n$

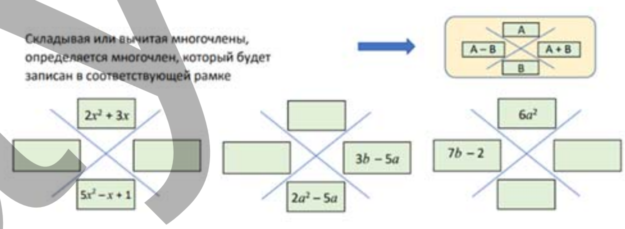
Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Складывает многочлены.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Вычитает многочлены.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

Ученики на предыдущих уроках познакомились с понятиями «одночлен», «многочлен», «стандартный вид одночлена или многочлена», «степень одночлена или многочлена», «свободный член», «двучлен», «многочлен». На этом уроке они будут решать различные задачи и примеры для закрепления полученных навыков.
В классах с техническими возможностями можно демонстрировать видео с объяснениями некоторых заданий, связанных с многочленами, и проводить интерактивные игры.
https://www.educaplay.com/learning-resources/14860236-algebra_1_math_game.html
https://www.quia.com/cb/42458.html

Практическое задание. Класс делится на группы. Каждой группе раздаются рабочие листы.
В рабочем листе показан способ заполнения пустых клеток.
Сумма многочленов, расположенных в верхней и нижней рамке, должна быть записана в правой рамке, а их разность — в левой рамке.
Группа, которая быстрее и правильнее заполнит пустые клетки по этому правилу, объявляется победителем.



Рабочий лист можно загрузить по этой ссылке: https://drive.google.com/file/d/1frLrr14q6U3KlanNApFk1cgzlBh5t-nE/view?usp=drive_link

Решение заданий
1. Таблица заполняется. При заполнении таблицы ученикам необходимо обратить внимание на правила нахождения произведения одночленов, сложения одночленов, а также определения членов многочленов.

a)

$\times$	5	x^2	$4y^2z$
$-2x$	$-10x$	$-2x^3$	$-8xy^2z$
$0{,}6x^2y$	$3x^2y$	$0{,}6x^4y$	$2{,}4x^2y^3$

b)

$+$	$2n$	$2m^2-3n$	m^2+2n+2
$-2m^2$	$-2m^2+2n$	$-3n$	$-m^2+2n+2$
$-m^2-2n$	$-m^2$	m^2-5n	2

При выполнении задания важно определить, какую клетку заполнять первой. Этот навык помогает быстро определить выражения, соответствующие всем клеткам таблицы. Это формирует у учеников умение мыслить в логической последовательности, работать планомерно и выполнять задания системно.

2. Для правильности равенства в пустые клетки подставляются соответствующие числа. Чтобы выполнить задание, сначала проводится возможное упрощение с применением свойств степени, затем сравниваются коэффициенты и буквенные части выражений, записанных по обе стороны равенства.

а) $(a^2)^3 \cdot (2b^2)^{\boxed{2}} = 4a^6b^4$

Вычисляется степень степени. $(a^2)^3 = a^6$

Так как по обе стороны равенства имеется выражение a^6, остальные выражения также должны быть равны. Исходя из этого определяется число, которое нужно вписать в пустую клетку.

$a^6 \cdot (2b^2)^2 = a^6 \cdot 4b^4$

5. Данные выражения записываются в виде степени.

а) В виде квадрата одночлена

$a \cdot 4a^3b^{12} = 4a^4b^{12} = (2a^2b^6)^2$

$(3xy^3)^4 = 81x^4y^{12} = (9x^2y^6)^2$ или $(3xy^3)^4 = ((3xy^3)^2)^2 = (9x^2y^6)^2$

$(4x)^2 \cdot (2x^2)^2 = 16x^2 \cdot 4x^4 = 64x^6 = (8x^3)^2$ или $(4x)^2 \cdot (2x^2)^2 = (4x \cdot 2x^2)^2 = (8x^3)^2$

7. Определяются верные утверждения, ответы обосновываются с помощью примеров.

а) Если перемножить два одночлена степеней 3 и 2, получится одночлен степени 6. *Утверждение неверно.*

Показывается на примерах, что степень произведения двух одночленов равна сумме их степеней.

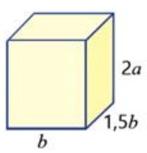
Например, $x^3 \cdot x^2 = x^5$

б) При сложении двучленов степеней 3 и 2 получается многочлен степени 3. *Утверждение верно.*

Показывается на примерах, что степень суммы двух многочленов равна большей из степеней этих многочленов.

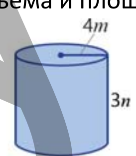
Например, $x^3 + x + x^2 - 2x = x^3 + x^2 - x$

9. На основании данных размеров кубоида, цилиндра и прямой треугольной призмы, представленных на рисунке, записываются выражения для нахождения объёма и площади каждой фигуры ($\pi \approx 3$).



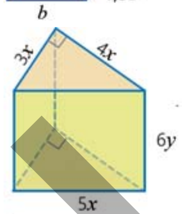
а) $V = 2a \cdot 1{,}5b \cdot b = 3ab^2$

б) $S_{полн} = 2(2a \cdot 1{,}5b + 2ab + 1{,}5bb) = 10ab + 2b^2$



а) $V = \pi \cdot (4m)^2 \cdot 3n \approx 144m^2n$

б) $S_{полн} = 2 \cdot \pi \cdot (4m)^2 + 2 \cdot \pi \cdot 4m \cdot 3n = 96m^2 + 72mn$



а) $V = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4x \cdot 6y = 36x^2y$

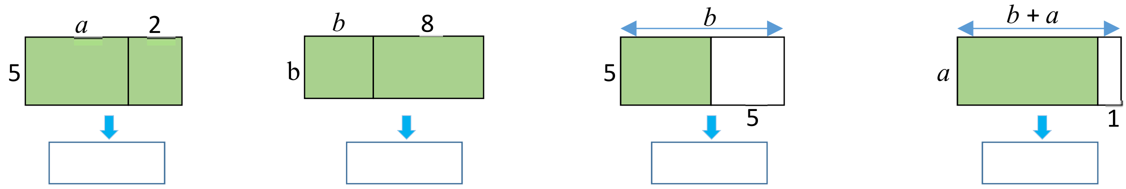
б) $S_{полн} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4x + 3x \cdot 6y + 4x \cdot 6y + 5x \cdot 6y = 12x^2 + 72xy$

ТЕМА 3.4. Умножение одночлена на многочлен

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.1.3. Находит значение многочлена при заданных значениях переменных. 7-2.1.4. Складывает, вычитает, умножает многочлены.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Умножает одночлен на многочлен. • Находит значение полученного многочлена при заданных значениях переменных.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, алгебраические карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/7848* *https://video.edu.az/video/13507* *https://video.edu.az/video/13570* *https://video.edu.az/video/13570* Задание: *https://www.geogebra.org/m/re5yfdud* *https://www.geogebra.org/m/unpdkhqh*

Побуждение

Учитель предлагает ученикам изготовить модели в соответствии с изображениями, нарисованными на доске, используя вырезанные из цветной бумаги прямоугольники, и записать многочлен для нахождения площади закрашенных частей. Учитель задаёт ученикам направляющие вопросы:
— Как можно найти площадь прямоугольника, используя площади его частей? В каком изображении используется сумма площадей, а в каком — разность? Какова ширина и длина закрашенной фигуры? Как найти площадь, используя ширину и длину?



Ученики для каждого изображения отвечают на вопросы и объясняют, как они записали многочлен, выражающий площадь.

Исследование-обсуждение

Два класса, в каждом из которых по k учеников, поехали в Национальный музей ковра. Указывается, что цена входного билета для взрослых составляет n манат, а для школьников — на 4 маната дешевле.

• Так как поехали два класса по k учеников, указывается, что количество школьников, отправившихся в музей, равно 2k, и записывается выражение, показывающее количество учеников, поехавших в музей: $2k$

• Записывается выражение, показывающее стоимость одного билета для школьников: $m-4$

Записывается выражение, показывающее, сколько денег было оплачено за приобретённые для школьников билеты:

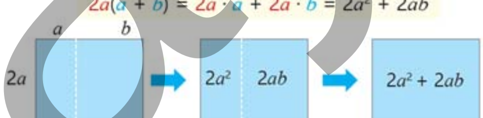
$k \cdot m + k \cdot (m-4)$ или $km + k(m-4)$

Ученикам можно дать задание упростить это выражение с помощью учителя. Учитель уделяет внимание ученикам, испытывающим затруднения в упрощении выражения.

Изучение Умножение одночлена на многочлен

Объясняется с помощью изображения и примера, что произведение одночлена на многочлен находится на основе распределительного свойства умножения. Чтобы умножить одночлен на многочлен, необходимо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и сложить полученные произведения. Формула обсуждается с учениками.

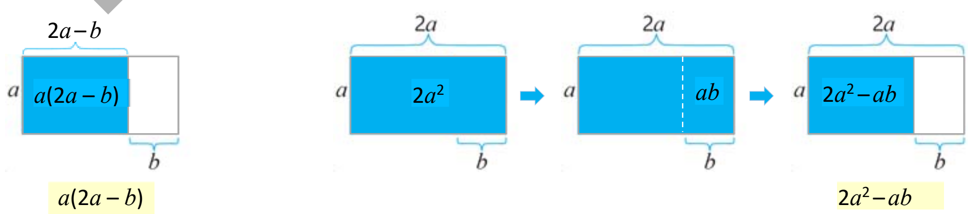
$$2a(a+b) = 2a \cdot a + 2a \cdot b = 2a^2 + 2ab$$



Подумай!

Ученики отмечают, что на основе произведения ширины и длины прямоугольника также можно записать $a(2a-b)$.

С другой стороны, отмечается, что произведение *a* и *2a* показывает площадь большого прямоугольника, а произведение *a* и *b* — площадь маленького прямоугольника, отделённого от большого; чтобы найти площадь синей части, из площади большого прямоугольника вычитается площадь маленького.

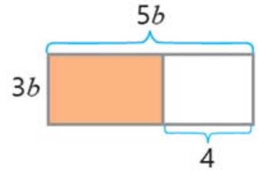


Подчёркивается, что обе записи выражают площадь синего прямоугольника, поэтому они равны.

Задания

1. Для нахождения площади закрашенного прямоугольника в пустую клетку вписываются соответствующие одночлены.

a) $x(3x + \boxed{3}) = \boxed{3x^2} + \boxed{3x}$ b) $\boxed{2a}(\boxed{4{,}5a} + \boxed{2}) = \boxed{9a^2} + \boxed{4a}$ c) $3b(\boxed{5b} - \boxed{4}) = \boxed{15b^2} - \boxed{12b}$



К сведению учителя! При нахождении произведения одночлена и многочлена используется распределительное свойство умножения. Для учеников, испытывающих трудности с применением распределительного свойства, полезно напомнить это свойство, привести сначала примеры на действия с числами.

3. Находится произведение одночлена и многочлена. Полученный многочлен записывается в стандартном виде, и таблица заполняется.

$\times$	$ab + a^2b^2 - a^2$	$a^2b - 2ab + ab^3$	$3b^4 + 4b^3 - 5$	$a^2b - 2ab - ab^2 + 4b^4$
-7	$-7ab - 7a^2b^2 + 7a^2$	$-7ab + 7a^2b^2 - 7a^2$	$-21b^4 - 28b^3 + 35$	$-7a^2b + 14ab + 14ab^2 - 28b^4$
$2ab$	$14a^2b^2 - 2a^3b^3 - 2a^3b$	$2a^3b^2 - 4a^2b^2 + 2a^2b^4$	$6ab^5 + 8ab^4 - 10ab$	$2a^3b^2 - 4a^2b^2 - 2a^2b^3 + 8ab^5$

4. Данные выражения упрощаются.

a) $a(a + b) - b(a - b) = a^2 + ab - ba + b^2 = a^2 + b^2$

d) $m(m^2 - mn + n^2) - n(m^2 - mn + n^2) = m^3 - m^2n + mn^2 - nm^2 + m^2n - n^3 = m^3 - 2m^2n + 2mn^2 - n^3$

Иногда ученики испытывают трудности при выборе подобных членов среди одночленов, содержащих одинаковые переменные в разных степенях. Например, они ошибочно считают, что mn^2 и nm^2 являются подобными членами. Важно организовать работу над ошибками с такими учениками.

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда при умножении одночлена на многочлен ученики не обращают внимания на знак одночлена. Если одночлен имеет отрицательный знак, а при раскрытии скобок знак выражения внутри скобок не изменяется, то ученик получает ошибочный результат. Ещё одной ошибкой учеников является неправильное применение свойств степени. Так, при нахождении произведения многочлена, содержащего несколько переменных, на одночлен ученики допускают ошибки в определении степеней.

	Ложное	Верное
Если перед скобкой множитель с отриц. знаком:	$-a^2(2b - 5) = -2a^2b - 5a^2$	$-a^2(2b - 5) = -2a^2b + 5a^2$
Применение свойств степеней:	$6ab(2ab + b^3) = 12ab + 12ab^4$	$6ab(2ab - b^3) = 12a^2b^2 - 12ab^4$

При решении заданий важно учитывать ошибки учеников, определять, что эти ошибки связаны с раскрытием скобок, свойствами степеней с одинаковыми основаниями, распределительным свойством умножения, и организовать работу над ними.

6. Выполняется алгоритм и находится конечное число. Ученики записывают выражение Y в стандартном виде и анализируют блок-схему. Следуя по соответствующей ветви блока условия, они вычисляют значение выражения Y при заданном значении переменной и определяют полученное число.

a) $Y = 2a^2(b + 3) - b(2a^2 - 3) = = 6a^2 + 3b$ *Полученное выражение двучлен.*

Вычисляется значение Y при $a = -1$; $b = 2$.

$Y = 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot 2 = 12$

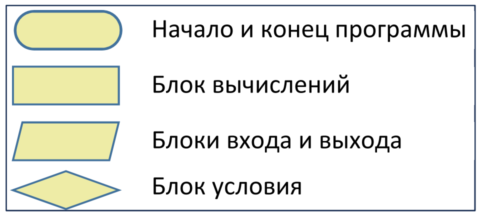
b) $Y = (2ab)^2 - a(ab^2 + 2) - 4 = 3a^2b^2 - 2a - 4$ *Полученное выражение не двучлен.*

Вычисляется значение Y при $a = -4$; $b = -2$.

$Y = 3a^2b^2 - 2a - 4 = 3 \cdot (-4)^2 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-4) - 4 = 180$

К сведению учителя!

В 6-м задании ученикам поручается выполнить разветвляющийся алгоритм и в результате найти число. Ученики должны следить за последовательностью операций и блоками условий в блок-схеме и обращать внимание, для какого значения переменной находится значение выражения. При разветвлении ход алгоритма зависит от истинности или ложности условия. Ученики знакомы с подобными блок-схемами на уроках информатики с младших классов. Такие задания развивают алгоритмическое мышление, логическое принятие решений и умение следить за последовательностью операций.



7. В пустые клетки определяются соответствующие выражения. Ученики обращают внимание на правила раскрытия скобок при умножении одночлена на многочлен и находят подходящее число для заполнения пустой клетки.

a) $\boxed{b}(a-1)=ab-b$ c) $6xy+x^2y=x\boxed{y}(6+\boxed{x})$ e) $4a^4-2a^2+2a=2a(\boxed{2a^3}-\boxed{a}+\boxed{1})$

b) $5x^2+x=\boxed{x}(5x+1)$ d) $-2x^3y-2xy=\boxed{-2x}(x^2y+y)$ f) $\boxed{-3a}(a^2+a+3)=-3a^3-3a^2-9a$

9. Подбирается такой член, чтобы полученное выражение стало правильным равенством. При выполнении задания ученики обращают внимание на выражения в левой и правой частях равенства.

$-2a^2\cdot(1-\boxed{2})=\boxed{-2a^2}+2a^3$ $a^5\cdot(-a^3+\boxed{a}+2)=-a^8+a^6+\boxed{2a^5}$

Такие задания укрепляют у учеников умение соблюдать порядок действий, применять распределительное свойство умножения, а также развивают логическую последовательность и структурированное мышление.

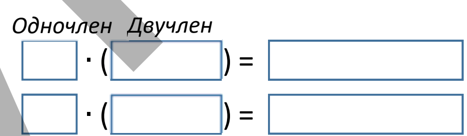
10. Находятся ответы на вопросы.

a) Чтобы найти значение переменной, при котором значение выражения 2(x + 3) на 5 единиц больше значения выражения 3x, составляется соответствующее уравнение и решается.

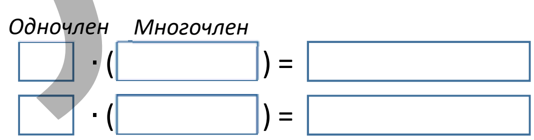
$2(x+3)-3x=5$
$2x+6-3x=5$
$-x=-1$
$x=1$

Дифференцированное обучение

Поддержка. На доске рисуется соответствующее изображение и приглашаются два ученика. Учитель предлагает ученикам вписать в соответствующую пустую клетку одночлен и двучлен. Затем ученики находят произведение записанных одночлена и многочлена и записывают его в стандартном виде в пустую клетку справа от знака равенства. Результат обсуждается.

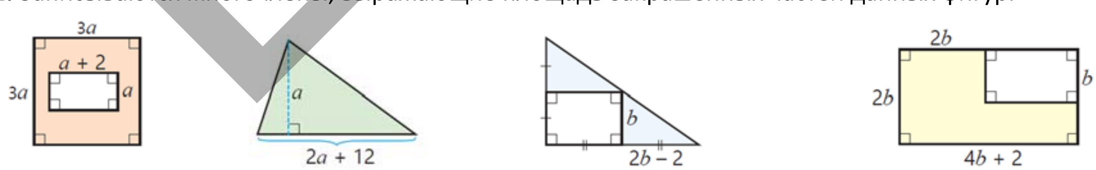


Углубление. На доске рисуется соответствующее изображение и приглашаются два ученика. Учитель предлагает ученикам вписать в пустую клетку одночлен и многочлен, удовлетворяющие условию: например, одночлен степени 3, трёхчлен степени 2, одночлен, сумма коэффициента и степени которого равна 5, и т.п. Затем ученики находят произведение записанных выражений и записывают результат в стандартном виде. Результат обсуждается.



Решение задач

11. Записываются многочлены, выражающие площадь закрашенных частей данных фигур.



$(3a)^2-a(a+3)=$
$=8a^2-3a$

$\frac{1}{2}a(2a+12)=$
$=a^2+6a$

$\frac{1}{2}\cdot2\cdot(2b-2)\cdot2b-b\,(2b-2)=$
$=2b^2-2b$

$(4b+2)\cdot2b-b\,(4b+2-2b)=$
$=6b^2+2b$

Обсуждаются мнения учеников, которые различными способами находят многочлены, выражающие площадь закрашенных частей фигур.

13. Указывается, что один принтер печатает m страниц в минуту, а второй — на 4 страницы больше. Записывая многочлены, даются ответы на вопросы.

• Указывается, сколько страниц второй принтер печатает за 3 минуты. $3(m + 4) = 3m + 12$

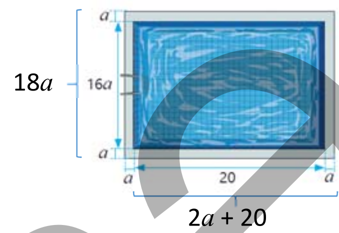
• Записывается и упрощается выражение, показывающее общее число страниц, напечатанных двумя принтерами за 5 минут.

$5(m + m + 4) = 5(2m + 4) = 10m + 20$

Указывается, сколько всего страниц напечатают два принтера за k минут.

$k(m + m + 4) = 2km + 4k$

14. Размеры бассейна прямоугольной формы указаны в метрах на плане. Предусмотрена облицовка плиткой по краю бассейна. Записывается многочлен для вычисления общей площади плитки, которая будет уложена в этой части, на основе плана.



Решение задачи

Находится общая площадь бассейна на плане.

$(16a + a + a)(a + 20 + a) = 18a(2a + 20) = 36a^2 + 360a$

Находится площадь участка, предназначенного для воды.

$16a \cdot 20 = 320a$

Записывается многочлен, выражающий разность этих площадей, и приводится к стандартному виду.

$36a^2 + 360a - 320a = 36a^2 + 40a$

• При $a = 0{,}5$ вычисляется площадь. $36a^2 + 40a = 36 \cdot 0{,}5^2 + 40 \cdot 0{,}5 = 38{,}72$ (м^2)

Ответ. $36a^2 + 40a$; 38,72 м^2

Обсуждение. Обсуждаются разные способы решения задачи. Например, так как края бассейна имеют форму прямоугольника, ученики могут записать многочлен, выражающий площадь плитки, найдя площадь каждой части отдельно, а затем их сумму.

Формативное оценивание

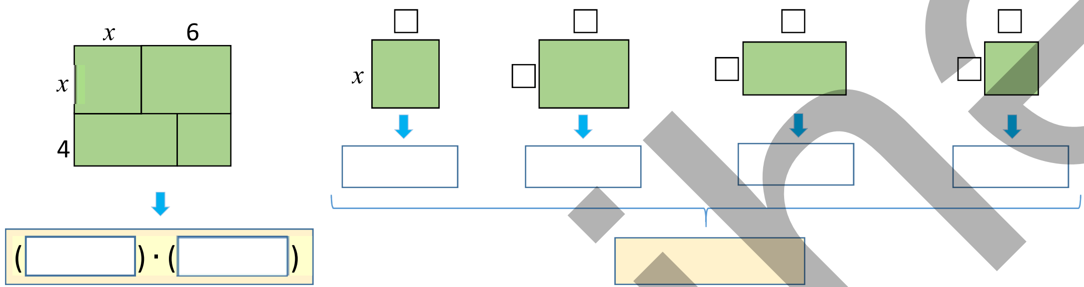
Критерии оценивания	**Материалы оценивания**
Умножает одночлен на многочлен.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Находит значение полученного многочлена при заданных значениях переменных.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

ТЕМА 3.5. Умножение многочлена на многочлен

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.1.3. Находит значение многочлена при заданных значениях переменных. 7-2.1.4. Складывает, вычитает и умножает многочлены.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Умножает многочлен на многочлен. • Находит значение полученного многочлена при заданных значениях переменных. • Определяет, является ли данное выражение тождеством.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, алгебраические карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/9871* *https://video.edu.az/video/9093* *https://video.edu.az/video/9652* *https://video.edu.az/video/9487* *https://www.geogebra.org/m/n8dx3pyb* *https://www.geogebra.org/m/ubu2pg6k*

Побуждение

Учитель рисует на доске фигуру, как на рисунке, и отмечает её размеры. Затем каждая фигура рисуется отдельно, и ученикам поручается вписать соответствующие размеры в пустые клетки.



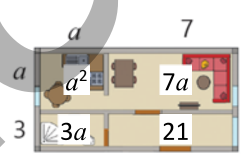
Учитель задаёт ученикам направляющие вопросы:

- Как можно записать площадь прямоугольника в виде произведения длин его сторон? Как можно найти площадь прямоугольника, используя площадь его частей? Какая из частей прямоугольника является квадратом? Сколько из этих частей имеют форму прямоугольника? У какого прямоугольника одна из сторон равна x? Площадь какого прямоугольника не зависит от x?

Находятся ответы на вопросы и объясняется, как записывается многочлен, представляющий общую площадь фигуры.

Исследование-обсуждение

На рисунке даны размеры квартиры, имеющей прямоугольную форму. Обсуждается с классом, какими способами можно найти многочлен, выражающий общую площадь этой квартиры. Можно отметить, что дана квартира, состоящая из 4 прямоугольных комнат. Находится площадь каждой части. Затем ученики отмечают, что для нахождения площади всей квартиры в форме прямоугольника нужно сложить



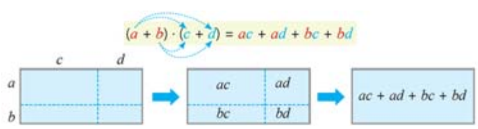
$$a^2+3a+7a+21=a^2+10a+21$$

полученные одночлены.

С помощью учителя ученики также могут определить площадь прямоугольника по произведению его ширины и длины. Таким образом, как при выполнении операции умножения используется модель площади, здесь также осуществляется переход к произведению многочлена на многочлен.

Изучение Умножение многочлена на многочлен

Чтобы найти произведение двух многочленов, каждый член первого многочлена умножается на каждый член второго многочлена, и полученные произведения складываются. Приведённый пример обсуждается с



×	c	d
a	ac	ad
b	bc	bd

учениками. Отмечается также, что для нахождения произведения двух многочленов используют таблицу. По примеру ученикам объясняется порядок использования таблицы.

×	$3a$	2
a	$3a^2$	$2a$
1	$3a$	2

$(a + 1) \cdot (3a + 2) = 3a^2 + 5a + 2$

×	a	3
$2a$	$2a^2$	$6a$
-5	$-5a$	-15

$(2a - 5) \cdot (a + 3) = 2a^2 + a - 15$

Подумай!

При нахождении произведения многочленов обращается внимание на пример, чтобы определить, изменится ли результат при перестановке множителей. Ученики находят произведение двучленов 2a – 5 и a + 3, меняя местами множители. Сравнивают полученные результаты и отмечают, что результат не изменяется.

×	$2a$	-5
a	$2a^2$	$-5a$
3	$6a$	-15

$(a + 3) \cdot (2a - 5) = 2a^2 + a - 15$

В классах с техническими возможностями можно использовать симуляцию, связанную с умножением многочленов.
https://phet.colorado.edu/sims/html/area-model-algebra/latest/area-model-algebra_all.html
К сведению учителя! Некоторые ученики с трудом усваивают правило умножения многочлена на многочлен. Таким ученикам можно напомнить модель площади при нахождении произведения двухзначного числа на двузначное, показать примеры и сравнить с произведением двучлена на двучлен. Например:

×	10	3
20	200	60
4	40	12

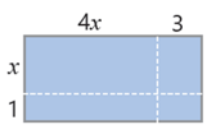
$200 + 40 + 60 + 12 = 312$

×	a	3
$2a$	$2a^2$	$6a$
4	$4a$	12

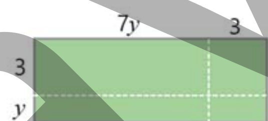
$2a^2 + 4a + 6a + 12 = 2a^2 + 10a + 12$

Задания

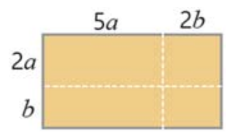
2. Для нахождения площади прямоугольника записываются выражения, соответствующие произведению многочленов, и упрощаются.

a) 

$(x + 1)(4x + 3) = 4x^2 + 7x + 3$

b) 

$(3 + y)(7y + 3) = 7y^2 + 24y + 9$

c) 

$(2a + b)(5a + 2b) = 10a^2 + 9ab + 2b^2$

4. На основании правила умножения многочлена на многочлен выражения упрощаются. Полученные результаты обсуждаются среди учеников и определяется, являются ли они правильными.

г) $(-b^2 - 1)(b^2 + 2) = -b^4 - 2b^2 - b^2 - 2 = -b^4 - 3b^2 - 2$
д) $(3c^2 - d)(-d - 3c^2) = -3c^2d + 9c^4 + d^2 + 3c^2d = 9c^4 + d^2$

При записи выражения, соответствующего произведению многочленов, допускаются те же ошибки, что и при умножении одночлена на многочлен. Важно выявлять ошибки учеников и организовывать работу над ними.

Из истории математики

Отмечается, что древние математики для доказательства некоторых равенств при положительных значениях переменных использовали геометрические фигуры. Например, греческий математик Евклид в своём труде «Начала» показал верность равенства $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ путём разбиения прямоугольника на четыре прямоугольника. Можно предоставить ученикам более подробную информацию об этом. Через такие примеры ученики видят не только алгебраические формулы, но и историю их возникновения и математическую логику. Например, можно взять несколько теорем из 2-й книги Евклида и, показав их через прямоугольники,

	c	d
a	ac	ad
b	bc	bd

	b	c
a	ab	ac

объяснить, что сумма площадей двух прямоугольников равна площади большого прямоугольника, связав это со свойством распределения. $a(b + c) = ab + ac$.

5. Для того, чтобы равенство было верным, в пустые клетки записываются соответствующие выражения.

a) $(a + b)(c - \boxed{d}) = ac - ad + \boxed{bc} - bd$

b) $(a - 1)(\boxed{b} - 3) = ab - 3a - \boxed{b} + 3$

c) $(b + 2)(b - \boxed{1}) = b^2 + \boxed{b} - 2$

d) $(d - \boxed{2})(d - 5) = d^2 - 7d + \boxed{10}$

7. Выражения упрощаются и при данном значении переменной вычисляется значение выражения.

c) $-3y(2y - 1)(y + 4) + 6y^3$
$y = 0;\ -0{,}5$

$-3y(2y - 1)(y + 4) + 6y^3 = -6y^3 - 7y + 4 + 6y^3 = -7y + 4$

$y = 0 \Rightarrow -7 \cdot 0 + 4 = 4;$ $\quad y = 0 \Rightarrow -7 \cdot (-0{,}5) + 4 = 7{,}5$

Ученикам напоминается, что при упрощении выражения путём умножения многочлена на многочлен или одночлена на многочлен число членов и, соответственно, число арифметических действий уменьшается благодаря привёдению подобных членов. В этом случае при подстановке значения переменной найти ответ удобнее.

8. Выражение записывается в стандартном виде многочлена. В соответствии с условием вычисляется значение выражения. Ученики подставляют значение в полученный многочлен и находят ответ. Так ученики обращают внимание на то, что используется не значение переменной, а значение выражения.

b) $(2a + 3)(b + 2) - a(b + 4)$
$ab + 3b = -2$ olarsa

$(2a + 3)(b + 2) - a(b + 4) = \underbrace{ab + 3b}_{-2} + 4 = -2 + 4 = 2$

11. Степень записывается в виде произведения и выполняется операция умножения.

а) $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

б) $(x + 2)^3 = (x + 2)(x + 2)(x + 2) = (x^2 + 4x + 4)(x + 2) = x^3 + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 4x + 8 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

К сведению учителя! Выполнение умножения путём записи степени в виде произведения — один из важнейших навыков при изучении формул сокращённого умножения. Рекомендуется организовать работу над ошибками и повторные объяснения ученикам, испытывающим трудности. Таким образом, они выполняют подготовительный этап к следующему разделу.

Изучение Тождество

Ученикам сообщается, что выражения $4(a + b)$ и $4a + 4b$ принимают одинаковые значения при любых значениях переменных a и b, и что существуют выражения, которые не всегда принимают одинаковые значения. Отмечается, что выражения, принимающие одинаковые значения при любых значениях переменных, называются эквивалентными выражениями или выражениями, равными тождественно. Приводятся примеры. Можно отметить, что свойства сложения и умножения также относятся к тождествам

К сведению учителя! Ученикам, впервые знакомящимся с понятием тождества, сложно понять разницу между понятиями «тождество» и «уравнение». Целесообразно показать эту разницу на примерах.

Уравнение	Тождество
Равенство является верным при некотором значении (или значениях) переменной.	Равенство является верным при любом значении переменной.
$2(a + 1) = 8$ Равенство является верным только при $a = 3$.	$2(a + 1) = 2a + 2$ Равенство является верным при любом значении a.

Если существует такое значение переменной, при котором данные выражения не равны, необходимо отметить, что эти выражения не тождественно равны, и привести примеры.

В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы. *https://video.edu.az/video/8647*

Ложные представления, возникающие у учеников. Например, выражение $(x + y)^2 = x + y$ верно только при любых равных значениях x и y, но неверно при различных значениях. Значит, данное выражение не является тождеством.

13. Определяются выражения, тождественно равные данному выражению.

a) $2a - 8$

$2(a - 4)$
$2(a - 8)$
$2(-4 + a)$

$2(a - 4) = 2a - 8$ ✓
$2(a - 8) = 2a - 16$
$2(-4 + a) = -8 + 2a = 2a - 8$ ✓

b) $-ab - 6a$

$a(b - 6)$
$-a(b + 6)$
$a(-6 - b)$

$a(b - 6) = ab - 6a$
$-a(b + 6) = -ab - 6a$ ✓
$a(-6 - b) = -6a - ab$ ✓

Запомни!

Отмечается, что замена выражения другим, тождественно равным ему выражением, называется тождественным преобразованием этих выражений или просто преобразованием. Примеры из учебника обсуждаются с учениками. Ученикам объясняются способы определения, является ли данное равенство тождеством, преобразуя выражения левой и правой частей.

1) *Если преобразование выражения с одной стороны даёт выражение с другой стороны.*

2) *Если преобразования выражений с обеих сторон приводят к одному и тому же выражению.*

Показываются примеры к обоим случаям и способы тождественных преобразований объясняется на примерах.

К сведению учителя! Тождественные преобразования — один из ключевых аспектов курса алгебры. В 7-м классе ученики будут доказывать тождества с относительно простыми выражениями, а в старших — встречаться с ними в различных темах. Формирование этого навыка поможет в работе со сложными преобразованиями.

14. Определяется, являются ли данные выражения тождественно равными. Ученики объясняют, как нашли ответ.

а) $3(a + 2)$ и $3a + 6$ → По распределительному свойству умножения выражения тождественно равны: $3(a + 2) = 3a + 6$

e) $5(xy - xy)$ и 5 → По свойству умножения на ноль выражения не являются тождественно равными. Поскольку $5(xy - xy) = 0$, то $5(xy - xy)$ и 5 не тождественно равны.

f) $2(a + 10)$ и $20 + 2a$ → По распределительному и переместительному свойствам выражения тождественно равны. $2(a + 10) = 2a + 20 = 20 + 2a$

15. Тождества доказываются.

а) $2a(2a - 0{,}5b) + ab = 4a^2$
$4a^2 - ab + ab = 4a^2$
$4a^2 = 4a^2$

При преобразовании выражения в одной части равенства получается выражение, находящееся в другой части равенства

в) $a(a - b) + a(b - c) + c(a - b) = a^2 - bc$
$a^2 - ab + ab - ac + ac - bc = a^2 - bc$
$a^2 - bc = a^2 - bc$

При преобразовании выражения в одной части равенства получается выражение в другой его части.

17. Требуется доказать, что данное выражение тождественно равно нулю. Ученики упрощают выражение $(a + b - 2c)(b - a) + (a + c - 2b)(a - c) - (b + c - 2a)(b - c)$, используя правило умножения многочлена на многочлен.

Каждое произведение записывается отдельно и упрощается.

$(a + b - 2c)(b - a) = ab - a^2 + b^2 - ab - 2bc + 2ac = -a^2 + b^2 + 2ac - 2bc$

$(a + c - 2b)(a - c) = a^2 - ac + ac - c^2 - 2ab + 2bc = a^2 - c^2 - 2ab + 2bc$

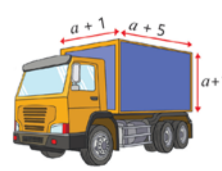
$(b + c - 2a)(b - c) = b^2 - bc + bc - c^2 - 2ab + 2ac = b^2 - c^2 - 2ab + 2ac$

Записывается полученное выражение.

$(a + b - 2c)(b - a) + (a + c - 2b)(a - c) - (b + c - 2a)(b - c) =$
$= (-a^2 + b^2 + 2ac - 2bc) + (a^2 - c^2 - 2ab + 2bc) - (b^2 - c^2 - 2ab + 2ac) =$
$= -a^2 + b^2 + 2ac - 2bc + a^2 - c^2 - 2ab + 2bc - b^2 + c^2 + 2ab - 2ac = 0$

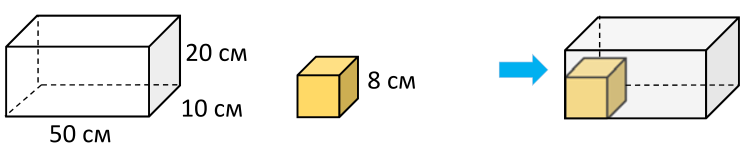
Так как результат равен нулю, то есть числу, отмечается, что значение выражения не зависит от переменных a, b или c. Таким образом доказывается независимость значения выражения от переменной.

Решение задач



18. Отмечается, что грузовой отсек машины имеет форму кубоида. Требуется выразить его объём многочленом и найти объём пустой части при a = 2 м.

Привлечение. Учитель рисует на доске куб и кубоид, затем задаёт вопросы:



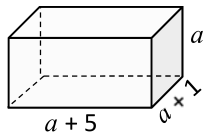
– Как найти объём кубоида? Как найти объём куба? Если в кубоиде размещён куб со стороной 8 см, какая часть объёма остаётся пустой? Как это определить? Как проверить правильность ответа?

В классах с техническими возможностями можно выполнить аналогичную деятельность:

https://www.splashlearn.com/s/math-games/use-the-3d-shapes-to-estimate-the-volume

Решение задачи

• Грузовой отсек изображается в форме кубоида, отмечаются соответствующие размеры, записывается выражение для вычисления объёма и упрощается до стандартного вида многочлена.



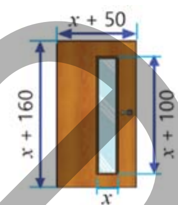
$(a + 1)(a + 1)(a + 5) = a^3 + 7a^2 + 11a + 5$

• Объём пустой части выражается многочленом. $a^3 + 7a^2 + 11a + 5 - a^3 = 7a^2 + 11a + 5$.

• При а = 2 м вычисляется объём пустой части. $7 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 + 5 = 55$ (м^3)

Ответ. $a^3 + 7a^2 + 11a + 5, 7a^2 + 11a + 5$; 55 м^3.

19. На рисунке указаны размеры двери в сантиметрах. Для нахождения площади одной стороны двери и стеклянной части записываются многочлены. Требуется определить ширину и длину двери, если дана площадь деревянной части одной стороны.



Решение задачи

• Для нахождения площади одной стороны двери и стеклянной части записываются многочлены.

Площадь одной стороны двери: $(x + 50)(x + 160) = x^2 + 210x + 8000$

Площадь стеклянной части двери: $x(x + 100) = x^2 + 100x$.

• Записывается многочлен, выражающий площадь деревянной части, путем вычитания площади стеклянной части из площади одной стороны двери. $x^2 + 210x + 8000 - (x^2 + 100x) = 110x + 8000$

Полученное выражение приравнивается к значению 12400 и решается уравнение.

$110x + 8000 = 12400$

$110x = 4400$

$x = 40$

Находится ширина и длина двери.

Ширина двери: $x + 50 = 40 + 50 = 90$ (см)

Длина двери: $x + 100 = 40 + 100 = 140$ (см)

Ответ. Ширина двери 90 см, а длина 140 см.

Обсуждение. Ученики могут проверить, равна ли площадь деревянной части 12400 см^2, подставив найденные числа и выполнив вычисления.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Умножает многочлен на многочлен.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Находит значение полученного многочлена при заданных значениях переменных.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь
Определяет, является ли данное выражение тождеством.	Рабочие листы, учебник, рабочая тетрадь

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение. Понятия, приведённые в заключении раздела в учебнике, повторяются с учениками. Слова, изученные по разделу, напоминаются учителем ученикам. При произнесении каждого понятия ученики объясняют его содержание и приводят примеры.

Одночлен, стандартный вид одночлена, коэффициент, буквенная часть, подобные одночлены, многочлен, члены многочлена, стандартный вид многочлена, двучлен, трехчлен, тождество, тождественное преобразование выражения

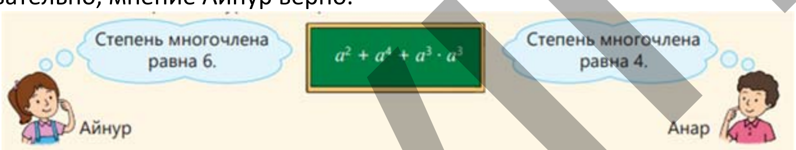
В информации, приведённой на первой странице раздела, подчеркивается использование многочленов при решении задач, связанных с реальными ситуациями. Здесь отмечается роль многочленов при выражении величин переменными при решении задач, относящихся к социальной, экономической, инженерной и другим сферам, при применении робототехники и определении траектории движения беспилотных автомобилей. Напоминается задание «Попытайтесь!». При выполнении задания обращается внимание на то, как используется степень с натуральным показателем в двух случаях — при движении в одном направлении и в противоположных направлениях. Решение исходной задачи обсуждается вместе с классом.

В классах с техническими возможностями можно выполнить интерактивные задания.

https://www.geogebra.org/m/QEbGNJcE

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

1. Для того чтобы объяснить, чьё мнение верно — Айнур или Анара, многочлен упрощается и записывается в стандартном виде. Когда многочлен записывают в стандартном виде, становится известно, что в данном многочлене член с наибольшей степенью — это a^6. То есть степень многочлена равна 6. Следовательно, мнение Айнур верно.



Целесообразно обсудить с учениками, почему мнение Анара ошибочно. Ученики могут сказать, что Анар считал степень многочлена равной 4, основываясь на степенях заданного выражения, не упрощая его. Здесь можно подчеркнуть важность определения степени после записи выражения как многочлена в стандартном виде.

2. Среди данных многочленов многочлены, не находящиеся в стандартном виде, приводятся к стандартному виду.

$3 - xy^3 + x^2 = -xy^3 + x^2 + 3$ $\qquad$ $-1 + x^2 + 2 = x^2 + 1$

$2x + x^2 + x + x^3 = 3x + x^2 + x^3 = x^3 + x^2 + 3x$ $\qquad$ $2x^2 - xx^2 + x^3 + 1 = 2x^2 - x^3 + x^3 + 1 = 2x^2 + 1$

Для каждого многочлена указывается его степень.

$2xy^2 + 1$	$1 + 2 = 3$	$2x + x^2 + x + x^3$	$x^3 + x^2 + 3x$; $1 + 2 = 3$
$-x^3 - x$	3	$-1 + x^2 + 2$	$x^2 + 1$; 2
$3 - xy^3 + x^2$	$-xy^3 + x^2 + 3$; $1 + 3 = 4$	$2x^2 - xx^2 + x^3 + 1$	$2x^2 + 1$; 2

В каждом пункте определяются соответствующие многочлены.

а) Степень равна 2. $\quad 2x^2 - xx^2 + x^3 + 1 \quad -1 + x^2 + 2$

б) Степень равна 3 $\quad 2x + x^2 + x + x^3 \quad 2xy^2 + 1 \quad -x^3 - x$

в) Свободный член 1 $\quad 2xy^2 + 1 \quad 2x^2 - xx^2 + x^3 + 1 \quad -1 + x^2 + 2$

г) Дан в стандартной форме $\quad 2xy^2 + 1 \quad -x^3 - x$

К сведению учителя! Иногда ученики пытаются определить степень данного многочлена или его свободный член, не приводя его к стандартному виду. Это приводит к ошибкам. Например, во 2-м задании в многочленах вида $-1 + x^2 + 2$ или $2x^2 - xx^2 + x^3 + 1$ часто встречаются такие случаи. Ученики считают, что в многочлене $-1 + x^2 + 2$ свободным членом является последний член, то есть 2, а степень многочлена $2x^2 - xx^2 + x^3 + 1$ это наибольшая степень, то есть 3, не приводя выражение к стандартному виду. Ученикам, допускающим такие ошибки, рекомендуется ещё раз напомнить правила. Подчеркивается, что приведение многочлена к стандартному виду означает упорядочивание подобных членов и запись членов обычно в порядке убывания их степеней. Отмечается, что это облегчает определение степени и свободного члена и предотвращает ошибки.

5. Определяется, верно или нет высказывание, и ответ обосновывается приведением примеров.

а) Степень произведения двух многочленов степени 2 и 3 равна 5. *Верное.* $x^2 \cdot x^3 = x^5$

б) Степень суммы многочленов степени 3 и 4 равна 7. *Ложное.* $x^3 + x^4$

в) Степень суммы двух многочленов степени 3 также должна быть равна 3. *Верное.* $x^3 + x^3 = 2x^3$

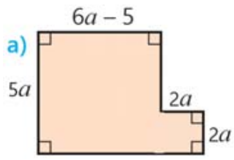
г) Степень суммы двух многочленов степени 5 может быть равна 3. *Ложное.* $x^5 + x^5 = 2x^5$

6. Выражения упрощаются, вычисляется значение выражения при заданном значении переменной.

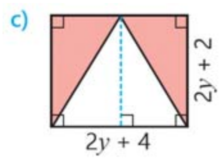
а) $2xy^2 + x(5y - 2y^2) = 2xy^2 + 5xy - 2xy^2 = 5xy$

Вычисляется значение выражения при заданных значениях x и y. $5 \cdot (-2) \cdot (-1) = 10$.

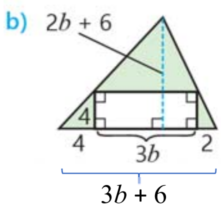
7. Записывается многочлен для вычисления площади закрашенной части.



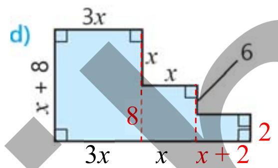
$5a(6a - 5) + 2a \cdot 2a =$
$= 34a^2 - 25a$



$(2y + 4)(2y + 2) - \frac{1}{2} \cdot (2y + 4)(2y + 2) =$
$2y^2 + 6y + 4$



$\frac{1}{2} \cdot (2b + 6)(3b + 6) - 4 \cdot 3b =$
$= 3b^2 + 3a + 18$



$5x + 2 - (3x + x) = x + 2$
$(x + 8) - (x + 6) = 2$
$3x(x + 8) + 8x + 2(x + 2) =$
$= 3x^2 + 24 + 8x + 2x + 4 =$
$= 3x^2 + 10x + 28$

Обсуждаются способы решения учеников, которые представляют многочлены разными способами для вычисления площади фигур.

9. Скобки расставляются так, чтобы получилось верное равенство.

a) $2a^2 - (a - 2 + 2a^2) = 2 - a$

b) $2y^2 - (5 + y + y^2) - y^2 + y = -5$

c) $2ac^2 + b - ac^2 - (ac^2 + 2b) = -b$

d) $2xy^2 - (x - xy^2) - 3xy^2 + 5x = 4x$

10. Если $b^2 - 3b = a$, данные выражения записываются в виде многочлена, зависящего от a.

$(b^2 - 3b + 1)(b^2 - 3b + 3) - (4b^2 - 12b) = (\underbrace{b^2 - 3b}_{a} + 1)(\underbrace{b^2 - 3b}_{a} + 3) - 4(\underbrace{b^2 - 3b}_{a}) = (a + 1)(a + 3) - 4a =$
$= (a + 1)(a + 3) - 4a = a^2 + 3$

12. Доказывается, что при любых натуральных значениях a и b значение выражения делится на 8.

а) $3(10a + 4b) + 2(15 + 2a) = 30a + 12b + 12b + 2a = 32a + 24b = 8(4a + 3)$

Когда один из множителей равен 8, полученное выражение делится на 8.

13. Меньшее из двух последовательных натуральных чисел обозначается через x, а другое — через x + 1, и в соответствии с условием записывается уравнение.

$x(x + 1) - x^2 = 16 \rightarrow x = 16$

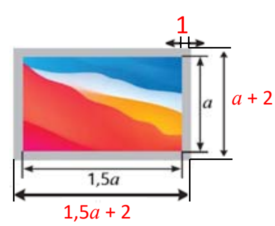
$x + 1 = 16 + 1 = 17$

Ответ. 16 и 17

15. Указывается, что ширина экрана планшета равна a см, а длина 1,5a см. Требуется определить, какое выражение соответствует вычислению площади серой рамки.

Решение задачи

а) На рисунке указываются соответствующие размеры. Записывается выражение, показывающее площадь большого прямоугольника: $(1{,}5a + 2)(a + 2)$



Записывается выражение для площади маленького прямоугольника: $1{,}5a \cdot a = 1{,}5a^2$

Вычитая площадь маленького прямоугольника из площади большого, записывается выражение площади серой рамки:

$(1{,}5a + 2)(a + 2) - 1{,}5a^2$

б) На основании того, что площадь серой рамки равна 74 см², записывается и решается уравнение.

$(1{,}5a + 2)(a + 2) - 1{,}5a^2 = 74$

$1{,}5a^2 + 5a + 4 - 1{,}5a^2 = 74$

$5a + 4 = 74$

$a = 14$

Вычисляются размеры экрана планшета. $a = 14$ см; $1{,}5a = 1{,}5 \cdot 14 = 21$ (см);

Ответ. а) $(1{,}5a + 2)(a + 2) - 1{,}5a^2$; 14 см и 21 см.

17. Находятся ответы на вопросы.

а) Требуется найти, при каком значении а коэффициент x^2 будет равен нулю в стандартной записи произведения многочленов $(x^2 - x)(ax - 2)$ Данное выражение упрощается по правилу умножения многочлена на многочлен и приводится к стандартному виду.

$$(x^2 - x)(ax - 2) = ax^3 - 2x^2 - ax^2 + 2x = ax^3 + \underbrace{(-2 - a)}_{\text{Коэффициент } x^2}x^2 + 2x$$

По условию коэффициент при x^2 должен быть равен нулю.

Записывается и решается соответствующее уравнение.

$-2 - a = 0$

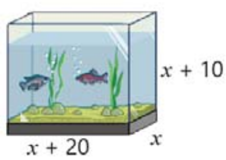
$a = -2$

Следовательно, при а = –2 коэффициент при x^2 будет равен 0.

19. Аквариумы имеют форму прямоугольного параллелепипеда, боковые грани изготовлены из стекла. Указывается, что рёбра маленького аквариума на 10 см меньше соответствующих рёбер большого аквариума. Требуется записать многочлены, выражающие объём и площадь боковых поверхностей аквариумов, и найти длины их ребер в соответствии с условием.

Решение задачи

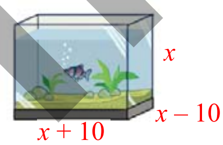
• Записываются размеры маленького аквариума. Объём и площадь поверхности выражаются многочленами.



$V = x(x + 10)(x + 20) = x^3 + 30x^2 + 200x$

$S = 2(x(x + 10) + (x + 10)(x + 20)) =$

$= 4x^2 + 80x + 400$



$V = x(x + 10)(x - 10) = x^3 - 100x$

$S = 2(x(x + 10) + x(x - 10)) =$

$= 4x^2$

• На основании того, что на изготовление маленького аквариума используется на 6800 см² меньше стекла, чем на большой, составляется и решается соответствующее уравнение.

$4x^2 = 4x^2 + 80x + 400 - 6800$

$-80x = -6400$

$x = 80$

Находятся длины рёбер аквариумов.

Длины рёбер большого аквариума:

$x = 80$ sm; $x + 20 = 80 + 10 = 90$ (см); $x + 20 = 80 + 20 = 100$ (см)

Длины рёбер маленького аквариума:

$x = 80$ см; $x - 10 = 80 - 10 = 70$ (см); $x + 10 = 80 + 10 = 90$ (см)

Ответ. $x^3 + 30x^2 + 200x$; $x^3 - 100x$; $4x^2 + 80x + 400$; $4x^2$; 80 см, 90 см и 100 см; 70 см, 80 см и 90 см.

Математический калейдоскоп

1. Запись $\overline{abc}$ обозначает трёхзначное число, записанное цифрами a, b и c: $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

Если цифры a, b и c не равны 9, выражения переписываются в виде многочлена стандартного вида, чтобы определить, какие из них делятся на 9.

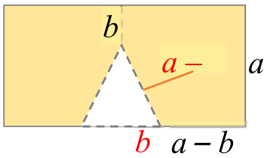
$\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a - b)$ ✓

$\overline{abc} - \overline{bac} = (100a + 10b + c) - (100b + 10a + c) = 100a + 10b + c - 100b - 10a - c = 90a - 9b = 9(10a - b)$ ✓

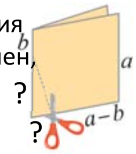
$\overline{abc} - \overline{b0c} = (100a + 10b + c) - (100b + c) = 100a + 10b + c - 100b - c = 100a - 90b = 9(10b - a)$

Другие выражения также упрощаются аналогичным образом.

2. Отмечается, что при сгибании цветной бумаги пополам получаются два квадрата.



Вырезав треугольник на рисунке ножницами, для вычисления площади оставшейся фигуры сначала записывается многочлен, выражающий длины соответствующих отрезков, а затем многочлен, выражающий площадь.



$2a^2 - \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot (a - b) = 2a^2 - ab + b^2$

4. Сообщается, что один из кандидатов на роль старосты класса получил на 3 голоса больше, чем другой. Требуется обосновать, что количество голосов посчитано неверно. Так как количество мальчиков и девочек в классе одинаково, общее число учеников — чётное. Поскольку имеется два кандидата, сумма голосов также будет чётной. Разность двух частей чётного числа всегда чётная. Однако утверждается, что один кандидат получил на 3 голоса больше. 3 — нечётное число, а разность не может быть нечётной.

S.T.E.A.M.

ВОЗОБНОВЛЯЕМЫЕ ИСТОЧНИКИ ЭНЕРГИИ

Источники энергии, получаемые за счёт постоянно происходящих природных процессов, называют возобновляемыми. Подчёркивается, что для их экономического расчёта иногда используют многочлены. Ученикам даётся информация о возобновляемых и альтернативных источниках энергии. Также отмечается, что при восстановлении освобождённых территорий предпочтение отдаётся именно таким источникам — это способствует экологической защите и устойчивому энергоснабжению.

1. Отмечается, что количество электрической энергии, вырабатываемой солнечными панелями за 1 день, можно вычислить с помощью такого выражения. $G = 0{,}85npt$

Ученикам предоставляется информация о том, что обозначают переменные в этом выражении.

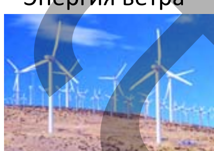
Если на крыше дома на выделенной прямоугольной площади установлены солнечные панели: по ширине а штук, а по длине — а + 6 штук, мощность одной панели составляет 100 Ватт, а максимальная продолжительность солнечного освещения в течение суток — 5 часов, то обсуждается, сколько ватт электрической энергии дают эти панели в течение суток и как для этого записывается многочлен. $G = 0{,}85npt = 0{,}85a(a + 6) \cdot 100 \cdot 5 = 425a^2 + 2520a$

2. Ученикам предоставляется информация о возобновляемых источниках энергии, приводятся примеры, требуется, чтобы ученики объяснили, провели исследование и сделали вывод.

Энергия солнца

Солнечные панели преобразуют солнечный свет в электрическую энергию

Энергия ветра



Ветровые турбины вращаются под воздействием ветра и производят электрическую энергию

Энергия воды

Энергия проточной воды приводит в движение турбины, вырабатывая электричество

Геотермальная энергия

Тепловая энергия в глубинах земной коры используется для получения электричества и тепла

3. Исследуется, какие работы выполняются в Азербайджане в области возобновляемых источников энергии, и подготавливается презентация. Целесообразно предоставить ученикам ссылки, связанные с этим.

https://minenergy.gov.az/az/alternativ-ve-berpa-olunan-enerji/azerbaycanda-berpa-olunan-enerji-menbelerinden-istifade

https://enerjiportali.az/category/b%C9%99rpa-olunan-enerji/

Рекомендуется показать подготовленные презентации в классе.

4-й РАЗДЕЛ

Формулы сокращенного умножения

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	82	
Тема 4.1	Квадрат суммы и разности	2	83	52
Тема 4.2	Произведение суммы и разности двух чисел	2	87	55
Тема 4.3	Сумма кубов и разность кубов	3	90	57
	Задачи и примеры	2	94	60
Тема 4.4	Разложение многочлена на множители	2	96	62
Тема 4.5	Различные способы разложения многочленов на множители	2	99	65
	Обобщающий урок. STEAM. “Аквариум АкваДом”	2	102	67
	МСО-3	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**17**		

Краткий обзор раздела

В разделе ученикам даётся информация о формулах сокращённого умножения. С помощью этих формул ученики осваивают умения упрощать математические выражения, выносить общий множитель за скобки, использовать метод группировки и в результате раскладывать многочлены на множители. При работе над задачами и примерами развиваются навыки определения случаев применения формул квадрата суммы и разности, разности квадратов, куба суммы и разности, а также суммы и разности кубов.

На что стоит обратить внимание?

Для применения формул сокращённого умножения важно умение правильно использовать свойства степеней. С учениками, слабо усвоившими эти навыки, целесообразно повторить свойства.

Некоторые ученики испытывают трудности при определении того, какая формула сокращённого умножения применяется в данном выражении. В таких случаях полезно обсудить с учениками, как выводятся эти формулы.

Для учеников, испытывающих затруднения при определении того, квадратом какого двучлена является трёхчлен, рекомендуется показывать формулу поэтапно.

Одним из удобных способов вычисления квадратов и кубов больших чисел, десятичных дробей, а также произведения двух чисел является использование соответствующих формул сокращённого умножения. Приведение реальных примеров таких задач помогает ученикам применять теоретические знания.

Целесообразно разъяснять ученикам выводы, следующие из формул сокращённого умножения. Эти формулы упрощают и ускоряют вычисления.

Если после упрощения выражения остаётся только постоянное число, подчёркивается, что значение этого выражения при любом значении переменной равно этой постоянной, то есть не зависит от переменной.

Некоторые ученики допускают ошибки при нахождении общего множителя и определении используемого метода при разложении многочленов на множители. С такими учениками целесообразно организовать работу над ошибками..

Развитие математического языка

Правильное определение понятий «формулы сокращённого умножения», «квадрат суммы», «квадрат разности», «квадрат двучлена», «произведение суммы и разности», «разность квадратов», «куб суммы», «куб разности», «сумма кубов», «разность кубов» и «разложение многочлена на множители» служит основанием для оценки степени их усвоения.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Формулы сокращённого умножения, квадрат двучлена, полный квадрат, неполный квадрат, разложение многочлена на множители.

Необходимые предварительные знания и умения:

- Свойства степени
- Одночлены, многочлены
- Порядок действий
- Выражения с переменной

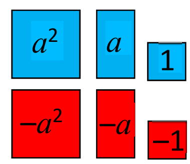
Междисциплинарная интеграция

Формулы сокращённого умножения и разложение многочлена на множители используются для упрощения вычислений и облегчения моделирования. В физике с их помощью описываются высота, скорость и кинетическая энергия тел, в химии — скорость реакций, в экономике — изменения цен и доходов.

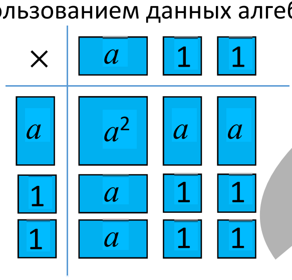
ТЕМА 4.1. Квадрат суммы и разности

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.1.5. Применяет формулы сокращённого умножения.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Применяет формулу квадрата суммы. • Применяет формулу квадрата разности.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://us.sofatutor.com/math/videos/multiplying-special-case-polynomials* *https://video.edu.az/video/89* *https://www.geogebra.org/m/seJXMEBX* Задание: *https://www.geogebra.org/m/ap6vvfdk* *https://www.geogebra.org/m/d6TX9vAy*

Обсуждение исходной задачи. На первой странице раздела ученикам объясняется использование формул сокращённого умножения при упрощении выражений, решении уравнений и доказательстве тождеств. Подчёркивается также применение этих формул при вычислении площади и объёма геометрических фигур. В задании «Попытайтесь!» проводится обсуждение и используется предыдущие знания для ответа на вопросы на основе размеров резервуаров в форме куба. Отмечается, что после освоения знаний и навыков в течение раздела, задание в конце раздела будет вновь обсуждено.

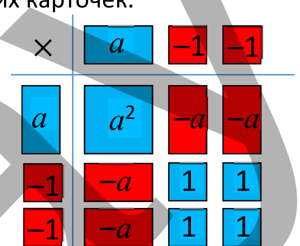


ПобуждениеПроизведение двух одинаковых многочленов изображается на доске с использованием данных алгебраических карточек.



$(a + 2)(a + 2) = a^2 + 4a + 4$

$(a + 2)^2 = a^2 + 4a + 4$



$(a - 2)(a - 2) = a^2 - 4a + 4$

$(a - 2)^2 = a^2 - 4a + 4$

Учитель, направляя внимание учеников на алгебраические карточки, обращается к классу: при упрощении выражений $(a + 2)(a + 2)$ и $(a - 2)(a - 2)$ какие члены различают полученные многочлены, записанные в стандартном виде? Как это можно объяснить? Как можно показать эту разницу с опорой на алгебраические карточки? Какова взаимосвязь между членами двучлена и трехчлена, полученного справа от равенства, при возведении двучлена в квадрат?

Для данных произведений рисуются изображения по образцу, выражения упрощаются и записываются в стандартном виде:

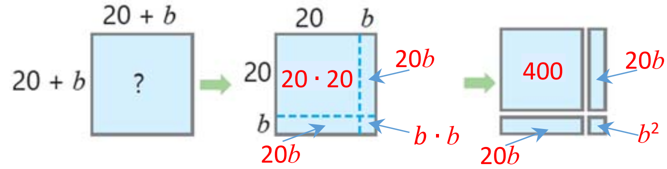
$$(a-1)(a-1) \qquad (a+1)(a+1) \qquad (1+2a)(1+2a) \qquad (1-a)(1-a)$$

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания.

https://www.geogebra.org/m/EQRR72ru *https://www.geogebra.org/m/dktua2yh*

Исследование-обсуждение

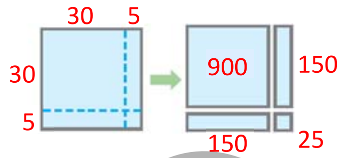
Внимание учеников направляется на изображение. Обсуждаются методы нахождения площади фигуры, соответствующей площади квадрата со стороной 20 + b, с использованием фигур на изображении.



• Записывается соответствующее выражение для нахождения этой площади.

$(20 + b)^2 = 400 + 20b + 20b + b^2 = 400 + 40b + b^2$

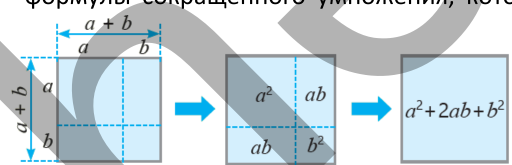
• Совместно с учениками обсуждается, как можно найти значение выражения $(30 + 5)^2$ этим методом. Отмечается, что если квадрат со стороной 35 единиц разделить, как на рисунке, на части со сторонами 30 и 5 единиц, то фигура делится на два квадрата и два прямоугольника. Общая площадь фигуры вычисляется сложением площадей каждой маленькой фигуры.



$(30 + 5)^2 = 900 + 150 + 150 + 25 = 1225.$

Изучение Квадрат суммы и разности

Отмечается, что при нахождении произведения многочленов иногда нет необходимости выполнять умножение по членам. Существуют особые формулы — формулы сокращённого умножения, которые позволяют находить произведение напрямую. На основе правила умножения многочленов ученикам с помощью изображения показывается, как получается квадрат суммы двух чисел. Разбиение квадрата на части позволяет визуально показать, как возникает формула $(a + b)^2$.



$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + \underline{ab} + \underline{ab} + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Аналогичным образом объясняется формула квадрата разности двух чисел $(a - b)^2$ и приводятся примеры.

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - \underline{ab} - \underline{ab} + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Подумай!

Данные тождества можно доказать несколькими способами. Один из этих способов — применить формулу квадрата суммы к обеим сторонам равенства. Записывая обе стороны равенства в виде стандартного многочлена, получают эквивалентные выражения.

$$(a - b)^2 = (b - a)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = (-a - b)^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = (-a)^2 + 2(-a)(-b) + (-b)^2$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Тождества можно доказать и тем, что одна сторона упрощается и показывается её равенство другой стороне. Можно также обосновать, что данные равенства являются тождествами, исходя из равенства квадратов противоположных чисел. Учитель может задать ученикам вопросы о взаимосвязи выражений $b - a$ и $a - b$; $-a - b$ и $a + b$, а также о квадрате противоположных чисел. На основе обсуждения можно обосновать, что данные равенства являются тождествами из-за равенства квадратов противоположных чисел.

$b - a = -(a - b) \Rightarrow (a - b)^2 = (b - a)^2$ $\qquad$ $-a - b = -(a + b) \Rightarrow (a + b)^2 = (-a - b)^2$

Когда первым членом в скобках является одночлен с отрицательным знаком, ученики испытывают трудности при применении формул сокращённого умножения. В таких случаях использование этих тождеств является удобным. Например, для упрощения выражения $(-2 - b)^2$ достаточно упростить $(2 + b)^2$, исходя из данных тождеств. $(-2 - b)^2 = (2 + b)^2 = 4 + 4b + b^2$

Задания

2. При записи квадрата суммы и квадрата разности в виде многочлена ученики иногда повторяют типичные ошибки, допускаемые при возведении одночленов в степень. При выполнении упражнений целесообразно объяснять характер этих ошибок и вносить корректировки в соответствии с назначением формулы.

и) $(-0{,}5y-1)^2=(-0{,}5y)^2+2\cdot(-0{,}5y)\cdot(-1)+(-1)^2=0{,}25y^2+y+1$

3. Для того чтобы, равенство было верным и соответствующие выражения были записаны в пустые клетки, обращается внимание на формулы квадрата суммы и квадрата разности. Определяется, какие члены на правой стороне равенства связаны с какими членами на левой стороне, на основе связи с другими членами определяются выражения для заполнения пропусков, и ученики записывают эти выражения в виде трехчлена. При этом используется формула квадрата суммы или квадрата разности двух чисел..

$(a+3b)^2=a^2+\boxed{6ab}+9b^2$ Находится удвоенное произведение членов a и $3b$. $2\cdot a\cdot 3b=6ab$

$(x-\boxed{5y})^2=x^2-\boxed{10xy}+25y^2$ Записывается, квадратом какого выражения является $25y^2$. $25y^2=(5y)^2$

Находится удвоенное произведение членов x и $5y$. $2\cdot x\cdot 5y=10xy$

$(\boxed{1}-5d)^2=\boxed{1}-10d+\boxed{25d^2}$

$(5d)^2=25d^2$

Определяется, при умножении $5d$ на какое выражение удвоенное произведение будет равно $10d$. $2\cdot 5d\cdot 1=10d$

$1^2=1$

5. Объясняется, что квадраты данных чисел находятся с использованием формулы квадрата суммы или квадрата разности. Совместно с учениками обсуждается, какая из формул является более удобной для каждого числа. Аналогичным образом ученики вычисляют квадрат предложенных выражений. Ответ проверяется с помощью калькулятора.

$31^2=(30+1)^2=30^2+2\cdot30\cdot1+1=961$ *По формуле квадрата суммы*

$199^2=(200-1)^2=200^2-2\cdot200\cdot1+1=39601$ *По формуле квадрата разности*

Этот способ позволяет вычислять квадрат не только больших чисел, но и десятичных дробей, разделяя их на более удобные части. Это повышает скорость вычислений и формирует у учеников навык гибкого упрощения алгебраических выражений.

6. На основе формулы квадрата суммы и разности двух чисел записываются соответствующие многочлены.

а) $(a-2b)^2=a^2-4ab+4b^2$

б) $(a+a-2)^2=(2a-2)^2=4a^2-8ab+4$

в) $n^2+(n+1)^2=2n^2+2n+1$

г) $(2n+2n+2)^2=(4n+2)^2=16n^2+16n+4$

7. Определяется, зависит ли значение нового выражения от переменной после упрощения выражений.

а) $(2a-5)^2-4a^2=4a^2-20a+25-4a^2=-20a+25$ *Зависит от переменной.*

в) $(a+3)^2-3(a+1)^2+2a^2=a^2+6a+9-3a^2-6a-3+2a^2=6$ *Не зависит от переменной.*

К сведению учителя! Для объяснения смысла выражений, не зависящих от переменной, целесообразно использовать простые примеры. Например, выражение $2(a+1)-2a$ после упрощения дает 1, то есть не зависит от переменной, а выражение $2(a+1)-a$ дает $a+1$, то есть зависит от переменной. Если после упрощения остаётся только постоянное число, значит, значение выражения при любом значении переменной равно этому числу. Это означает, что значение выражения не зависит от переменной. Простые примеры помогают ученикам ясно увидеть разницу между постоянным выражением и выражением, зависящим от переменной, и понять логические связи.

8. Выражение упрощается и вычисляется его значение при заданном значении переменной.

б) $(b-1)^2+2(b-1)=(b^2-2b+1)+(2b-2)=b^2-1$

$b=3\to3^2-1=8$; $b=0{,}1\to0{,}1^2-1=-0{,}99$

К сведению учителя! Упрощение выражения и запись его в виде стандартного многочлена создаёт условия для более быстрого и удобного вычисления его значения. Рекомендуется продемонстрировать ученикам разницу, сравнив вычисления без упрощения и с упрощением. Например, для пункта б) 8-го задания можно обсудить с учениками разницу между вычислениями, выполняемыми при подстановке вместо переменной значения 0,1 без упрощения выражения, и выяснить, какой способ является более удобным.

$(b-1)^2+2(b-1)\ \to\ (0{,}1-1)^2+2(0{,}1-1)=0{,}81-1{,}9=-0{,}99$

10. Находятся ответы на вопросы.

а) Одночлен, вычитаемый из выражения $(a + b)^2$, обозначается буквой x и записывается соответствующее выражение.

$(a + b)^2 - x = (a - b)^2$

$a^2 + 2ab + b^2 - x = a^2 - 2ab + b^2$

$2ab - x = -2ab$

$x = 4ab$

При вычитании выражения $4ab$ из выражения $(a + b)^2$ получается выражение $(a - b)^2$.

б) Одночлен, вычитаемый из выражения $(3x - 2y)^2$, обозначается буквой x и записывается соответствующее выражение.

$(3x - 2y)^2 + x = (3x + 2y)^2$

$9x^2 - 12xy + 4y^2 + x = 9x^2 + 12xy + 4y^2$

$-12xy + x = 12xy$

$x = 24xy$

Если к выражению $(3x - 2y)^2$ прибавить выражение $24xy$,получается выражение $(3x + 2y)^2$.

12. Меньшее из двух последовательных целых чисел обозначается через x, большее — через x + 1. По условию их сумма квадратов больше, чем удвоенное произведение этих чисел на один. Записывается соответствующее выражение.

$x^2 + (x + 1)^2 = 2x(x + 1) + 1$

Доказывается, что равенство является тождеством.

$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x + 1$

$2x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x + 1$

Запомни!

Отмечается, что некоторые трехчлены записаны в виде квадрата двучлена, обсуждается с учениками, как для этого использована формула квадрата суммы (или разности).

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

$$\underbrace{x^2}_{a^2} + \underbrace{12x}_{2\cdot a\cdot b} + \underbrace{36}_{b^2} = x^2 + 2\cdot 6\cdot x + 6^2 = \underbrace{(x + 6)^2}_{(a+b)^2}$$

$$25m^2 - 20mn + 4n^2 = \underbrace{(5m)^2}_{a^2} - \underbrace{2\cdot 5m\cdot 2n}_{2\cdot a\cdot b} + \underbrace{(2n)^2}_{b^2} = \underbrace{(5m - 2n)^2}_{(a-b)^2}$$

К сведению учителя! Чтобы определить, квадратом какого двучлена является данный трёхчлен, целесообразно поэтапно довести до внимания учеников некоторые моменты.

- ✓ В формуле квадрата суммы или разности меняются местами правая и левая части равенства.
- ✓ Проводится сравнение трёхчлена с формулой.
- ✓ После того как в левой части находятся выражения, соответствующие a и b, в правой части равенства также заменяются эти выражения.

Для упрощения процесса можно обратить внимание на то, что средний член (2ab или −2ab) равен удвоенному произведению двух других членов. Показывая различные примеры трёхчленов, определение того, в каком случае трёхчлены могут быть записаны в виде квадрата суммы или разности, развивает у учеников как навыки наблюдения, так и умения обобщать.

Подумай!

Отмечается, что тождество $25m^2 - 20mn + 4n^2 = (2n - 5m)^2$ доказано с использованием формулы квадрата разности. $25m^2 - 20mn + 4n^2 = 4n^2 - 20mn + 25m^2$

14. В пустую клетку записывается такой одночлен, чтобы трёхчлен можно было записать в виде квадрата двучлена. На основе данных членов определяется, квадратом какого двучлена является трёхчлен, и в пустую клетку записывается соответствующий одночлен.

a) $a^2 - \boxed{6ab} + 9b^2 = (a - 3b)^2$ b) $16a^2 + 24a + \boxed{9} = (4a - \boxed{3})^2$ d) $\boxed{1} - 12y + 36y^2 = (\boxed{1} - 6y)^2$

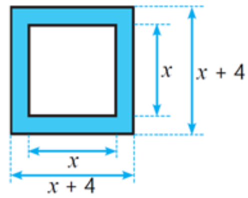
Дифференцированное обучение

Поддержка. Учитель записывает на доске двучлен и поручает ученикам найти его квадрат. Ученики записывают полученный трёхчлен в стандартном виде и объясняют, как они его получили. Например: найдите квадрат двучлена 2x – 1; найдите квадрат разности одночленов 3x и 2y.

Углубление. Учитель пишет на доске двучлен и задает ученикам, добавив одночлен, записать его в виде квадрата какого-либо двучлена. Ученики записывают соответствующее выражение и объясняют, как они определили добавляемый одночлен. Например: к выражениям $9x^2 + 1$; 8y + 4 и т.п. добавьте такой одночлен, чтобы полученный трёхчлен был квадратом двучлена. В каком случае возможно записать два таких двучлена?

Ученики, используя свойства степеней, объясняют решение и отвечают на вопросы.

Решение задач



19. На рисунке указаны размеры рамки в сантиметрах.

Решение задачи

• Чтобы найти площадь рамки, из выражения площади большого квадрата вычитается выражение площади малого квадрата. Записывается выражение, показывающее площадь большого квадрата: $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$

Записывается выражение, показывающее площадь малого квадрата: x^2

Записывается выражение для площади рамки: $x^2 + 8x + 16 – x^2 = 8x + 16$

• На основании того, что площадь рамки равна 144 см², записывается соответствующее уравнение и решается.

$8x + 16 = 144 \rightarrow x = 16$ см.

Ответ. $8x + 16$; $x = 16$ см

Обсуждение. Сумма площади рамки и площади малого квадрата равна общей площади вместе с изображением. $x^2 + (8x + 16) = (x + 4)^2$

Подставляя корень (x = 16 см) в уравнение, проверяется правильность ответа. $8 \cdot 16 + 16 = 144$ (см²)

20. Ученикам даётся информация о понятии кинетической энергии и её единице. Указывается, что у двух радиоуправляемых игрушечных машин, каждая из которых имеет массу 2 кг, скорость одной на 0,2 м/с больше, чем у другой, а кинетическая энергия – на 0,12 джоуля больше. Требуется найти скорость каждой машины согласно условию.

Перед решением задачи можно использовать похожую простую задачу как задание на вовлечение, аналогичную 19-й задаче.

Решение задачи

Скорость первой машины обозначается как x, скорость второй $x + 0,2$.

Записываются выражения, показывающие кинетические энергии машин, и упрощаются.

Кинетическая энергия первой машины: $\frac{2 \cdot (x + 0,2)^2}{2} = (x + 0,2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 0,2 + (0,2)^2 = x^2 + 0,4x + 0,04$

Кинетическая энергия второй машины: $\frac{2 \cdot x^2}{2} = x^2$

• На основании того, что кинетическая энергия первой на 0,12 джоуля больше, записывается уравнение.

$x^2 + 0,4x + 0,04 = x^2 + 0,12 \quad \rightarrow \quad x = 0,2$

Находится скорость второй машины. $x + 0,2 = 0,2 + 0,2 = 0,4$

Ответ. 0,2 м/с и 0,4 м/с.

Обсуждение. Проверяется, что при скоростях 0,2 м/с и 0,4 м/с разница кинетических энергий составляет 0,12 Дж.

К сведению учителя! Некоторые ученики испытывают трудности в записи выражений и уравнений по условию задачи. Основная причина заключается в том, что ученики часто заучивают формулы, но не понимают, что они выражают. Учителю следует заранее с простыми объяснениями разъяснить формулы квадрата суммы и разности, привести простые примеры их применения: при вычислении площади квадрата, в задачах на кинетическую энергию, расстояние, высоту и т.д.

Чтобы развить у учеников навыки решения задач посредством составления таких уравнений, необходимо формировать умение записывать данную словами ситуацию на математическом языке. Для этого учитель должен в ходе урока задавать вопросы, стимулирующие последовательное логическое мышление, использовать направляющие примеры и задания от простых к более сложным. Такие задания развивают у учеников умения анализировать условие, определять связи между данными, составлять уравнение или выражение, делать вывод, используя формулы сокращённого умножения.

Формативное оценивание

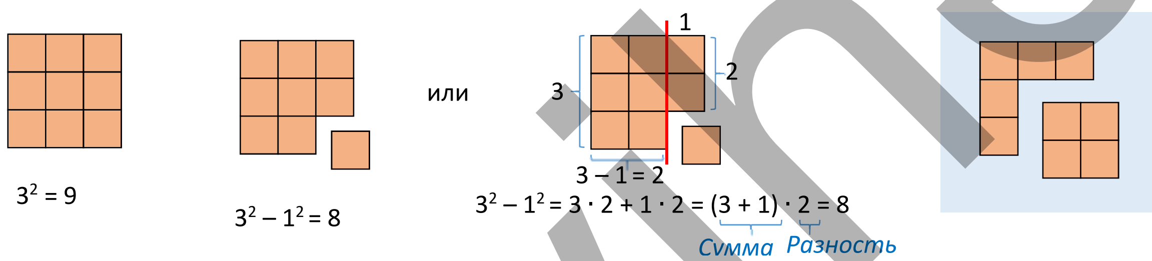
Критерии оценивания	Материалы оценивания
Применяет формулу квадрата суммы.	Рабочие листы, учебник, РТ
Применяет формулу квадрата разности.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 4.2. Произведение суммы и разности двух чисел

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.1.3. Находит значение многочлена при заданных значениях переменных. 7-2.1.5. Применяет формулы сокращённого умножения.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Находит произведение суммы и разности двух чисел. • Записывает двучлен в виде произведения суммы и разности.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.coolmath.com/algebra/04-factoring/06-difference-squares-cubes-03* *https://video.edu.az/video/9313* *https://video.edu.az/video/8602* *https://www.geogebra.org/m/zs6d9sdy* Задание: *https://www.geogebra.org/m/kxbsr9yp* *https://www.geogebra.org/m/q4uxgkrt* *https://www.geogebra.org/m/BKz97f7v* *https://www.geogebra.org/m/xzjk5cug*

Побуждение

Учитель рисует на доске изображение, как показано на рисунке. Ученикам также можно предложить составить фигуры, как на рисунке, из единичных квадратов.



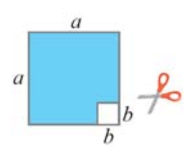
Ученикам задаются вопросы:

– Сколько единичных квадратов в каждой фигуре? Как можно найти количество оставшихся единичных квадратов во 2-й фигуре, опираясь на количество единичных квадратов в 1-й фигуре и количество отделённых единичных квадратов? Как это можно найти, разделив данную фигуру на 2 прямоугольника? Какая связь существует между сторонами полученных прямоугольников и стороной 1-й фигуры и стороной отделённой фигуры?

При отделении квадрата размером 2×2 от квадрата размером 3×3 количество оставшихся квадратов находится аналогичным способом. При нахождении количества этих единичных квадратов в виде произведения внимание учеников направляется на то, что произведение равно произведению суммы и разности сторон соответствующих квадратов.

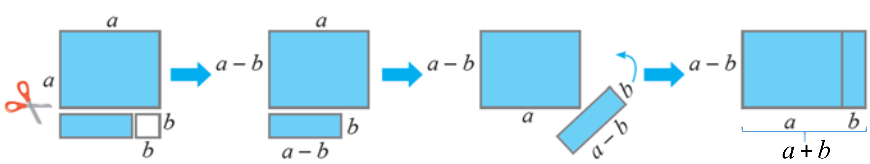
Исследование-обсуждение

Отмечается, что Айнур вырезала из одного угла квадрата со стороной a см квадрат со стороной b см. Аналогичный процесс можно выполнить в классе вместе с учениками.



• Для вычисления площади оставшейся фигуры записывается выражение, показывающее площадь полученного прямоугольника. $S = a^2 - b^2$

• Айнур разделила оставшуюся фигуру на части и соединила их, как показано на рисунке. Для нахождения площади полученного прямоугольника записывается выражение.



$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

• Обосновывается тождественное равенство выражений, показывающих площади исходной и полученной фигур.

В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать видеоматериалы.

https://youtu.be/WeM0UbGKerw

Изучение **Произведение суммы и разности двух чисел**

Отмечается, что, используя правило умножения многочленов, произведение суммы и разности двух чисел можно найти следующим образом, и приводятся примеры.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - \underline{ab} + \underline{ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

Подумай!

Обсуждается правило записи данного выражения в виде многочлена на основе правила нахождения произведения суммы и разности. Отмечается, что выражения $-a - b$ и $a + b$ отличаются знаками слагаемых, и, записывая $-a - b = -(a + b)$, с использованием произведения суммы и разности данное выражение записывается в виде многочлена.

$$(-a-b)(a-b) = -\underbrace{(a+b)(a-b)}_{a^2-b^2} = -(a^2-b^2) = b^2 - a^2$$

Задания

3. В приведённом примере объясняется, каким способом найдено произведение, правильность ответа проверяется правилом умножения двузначного числа на двузначное. Правильность ответа можно также проверить на калькуляторе. 51 · 49 = 2499

$51 \cdot 49 = (50+1) \cdot (50-1) = 50^2 - 1^2 = 2500 - 1 = 2499$

Используя этот способ, найдите произведение чисел.

г) $1{,}1 \cdot 0{,}9 = (1 + 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}1) = 1^2 - 0{,}1^2 = 0{,}99$

Отмечается, что произведение некоторых больших чисел и десятичных дробей можно вычислять, представляя их в виде суммы или разности двух чисел и используя формулу произведения суммы и разности. Это повышает скорость вычислений у учеников и формирует умение упрощать математические выражения.

5. Для того чтобы равенство было верным и в пустые клетки были вписаны соответствующие выражения, обращается внимание на формулу разности квадратов. На основе связи между данными членами определяются выражения, которые нужно вписать в пустые клетки.

а) $(a+4)(a-4) = a^2 - \boxed{16}$

с) $\left(\frac{1}{2}a^2 + \boxed{3}\right)\left(\frac{1}{2}a^2 - 3\right) = \boxed{\frac{1}{4}a^4} - 9$

6. На основе формулы произведения суммы и разности двух чисел находятся ответы на вопросы.

а) На основе формулы разности квадратов выражение $4x^2 - y^2$ записывается в виде произведения суммы и разности двух выражений.

$4x^2 - y^2 = (2x + y)(2x - y)$. Следовательно, при умножении выражения $2x + y$ на выражение $2x - y$ получается выражение $4x^2 - y^2$.

9. С использованием формулы разности квадратов проводится сравнение и результат проверяется на калькуляторе.

а) $288 \cdot 286$ и 287^2

Числа 288 и 286 записываются в виде суммы и разности двух чисел. $288 = 287 + 1$; $286 = 287 - 1$

Применяется формула произведения суммы и разности двух чисел. $288 \cdot 286 = 287^2 - 1$

$287^2 - 1$ и 287^2 сравниваются. $287^2 - 1 < 287^2$

К сведению учителя! Иногда бывает удобнее сравнивать данные выражения, не выполняя вычисления и не сравнивая полученные числовые результаты. Формулы сокращённого умножения широко используются в таких процессах сравнения. Можно сообщить ученикам, что этот способ является примером областей применения формулы произведения суммы и разности двух чисел. Вместо непосредственного вычисления выражений, анализируя их, можно быстрее и точнее найти результат.

Этот способ вычислений используется не только для сравнения, но и для упрощения операций с большими числами, получения точного, а не приблизительного результата, сокращения вычислений и уменьшения вероятности ошибки. Ученикам можно показать несколько примеров, относящихся к перечисленным областям применения.

Например, $48 \cdot 52 = (50 - 2)(50 + 2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496$.

Такие способы полезны для развития логического мышления и умения видеть математические связи.

Запомни!

Подчёркивается, что при перестановке местами левой и правой частей равенства в формуле произведения суммы и разности двух выражений получается формула разности квадратов, и приводятся примеры.

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

К сведению учителя! Формула разности квадратов является одной из фундаментальных формул алгебраических преобразований. Она широко используется в процессе разложения многочлена на множители с применением формул сокращённого умножения. При применении этой формулы следует сначала обратить внимание на запись данного выражения в виде разности квадратов двух выражений и на правильное применение свойства степени.

Иногда ученики, видя, что выражение $a^2 - b^2$ записывается в виде произведения двух выражений, считают, что и выражение $a^2 + b^2$ также можно записать в виде произведения, полагая, что $a^2 + b^2 = (a + b)^2$. Таким ученикам следует подчеркнуть, как получается формула разности квадратов, что из четырёх одночленов, получающихся при произведении суммы и разности двух выражений, два являются подобными и сокращаются, и отметить, что аналогичный процесс для выражения $a^2 + b^2$ невозможен, приводя примеры.

Ложные представления, возникающие у учеников. При применении формулы разности квадратов некоторые ученики считают, что разность квадратов равна квадрату разности. Таким ученикам можно предложить показать, является ли данное равенство тождеством. К обеим частям равенства применяются соответствующие формулы сокращённого умножения.

Ложное	Верное
$a^2 - 9 = (a - 3)^2$	$a^2 - 9 = (a + 3)(a - 3)$
$(b + 5)(5 - b) = b^2 - 25$	$(b + 5)(5 - b) = 25 - b^2$

$a^2 - b^2 = (a - b)^2$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Поскольку левая и правая части равенства не равны, подчёркивается, что это равенство не является тождеством.

Некоторые ученики допускают ошибки при определении знаков в сравнительно сложных выражениях. Таким ученикам рекомендуется объяснять ошибки, показывая примеры.

Дифференцированное обучение

На столе лицевой стороной вниз раскладываются карточки с одночленами. Ученики выбирают две карточки.

$4a^2$	b^3	$9b^4$	$16a^2b^2$	ab^2

Поддержка. Учитель предлагает ученикам записать произведение суммы и разности соответствующих одночленов в виде многочлена. Ученики объясняют процесс решения.

Углубление. Учитель предлагает ученикам записать на доске разность одночлена с первой выбранной карточки и одночлена со второй карточки, а затем объяснить, можно ли записать этот двучлен в виде произведения суммы и разности одночленов. Если это возможно, записывается соответствующее выражение, если невозможно — предлагается умножить данное выражение на такое выражение, чтобы получился двучлен. Ученики объясняют процесс решения.

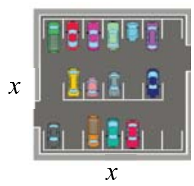
Решение задач

Решите задачи, используя формулу разности квадратов.

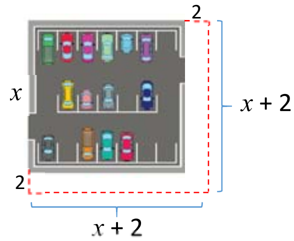
15. Планируется увеличить стороны квадратной автостоянки на 2 м. Требуется определить, какое выражение нужно записать, чтобы найти, на сколько увеличится площадь стоянки, и найти текущую площадь стоянки, если площадь увеличится на 76 м².

Решение задачи

• Стороны стоянки обозначаются через x. Сначала записываются выражения, показывающие площадь стоянки в настоящее время и после увеличения сторон на 2 м, затем выражение, показывающее их разность.
$(x + 2)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4$



Текущая площадь стоянки: x^2



Площадь стоянки после увеличения: $(x + 2)^2$

• Если площадь стоянки увеличится на 76 м², для нахождения текущей площади стоянки записывается соответствующее уравнение и решается.
$4x + 4 = 76 \rightarrow x = 18$
Находится текущая площадь стоянки. $18^2 = 324$ (м²)
Ответ. $4x + 4$; 324 м²
Обсуждение. Обсуждаются мнения учеников, решивших задачу разными способами.

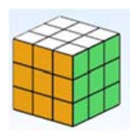
Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Находит произведение суммы и разности двух чисел.	Рабочие листы, учебник, РТ
Записывает двучлен в виде произведения суммы и разности.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 4.3. Куб суммы и разности. Сумма кубов и разность кубов

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.1.3. Находит значение многочлена при заданных значениях переменных. 7-2.1.5. Применяет формулы сокращённого умножения.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Записывает куб суммы (разности) двух чисел в виде многочлена. • Применяет формулу суммы (разности) кубов двух чисел.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.coolmath.com/algebra/04-factoring/06-difference-squares-cubes-03*

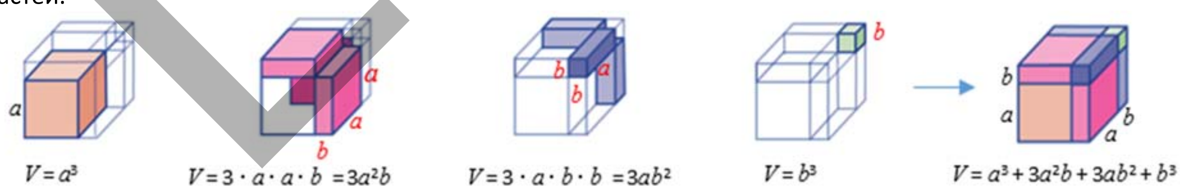
Побуждение



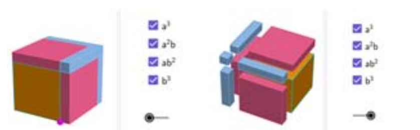
Учитель ставит на стол кубик Рубика размером 3×3×3 и задает ученикам вопросы: – Сколько маленьких кубиков размером 1×1×1 находится внутри этого куба? На сколько кубов и кубоидов можно разделить фигуру, если отделить один такой маленький куб? Как, используя объёмы этих фигур, можно найти объём куба? Сколько единичных кубов нужно добавить к кубу размером 3×3×3, чтобы получить куб размером 4×4×4?

Исследование-обсуждение

С помощью наглядного изображения ученикам демонстрируется, что к кубу с ребром a, добавив несколько кубоидов, получается новый куб с ребром (a + b). На примере добавления нескольких кубоидов к кубу с ребром 10 см и получения нового куба с ребром 15 см можно ответить на поставленные вопросы. Цель состоит в том, чтобы ученики лучше поняли представление объёма куба как суммы объёмов различных частей.



• Отмечается, что, рассматривая изображения, к кубу с ребром a добавлены 3 кубоида с рёбрами a, a и b, 3 кубоида с рёбрами a, b и b и 1 куб с рёбрами b.
• Для нахождения объёма нового кубоида записывается соответствующий многочлен. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Для подготовки учеников к этапу обучения можно отметить, что поскольку ребро полученного куба равно a + b, для нахождения его объёма записывается выражение $(a + b)^3$ и что это выражение равно $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Такой подход развивает у учеников как математическую логическую последовательность, так и умение моделировать задачу и связывать её с геометрическими фигурами.



В классах с техническими возможностями можно с помощью симуляции отделять фигуры друг от друга и, демонстрируя каждую по отдельности, выполнять деятельность. *https://www.geogebra.org/m/ybzqtwqn*

Изучение Куб суммы и разности двух чисел

Используя правила умножения многочленов, с учениками обсуждается, как выводятся формулы куба суммы и разности двух чисел, приводятся примеры.

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\qquad$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Подумай!

Выражение $(a-b)^3$ упрощается с использованием правила умножения многочленов.

$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2-2ab+b^2)(a-b) = a^3 \underline{-ab^2} \underline{\underline{-2a^2b}} \underline{+2ab^2} \underline{\underline{+ab^2}} - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

С помощью этого правила доказывается тождественное равенство выражений $(a-b)^3$ и $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
В классах с техническими возможностями можно с помощью симуляции для (a – b)³ отделять фигуры друг от друга и, демонстрируя каждую по отдельности, выполнять деятельность.
https://www.geogebra.org/m/kbvatvhh

Задания

1. Куб суммы или разности записывается в виде многочлена.

$(\underbrace{3a}_{a}+\underbrace{1}_{b})^3=\underbrace{(3a)^3}_{a^3}+\underbrace{3\cdot(3a)^2\cdot 1}_{3a^2b}+\underbrace{3\cdot 3a\cdot 1^2}_{3a^2b}+\underbrace{1^3}_{b^3}=27a^3+27a^2+9a+1$

К сведению учителя! Трудности, возникающие у некоторых учеников при применении формул куба суммы или разности, в основном связаны с перепутыванием порядка членов, неправильным определением коэффициентов, невозможностью отследить смену знаков. Для устранения этих трудностей целесообразно объяснить ученикам, как на основе формулы формируются коэффициент, степень и знак каждого члена. Осознание учениками некоторых закономерностей, имеющихся в записи формулы, облегчает усвоение темы.

В процессе работы можно применять следующие методические подходы.

– Показать связь с треугольником Паскаля

1	$1x$
1 1	$1x + 1y$
1 2 1	$1x^2 + 2x^2y + 1y^2$
1 3 3 1	$1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$

При выражении степени двучлена в виде многочлена, если коэффициенты полученного многочлена расположить, как на рисунке, в каждой строке первое и последнее число равны 1. Остальные числа равны сумме двух чисел, расположенных над ними в предыдущей строке. Треугольник, образованный этой закономерностью, называется треугольником Паскаля. Целесообразно обратить внимание учеников на коэффициенты и дать сведения о коэффициентах 1; 3; 3; 1.

При нахождении куба двучлена (a + b)³ или (a – b)³ объясняется, что степень каждого члена должна быть равна 3

Эта закономерность даёт ученикам возможность самопроверки. Если при нахождении куба двучлена, каждый член которого является одночленом первой степени, степень членов отличается от 3, сразу становится ясно, что допущена ошибка.

– *Сравнительный анализ знаков при нахождении куба суммы и разности*

Проводится параллельный анализ выражений (a + b)³ и (a – b)³, объясняется, что отрицательный знак относится только к b и что при нахождении куба знаки в результате последовательно чередуются.

Таким образом, целесообразно подчеркнуть три простых правила для куба суммы и разности.

- ✓ количество членов должно быть равно 4.
- ✓ коэффициенты должны быть 1; 3; 3; 1.
- ✓ при раскрытии выражений (a + b)³ и (a – b)³ степень каждого члена должна быть равна 3.

Эти методические шаги создают условия для формирования у учеников логических основ темы, осознанного применения формул вместо их механического заучивания и, в итоге, для развития более устойчивых знаний и навыков.

2. В пустые клетки вписываются такие одночлены, чтобы равенство было верным. Затем ответ проверяется. Упрощается выражение в левой части равенства и определяются одночлены, соответствующие пустым клеткам.

$(2a-1)^3 = (2a)^3 - 3\cdot(2a)^2\cdot 1 + 3\cdot 2a\cdot 1^2 - 1^3 = 8a^3 - \boxed{12a^2} + 6a - \boxed{1}$

Обращается внимание на связь между выражениями в правой и левой частях равенства. Поскольку число 64 является кубом числа 4, сначала в левой части равенства, а затем в правой части определяется одночлен, соответствующий пустой клетке.

$(x+\boxed{4})^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 4 + 3\cdot x\cdot 4^2 + 4^3 = x^3 + \boxed{12x^2} + 48x + 64$

Изучение Сумма кубов двух чисел

Ученикам даётся информация о формуле суммы кубов, понятиях полного и неполного квадрата, приводятся примеры.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - \underline{a^2b} + \underline{\underline{ab^2}} + \underline{a^2b} - \underline{\underline{ab^2}} + b^3 = a^3 + b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

7. Для определения того, является ли данное выражение полным или неполным квадратом разности, обращается внимание на коэффициент второго члена.

а) выражение $x^2 - x + 1$ является неполным квадратом выражения $(x-1)$.

б) выражение $a^2 - 4a + 4$ является полным квадратом выражения $(a-2)$.

Аналогичные ошибки встречаются и при применении формулы разности кубов. Поскольку левая и правая части равенства не равны, подчёркивается, что это равенство не является тождеством. Некоторые ученики допускают ошибки при определении знаков в сравнительно сложных выражениях. Таким ученикам рекомендуется объяснять ошибки на примерах.

10. Проводятся вычисления с использованием формулы суммы кубов.

f) $2{,}5^3 + 1{,}5^3 = (2{,}5+1{,}5)(2{,}5^2 - 2{,}5\cdot 1{,}5 + 1{,}5^2) = 4\cdot 4{,}75 = 19$

Если бы числа 2,5 и 1,5 возводились в куб по отдельности, это заняло бы больше времени и увеличило бы вероятность ошибки. Применение формулы позволяет выполнить вычисление более коротким способом. Этот метод даёт возможность эффективно находить ответ для больших чисел или десятичных дробей, не вычисляя кубы по отдельности.

11. На основе формулы суммы кубов обосновывается правильность утверждений.

а) Для выражения $6^3 + 7^3$ применяется формула суммы кубов. $6^3 + 7^3 = (6+7)(6^2 - 6\cdot 7 + 7^2) = 13\cdot 43$.

Поскольку один из множителей равен 13, значение выражения $6^3 + 7^3$ делится на 13.

Изучение Разность кубов двух чисел

Используя правило, применяемое в формуле суммы кубов, разность кубов записывается в виде произведения двух многочленов, приводятся примеры.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{\underline{ab^2}} - \underline{a^2b} - \underline{\underline{ab^2}} - b^3 = a^3 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

Подумай!

Записывая $a^3 - b^3 = a^3 + (-b^3)$, обсуждается, как из формулы суммы кубов получается формула разности кубов.

$a^3 - b^3 = a^3 + (-b^3) = a^3 + (-b)^3 = (a + (-b))(a^2 - a(-b) + (-b)^2) = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

Ложные представления, возникающие у учеников. Приводятся несколько примеров ошибок, допускаемых учениками при применении формулы суммы кубов.

Ложное	Верное
Сумма кубов равна произведению двучлена и полного квадрата разности. $a^3 + 27 = (a+3)(a^2-6a+9)$	$a^3 + 27 = (a+3)(a^2-3a+9)$
Сумма кубов равна кубу суммы. $a^3 + 27 = a^3 + 3^3 = (a+3)^3$	$a^3 + 8 = (a+2)(a^2-2a+4)$
Сумма кубов равна произведению двучлена и неполного квадрата суммы $a^3 + 1 = (a+1)(a^2+a+1)$	$a^3 + 1 = (a+1)(a^2-a+1)$

Подобные ошибки встречаются и при применении формулы разности кубов. С учениками, допускающими такие ошибки, целесообразно организовать работу по их устранению.

16. Проводятся вычисления с использованием формулы разности кубов.

f) $1{,}1^3 - 0{,}1^3 = (1{,}1 - 0{,}1)(1{,}1^2 + 1{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}1^2) = 1 \cdot 1{,}35 = 1{,}35$

Если бы числа 1,1 и 0,1 возводились в куб по отдельности, это также заняло бы время. Как и в случае суммы кубов, данный способ позволяет эффективно находить результат разности кубов для больших чисел или десятичных дробей без отдельного вычисления кубов.

Исправь ошибку!

$(2 - 3y)^3 = 8 - 36y + 18y^2 - 27y^3$

$(2 - 3y)^3 = 8 - 36y + 54y^2 - 27y^3$

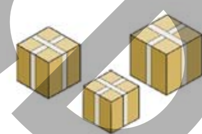
Выражение $(2 - 3y)^3$ упрощается, полученный многочлен записывается в стандартном виде.

$(1 - y)^3 = (1 - y)(1 + y + y^2)$

$(1 - y)^3 = 1 - 3y + 3y^2 - y^3$

В левой части равенства записан куб разности, однако в правой части записано выражение в виде произведения разности кубов. К выражению $(1 - y)^3$ применяется формула куба разности.

Решение задач



23. Из трёх коробок кубической формы ребро одной равно k см. Отмечается, что ребро этой коробки на 5 см больше ребра одной из других коробок и на 5 см меньше ребра третьей.

Решение задачи

• Записываются выражения для нахождения объёма каждого куба.

$V = k^3$ $\qquad V = (k - 5)^3$ $\qquad V = (k + 5)^3$

• Сумму объёмов большого и маленького кубов можно записать в виде многочлена двумя способами.

1-й способ. Применяется формула суммы кубов.

$(k + 5)^3 + (k - 5)^3 = ((k + 5) + (k - 5))((k + 5)^2 - (k + 5)(k - 5) + (k - 5)^2) = 2k(k^2 + 75) = 2k^3 + 150k$

2-й способ. Применяется формула куба суммы и разности.

$(k + 5)^3 + (k - 5)^3 = (k^3 + 15k^2 + 75k + 125) + (k^3 - 15k^2 + 75k - 125) = 2k^3 + 150k$

Ответ. k^3, $(k + 5)^3$, $(k - 5)^3$; $2k^3 + 150k$.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	**Материалы оценивания**
Записывает куб суммы (разности) двух чисел в виде многочлена.	Рабочие листы, учебник, РТ
Применяет формулу суммы (разности) кубов двух чисел.	Рабочие листы, учебник, РТ

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

Ученики на предыдущих уроках познакомились с понятиями «квадрат суммы», «квадрат разности», «разность квадратов», «куб суммы», «куб разности», «неполный квадрат», «сумма кубов» и «разность кубов». На этом уроке для закрепления приобретённых навыков они будут решать различные задачи и примеры.

В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать видеопояснения к некоторым заданиям, связанным с многочленами.

https://youtu.be/CQbkxpx8HLw

Практическое задание. Класс делится на группы. Каждой группе раздаются рабочие листы. В рабочем листе показано правило заполнения пустых клеток. Произведение выражений, записанных в каждой паре соседних клеток, записывается в клетке под ними. По этому правилу в пустые клетки вписываются соответствующие выражения.

Рабочий лист можно скачать по следующей ссылке:

https://drive.google.com/file/d/1GTNJ7KTCW4k2Bzh6Dae48LuViZmlZnNP/view?usp=drive_link

Решение заданий

2. Данные выражения записываются в виде квадрата или куба двучлена.

c) выражение $a^2 - 8a + 16$ записывается в виде квадрата двучлена.

$a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2$

f) выражение $\frac{1}{4}a^2 - 2ab + 4b^2$ записывается в виде квадрата двучлена.

$\frac{1}{4}a^2 - 2ab + 4b^2 = (\frac{1}{2}a)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot b + (2b)^2 = (\frac{1}{2}a - 2b)^2$

h) выражение $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$ записывается в виде квадрата двучлена.

$8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3 = (2a)^3 - 3 \cdot (2a)^2 \cdot b + 3 \cdot 2a \cdot b^2 - b^3 = (2a - b)^3$

3. В соответствии с данными высказываниями записываются выражения, которые упрощаются и приводятся к стандартному виду многочлена.

c) произведение квадрата суммы 10 и c на c: $(10 + c)^2 \cdot c = 100c + 20c^2 + c^3$

5. С использованием формулы разности квадратов проводится сравнение и результат проверяется на калькуляторе.

b) 2135^2 и $2145 \cdot 2125$

Для представления чисел 2145 и 2125 в виде суммы и разности двух чисел составляется система уравнений и находятся соответствующие числа.

$$+\begin{cases} x + y = 2145 \\ x - y = 2125 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 2x = 4270 \\ x = 2135 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2135 + y = 2145 \\ y = 10 \end{matrix}$$

Числа 2145 и 2125 записываются в виде суммы и разности найденных чисел. $2145 = 2135 + 10$; $2125 = 2135 - 10$

Применяется формула произведения суммы и разности двух чисел. $2125 \cdot 2145 = (2135 + 10)(2135 - 10) = 2135^2 - 100$

2135^2 и $2135^2 - 100$ сравниваются. $2135^2 > 2135^2 - 100$

6. С использованием формул сокращённого умножения и свойств степеней вычисляются значения выражений.

e) Значение выражения вычисляется с использованием формулы разности кубов и свойства степени степени.

$(20 - 16)(20^2 + 20 \cdot 16 + 16^2) + 8^4 = 20^3 - 16^3 + 8^4 = 20^3 - (2^4)^3 + (2^3)^4 = 20^3 - 2^{12} + 2^{12} = 8000$

8. При объяснении примера внимание учеников направляется на связи между данными выражениями. Особо подчёркивается, что для нахождения значения выражения $(a + b)^2$ применяется формула квадрата суммы. Обращается внимание учеников на использование переместительного свойства сложения в процессе вычислений и поэтапно демонстрируется получение результата.

$ab = 6$; $a^2 + b^2 = 13$ olarsa, $(a + b)^2 = ?$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow 13 + 2 \cdot 6 = 25$

б) Если $a + b = -5$; $ab = 6$, то для нахождения $a^2 + b^2$ используется формула квадрата суммы.

$$(a + b)^2 = \underbrace{a^2 + b^2}_{?} + 2ab \;\rightarrow\; (-5)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot 6 \;\rightarrow\; a^2 + b^2 = 25 - 12 = 13$$

К сведению учителя! Иногда задания, предлагаемые ученикам, направлены на вычисление значения требуемого выражения без нахождения конкретных числовых значений переменных. Основная цель таких заданий — развитие у учеников умения осознанно применять формулы и выполнять действия с многочленами. Применение формул сокращённого умножения играет важную роль в заданиях такого типа. Целесообразно объяснить ученикам некоторые следствия, вытекающие из формул сокращённого умножения.

Результат из формулы квадрата двучлена

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$

Результат из формулы куба двучлена

$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$

Рекомендуется обсуждать с учениками, как выводятся эти формулы. Можно привести примеры их применения. Например, если $a + b = -5$ и $ab = 6$, то значение выражения $a^2 + b^2$ можно найти непосредственно на основе следствия из формулы квадрата суммы.

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = (-5)^2 - 2 \cdot 6 = 13$.

Систематическое использование формул сокращённого умножения помогает ученикам выполнять вычисления более удобно, ускорять процесс упрощения за счёт уменьшения числа операций и развивать математическое мышление.

14. При записи многочлена в стандартном виде, если коэффициент какого-либо члена равен нулю, этот член не участвует в записи выражения.

а) Определяется, при каком значении a в стандартной записи многочлена отсутствует переменная x первой степени, то есть коэффициент при x равен нулю.

$$(x-a)(x^2-x+1)=x^3-(1+a)x^2+\underbrace{(1+a)}_{\text{Равен нулю}}x-a$$

$1+a=0$

$a=-1$

б) Определяется, при каком значении a коэффициенты при x и x^2 в стандартной записи многочлена равны.

$$(x-a)(x^2-x+1)=x^3\underbrace{-(1+a)}_{\text{Равны}}x^2+\underbrace{(1+a)}x-a$$

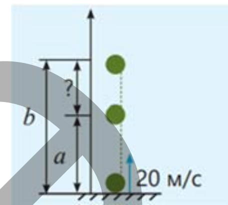
$-(1+a)=1+a$

$-1-a=1+a$

$-a-a=1+1$

$a=-1$

17. Мяч брошен вверх со скоростью 20 м/с. Подчёркивается, что высота мяча над землёй через t секунд вычисляется по выражению $20t-5t^2$.



• Если в момент t = n мяч находится на высоте a метров, а в момент t = n + 1 — на высоте b метров, выражение для нахождения расстояния b – a упрощается и записывается в виде многочлена.

$a=20n-5n^2$ $\qquad b=20(n+1)-5(n+1)^2$

$b-a=20(n+1)-5(n+1)^2-(20n-5n^2)=15-10n$

• Для определения, при каком значении n разность высот b – a равна 10 м, составляется и решается соответствующее уравнение.

$15-10n=10 \rightarrow n=0{,}5$ (с)

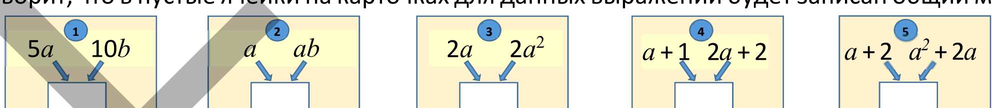
Ответ. $15-10n$; 0,5 с.

ТЕМА 4.4. Разложение многочлена на множители

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.1.3. Находит значение многочлена при заданном значении переменных. 7-2.1.6. Разлагает многочлен на множители.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Выносит общий множитель за скобки. • Разлагает многочлен на множители методом группировки.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.coolmath.com/algebra/04-factoring/01-what-is-a-factor-01* *https://video.edu.az/video/9316* *https://video.edu.az/video/9587* *https://video.edu.az/video/9819* *https://video.edu.az/video/9951* Задание: *https://www.geogebra.org/m/ts92cng3* *https://www.geogebra.org/m/psgVzppA* *https://www.geogebra.org/m/q4ht7teg* *https://www.geogebra.org/m/qq569wjc*

Побуждение

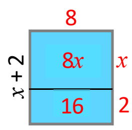
Учитель кладёт на стол несколько пронумерованных карточек. Приглашает к доске нескольких учеников, ученики выбирают карточки и записывают выражения, указанные на них, на доске. Учитель, обращаясь к классу, говорит, что в пустые ячейки на карточках для данных выражений будет записан общий множитель:



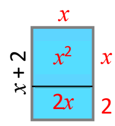
Как определить общий множитель коэффициентов на 1-й карточке? На какой карточке общий множитель двух выражений равен a? У каких двух выражений общий множитель равен (a + 1)? Как это определить? По аналогичным вопросам проводится обсуждение, и ученики объясняют, как выбирается общий множитель.

Исследование-обсуждение

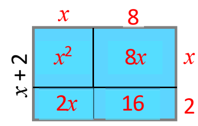
На рисунке под прямоугольниками, у которых одна сторона равна, указаны их площади. • Чтобы найти требуемую сторону каждого прямоугольника, многочлены, выражающие площади, записываются в виде произведения двух многочленов. Для этого используется модель площади.



$S = 8x + 16$



$S = x^2 + 2x$



$S = x^2 + 2x + 8x + 16$

• Отмечается, что в 1-м и 2-м случаях один из множителей — одночлен, а в 3-м случае оба — двучлены.

Изучение **Вынесение общего множителя за скобки**

Отмечается, что представление многочлена в виде произведения нескольких многочленов называется разложением многочлена на множители. Приводятся примеры разложения многочлена на множители путём вынесения общего множителя за скобки.

$$12xy - 8x = 4 \cdot 3 \cdot x \cdot y - 4 \cdot 2 \cdot x = 4 \cdot x \cdot 3 \cdot y - 4 \cdot x \cdot 2 = 4x(3y - 2)$$

Ученикам объясняется правило вынесения общего множителя за скобки в многочлене с целыми коэффициентами. Пример обсуждается вместе с классом.

$$9x^3y^2 + 6x^2y^3 = 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot 3 \cdot x + 3 \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot 2 \cdot y = 3x^2y^2(3x + 2y)$$

В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы.

https://video.edu.az/video/9416 *https://video.edu.az/video/12578* *https://video.edu.az/video/9556*

К сведению учителя! Ученики знакомы с правилом вынесения общего множителя за скобки с предыдущих классов. Обобщение этих знаний и применение их к разложению многочленов на множители усиливает алгоритмическое мышление и создаёт основу для усвоения последующих тем. При разложении многочленов на множители, соблюдая указанную последовательность, можно более ясно и последовательно донести до учеников процесс нахождения общего множителя.

Общий множитель коэффициентов → *Общий множитель переменных* → *Вынесение общего множителя за скобки* → *Определение многочлена, записываемого в скобках*

✓ *Общий множитель коэффициентов*

Берутся модули всех коэффициентов многочлена. Находится их наибольший общий делитель (НОД). Найденное число является коэффициентом одночлена, выносимого за скобки.

✓ *Общий множитель переменных*

Определяются повторяющиеся переменные каждого члена. Для каждой переменной выбирается наименьшая степень. Эти переменные составляют буквенную часть одночлена — общего множителя.

✓ *Вынесение общего множителя за скобки*

Одночлен, полученный записью общих множителей коэффициентов и переменных, выносится за скобки. Это и есть общий множитель членов данного многочлена.

✓ *Определение многочлена, записываемого в скобках*

Каждый член делится на общий множитель, и полученное выражение записывается в скобках.

Такой системный подход позволяет ученикам глубоко усвоить алгоритм разложения на множители, применять его в различных примерах и эффективно использовать при упрощении более сложных выражений. Эта тема требует не столько вычислений, сколько навыка «распознавания закономерностей» (pattern recognition). Целесообразно задать ученикам после разложения на множители перемножать полученные скобки и проверять, получается ли исходное выражение.

Задания

2. В пустую клетку подбирается такой одночлен, чтобы получилось тождество. Проверяется правильность ответа.

a) $x^2 + 6x = x \cdot x + 6 \cdot x = \boxed{x}(x + 6)$

b) $-c^2 + 2c = c \cdot (-c) - 2 \cdot (-c) = \boxed{-c}(c - 2)$

c) $3a^2 + 9a + 3 = 3 \cdot a^2 + 3 \cdot 3a + 3 \cdot 1 = \boxed{3}(a^2 + 3a + 1)$

В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы и интерактивные игры.

https://video.edu.az/video/13941 *https://video.edu.az/video/8514* *https://learningapps.org/display?v=pi7nsv9zj25*

Дифференцированное обучение

Поддержка. На стол выкладываются карточки. Ученикам предлагается выбрать любые две карточки и найти наибольший общий множитель для выражений на них либо записать сумму выражений и разложить её на множители

$4x^2$	$2xy^3$	$-y^4$	$-2x^3y$	$8xy$

Углубление. На стол выкладываются карточки. Ученикам предлагается определить, на каких двух карточках общий множитель равен $3x$, x^2, x^3y^2 либо выбрать три карточки, записать сумму соответствующих выражений и разложить её на множители.

$9xy^4$	x^4y^2	$-2x^2$	$12x^3y^3$	$-15x^3$

Внимание!

Ученикам приводятся примеры разложения многочленов на множители в случаях, когда за скобки выносится многочлен. Подчёркивается, что иногда один из множителей отличается от другого только знаком. Приведённые примеры обсуждаются.

5. Определяется общий множитель, выносится за скобки, выражение записывается в виде произведения двух многочленов.

b) $a(x-y)-(x-y)=a(x-y)-1\cdot(x-y)=$
$=(x-y)(a-1)$

Члены группируются, определяется, что общий множитель — x − y. Общий множитель выносится за скобки

Изучение Разложение многочленов на множители методом группировки

Ученикам даётся информация о методе группировки как одном из способов разложения многочленов на множители. Объясняется, что члены многочлена следует сгруппировать так, чтобы после вынесения общего множителя из каждой группы в полученном выражении вновь появился общий множитель. Затем этот общий множитель выносится за скобки, и многочлен записывается в виде произведения двух многочленов, то есть разлагается на множители. На уроке пример решается двумя разными способами группировки. Результаты обоих подходов обсуждаются вместе с классом.

$$ab-3a+2b^2-6b=(ab-3a)+(2b^2-6b)=a(b-3)+2b(b-3)=(b-3)(a+2b)$$

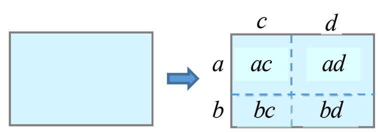
və ya

$$ab-3a+2b^2-6b=ab+2b^2-3a-6b=b(a+2b)-3(a+2b)=(a+2b)(b-3)$$

В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы.
https://video.edu.az/video/8610

К сведению учителя! В предыдущем разделе ученики научились упрощать выражения вида (a + b)(c + d) и записывать их в стандартном виде. Для большей наглядности целесообразно напомнить эти знания и объяснить метод разложения на множители как обратную операцию. Такой подход помогает учащимся устанавливать связи между имеющимися знаниями и логично, легко усваивать алгоритм разложения на множители.

Рисуется модель прямоугольника, площадь которого выражается многочленом *ac + bc + ad + bd*. Эта модель делится на четыре меньших прямоугольника, и отмечается, что площадь каждого из них соответствует одному из членов данного многочлена. Определяются и записываются стороны каждого прямоугольника, соответствующие их площадям. Таким образом, площадь большого прямоугольника представляется в виде четырёх частей, а члены *ac, bc, ad, bd* наглядно демонстрируются.



×	c	d
a	ac	ad
b	bc	bd

Полученные результаты можно также представить с помощью таблицы, используемой для произведения двух многочленов.

Затем члены группируются по два, находится общий множитель, и с помощью модели показывается приведение выражения к виду *(a + b)(c + d)*.

$S=ac+bc+ad+bd=(ac+bc)+(ad+bd)=$
$c(a+b)+d(a+b)=$
$(a+b)(c+d)$

Члены группируются попарно.
Для каждой группы определяется общий множитель (a + b).
Множитель (a + b) выносится за скобки.

Для более наглядного объяснения метода разложения многочлена на множители путём группировки ученикам можно задать наводящие вопросы:

— Почему были сгруппированы члены ac с bc и ad с bd? Какие ещё члены можно было сгруппировать? Почему нельзя разложить многочлен на множители, сгруппировав ac с bd и bc с ad?

7. Запишите данное выражение в виде произведения двух многочленов. Обращается внимание на то, какие многочлены выбираются для группировки и правильность этого выбора.

$20px + 15xy - 12py - 25x^2 = 20px - 25x^2 + 15xy - 12py = 5x(4p - 5x) + 3y(5x - 4p) = 5x(4p - 5x) - 3y(4p - 5x) = (4p - 5x)(5x - 3y)$

Рекомендуется предложить ученикам проверить правильность разложения многочлена на множители, перемножив многочлены по правилу умножения многочленов.

Ложные представления, возникающие у учеников. Некоторые ученики допускают ошибки при разложении многочлена на множители. Например:

Ложное	Верное
Выносится за скобки только один из множителей, отличающихся лишь знаком. $2x - xy - 2y + 4 = x(2 - y) - 2(y - 2) = (2 - y)(x - 2)$	Изменяют знак одного из множителей, отличающихся только знаком, а затем выносят общий множитель за скобки. $2x - xy - 2y + 4 = x(2 - y) - 2(y - 2) = x(2 - y) + 2(2 - y) = (2 - y)(x + 2)$
Считают, что многочлен $2x - xy - 2y + 4$ можно разложить на множители, записывая члены в любом порядке.	При записи $2x - 2y + 4 - xy$ нельзя разложить многочлен на множители, группируя члены попарно по порядку.
При изменении порядка членов меняют и знаки. $2x - xy - 2y + 4 = 2x - 4 - 2y + xy$	При перестановке членов знаки должны сохраняться. $2x - xy - 2y + 4 = 2x + 4 - 2y - xy$

Целесообразно обсудить эти ошибки с учащимися, допускающими подобные неточности, и дать рекомендации по их устранению.

9. Второй член трёхчлена записывается в виде суммы двух подходящих членов. Многочлен разлагается на множители методом группировки.

b) $m^2 - 6m + 5 = m^2 - m - 5m + 5 = m(m - 1) - 5(m - 1) = (m - 1)(m - 5)$ или

$m^2 - 6m + 5 = m^2 - 5m - m + 5 = m(m - 5) - (m - 5) = (m - 5)(m - 1)$

Т В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы и интерактивные ресурсы.

https://video.edu.az/video/9853 *https://www.geogebra.org/m/psgVzppA*

К сведению учителя! Иногда ученикам трудно понять, почему при разложении трёхчлена на множители второй член разбивается на два. Они не осознают, что разложение выражения $x^2 + 5x + 6$ на множители означает нахождение сторон прямоугольника $(x + 2)$ и $(x + 3)$ по заданной площади. Для лучшего понимания можно использовать алгебраические карточки и, находя подходящие числа методом, описанным в задании 9, показывать примеры. Такое разбиение приводит к преобразованию трёхчлена в многочлен из четырёх членов, а затем — к разложению на множители методом группировки. Второй член трёхчлена разбивается на два так, чтобы при попарной группировке членов в каждой группе можно было вынести общий множитель за скобки. В 8-м классе при изучении способов решения квадратных уравнений учащиеся ещё больше развивают навык разложения трёхчленов на множители. В этой теме важно обратить внимание на то, что учащиеся подбирают разложение трёхчлена методом подбора. Например, в выражении $m^2 - 6m + 5$ можно показать, что при замене $-6m = -2m - 4m$ или $-6m = -3m - 3m$ разложение невозможно, и только при замене $-6m = -m - 5m$ многочлен удаётся разложить на множители.

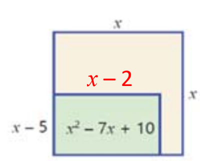
Решение задач

13. Отмечается, что во дворе квадратной формы со стороной x метров для разбивки сада выделен прямоугольный участок, ширина которого равна $x - 5$, а площадь выражается многочленом $x^2 - 7x + 10$. Требуется найти длину ограды сада.

• Многочлен, выражающий площадь участка под сад, раскладывается на множители.

$x^2 - 7x + 10 = x^2 - 2x - 5x + 10 = x(x - 2) - 5(x - 2) = (x - 2)(x - 5)$

Так как ширина прямоугольника равна $x - 5$, отмечается, что его длина равна $x - 2$.



Для вычисления длины ограды записывается многочлен

$2((x - 2) + (x - 5)) = 4x - 14$

• Площадь двора квадратной формы равна 121 м². Следовательно, $x = 11$, т.к., $11^2 = 121$.

Находится периметр участка, выделенного под сад. $4 \cdot 11 - 14 = 30$ (м)

Ответ. $4x - 14$; 30 м.

Обсуждение. Рассматривая рисунок, можно сравнить стороны квадрата, чтобы найти искомую сторону участка под сад. Поскольку этот участок имеет прямоугольную форму и его ширина равна $x - 5$, можно отметить, что его длина также равна разности x и некоторого числа. Записав $(x - \square)(x - 5) = x^2 - 7x + 10$ находят, что соответствующее число равно 2, после чего решение продолжается.

Формативное оценивание

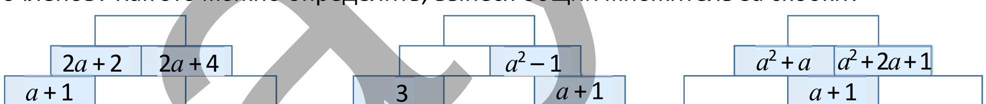
Критерии оценивания	Материалы оценивания
Выносит общий множитель за скобки.	Рабочие листы, учебник, РТ
Разлагает многочлен на множители методом группировки.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 4.5. Различные способы разложения многочленов на множители

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.1.3. Находит значение многочлена при заданных значениях переменных. 7-2.1.5. Применяет формулы сокращённого умножения. 7-2.1.6. Разлагает многочлен на множители.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Разлагает многочлен на множители с помощью формул сокращённого умножения. • Разлагает многочлен на множители различными способами.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.coolmath.com/algebra/04-factoring/06-difference-squares-cubes-05* *https://video.edu.az/video/9861* *https://video.edu.az/video/11555*

Побуждение

На доске рисуется модель пирамиды. Ученикам сообщается, что в каждой ячейке верхнего уровня записывается произведение выражений, находящихся в ячейках нижнего уровня, и задаются вопросы: В первой пирамиде для нахождения выражения, соответствующего какой пустой ячейке, следует использовать произведение данных выражений? Для какой ячейки необходимо найти общий множитель многочленов? В какой пустой ячейке выражение можно найти, записав многочлен в виде произведения двух многочленов? Как это можно определить, вынеся общий множитель за скобки?

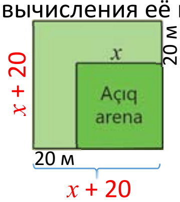


Для других моделей пирамид также задаются аналогичные вопросы, и определяются выражения, соответствующие пустым ячейкам. Обсуждается, в каких случаях используются формулы сокращённого умножения.

Исследование-обсуждение

Отмечается, что в конном центре стороны открытой арены квадратной формы увеличены на 20 м. Требуется записать выражение для площади открытой арены, а многочлен, выражающий длину закрытой арены, найти с использованием формулы разности квадратов.

• Исходя из того, что сторона открытой арены равна x + 20, записывается выражение для вычисления её площади.

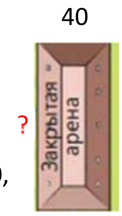


$(x + 20)^2 = x^2 + 40x + 400$

• Записывается многочлен, выражающий увеличение площади, и применяется формула разности квадратов.

$(x + 20)^2 - x^2 = (x + 20 - x)(x + 20 + x) =$
$= 20(2x + 20) = 40(x + 10)$

Поскольку площадь закрытой арены равна 40(x + 10), а её ширина равна 40, отмечается, что выражение, показывающее её длину, равно x + 10.



Учителю целесообразно с помощью наводящих вопросов напомнить ученикам формулы сокращённого умножения.

Изучение Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращённого умножения

Отмечается, что при разложении многочленов на множители иногда используются формулы сокращённого умножения, и приводятся примеры.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $\quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $\quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ $\quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $\quad a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

К сведению учителя! Данная тема требует умения «распознавания закономерностей» (pattern recognition). В процессе разложения на множители ученики должны определять связи между членами выражения и возможности соответствующей группировки для выбора общего множителя. Объяснение ученикам связи между формулами сокращённого умножения и разложением многочленов на множители способствует как осознанию механизма применения этих формул, так и формированию навыка более эффективного упрощения выражений. Ученики, понимающие эту связь, быстрее распознают выражения с похожей структурой и легче раскладывают их на множители.

Квадрат двучлена	Разность квадратов	Куб двучлена	Сумма (разность) кубов
Произведение	Произведение	Произведение	Произведение
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
Разложение на множ.	Разложение на множ.	Разложение на множители	Разложение на множители

Задания

2. Выражение записывается в виде произведения многочленов.

$4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 4) =$ *Определяется общий множитель. НОД($4x^3$, $4x$) = $4x$. $4x$ выносится за скобки.*

$= 4x(x + 1)(x - 1)$

К выражению $x^2 - 4$ применяется формула разности квадратов

В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы.
https://video.edu.az/video/11555
https://video.edu.az/video/8422

Внимание!

Иногда с первого взгляда трудно определить, как следует группировать многочлен. В таких случаях, если многочлен можно записать в виде произведения двух или более многочленов, подчёркивается, что его можно разложить на множители путём группировки членов и применения формул сокращённого умножения, и приводятся примеры. Правильная группировка позволяет выбрать соответствующую формулу сокращённого умножения и быстрее и эффективнее разложить выражение на множители.

К сведению учителя! Иногда ученики испытывают трудности в определении того, с чего начать разложение многочлена на множители и какой метод выбрать. Для предотвращения этих трудностей целесообразно объяснить, как, используя указанную последовательность, определить наиболее удобный способ.

Определение общего множителя → *Применение формул сокращённого умножения* → *Метод группировки*

✓ *Определение общего множителя*

В качестве первого шага следует проверить, имеется ли у всех членов многочлена общий множитель (НОД). Если такой множитель есть, его вынесение за скобки важно для упрощения последующих шагов.

✓ *Применение формул сокращённого умножения*

Если выражение является двучленом, определяется, можно ли разложить его с помощью формулы разности квадратов или формулы суммы (разности) кубов; если выражение является трёхчленом, проверяется возможность разложения с помощью формулы квадрата двучлена.

✓ *Метод группировки*

Если применение формул сокращённого умножения невозможно, используется метод группировки. Члены должны быть разделены на две группы так, чтобы в каждой группе можно было вынести общий множитель.

После завершения процесса разложения на множители правильность ответа проверяется с помощью правила умножения многочленов или формул сокращённого умножения.

5. С использованием формулы куба суммы или разности выражение записывается в виде куба двучлена. Вычисляется значение выражения при заданных значениях переменных.

$x^3 - 6x^2y + 12y^2 - 8y^3 = (x - 2y)^3$ $\qquad$ $x = 5$ $y = 2 \rightarrow (5 - 2 \cdot 2)^3 = 1$

6. Доказывается тождество.

а) $x + y + x^3 - xy^2 = (x + y)(x^2 - xy + 1)$

Многочлен, находящийся в левой части равенства, раскладывается на множители.

$x + y + x^3 - xy^2 = x + y + x(x^2 - y^2) =$	*Члены многочлена группируются по два в порядке их записи.*
$x + y + x(x + y)(x - y) =$	*К выражению $x^2 - y^2$ применяется формула разности*
$(x + y)(1 + x(x - y)) =$	*квадратов. Так как x + y является общим множителем, он*
$(x + y)(1 + x^2 - xy) = = (x + y)(x^2 - xy + 1)$	*выносится за скобки.*

Дифференцированное обучение

Поддержка. Ученикам предлагается выбрать любую карточку и определить, разложено ли записанное выражение на множители; если разложено — разложить его, объяснить, каким методом они пользовались и применялись ли формулы сокращённого умножения.

$4x^2 - 4$	$x + x^3$	$x - x^3$
$x^4 - 16$	$x^3 + 8$	$x^4 + 16$

Углубление. Ученикам предлагается определить, на каких двух карточках записано выражение, при разложении которого одним из множителей является 1 – x, 1 + x или x + 2, какие многочлены имеют 2, 3 или 4 множителя, а также какие это многочлены. Кроме того, ученикам можно дать задание определить, суммы каких многочленов раскладываются на множители. Ученики объясняют, каким методом они пользовались и применялись ли формулы сокращённого умножения.

Решение задач

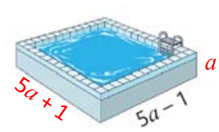
13. Отмечается, что на рисунке изображён бассейн в форме кубоида, площадь основания которого равна $(25a^2 - 1)$ квадратных метров, а объём равен $(25a^3 - a)$ кубических метров.

• Многочлены, выражающие объём бассейна и площадь его основания, раскладываются на множители.

Объём бассейна: $25a^3 - a = a(25a^2 - 1) = a(5a + 1)(5a - 1)$

Площадь основания бассейна: $25a^2 - 1 = (5a + 1)(5a - 1)$

• На основе площади основания и объёма находятся размеры бассейна. Для вычисления площади боковой поверхности записывается многочлен.



$S_{бок} = 2a(5a + 1) + 2a(5a - 1) = 20a^2$

• Если высота равна $a = 2$ м, находится ширина и длина бассейна.

Ширина бассейна: $5a - 1 = 5 \cdot 2 - 1 = 9$ (м)

Длина бассейна: $5a + 1 = 5 \cdot 2 + 1 = 11$ (м)

Ответ. $a(5a + 1)(5a - 1)$ и $(5a + 1)(5a - 1)$; $20a^2$; ширина бассейна: 9 м, а длина 11 м.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Разлагает многочлен на множители с помощью формул сокращённого умножения.	Рабочие листы, учебник, РТ
Разлагает многочлен на множители различными способами.	Рабочие листы, учебник, РТ

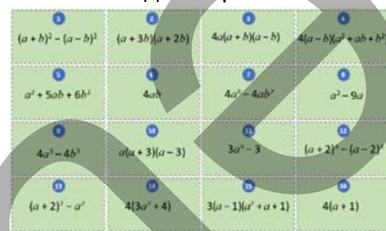
ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение. Понятия, представленные в резюме раздела учебника, повторяются с учениками. Слова, изученные по разделу, напоминаются ученикам учителем. По мере озвучивания каждого понятия ученики объясняют его содержание и приводят примеры.

Формулы сокращённого умножения, квадрат суммы, квадрат разности, разность квадратов, куб суммы, куб разности, неполный квадрат, сумма кубов, разность кубов, общий множитель, разложение на множители.

На первой странице раздела с учениками вспоминается информация о сферах применения формул сокращённого умножения. Отмечается, что формулы сокращённого умножения используются при нахождении площади и объёма геометрических фигур, в финансово-экономических расчётах и моделировании различных задач. Вопросы, приведённые в задании «Попытайтесь!», были обсуждены в начале раздела. Данные ответы вспоминаются и сравниваются с решением исходной проблемы.

Практическое задание. Ученикам раздаются рабочие листы, один ученик приглашается к доске и ему предлагается записать на доске выражение из своего листа. Ученик, у которого на листе записано тождественно равное выражение, подходит к доске и записывает своё выражение, класс проверяет ответ. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут найдены все тождества.
Рабочий лист можно скачать по ссылке:
https://drive.google.com/file/d/1BZa6ba_T6993lzxIzESdoUkzFLaErC-8/view?usp=sharing



Ответ предоставляется с помощью QR-кода

При приглашении учеников к доске учитель может подчеркнуть применение формул сокращённого умножения, общего множителя и метода группировки при упрощении выражений. Таким образом ученики, используя различные методы, упрощают выражения; в конце целесообразно провести обсуждение способов решения.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

3. Сравнение выполняется с использованием формулы разности квадратов, ответ проверяется на калькуляторе.

б) 1024^2 и $1020 \cdot 1028$

Сумма двух чисел равна 1028. Меньшее из чисел обозначается как x, а большее как $1028 - x$. Поскольку разность чисел равна 1020, записывается и решается уравнение.

$1028 - x - x = 1020 \ \rightarrow \ x = 4$ Находится большее число. $1028 - 4 = 1024$

Числа 1020 и 1028 записываются в виде суммы и разности найденных чисел. $1020 = 1024 - 4$; $1028 = 1024 + 4$.
Применяется формула произведения суммы и разности двух чисел. $1020 \cdot 1028 = (1024 - 4) \cdot (1024 + 4) = 1024^2 - 16$
1024^2 и $1024^2 - 100$ сравниваются. $1024^2 > 1024^2 - 16$
Проверка ответа на калькуляторе.
1024^2 и $1020 \cdot 1028$
$1048576 > 1048560$
Отмечается внимание учеников на то, что проведение такого сравнения с использованием формул сокращённого умножения является широко применяемым методом.

6. Если $A = 3x + 1$, $B = 3x - 1$ и $C = x - 1$, то данное выражение записывается в виде выражения, зависящего от x.

б) $C^2 - AB = (x - 1)^2 - (3x + 1)(3x - 1) =$
$= x^2 - 2x + 1 - (9x^2 - 1) =$
$= x^2 - 2x + 1 - 9x^2 + 1 =$
$= -8x^2 - 2x + 2$

Вместо A, B и C записываются выражения, зависящие от x. Применяются формулы квадрата разности и произведения суммы и разности. С учётом знака «минус» перед скобкой: $-(9x^2 - 1) = -9x^2 + 1$. Подобные слагаемые приводятся, и выражение записывается в виде выражения, зависящего от x.

Иногда ученики, упрощая выражения с несколькими операциями, заменяя одно выражение другим или применяя формулы сокращённого умножения, не обращают внимания на знак «минус» перед скобкой; по мере увеличения количества операций допускают определённые ошибки при приведении подобных слагаемых. Для предотвращения таких ошибок целесообразно представить ученикам простые примеры, показывающие влияние знака «минус» на результат.

7. По данным условия находится значение выражения.

а) Если $ab = 1{,}5$ и $a^2 + b^2 = 4$, то для нахождения значения выражения $(a - b)^2$ используется формула квадрата разности.

$$\underbrace{(a-b)^2}_{?} = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = 4 - 2 \cdot 1{,}5 = 1 \rightarrow (a-b)^2 = 1$$

г) Если $a - 2b = 1$ и $ab = 0{,}5$, то для нахождения значения выражения $a^2 + 4b^2$ используется формула квадрата разности.

$$(a-2b)^2 = \underbrace{a^2 + 4b^2}_{?} - 4ab$$

$$1^2 = a^2 + 4b^2 - 4 \cdot 0{,}5 \rightarrow a^2 + 4b^2 = 1 + 2 = 3$$

12. Используется формула сокращённого умножения и находится значение выражения при заданном значении переменной.

а) $2m^2 - 4mn + 2n^2$ $m = 2{,}5 \quad n = 0{,}5$	$2m^2 - 4mn + 2n^2 = 2(m^2 - 2mn + n^2) =$	*Общий множитель выносится за скобки.*
	$= 2(m-n)^2 =$	*Применяется формула разности.*
	$= 2 \cdot (2{,}5 - 0{,}5)^2 = 8$	*Значение выражения вычисляется.*

В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы. *https://video.edu.az/video/8838*

13. Выполняется алгоритм и в конце определяется полученное число. В зависимости от заданного значения b выражение упрощается, полученный многочлен записывается в стандартном виде и рассматривается блок-схема. Двигаясь по соответствующей ветви условного блока, при заданном значении переменной вычисляют значение выражения и определяют число на выходе.

$b = -2 \rightarrow (-2a+3)^2 - (2a-3)^2 = 0$ *Полученное выражение не является двучленом.*

Так как полученное выражение является нулевым многочленом, оно всегда равно нулю при любом a.

$b = -1 \rightarrow (-a+3)^2 - (2a-3)^2 = -3a^2 + 6a$ *Полученное выражение двучлен.*

При $a = 1$ вычисляется значение выражения.

$-3a^2 + 6a = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 = 3$

16. б) Три последовательных нечётных числа обозначаются соответственно x, x + 2 и x + 4. По условию отмечается, что произведение наибольшего и наименьшего из этих чисел на 4 единицы меньше квадрата среднего числа. Записывается соответствующее выражение.

$(x + 4)x = (x + 2)^2 - 4$

Доказывается, что равенство является тождеством.

$x^2 + 4x = x^2 + 4x + 4 - 4$

$x^2 + 4x = x^2 + 4x$

17. Количество коробок с красными карандашами, привезённых в магазин, равно количеству карандашей в каждой из этих коробок. Коробок с зелёными карандашами привезено на 1 больше, чем коробок с красными карандашами. В каждой коробке с зелёными карандашами на 1 карандаш меньше, чем в коробке с красными карандашами. Требуется определить, каких карандашей — красных или зелёных — привезено больше и на сколько.

Решение задачи

На основе данных записывается краткое условие задачи:

Количество карандашей в одной коробке с красными карандашами: x

Количество карандашей в одной коробке с зелёными карандашами: $x - 1$

Количество коробок с красными карандашами: x Количество коробок с зелёными карандашами: $x + 1$

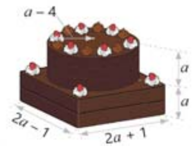
Записываются выражения для нахождения общего количества красных и зелёных карандашей. Общее количество красных карандашей: x^2 Общее количество зелёных карандашей: $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

Следовательно, в магазин привезено больше красных карандашей. Находится, на сколько больше привезено красных карандашей.

$x^2 - (x^2 - 1) = 1.$

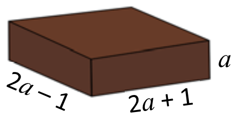
Ответ. В магазин привезено красных карандашей на 1 больше, чем зелёных.

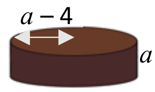
18. Требуется записать многочлен, выражающий объём торта, приготовленного кондитером из бисквитов в форме кубоида и цилиндра, найти его объём при а = 15 см и определить общую массу шоколада, использованного для поверхности торта, если на каждый квадратный сантиметр используется 0,2 г шоколада.



Решение задачи

• Для записи выражения объёма торта сначала вычисляются объёмы бисквитов в форме кубоида и цилиндра, затем их сумма записывается в виде многочлена.





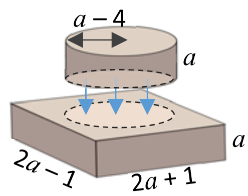
$V_{кубоид} = a(2a + 1)(2a - 1) = 4a^3 -$ $\qquad$ $V_{цилиндр} = a\pi(a - 4)^2 \approx 3a^3 - 24a^2 +$

$V = V_{кубоид} + V_{цилиндр} \approx\ 4a^3 - a + 3a^3 - 24a^2 + 48a = 7a^3 - 24a^2 +$

• При а = 15 см вычисляется объём торта

$7a^3 - 24a^2 + 47a = 7 \cdot 15^3 - 24 \cdot 15^2 + 47 \cdot 15 = 18930$ (см^3)

• Записывается многочлен, выражающий общую площадь поверхности торта. Для этого рассматривается рисунок. При наложении цилиндра и кубоида для нахождения площади поверхности полученной фигуры из суммы площадей поверхностей обеих фигур вычитается удвоенная площадь основания цилиндра (круга). Также, поскольку поверхность фигуры покрыта шоколадом, вычитается площадь основания кубоида. С учётом этого вычисляется площадь поверхности, на которую будет нанесён шоколад.



$S_{цилиндр} = 2\pi a(a - 4) + 2\pi(a - 4)^2$

$S_{кубоид} = 2(a(2a + 1)\ + a(2a - 1) + (2a + 1)(2a - 1)) = 16a^2 - 2$

$S = S_{цилиндр} + S_{кубоид} - 2\pi(a - 4)^2 = 16a^2 - 2 + 2\pi a(a - 4) + 2\pi(a - 4)^2 -\ 2\pi(a - 4)^2 \approx 16a^2 - 2 + 6a(a - 4) =$
$= 22a^2 - 24a - 2$

При а = 15 см, если на каждый квадратный сантиметр поверхности торта используется 0,2 г шоколада, вычисляется общее количество использованного шоколада.

$0,2(22 \cdot 15^2 + 24 \cdot 15\ - 2) = 917,6$ (г)

Ответ. $7a^3 - 24a^2 + 47a$; 18930 см^3; 917,6 г.

Математический калейдоскоп

1. Значения выражений вычисляются с применением формул сокращённого умножения.

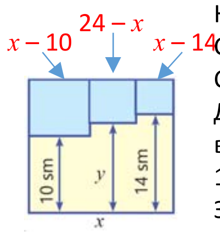
а) $\dfrac{199 \cdot 201}{2024^2 - 2023 \cdot 2025} = \dfrac{(200-1) \cdot (200+1)}{2024^2 - (2024-1) \cdot (2024+1)} = \dfrac{200^2 - 1}{2024^2 - 2024^2 + 1} = 3999$

2. На основании того, что значение выражения $a^2 - 3a + 8$ равно 10, вычисляются значения данных выражений.

$a^2 - 3a + 8 = 10 \quad a^2 - 3a = 2$

$a^4 - 6a^3 + 9a^2 = a^2(a^2 - 6a + 9) = a^2(a - 3)^2 = (a(a - 3))^2 = (a^2 - 3a)^2 = 2^2 = 4$

4. Внутри большого квадрата со стороной х см начерчены маленькие квадраты.



На основании данных находятся стороны большого и маленького квадратов.

Сторона большого синего квадрата: x – 10

Сторона маленького синего квадрата: x – 14

Для нахождения стороны среднего квадрата из стороны большого квадрата вычитается сумма сторон большого и маленького синих квадратов. $x - (x - 10 + x - 14) = 24 - x$

Записывается многочлен, выражающий расстояние y. $x - (24 - x) = 2x - 24$

Сторона большого квадрата равна 18 см. Находится расстояние y. $2x - 24 = 2 \cdot 18 - 24 = 12$(см)

Ответ. $2x - 24$; 12 см.

АКВАРИУМ АКВАДОМ

Сообщается, что аквариум «АкваДом» является крупным аквариумным комплексом, расположенным в городе Берлин (Германия), объясняется, по какой причине этот аквариум был включён в «Книгу рекордов Гиннесса», а также приводится информация о его разрушении.

Отмечается, что в результате работ по восстановлению аквариум в 2025 году был заменён устойчивой, современной и экологически адаптированной концепцией «Живое дерево» («Living Tree»). В классах с техническими возможностями можно вместе с учениками посмотреть видеоматериалы об аквариуме «AquaDom» и о текущем виде этого места.

əvvəl: https://youtu.be/ZVxbV9zEtjs

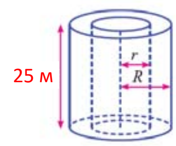
sonra: https://youtu.be/UOXBdn7oJa4

Собирается информация об аквариуме «АкваДом» и причинах его разрушения. Целесообразно отметить несколько важных выводов, связанных с аквариумом «АкваДом», и подчеркнуть моменты, на которые следует обращать внимание при подготовке проектов:

- ✓ необходимо уделять особое внимание устойчивости и безопасности крупных и сложных конструкций;
- ✓ при проектировании и планировании должны учитываться чрезвычайные ситуации;
- ✓ должно быть обеспечено качество материалов и их правильное хранение.

Также можно отметить, что, сделав выводы из такого события, возможно создание более устойчивых, экологичных и безопасных альтернатив, таких как «Живое дерево».

1. Для вычисления массы воды, содержащейся в аквариуме «AquaDom» высотой 25 м, с радиусом внутреннего цилиндра r и радиусом внешнего цилиндра R, записывается выражение (плотность воды 1000 кг/м³, $\pi \approx 3{,}14$).



$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h(R^2 - r^2) \approx 3{,}14 \cdot 25(R^2 - r^2) = 78{,}5(R^2 - r^2)$

$m = \rho \cdot V = 1000 \cdot 75{,}36\ (R^2 - r^2) = 78500(R^2 - r^2)$

2. Вычисляется, сколько тонн воды вмещает аквариум «AquaDom» высотой 25 м, с диаметром внутреннего цилиндра 8 м и диаметром внешнего цилиндра 14 м.

$78500(R^2 - r^2) = 78500 \cdot (7^2 - 4^2) = 2590500$ (кг)   2590500 кг = 2590,5 т

3. В интернете собирается информация о 5 крупнейших аквариумах мира и их внешнем виде.

1. Космический корабль Chimelong

Вместимость: 75 350 969 *л*

2. Морской мир Абу-Даби

Вместимость: 58 000 000 *л*

3. Океанское королевство

Вместимость: 48 750 000 *л*

4. Аквариум S.E.A

Вместимость: 45 200 000 *л*

5. L'Oceanogràfic

Вместимость: 41 600 000 *л*

Ученикам рекомендуется предоставить ссылки-источники для получения дополнительной информации.

https://www.jagranjosh.com/general-knowledge/largest-aquariums-in-the-world-1820000348-1

4. Ученики определяют форму, размеры и вместимость желаемого аквариума. В зависимости от предполагаемых обитателей аквариума и количества воды они, исследуя, какое стекло или другой материал и какой толщины следует использовать, готовят презентацию. Рекомендуется демонстрация подготовленных презентаций в классе.

5-й РАЗДЕЛ

Четырехугольники

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	106	
Тема 5.1	Начальные понятия геометрии	4	107	70
Тема 5.2	Четырехугольники		110	72
Тема 5.3	Параллелограмм	3	114	74
Тема 5.4	Виды параллелограммов. Прямоугольник, ромб, квадрат	3	118	77
Тема 5.5	Свойства средней линии и медиан треугольника	3	122	80
Тема 5.6	Трапеция	2	126	83
	Обобщающий урок. STEAM. “Арочные конструкции в архитектуре”	2	130	86
	МСО 5	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	19		

Краткий обзор раздела

С 7-го класса общего среднего образования закладывается основа для углублённого изучения геометрии. В младших классах хотя и рассматриваются геометрические фигуры и некоторые их свойства, знакомство с основными аксиомами и теоремами геометрии вводится в 7-м классе. Поэтому в данном разделе необходимым считается представление темы «Первоначальные понятия геометрии». В разделе изучаются выпуклые и невыпуклые (вогнутые) четырёхугольники, параллелограмм и его виды, свойства средней линии и медианы треугольника, некоторые свойства трапеции, а полученные знания применяются при решении различных типов заданий и задач.

На что стоит обратить внимание?

Понятия точки, прямой и плоскости доводятся до внимания учеников, даются первоначальные сведения об аксиоме и теореме. У учеников формируются умения объяснять и различать эти понятия.

При объяснении видов четырёхугольников, некоторых их свойств, сходств и различий целесообразно опираться на примеры. При описании геометрических фигур и их элементов у учеников могут возникать определённые трудности. При изображении фигур (особенно параллелограмма и треугольников) целесообразно рисовать их в различных положениях. Это поможет ученикам распознавать фигуру не по её стандартному положению, а по определению и свойствам. Учитель, учитывая особенности трудностей, с которыми ученики столкнутся при изучении четырёхугольников, добивается их устранения.

Развитие математического языка

В данном разделе объясняются понятия «выпуклый четырёхугольник», «невыпуклый (вогнутый) четырёхугольник», «параллелограмм», «ромб», «прямоугольник», «квадрат», «диагональ», «внутренний угол», «внешний угол», «средняя линия», «медиана». Для правильной формулировки теорем и определений, различения условия и заключения в математических утверждениях, построения логической цепочки при доказательстве теорем необходимо точное усвоение понятий и их свойств.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Основные понятия геометрии, математическое утверждение, аксиома, теорема, выпуклый четырёхугольник, виды невыпуклого (вогнутого) четырёхугольника и некоторые их свойства, диагональ, средняя линия треугольника и трапеции.

Необходимые предварительные знания и умения:

- Точка, прямая, отрезок
- Смежные и вертикальные углы
- Биссектриса, медиана, высота
- Стороны, вершины, углы плоских фигур
- Периметр, площадь
- Диагональ

Междисциплинарная интеграция

В окружающей среде, прикладных науках и технологиях фигуры четырёхугольной формы играют важную роль. В различных предметах четырёхугольники и их свойства применяются при решении различных задач. В географии карты и планы часто изображаются в форме прямоугольника, и при вычислениях используются его свойства. Пиксельная структура цифровых изображений выглядит в виде квадратов. Траектория движения и изображение сил задаются в прямоугольной системе координат, сложение сил производится по правилу параллелограмма и т.д. В архитектуре и строительстве четырёхугольники и их свойства также широко применяются

ТЕМА 5.1-5.2 Начальные понятия геометрии. Четырехугольники

ПОДСТАНДАРТЫ	7-3.3.1. Различает выпуклые и невыпуклые четырехугольники. 7-3.3.2. Применяет свойства внутренних и внешних углов четырёхугольников.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет первоначальные понятия геометрии. • Объясняет различие между понятием аксиомы и теоремой. • На примере свойства внешнего угла треугольника объясняет прямую и обратную теоремы. • Различает выпуклые и вогнутые четырёхугольники. • Применяет свойства внутренних и внешних углов четырёхугольника при решении задачи.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, рабочая тетрадь
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение 5.1 *https://youtu.be/SZwNzhKQPGU* , *https://www.desmos.com/geometry* Задание: *https://www.geogebra.org/geometry*, *https://www.geogebra.org/m/jtmzus8d* *https://www.geogebra.org/m/a3asarsq* Изучение 5.2*https://demonstrations.wolfram.com/ATestForTheConvexityOfAQuadrilateral* *https://www.mathspad.co.uk/interactives/interiorExteriorAnglesTool/exteriorTool2.php* *https://phet.colorado.edu/sims/html/quadrilateral/latest/quadrilateral_all.html?locale=az* Задание: *https://www.geogebra.org/m/hdwawtne* , *https://www.geogebra.org/m/ncykVxTJ*

Тема 5.1 «Первоначальные понятия геометрии» носит вводный характер для общего курса геометрии средней школы. В данной теме даётся информация об истории возникновения геометрии и её основных понятиях. Для последующего более серьёзного изучения геометрических тем очень важно дать сведения о математических утверждениях. В продолжении темы даётся информация об аксиоме, теореме и обратной теореме, а также приводятся примеры. Подчёркивается значение доказательства утверждений в геометрии и вообще в математике, формируется первоначальное представление о том, как проводится доказательство.

Поскольку тема «Первоначальные понятия геометрии» тесно связана со всеми последующими геометрическими темами, важно уделить ей особое внимание. Поэтому последовательное и взаимосвязанное преподавание двух тем (5.1 и 5.2) является более целесообразным. Хотя в учебнике темы даны отдельно, в годовом планировании и таблице реализации стандартов они рассматриваются как одна общая тема и на их изучение предусматривается 4 академических часа.

Обсуждение исходной задачи

На первой странице раздела обсуждается материал о значении четырёхугольников в строительстве, архитектуре, градостроительстве и геодезии, в образцах декоративного искусства, а также задача, предложенная как первоначальная проблема. Обсуждается нахождение второй диагонали ромбовидного узора на ковре, если известны его площадь и длина одной из диагоналей, а также углы между сторонами. На первом уроке ответы могут быть неполными, поскольку некоторые сведения о ромбе ещё не известны ученикам.

ТЕМА 5.1. Начальные понятия геометрии

Побуждение

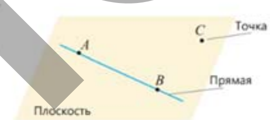
С учениками рассматриваются различные геометрические фигуры среди предметов в классе, обсуждаются формы стен, пола, дверей и окон, книг, доски, фигур на стене. Отрезки и вершины, образующие эти фигуры, отмечаются учениками.

Исследование-обсуждение

Задания, представленные в исследовательской части, выполняются учениками. Целью является знакомство учеников с аксиомами о прямой. На листе или на доске отмечается точка, высказывается мнение о количестве прямых, проходящих через эту точку. Затем проводится прямая через две точки, вместе с учениками обсуждается её единственность. Из точки, не лежащей на прямой, проводятся прямые, пересекающие или не пересекающие данную прямую, и выслушиваются мнения о их количестве.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания:
https://www.geogebra.org/m/a3asarsq *https://www.geogebra.org/m/nhebw3qp*
https://www.geogebra.org/m/gtwxtmmn

Изучение Геометрические фигуры и основные понятия

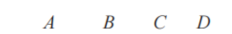


Даётся информация о возникновении науки геометрии и о геометрических фигурах. Отрезок, окружность, треугольник, четырёхугольник, кубоид, призма и др. геометрические фигуры доводятся до внимания учеников. Пространственные и плоские фигуры могут быть наглядно продемонстрированы ученикам. Показывается с помощью простых моделей (нить, лист бумаги, след мела и т.д.), что точка, прямая и плоскость являются первоначальными неопределяемыми понятиями геометрии, при этом отмечается их бесконечность и отсутствие толщины. С помощью этих понятий доводится определение отрезка.

К сведению учителя! Учитель может также обсудить с учениками определения луча, угла, окружности и других простых фигур в форме вопрос–ответ. При формулировке этих определений обращается внимание на использование первоначальных понятий. Учитель должен стремиться к тому, чтобы ученики поняли, что каждому новому понятию в геометрии даётся определение с помощью ранее известных понятий.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания:
https://www.geogebra.org/m/pd7B9Y97,
https://media.pearsoncmg.com/intl/pec/school/mathtv2/global/pcmg/math_tools/geometry2d/index.html

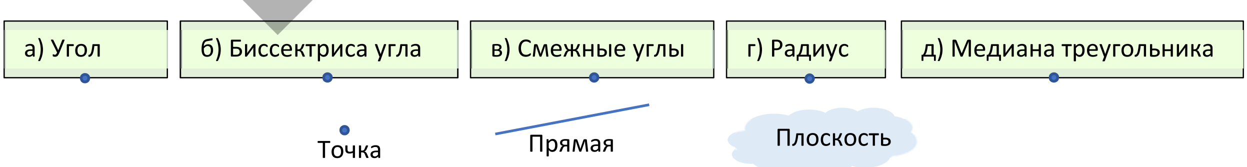
Задания



1. а) Объясняется по рисунку, что каждая точка, лежащая на прямой, образует два луча с началом в этой точке. Ученики, указывая названия лучей, определяют их количество. Точки A, B, C и D образуют 8 лучей.

б) Известно, что две точки на прямой вместе с внутренней частью образуют отрезок. Отрезки, образованные попарно точками A, B, C и D: AB, AC, AD, BC, BD и CD.

2. В этом задании вспоминаются известные ученикам определения угла, биссектрисы угла, смежных углов, радиуса и медианы треугольника. Обращается внимание и обсуждается, какие первоначальные понятия использованы в этих определениях. Для наглядности полезно использовать схему. После формулировки определения ученики соединяют линиями понятия, использованные в нём.



Изучение Аксиома

Целесообразно дать дополнительную информацию об истории возникновения геометрии. Обсуждается труд древнегреческого учёного Евклида «Начала» (The Elements), жившего в III веке до нашей эры, и предложенные им 5 постулатов. Информацию о постулатах можно узнать из интернет страниц:
https://youtu.be/K6R4MHB2wlM , *https://youtu.be/gLMIFRLw9LU*

Учитель даёт сведения об аксиоме. Аксиомы, приведённые в учебнике, доводятся до внимания учеников. Можно также объяснить и другие аксиомы Евклида. У учеников может возникнуть вопрос, почему аксиома не доказывается? Аксиомы считаются основными утверждениями, на их основе формулируются леммы, теоремы и другие утверждения, создаются более сложные теории.

Запомни!

В задачах единицы длины чаще всего указываются, однако в геометрических задачах иногда единица длины не приводится, и длина записывается только числом. Например, AB = 12, BC = 20 v и т.д. Следует довести до внимания учеников, что если единица длины не указана, то предполагается, что все длины выражены в одной и той же единице, и при вычислениях единица не учитывается. В таких задачах основное внимание уделяется способу решения.

3. На прямой даны точки A, B и C, известно, что AB = 5, AC = 7 и BC = 12. В задании спрашивается, какая из данных точек расположена между двумя другими. Рассматриваются различные случаи. Ученики, располагая данные точки на прямой в разных положениях, решают задание.

$AC \neq 7$ $\quad BC = 12$ $\quad AB \neq 5$

По каждому случаю выслушиваются мнения учеников. Согласно положению на втором рисунке определяется, что точка A расположена между точками B и C.

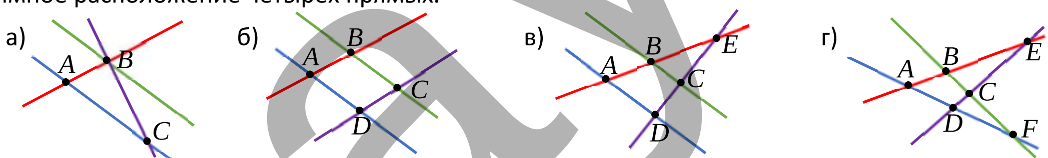
4. Точки A, B и C располагаются на одной прямой в различных положениях. На основании данных определяется, что эти точки не лежат на одной прямой. Так как ни в одном из трёх случаев длина отрезка AC не равна сумме двух других отрезков.

$AB + BC \neq 22$ $\quad AB + AC \neq 30$ $\quad AC + BC \neq 18$

5. По условию ни в одном случае сумма двух отрезков не равна третьему отрезку. Если бы эти точки лежали на одной прямой, сумма двух из них была бы равна третьему. Точки A, B и C не лежат на одной прямой.

К сведению учителя! Ученики иногда путают аксиому с теоремой или определением. Поэтому сначала необходимо объяснить понятие «математическое утверждение». Целесообразно объяснить, как в каждом утверждении выделять условие и заключение.

7. Это задание может выполняться в группах. Каждая группа на основе условия в данном пункте описывает взаимное расположение четырёх прямых.



а) У четырёх прямых есть 3 точки пересечения: две из прямых параллельны, а три пересекаются в одной точке.

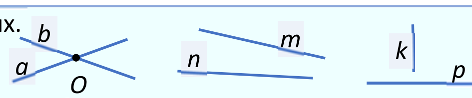
б) У четырёх прямых есть 4 точки пересечения: прямые попарно параллельны, и каждая прямая пересекает две другие.

в) У четырёх прямых есть 5 точек пересечения: две из прямых параллельны, а две другие пересекаются.

г) У четырёх прямых есть 6 точек пересечения: каждая из прямых пересекает остальные три.

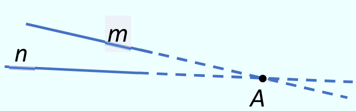
Ложные представления, возникающие у учеников. Ученики иногда допускают ошибки, определяя, пересекаются ли прямые, опираясь на их изображение. Они должны учитывать, что прямые бесконечны, и даже если на рисунке не видно их пересечения, нужно представить их продолжения (если это возможно) и понимать, что они пересекаются.

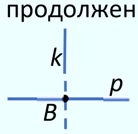
Определите взаимное расположение данных прямых.



Ложно Прямые a и b, данные на рисунке, пересекаются, так как у них есть точка пересечения: точка O. Прямые m и n, а также k и p не пересекаются, так как у этих прямых нет точки пересечения.

Верно Каждая пара прямых a и b, m и n, k и p, данных на рисунке, пересекается. Хотя на рисунке не видно точки пересечения прямых m и n, k и p, их продолжения пересекаются.





![Изучение] **Теорема**

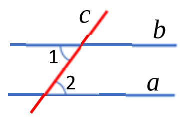
Учитель объясняет понятие «теорема» и раскрывает её сущность. Даётся информация об условии и заключении теоремы. С учениками обсуждается вопрос «Почему теорема доказывается?», подчёркивается, что математика основывается не на предположениях, а на строгих доказательствах.
При доказательстве приведённой в учебнике теоремы обсуждается каждое рассуждение, разъясняются условие и заключение. Комментируются понятия «следствие» и «обратная теорема», получаемые из теоремы. Различие между аксиомой и теоремой может быть объяснено учениками при поддержке учителя. При доказательстве теоремы полезно использовать интерактивную деятельность:
https://www.mathspad.co.uk/interactives/interiorExteriorAnglesTool/exteriorTool2.php

9. В этом задании формулируются обратные утверждения к данным. Обсуждается истинность самого утверждения и его обратного.

а) Утверждение

Условие: $a \| b$ и c секущая.

Заключение: $\angle 1 \cong \angle 2$.



Обратное утверждение

Условие: c секущая и $\angle 1 \cong \angle 2$

Заключение: $a \| b$.

б) Утверждение

Условие: $(a + b + ... + c) : 3 = n$.

Заключение: $\overline{ab\ldots c} : 3 = m$

n и m натуральные числа.

Обратное утверждение

Условие: $\overline{ab\ldots c} : 3 = k$

Заключение: $(a + b + ... + c) : 3 = q$

k и q натуральные числа.

Дифференцированное обучение
Поддержка. Ученикам предлагаются утверждения: “ Если $a = b$, то $a^2 = b^2$”, “если $a = b$, то $a^3 = b^3$”.
Запишите обратные утверждения и обоснуйте, верны они или нет.
Углубление. «У равнобедренного треугольника углы при основании равны», «Сумма смежных углов равна 180°». Докажите эти теоремы и обоснуйте, верны ли их обратные утверждения.

Ложные представления, возникающие у учеников. Ученики иногда заучивают теорему, но забывают, почему она верна и как она доказывается, не понимают важности доказательства. Иногда они путают условие и заключение в теореме или каком-либо утверждении, а иногда считают, что если теорема или утверждение верны, то верно и обратное утверждение. Однако целесообразно обосновывать на примерах, что обратное утверждение не всегда верно.

Запишите обратное утверждение и объясните, верно оно или нет: «Если число делится на 6, то оно делится и на 3».

Ложно Обратное утверждение: «Если число делится на 3, то оно делится и на 6». Это утверждение верно, так как является обратным к предыдущему утверждению.

Верно Обратное утверждение: «Если число делится на 3, то оно делится и на 6». Это утверждение неверно, так как для делимости числа на 6 оно должно делиться также на 2. Однако не все числа, делящиеся на 3, делятся на 2. Например, числа 15, 21, 33 и т.д. делятся на 3, но не делятся на 6.

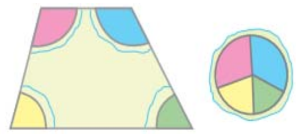
ТЕМА 5.2. Четырёхугольники

Побуждение

Обсуждаются предметы вокруг, имеющие форму четырёхугольника, задаются вопросы о форме и свойствах этих предметов: «Какую форму имеет этот предмет?», «Покажите его стороны, вершины, углы», «Назовите сходства и различия форм фигур» и т.д. Мнения учеников обсуждаются.

Исследование-обсуждение

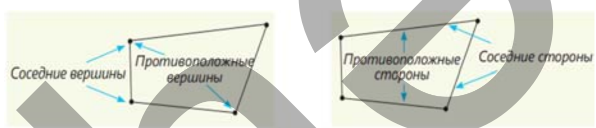
Учитель предлагает ученикам начертить трапецию на плотной бумаге. Углы этой трапеции вырезаются так, как показано на рисунке. При вырезании углов учитывается равенство длин соответствующих сторон. Вырезанные углы размещаются так, чтобы их вершины совпадали, как показано на рисунке. Выслушиваются мнения учеников о сумме полученных углов



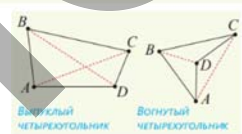
В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/wsw69srk *https://www.geogebra.org/m/SwA5Q8jx*

Изучение Четырёхугольник

Целесообразно, чтобы учитель, изображая на доске материал, приведённый в учебнике, сопровождал его объяснением



Ученики рассматривают различные случаи соединения четырёх данных точек последовательными отрезками. Обсуждается, чем полученные четырёхугольники отличаются друг от друга.
Учитель даёт информацию о выпуклых и вогнутых четырёхугольниках и их отличительных особенностях.



К сведению учителя! При предоставлении информации о четырёхугольниках целесообразно наряду с выпуклыми четырёхугольниками подробно давать сведения и о вогнутых четырёхугольниках. Полезно предоставить информацию о сторонах, вершинах, углах, диагоналях и т.д. вогнутого четырёхугольника или провести обсуждение по этому поводу с учениками. В качестве примера можно сказать, что вогнутый четырёхугольник похож на бумеранг или на наконечник стрелы, копья.

В классах с техническими возможностями полезно использовать интерактивную деятельность:
https://phet.colorado.edu/sims/html/quadrilateral/latest/quadrilateral_all.html?locale=az
https://www.geogebra.org/m/epyr943a, https://www.geogebra.org/m/ujzzdcst

Задания

1. При решении этого задания можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/ncykVxTJ
2. Ученики показывают требуемые элементы четырёхугольника. Задавая дополнительные вопросы, можно спросить у учеников и другие элементы четырёхугольника.

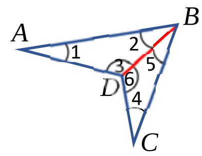
Изучение Сумма углов четырёхугольника

Каждый внутренний угол меньше 180°. Один внутренний угол больше 180°.

При предоставлении информации ученикам об угле, образованном между соседними сторонами четырёхугольника, обращается внимание на то, что этот угол называется внутренним углом, и обычно, говоря об угле четырёхугольника, подразумевают его внутренний угол. Совместно с учениками исследуются внутренние углы выпуклых и вогнутых четырёхугольников, обращается внимание на то, что они могут быть больше или меньше 180°. Теорема о сумме углов четырёхугольника доказывается вместе с учениками.

К сведению учителя! Объяснение доказательства теорем и утверждений в темах по геометрии и их обсуждение с учениками имеет особое значение. Во время доказательства целесообразно вместе с учениками обсуждать причинно-следственную связь, построение логической последовательности рассуждений и обоснование каждого следующего утверждения на каждом этапе. Объяснение доказательства каждой теоремы способствует формированию у учеников навыков самостоятельного решения задач на доказательство.

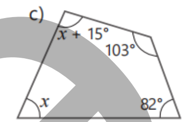
Подумай!



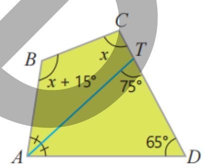
Теорема о сумме углов четырёхугольника доказывается для вогнутых четырёхугольников. Целесообразно, чтобы это доказательство ученики выполнили самостоятельно. Для этого проводится диагональ (диагональ BD), расположенная внутри четырёхугольника, и на основании суммы внутренних углов полученных треугольников ABD и BDC доказывается, что сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.

$(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5 + \angle 6) = 180° + 180° = 360°$

$\angle 1 + (\angle 2 + \angle 5) + \angle 4 + (\angle 3 + \angle 6) = 360° \rightarrow \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.

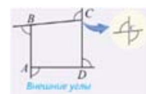


4. В этом задании, как и в приведённом примере, составляется уравнение и, решив его, определяется неизвестный угол. в) $82° + 103° + x + 15° + x = 360° \rightarrow x = 80°$



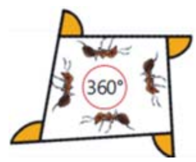
5. в) По данным, приведённым на рисунке, находятся требуемые углы. Используя теорему о сумме углов четырёхугольника, записывается уравнение. В треугольнике ADT $\angle DAT = 180° - (75° + 65°) = 40°$. Поскольку AT биссектриса, то $\angle BAD = 80°$.
Тогда из уравнения $80° + 65° + x + 15° + x = 360°$ получаем $x = 100°$.
Следовательно, $\angle BAD = 80°$, $\angle C = 100°$, $\angle B = 115°$.

Запомни!



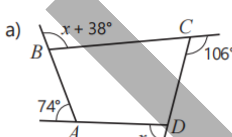
Внешние углы выпуклого четырёхугольника показываются ученикам на рисунке, объясняются их свойства. Обращается внимание на то, что под внешним углом подразумевается один из таких углов при каждой вершине.

Подумай!

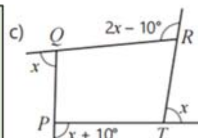


Вопрос, приведённый в учебнике под заголовком «Подумай», исследуется учениками. Известно, что муравей, двигаясь вдоль стороны четырёхугольника, в каждом углу поворачивает на величину внешнего угла и продолжает путь. Все повороты в четырёх углах вновь возвращают муравья к первоначальному направлению, то есть муравей совершает полный оборот. Поскольку полный оборот равен 360°, то и сумма внешних углов равна 360°. Здесь полезно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/buve6wpf
https://www.mathspad.co.uk/interactives/interiorExteriorAnglesTool/exteriorTool2.php

7. Учитель по данным может поручить ученикам в форме групповой или парной работы найти градусные меры внешних и внутренних углов четырёхугольника.

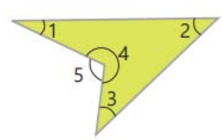


$74° + x + 38° + 106° + x = 360°$
$2x = 142° \rightarrow x = 71°$
Внешние углы:
74°, 71°, 106°,109°.
Внутренние углы:
106°,109°, 74°, 71°.



$x + 2x - 10° + x + x + 10° = 360°$
$5x = 360° \rightarrow x = 72°$
Внешние углы:
72°, 82°, 72°, 134°.
Внутренние углы:
108°, 98°, 46°, 108°

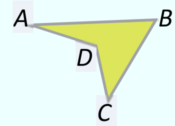
8. Дано, что градусные меры внутренних углов выпуклого четырёхугольника находятся в отношении 3 : 4 : 5 : 6. Учитель направляет внимание учеников на знания об отношении. Ученики, исходя из правила деления целого в заданном отношении, выражают градусные меры внутренних углов как $3k$, $4k$, $5k$ и $6k$ и составляют уравнение.
$3k + 4k + 5k + 6k = 360° \rightarrow k = 20°$. Следовательно, внутренние углы этого четырёхугольника равны 60°, 80°, 100°, 120°, а внешние углы соответственно равны 120°, 100°, 80°, 60°.



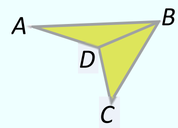
9. Чтобы доказать, что в невыпуклом четырёхугольнике $\angle 5 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ о учитывается, что сумма градусных мер $\angle 4$ и $\angle 5$, приведённых на рисунке, равна 360°.
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360°$. Здесь учитывается, что $\angle 4 = 360° - \angle 5$.
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + 360° - \angle 5 = 360° \rightarrow \angle 5 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

Ложные представления, возникающие у учеников. Ученики в вогнутом четырёхугольнике ошибочно принимают угол $\angle 4$ не как внутренний угол, а угол $\angle 5$ — как внутренний. Некоторые ученики также считают, что при проведении диагоналей в вогнутом четырёхугольнике, как и в выпуклом, получается два треугольника. Для устранения таких неверных представлений целесообразно отдельно показать каждый внутренний угол, а также визуально изобразить, что диагональ, расположенная вне вогнутого четырёхугольника, образует треугольник, не принадлежащий этому четырёхугольнику.

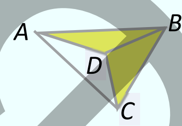
Проведите диагонали данного четырёхугольника. На основе того, принадлежат ли полученные треугольники этому четырёхугольнику, определите, является ли он выпуклым или вогнутым.



Ложно Четырёхугольник ABCD: соединяются вершины B и D, проводится диагональ BD. Полученные треугольники ABD и BDC принадлежат четырёхугольнику. Следовательно, четырёхугольник ABCD является выпуклым.

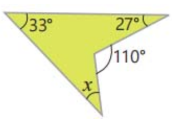


Верно Соединяются вершины четырёхугольника B и D, проводится диагональ BD. Полученные треугольники ABD и BDC принадлежат четырёхугольнику. Однако затем соединяются вершины A и C и проводится диагональ. Полученные треугольники ADC и ABC не принадлежат четырёхугольнику.



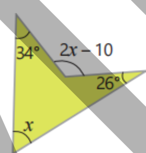
10. Учитель может дать ученикам самостоятельное задание — найти градусную меру неизвестного угла по данным, приведённым на рисунке. Здесь обращается внимание на использование утверждения, доказанного в предыдущем задании.

b)



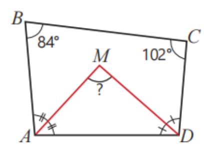
$33° + 27° + x = 110°$
$x = 110° - 60° \rightarrow x = 50°$

c)



$34° + 26° + x = 2x - 10°$
$x = 70°,\ 2x - 10° = 130°$

11. В этом задании требуемые величины находятся поэтапно. Учитель должен направить внимание учеников на то, что ответ на каждый следующий вопрос является продолжением ответа на предыдущий вопрос.



• Известно, что сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника ABCD равна 360°. Тогда можно записать $84° + 102° + \angle A + \angle D = 360°$. Отсюда получаем $\angle A + \angle D = 174°$.

• Поскольку AM и DM — биссектрисы, угол MAD равен половине угла A, а угол MDA — половине угла D. Тогда $\angle MAD + \angle MDA = (\angle A + \angle D) : 2 = 87°$.

• Учитывается, что сумма внутренних углов треугольника равна 180°: $\angle M = 180° - (\angle MAD + \angle MDA) = 93°$.

Дифференцированное обучение

Поддержка. Ученикам предлагаются карточки с изображёнными четырёхугольниками, им поручается определить, являются ли они выпуклыми или вогнутыми. Ответы обосновываются.

Углубление. Ученикам поручается начертить такой четырёхугольник, чтобы его диагонали пересекались или не пересекались. Объясняется, в каком случае диагонали не пересекаются. Исследуются вопросы: «Разделяет ли диагональ вогнутый четырёхугольник на два треугольника? Почему?»

Решение задач

13. Как видно из рисунка, улицы пересекаются в форме выпуклого четырёхугольника. Ученики решают задачу, используя теорему о сумме внутренних углов четырёхугольника.

• На пересечении улиц «Чинарлы» и «Нарлы» образуются четыре угла, причём вертикальные углы равны. Эти углы являются внутренними и внешними углами четырёхугольника, образованного при пересечении. При нахождении внутреннего угла из 360° вычитается сумма остальных внутренних углов:

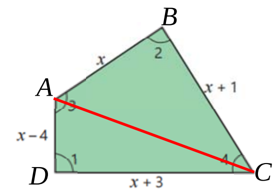
$360° - (74° + 68° + 90°) = 128°$. Другой угол, полученный на пересечении улиц «Чинарлы» и «Нарлы», равен 52°

• Автомобиль красного цвета должен повернуть направо на улицу «Кондалан» под углом $180° - 74° = 106°$.

• Автомобиль жёлтого цвета поворачивает налево на улицу «Чичекли» под углом $180° - 68° = 112°$.
Здесь обращается внимание на то, что поворот осуществляется на величину внешнего угла.

14. Дано, что периметр игровой площадки в форме четырёхугольника равен 24 м. Сначала по периметру составляется уравнение и находится x:

$x - 4 + x + 3 + x + 1 + x = 24 \to x = 6$.



• Длины сторон площадки равны: 2 м, 9 м, 7 м и 6 м.

• Используется сумма внутренних углов четырёхугольника:

$\angle 3 + \angle 4 + \angle 1 + \angle 2 = 360°$. Если учесть, что $\angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ и $\angle 1 = \angle 2$, то $2(\angle 1 + \angle 2) = 360° \to 4 \cdot \angle 1 = 360° \to \angle 1 = 90°$.

Следовательно, $\angle 1 = \angle 2 = 90°$.

• Чтобы найти площадь площадки, соединяются вершины A и C и находятся площади полученных прямоугольных треугольников ABC и ADC, которые затем складываются: $S = (2 \cdot 9 : 2) + (6 \cdot 7 : 2) = 30$.

Ответ: 30 м^2.

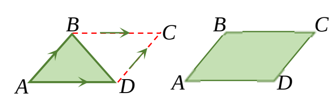
Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Объясняет, что точка, прямая линия и плоскость являются первоначальными понятиями.	Учебник
Комментирует различие между аксиомой и теоремой, приводя примеры аксиом.	Учебник, РТ
Приводит примеры прямых и обратных теорем.	Опрос, учебник
Различает выпуклые и вогнутые четырёхугольники, называя их свойства.	Учебник, РТ
Решает задачу на применение свойств четырёхугольника.	Учебник, РТ, рабочие листы

ТЕМА 5.3. Параллелограмм

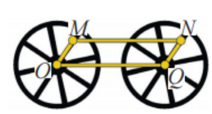
ПОДСТАНДАРТЫ	7-3.3.3. Применяет свойства параллелограмма, ромба, прямоугольника, квадрата и трапеции.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Применяет свойства сторон и углов параллелограмма. • Применяет свойства диагоналей параллелограмма. • Объясняет признаки параллелограмма.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, рабочая тетрадь
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/dKeHAUE3, https://youtu.be/TErJ-Yr67BI* *https://phet.colorado.edu/sims/html/quadrilateral/latest/quadrilateral_all.html?locale=az* Задание: *https://nrich.maths.org/problems/parallelogram-it* *https://nrich.maths.org/content/id/15164/Parallelogram%20It%20printable%20sheet.pdf* *https://media.pearsoncmg.com/intl/pec/school/mathtv2/global/pcmg/math_tools/geometry2d/index.html*

Побуждение



Учитель представляет ученикам на доске треугольник ABD. Ученикам поручается из вершин B и D этого треугольника провести отрезки, параллельные соответственно сторонам AD и AB. Учитель обращается к классу с вопросами: «Каково взаимное расположение сторон полученной фигуры?», «Равны ли длины сторон этой фигуры? Почему?», «Как называется полученная фигура?» и т.д.

Исследование-обсуждение



На радиусах колёс, изображённых на рисунке, показаны равные по длине отрезки OM и QN. Стержень MN, равный расстоянию OQ, приводит колесо в движение. Ученики исследуют взаимное расположение отрезков MN и OQ и, исходя из конгруэнтности и параллельности отрезков OM и QN, обосновывают параллельность отрезков MN и OQ.

Изучение Параллелограмм

После побуждения и исследования учитель даёт информацию о параллелограмме, обращает внимание на его определение, расположение сторон и то, что он является выпуклым четырёхугольником. Рисуя параллелограмм, учитель должен изображать его в различных положениях, чтобы ученики могли распознавать параллелограмм в любом виде.

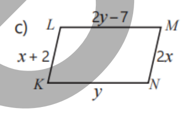
Обращается внимание на теорему о свойствах противоположных сторон и противоположных углов параллелограмма. Теорема доказывается вместе с учениками на основе признака конгруэнтности треугольников и свойства внутренних накрест лежащих углов. В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:

https://video.edu.az/video/5442, https://video.edu.az/video/4757

Подумай!

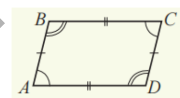
Обсуждается вопрос, приведённый в учебнике под заголовком «Подумай». Ученики обосновывают, что сумма прилежащих к одной стороне углов параллелограмма равна 180°. Здесь используется факт, что при пересечении двух параллельных прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

Задания



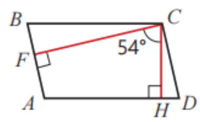
3. в) По данным, приведённым на рисунке, ученики находят стороны параллелограмма и его периметр. Используя свойство конгруэнтности противоположных сторон параллелограмма, по данным составляется уравнение.

$x + 2 = 2x \rightarrow x = 2$ и $2y - 7 = y \rightarrow y = 7$. Стороны параллелограмма равны 7 и 4, а периметр равен удвоенной сумме соседних сторон: $P = 2(4+7) = 22$.

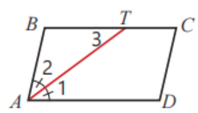


4. В этом задании по данным определяются углы параллелограмма ABCD. Учитель должен направить внимание учеников на свойства углов параллелограмма и при необходимости напомнить их.

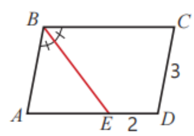
а) Используется факт, что сумма двух соседних углов параллелограмма равна 180°. На основании условия $\angle A : \angle D = 5 : 7$, принимается, что $\angle A = 5k$, $\angle D = 7k$. Из уравнения $5k + 7k = 180°$ находят переменную k и углы: $k = 15$, $\angle A = 75°$, $\angle D = 105°$.



5. В пункте в) этого задания проводится исследование по рисунку. На основе суммы внутренних углов четырёхугольника $AFCH$ и углов AFC, AHC определяется, что $\angle A = \angle BCD = 126°$ и $\angle B = \angle D = 54°$.



6. Требуется обосновать, что треугольник ABT, образованный биссектрисой угла параллелограмма, является равнобедренным. Учителю целесообразно уделить внимание исследованию этого задания, так как ученики иногда неверно понимают образование равнобедренного треугольника в данной ситуации. Здесь на основе свойства внутренних накрест лежащих углов и конгруэнтности углов, прилежащих к стороне AT в треугольнике, обосновывается, что треугольник ABT равнобедренный.



7. В этом задании требуется применение утверждения, обоснованного в предыдущем задании. Учитель может поручить ученикам самостоятельно найти требуемые величины по данным рисункам.

В пункте в) по данным на рисунке $AB = DC = 3$. Так как ΔABE равнобедренный, $AE = AB = 3$. Тогда $BC = AD = 5$.

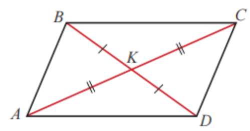
К сведению учителя! Иногда ученики, проводя биссектрису угла параллелограмма, считают, что в образовавшемся равнобедренном треугольнике одной из боковых сторон является BE. Для устранения такого ошибочного представления ученики должны уметь правильно определять внутренние накрест лежащие углы между двумя параллельными прямыми и секущей, а также прилежащие к основанию углы и боковые стороны в равнобедренном треугольнике.

Дифференцированное обучение

Поддержка. Ученикам предлагаются карточки с изображёнными параллелограммами. При задании двух соседних сторон и одного из углов поручается найти остальные стороны, периметр или углы. Ответы обосновываются.

Углубление. Ученикам предлагаются карточки с изображениями параллелограммов, в которых дан какой-либо внешний угол. Поручается определить внутренние углы параллелограмма. Ответы обосновываются.

Учитель обращает внимание учеников на теорему о свойствах диагоналей параллелограмма (теорема 4). Доказательство теоремы приведено в задании 10. Доказательство завершается учениками на основе признака конгруэнтности треугольников и свойства внутренних накрест лежащих углов. В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность: *https://youtu.be/TErJ-Yr67BI*

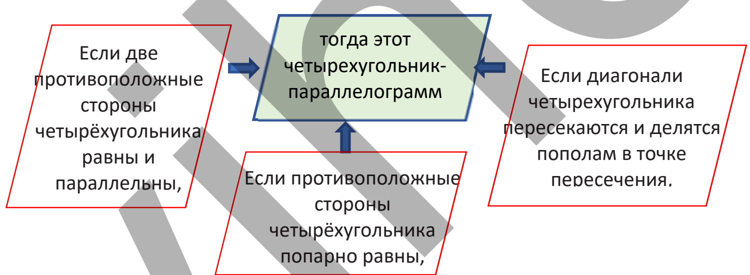


9. Это задание выполняется в параллелограмме $ABCD$ с применением свойства диагоналей по данным.
а) Из условия AC = 12 см, BD = 8 см учитывается, что $AK = CK$ = 6 см и $BK = DK$ = 4 см. Так как $CD = AB$ = 5 см, то $P_{\Delta ABK}$ = 15 см.
б) Известно, что периметр параллелограмма $ABCD$ равен 28 см, а периметр треугольника ACD равен 25 см.
В этом случае $AD + CD$ = 28 : 2 = 14 (см). Тогда AC = 25 – 14 = 11 (см).

10. Незавершённое доказательство теоремы о свойствах диагоналей параллелограмма завершается учениками. По свойству конгруэнтности противоположных сторон параллелограмма отмечается, что $BC \cong AD$, а по признаку СУС доказывается конгруэнтность треугольников ΔAKD и ΔCKB, следовательно $AK \cong CK$, $KD \cong KB$.

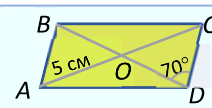
Запомни!

Признаки параллелограмма доводятся до сведения учеников и обсуждаются. Ещё раз объясняются понятия «признак» и «свойство», обосновывается, почему каждое утверждение является признаком параллелограмма.
Для правильного распознавания параллелограмма можно поручить ученикам определить сходства и различия между четырёхугольником и параллелограммом.



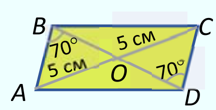
Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики ошибочно считают, что диагонали параллелограмма конгруэнтны или что диагональ делит углы пополам. Подробное обсуждение свойств диагоналей и их правильное изображение предотвращает появление таких ошибок. Следует обратить внимание на случаи, когда диагонали конгруэнтны или когда диагональ является биссектрисой.

По данным найдите возможную длину диагонали параллелограмма и градусные меры его углов.

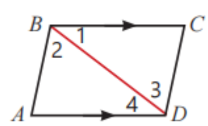


Ложно Поскольку диагонали параллелограмма ABCD делятся пополам в точке пересечения, AC = 10 см.
Так как диагонали конгруэнтны, BD = AC = 10 см.
Так как диагонали являются биссектрисами, $\angle ADB = \angle BDC = 70°$.
Тогда $\angle ADC = 140°$, а $\angle BAD = 180° – 140° = 40°$.

Верно Поскольку диагонали параллелограмма ABCD делятся пополам в точке пересечения, AC = 10 см. Поскольку диагонали не конгруэнтны, длина диагонали BD не определяется. Так как BD секущая, а AB и CD параллельные отрезки, то на основании равенства внутренних накрест лежащих углов между параллельными и секущей $\angle ABD = \angle BDC = 70°$.



12. Задание относится к доказательству одного из признаков параллелограмма. В четырёхугольнике $ABCD$ $BC \cong AD$, $BC \cong AD$ и BD диагональ. Отвечая на вопросы, ученики доказывают, что четырёхугольник является параллелограммом.



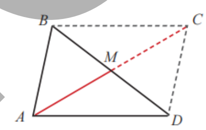
- Поскольку $BC \parallel AD$ и BD секущая, по свойству внутренних накрест лежащих углов ∠1 ≅∠4.
- По признаку конгруэнтности треугольников СУС: $\Delta CBD \cong \Delta ADB$.
- Из $\Delta CBD \cong \Delta ADB$ следует конгруэнтность соответствующих углов ∠2 ≅∠3.

• Согласно свойству внутренних диагональных углов, утверждается, что AB || CD.
Таким образом, на основании вышеуказанного по определению доказывается, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом.

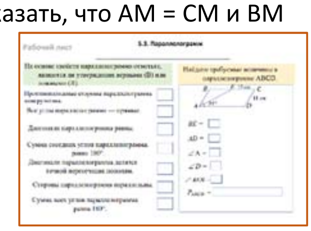
К сведению учителя! Иногда ученики считают, что для доказательства того, что данный четырёхугольник является параллелограммом, необходимо выполнение всех признаков. При доказательстве ученики могут испытывать трудности в построении логики «достаточного условия». Важным является и понятие «минимального условия»: ученики могут терять время, пытаясь одновременно проверить все свойства фигуры (стороны, углы и т.д.). Им следует объяснить, что выполнение только одного из признаков (например, только попарной конгруэнтности противоположных сторон или того, что одна пара сторон одновременно параллельна и конгруэнтна) достаточно для того, чтобы фигура была параллелограммом.

Дифференцированное обучение
Поддержка. Ученикам предлагается изображённый на карточке параллелограмм. Если известна половина длины диагонали, поручается найти длину диагонали. Ученики проверяют ответы друг друга.
Углубление. Ученикам предлагаются карточки с изображениями нескольких параллелограммов, в которых даны углы между диагональю и сторонами. Поручается найти углы параллелограмма.

К сведению учителя! При изучении признаков параллелограмма ученики часто путают связь между параллельностью и конгруэнтностью сторон. Одно из ошибочных представлений заключается в том, что ученики считают достаточным для параллелограмма, если одна пара сторон параллельна, а другая — конгруэнтна. В качестве контрпримера можно привести равнобедренную трапецию. Целесообразно на рисунке объяснить ученикам, что для того чтобы четырёхугольник был параллелограммом, противоположные стороны должны быть попарно и параллельны, и конгруэнтны.



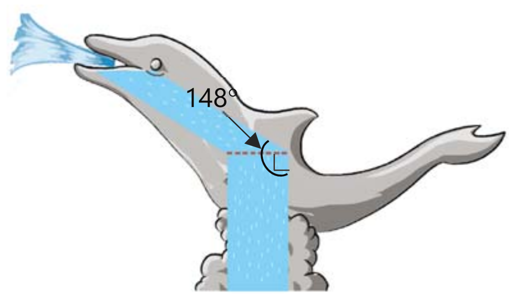
14. В данном треугольнике ABD медиана AM продолжена на свою длину, полученная точка C соединяется с вершинами B и D. В этом случае для обоснования того, что полученный четырёхугольник ABCD является параллелограммом, достаточно показать, что AM = CM и BM = DM. Отмечается, какой признак параллелограмма при этом выполняется.



Практическое задание: Класс делится на группы, и каждой группе раздаются рабочие листы. В рабочих листах даны задания, выполняемые на основе свойств параллелограмма. Для других групп подготавливаются аналогичные рабочие листы. В рабочие листы можно добавить случай, когда биссектриса угла параллелограмма равна диагонали.
Рабочий лист можно скачать по ссылке:
https://drive.google.com/file/d/1p2LOkjT0Aud6tXXWTqOLw7JwxepmpgrF/view?usp=sharing

Решение задач

15. По условию задачи мастер выкладывает светло-голубые плитки в форме параллелограмма, а также синие и голубые плитки квадратной формы, как показано на рисунке. Известно, что периметр большого квадрата равен 40 см, значит его сторона равна 10 см. Периметр малого квадрата равен 24 см, следовательно его сторона равна 6 см.
• Стороны квадратов соответственно равны сторонам параллелограмма.
Следовательно, периметр параллелограмма
$P = 2(10 + 6) = 32$ (см).
• По рисунку углы параллелограмма равны $160° – 90° = 70°$ и $180° – 70° = 110°$.



16. По рисунку обращается внимание, что боковой вид труб внутри фонтана в форме дельфина имеет форму прямоугольника и параллелограмма. Сумма угла при вершине A параллелограмма и угла при вершине прямоугольника равна 180°. Тогда углы параллелограмма $148° – 90° = 58°$ и $180° – 58° = 122°$.

Формативное оценивание

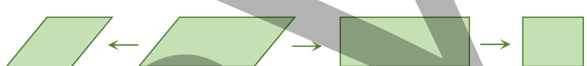
Критерии оценивания	Материалы оценивания
Обосновывает, что противоположные стороны и противоположные углы параллелограмма конгруэнтны, и применяет это при решении задачи.	Рабочие листы, учебник, РТ
Обосновывает, что диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, и применяет это при решении задачи.	Рабочие листы, учебник, РТ
Доказывает, что данный четырёхугольник является параллелограммом на основании признаков параллелограмма.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 5.4. Виды параллелограммов. Прямоугольник, ромб, квадрат

ПОДСТАНДАРТЫ	7-3.3.3. Применяет свойства параллелограмма, ромба, прямоугольника, квадрата и трапеции.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• По признакам различает виды параллелограмма. • Объясняет сходные и отличительные признаки видов параллелограмма.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, рабочая тетрадь
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/hdwawtne* *https://phet.colorado.edu/sims/html/quadrilateral/latest/quadrilateral_all.html?locale=az* Задание: *https://nrich.maths.org/problems/parallelogram-it* *https://media.pearsoncmg.com/intl/pec/school/mathtv2/global/pcmg/math_tools/geometry2d/index.html*

Побуждение

Учитель, изображая стороны параллелограмма в различных положениях, как на рисунке, представляет ученикам его виды.



По внешнему виду каждой формы выслушиваются мнения учеников, проводится обсуждение сторон и углов фигур. Из окружающих предметов приводятся примеры этих форм.

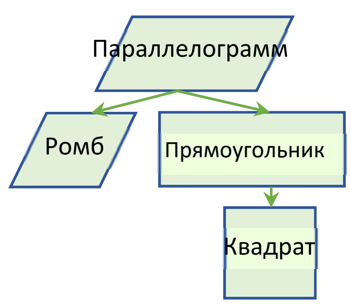
В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность.
https://phet.colorado.edu/sims/html/quadrilateral/latest/quadrilateral_all.html?locale=az

Исследование-обсуждение

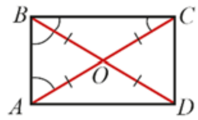
Ученикам показывается изображение устройства, называемого «ножничный подъёмник», используемого при ремонтных работах. При складывании и раскладывании этого устройства перемещается расположенная на нём рабочая платформа. По мере складывания и раскладывания устройства с учениками обсуждается форма четырёхугольников, образованных стержнями, выслушиваются мнения об их сторонах и углах.

Изучение **Прямоугольник**

Виды параллелограмма доводятся до внимания учеников. Для этого ученикам может быть представлен схема на рисунке. Сначала выслушиваются известные ученикам сведения о прямоугольнике и новая информация. На рисунке обсуждаются его стороны, углы, диагонали, а также конгруэнтные треугольники, полученные диагоналями. Теорема о конгруэнтности диагоналей прямоугольника доводится до внимания учеников, совместно обсуждается и доказывается.



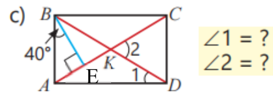
Подумай!



Здесь на основании свойства диагоналей прямоугольника и конгруэнтности треугольников учениками обосновывается, что $BO \cong AO \cong OC \cong OD$, $\angle BCO \cong \angle CBO$, $\angle ABO \cong \angle BAO$.

Задания

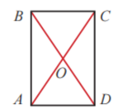
2. Это задание выполняется с применением свойства диагоналей прямоугольника. По данным, приведённым на рисунке, находится градусная мера требуемых углов.



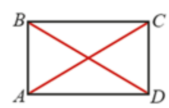
в) В прямоугольнике ABCD высота BE образует прямоугольный треугольник ABE. $\angle BAK = 90° - 40° = 50°$. Поскольку $\Delta ABK \cong \Delta CDK$, то $\angle BAK = \angle DCK = 50°$. Треугольник DCK равнобедренный, следовательно, $\angle CDK = 50°$.

Тогда $\angle 2 = 180° - 100° = 80°$, $\angle 1 = 90° - 50° = 40°$.

К сведению учителя! Это задание можно решить также на основе различных треугольников внутри прямоугольника. Например, в прямоугольном треугольнике ABC, используя ∠BAK, находится ∠ACB, затем определяется ∠ACD. Либо из равнобедренного треугольника ABK можно найти ∠AKB, а затем ∠CKD и т.д. Независимо от того, в каком направлении ученик ведёт решение, если результат получен правильно, целесообразно, чтобы учитель выразил отношение к ответу и поощрил ученика. В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/s7ykkzxm .



3. При решении этого задания учениками объясняется, что диагонали конгруэнтны, а треугольники BOC и COD являются равнобедренными. При необходимости учитель может направить решение задания, оказывая определённую помощь. По длине диагонали прямоугольника из треугольника BOC можно найти BC, а из треугольника COD — CD. $BC = 6$ см, $CD = 8$ см. Тогда $P = 28$ см.



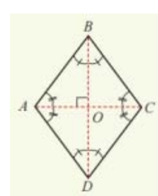
4. Учениками обосновывается, что параллелограмм с конгруэнтными диагоналями является прямоугольником. Учитель может подчеркнуть, что это является признаком прямоугольника. Для определения соответствующих рассуждений, заполняющих пустые места в столбце таблицы обоснования, проводится обсуждение и доказательство завершается. Высказанную здесь мысль можно также представить как признак прямоугольника.\.

1. По условию диагонали данного параллелограмма конгруэнтны.
2. Противоположные стороны параллелограмма конгруэнтны.
4. Так как $\Delta BAD \cong \Delta CDA$, то в конгруэнтных треугольниках стороны, лежащие против конгруэнтных углов, также конгруэнтны.
6. Если сумма градусных мер двух конгруэнтных углов равна 180°, то каждый из них равен 90°.

Предложение	Обоснование
1. $AC \cong BD$	1.
2. $AB \cong CD$, $BC \cong AD$	2.
3. $\Delta BAD \cong \Delta CDA$	3. Согласно признаку конгруэнтности треугольников ССС
4. $\angle BAD \cong \angle CDA$	4.
5. $\angle BAD = \angle CDA = 90°$	5. $\angle BAD \cong \angle CDA$ и $\angle BAD + \angle CDA = 180°$
6. $\angle ABC = \angle BCD = 90°$	6.
7. $ABCD$ прямоугольник.	7. По определению прямоугольника

К сведению учителя! Рассуждения, соответствующие пустым местам в обосновании, не должны даваться ученикам в готовом виде. Учитель должен стремиться к тому, чтобы эти мысли были озвучены учениками. В таком случае формируются навыки обсуждения и обоснования у ученика, а также развивается связная речь.

Изучение Ромб



Об одном из видов параллелограмма — ромбе — ученикам даётся информация, чертится рисунок и доводится до внимания определение. Обсуждаются свойства параллелограмма, относящиеся к ромбу. Затем доводятся до внимания собственные свойства ромба. Теорема о том, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов при противоположных вершинах, доказывается совместно с учениками.

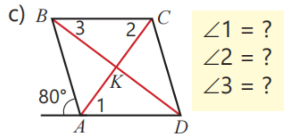
В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/X8Mz96a8 *https://www.geogebra.org/m/B8wHEpBH*

Подумай!

На основании доказательства теоремы аналогичными рассуждениями доказывается, что в ромбе ABCD

$\angle BAC \cong \angle DAC$. Ученики высказывают мысли о конгруэнтности равнобедренных треугольников ABC и ADC, обосновывают конгруэнтность требуемых углов.

5. Для помощи в решении этого задания приводится пример. Ученики исследуют нахождение углов ромба, данного в примере, обсуждают свойство диагоналей и способы применения конгруэнтности углов.



в) Так как внешний угол при вершине A ромба ABCD равен 80°, то $\angle BAD = 100°$. Тогда, основываясь на том, что диагональ ромба является биссектрисой, $\angle 1 = 50°$.

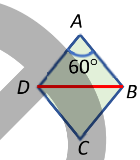
Тогда $\angle 2 = 50°$ и $\angle 3 = 40°$.

К сведению учителя! При выполнении задания целесообразно обосновывать нахождение требуемых углов так же, как в примере. В этом случае ученики понимают, как находятся градусные меры этих углов. В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность.

https://www.geogebra.org/m/B8wHEpBH *https://www.geogebra.org/m/p3d2kpnf*

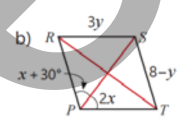
7. а) По конгруэнтности сторон данного ромба ABCD находится периметр.

$AB = 36 : 3 = 12$ см, $P = 48$ см.



б) Если один из углов ромба ABCD равен 60°, то соседний угол равен 120°. Так как диагональ ромба является биссектрисой, то $\angle ABD = \angle ADB = 60°$. Поскольку периметр равен 48 см, сторона равна 12 см. Тогда в равностороннем треугольнике ABD BD = 12 см.

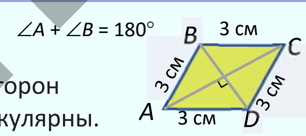
8. Применяя свойства диагоналей и углов ромба, находятся требуемые стороны и углы. Так как стороны ромба конгруэнтны, $3y = 8 - y \rightarrow y = 2$. $RS = 6$.



Так как диагональ ромба является биссектрисой, $x + 30° = 2x \rightarrow x = 30°$. Углы равны 60° и 120°.

Ложные представления, возникающие у учеников. Из-за конгруэнтности сторон ромба ученики иногда принимают его за квадрат. Для устранения этого неверного представления ученик должен обязательно учитывать, что длины его диагоналей и углы различны.

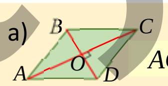
По данным определите вид фигуры.



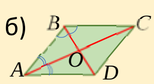
Ложно Четырёхугольник ABCD является квадратом, так как длины его сторон равны, сумма соседних углов равна 180°, а диагонали перпендикулярны.

Верно Четырёхугольник ABCD является ромбом, так как длины его сторон равны. Хотя сумма соседних углов равна 180°, его углы являются острыми и тупыми. Несмотря на то, что диагонали перпендикулярны, их длины различны.

Запомни!

а) 

$AC \perp BD$

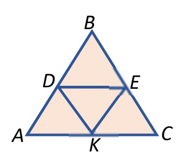
б) 

$\angle ABD \cong \angle CBD$
$\angle BAC \cong \angle DAC$

$\Delta AOB \cong \Delta COB$
$\Delta COD \cong \Delta AOD$ → ABCD ромб.

Данные утверждения обсуждаются вместе с учениками, и их внимание обращается на то, что эти утверждения являются признаками ромба. Обосновывается, что параллелограмм с перпендикулярными диагоналями или с диагоналями, делящими углы пополам, является ромбом. Здесь ученик должен опираться на конгруэнтность треугольников.

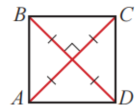
10. По условию называются вершины фигуры, образованной четырьмя конгруэнтными равносторонними треугольниками. Чтобы определить количество образовавшихся ромбов, рассматриваются полученные четырёхугольники: $ABEK$, $ADEK$, $ADEC$, $BDKE$, $DKCB$, $DECK$.



• Из этих четырёхугольников всеми сторонами равными и с параллельными противоположными сторонами являются $ADEK$, $BDKE$, $DECK$. Ученики должны обосновать, почему они являются ромбами.

• Тупые углы этих ромбов равны 120°.

Изучение **Квадрат**



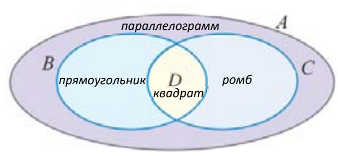
Квадрат как вид прямоугольника доводится до внимания учеников. Обсуждаются его свойства, учениками определяются свойства параллелограмма, прямоугольника и ромба, относящиеся также и к квадрату.

К сведению учителя! При повторном обсуждении видов параллелограмма с учениками целесообразно исследовать их признаки и свойства в сравнительной форме. Сходные и отличительные признаки этих фигур можно оформить также в виде таблицы.

Фигуры	***Стороны***	***Углы***	***Диагонали***
Параллелограмм	*Противоположные стороны попарно параллельны и конгруэнтны.*	Противоположные углы конгруэнтны.	Их длины различны, в точке пересечения делятся пополам.
Ромб	Все стороны конгруэнтны.	Противоположные углы конгруэнтны.	Взаимно перпендикулярны, являются биссектрисами углов и их длины различны. В точке пересечения делятся пополам.
Прямоугольник	*Противоположные стороны попарно параллельны и конгруэнтны.*	Все углы прямые.	Конгруэнтны. В точке пересечения делятся пополам.
Квадрат	Все стороны конгруэнтны.	Все углы прямые.	Взаимно перпендикулярны, являются биссектрисами углов, конгруэнтны. В точке пересечения делятся пополам.

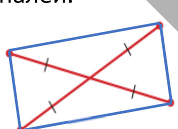
В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность.
https://media.pearsoncmg.com/intl/pec/school/mathtv2/global/pcmg/math_tools/geometry2d/index.html
https://www.geogebra.org/m/k5cr9bsq *https://www.geogebra.org/m/mJZCZAsK*

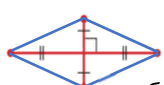
Ложные представления, возникающие у учеников. Ученики часто относят свойства, принадлежащие квадрату и ромбу, ко всем параллелограммам. Некоторые ученики считают, что диагонали всех параллелограммов конгруэнтны и перпендикулярны, а также что диагонали делят вершины углов пополам (являются биссектрисами). Чтобы объяснить, что в общем случае для параллелограмма эти утверждения неверны, учителю целесообразно продемонстрировать это на доске с помощью различных средств или измерений.

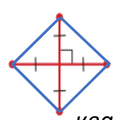


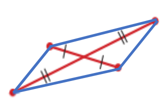
12. Исследуются множества A, B, C и D, изображённые на диаграмме.
Исследуется отношение множества C — множества ромбов — с другими множествами. Ученик должен определить, что если множество A содержит множества B, C и D, то это множество параллелограммов. Пересечение множеств B и C есть множество D. Тогда множество B — это множество прямоугольников. Если множество D является пересечением множеств B и C, то множество D — это множество квадратов.

13. В этом задании ученики, последовательно соединяя концы отрезков, определяют, каким видом параллелограмма является полученная фигура. Они обосновывают свои мысли, используя свойство диагоналей.

a) 
прямоугольник

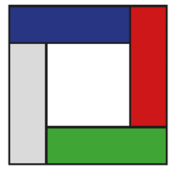
b) 
ромб

c) 
квадрат

d) 
параллелограмм

Решение задач

15. По условию задачи полосы в форме прямоугольника конгруэнтны.



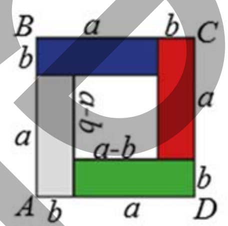
Привлечение. Из цветной бумаги вырезаются конгруэнтные прямоугольники и размещаются так, как показано на рисунке, после чего их концы склеиваются.

Учитель поручает ученикам измерить линейкой длины сторон полученного четырёхугольника. Поскольку ученики вырезают разные прямоугольники, они получат разные результаты. Полученные числа обсуждаются. Ученики определяют, что полученная фигура является квадратом. Аналогично, выполняя измерения, они отмечают, что и внутренний маленький четырёхугольник также является квадратом.

Учитель обращается к ученикам с вопросом: как обосновать, что большой и малый четырёхугольники являются квадратами без измерения линейкой? Ответы учеников обсуждаются. Затем задача решается в общем виде.

Решение задачи

а) На четырёхугольнике выполняется соответствующая разметка, как показано на рисунке. Полосы представляют собой прямоугольники со сторонами a и b. Поскольку они конгруэнтны, все стороны четырёхугольника ABCD равны (a + b), а углы — прямые. Следовательно, полученный четырёхугольник ABCD, то есть большой четырёхугольник, является квадратом. Аналогично можно сказать, что у малого (внутреннего) четырёхугольника все стороны равны (a − b), а углы — прямые. Следовательно, этот четырёхугольник также является квадратом.



б) Одна сторона большого квадрата равна сумме длины и ширины полосы. Так как периметр полос равен 12 см, сумма их длины и ширины равна половине периметра, то есть 6 см. Периметр большого квадрата равен 4 · 6 = 24 (см).

Практическое задание: Для лучшего усвоения знаний о свойствах каждого вида параллелограмма, их сходствах и различиях целесообразно организовать работу в группах. Группам раздаются рабочие листы, представленные в примере, и каждая группа объясняет свои ответы с обоснованием. Для других групп подготавливаются рабочие листы по образцу. Рабочий лист можно скачать по данной ссылке:

https://drive.google.com/file/d/1ZaIXXduPT1NDbfAn316xM22eiok5gseL/view?usp=sharing

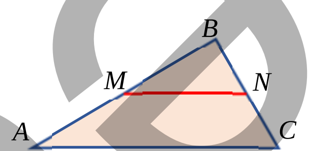
Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Объясняет свойства и характеристики прямоугольника.	Рабочие листы, учебник, РТ
Объясняет свойства и характеристики ромба.	Рабочие листы, учебник, РТ
Объясняет свойства и признаки квадрата.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 5.5. Свойства средней линии и медиан треугольника

ПОДСТАНДАРТЫ	7-3.3.4. Объясняет свойства средней линии треугольника и трапеции. 7-3.3.5. Применяет свойства медиан и высот треугольника.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Распознаёт среднюю линию треугольника и применяет её свойства при решении задач. • Объясняет обратную теорему о средней линии треугольника. • Объясняет свойства медиан треугольника и применяет их при решении задач. • Применяет свойства средней линии и медиан треугольника.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, рабочая тетрадь
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/xj5scyzx* *https://www.geogebra.org/m/wdq9uy8q* Задание: *https://www.geogebra.org/m/hwknx2dr* *https://www.geogebra.org/m/k4Qb9neW*

Побуждение



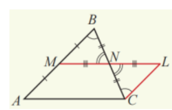
Учитель чертит на доске произвольный треугольник. Он приглашает к доске двух учеников и поручает одному из них отметить середины двух сторон этого треугольника и соединить их отрезком. Затем другой ученик измеряет линейкой длины отрезков MN и AC. Связь между полученными числами обсуждается со всем классом, выслушиваются мнения учеников. Учитель следит за тем, чтобы измерение проводилось максимально точно.

Исследование-обсуждение

По результатам исследования четыре одинаковых равносторонних треугольника располагаются так, что полученная фигура также является треугольником. Исследуется вид этого треугольника. Ученик обосновывает, что его стороны конгруэнтны. Затем обсуждаются способы деления произвольного треугольника тремя отрезками на конгруэнтные треугольники. Возможны различные мнения. Учитель, направляя, помогает прийти к правильному выводу.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/rfzgr4ps   *https://www.geogebra.org/m/SwCnCRv8*

Изучение **Средняя линия треугольника**



В ходе исследования ученики научились изображать отрезки, полученные соединением середин сторон треугольника. Учитель объясняет определение средней линии и теорему о её свойстве. Теорема обсуждается и доказывается совместно с учениками.

К сведению учителя! Во время доказательства может быть непонятно ученикам, почему строится параллелограмм AMLC. Поэтому учитель должен обратить внимание на необходимость проведения вспомогательных линий или построения вспомогательных фигур при доказательстве теорем или решении геометрических задач.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность.
https://www.geogebra.org/m/m55mTjXE   *https://www.geogebra.org/m/NFCwzehu*
https://www.geogebra.org/m/ENUr6tBq

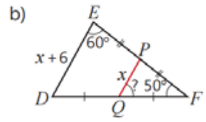
Подумай!

Иногда у учеников может возникнуть представление, что у треугольника существует только одна средняя линия. Поэтому в рубрике «подумай» исследуется вопрос о том, сколько средних линий имеет треугольник. Ученики, последовательно соединяя середины всех трёх сторон, высказывают мнение о количестве полученных средних линий. Исследуется, какой стороне параллельна каждая средняя линия, и это обсуждается со всем классом.

Ложные представления, возникающие у учеников. Ученики могут ошибаться не только в количестве средних линий, но и при их построении. Иногда, проводя отрезок от вершины к середине противоположной стороны, они путают медиану со средней линией; иногда, соединяя произвольные точки сторон, считают, что построили среднюю линию. Некоторые ученики также представляют, что средняя линия равна половине тех сторон, на которых она построена, а не противоположной стороне. Одной из наиболее частых ошибок является то, что ученики считают треугольники, полученные при проведении средних линий, равнобедренными. Для устранения таких ошибочных представлений можно предложить ученикам построить средние линии в различных треугольниках. Ученики смогут ясно увидеть, что полученные треугольники не являются равнобедренными..

Задания

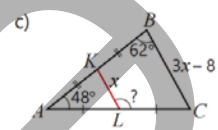
2. В задании, представленном рисунками, используя свойство средней линии треугольника, свойство углов между двумя параллельными и секущей, а также сумму внутренних углов треугольника, находятся неизвестные стороны или углы.



К сведению учителя! Перед решением этого задания целесообразно напомнить ученикам сумму внутренних углов треугольника и свойство углов между двумя параллельными и секущей.

б) Так как PQ средняя линия, $x + 6 = 2x \rightarrow x = 6$, следовательно $PQ = 6$, $DE = 12$.

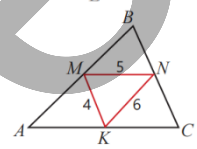
По сумме внутренних углов треугольника в треугольнике DEF ∠D = 180° − 110° = 70°, а по свойству углов между двумя параллельными и секущей $\angle PQF = \angle D = 70°$.



в) Так как KL средняя линия, $3x - 8 = 2x \rightarrow x = 8$, следовательно, $KL = 8$, $BC = 16$.

По сумме внутренних углов треугольника $\angle C$ = 180° – (48°+ 62°) = 70°, по свойству односторонних внутренних углов $\angle CLK = 180° - \angle C = 110°$.

3. Даны стороны треугольника MNK, образованного серединами сторон треугольника ABC.



а) Ученик, применяя теорему, находит стороны треугольника ABC: 8, 10, 12.

б) Так как середина делит стороны пополам: $AM = MB = 6$, $BN = NC = 4$, $AK = KC = 5$.

в) По признаку конгруэнтности треугольников ССС: $\Delta AMK \cong \Delta MBN \cong \Delta KNC \cong \Delta NKM$.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность: *https://www.geogebra.org/m/SwCnCRv8*

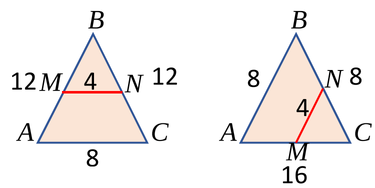
4. Дана одна из средних линий равнобедренного треугольника и его периметр. Здесь необходимо проверить две гипотезы:

1) *Средняя линия параллельна одной из боковых сторон 2) Средняя линия параллельна основанию.*

I гипотеза: *Средняя линия параллельна одной из боковых сторон.*

Так как длина средней линии 4 см, длина параллельной ей боковой стороны должна быть 8 см. Поскольку треугольник равнобедренный, другая боковая сторона также равна 8 см. Если периметр треугольника 32 см, то длина третьей стороны равна 32 − 8 − 8 = 16 см. Однако по неравенству треугольника треугольник со сторонами 8 см, 8 см и 16 см невозможен. Следовательно, эта гипотеза неверна.

II гипотеза: *Средняя линия параллельна основанию.* Если длина средней линии 4 см, то длина параллельного ей основания АС равна 8 см. Так как периметр 32 см, то $AB = BC = (32 - 8) : 2 = 12$ см. В этом случае стороны треугольника ABC равны 12см, 12 см и 8 см.

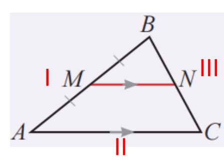


Ответ: 12см, 12 см и 8 см.

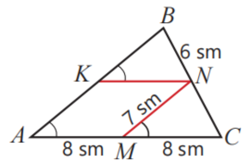
К сведению учителя! При решении этого задания ученики могут найти ответ по первой гипотезе и ошибочно считать, что средняя линия параллельна боковой стороне. Для определения правильного ответа обязательно необходимо проверить выполнение неравенства треугольника.

Запомни!

Обратная теорема о средней линии треугольника также обсуждается и обосновывается совместно с учениками. Прежде всего ученики должны уметь правильно определить условие и заключение обратного утверждения. Обсуждается и объясняется, что прямая, проходящая через середину одной стороны треугольника и параллельная второй стороне, проходит также через середину третьей стороны: $AM \cong MB, MN \parallel AC \rightarrow CN \cong NB$.



5. Ученики при самостоятельном решении этого задания могут испытывать определённые трудности, поэтому при необходимости учитель должен давать направление. Особенно целесообразно подчеркнуть применение обратной теоремы о средней линии треугольника.



а) По условию в треугольнике ABC точка M — середина стороны AC. Ученики по данным на рисунке, то есть по условию $\angle BKN \cong \angle NMC \cong \angle A$, определяют, что $MN \parallel AB$ и $KN \parallel AC$. С другой стороны, по обратной теореме точка N является серединой стороны BC. Таким образом, обсуждается и обосновывается, что четырёхугольник AKNM является параллелограммом.

б) Так как $AKNM$ параллелограмм, по конгруэнтности противоположных сторон находятся их длины: $KN = AM = 8$ см, $AK = MN = 7$ см.

в) $KN = AM = MC$, $AK = KB = MN$, $\angle BKN \cong \angle NMC$, поэтому по признаку конгруэнтности треугольников УСУ: $\Delta BKN \cong \Delta NMC$.

г) Известно, что $MN = AK = KB$ и $KN = AM = CM$. То есть, $MN = \frac{1}{2}AB$ и $KN = \frac{1}{2}AC$, следовательно, отрезки MN и AK являются средними линиями треугольника.

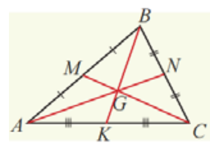
д) $P_{\Delta ABC} = 14 + 16 + 12 = 42$ см.

Изучение Медианы треугольника

Прежде чем сообщить свойство точки пересечения медиан треугольника, учитель даёт ученикам задание соединить каждую вершину произвольного треугольника с серединой противоположной стороны. Ученики наблюдают, что точно проведённые в тетради медианы пересекаются внутри треугольника в одной точке. Затем разъясняется теорема о свойстве медиан треугольника и подробно объясняется, что каждая медиана делится в точке пересечения в отношении 2 : 1, начиная от вершины. Доказательство этого свойства выполняется в 7-м задании.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность: *https://www.geogebra.org/m/pwTTqNfh*

К сведению учителя! Целесообразно объяснить ученикам, почему точка пересечения медиан называется центром тяжести и почему она является центром тяжести. В связи с этим можно вспомнить тему 7.1 из 6-го класса и повторить практическую работу: продемонстрировать равновесие, подвесив вырезанный из картона треугольник за нить, проведённую через точку пересечения медиан. В 12 -м задании ученики выполнят это при решении задачи.



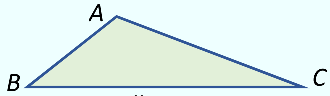
В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность: *https://youtu.be/dFsp31EDYnI*

Подумай!

Ученики на основе свойства медиан треугольника обосновывают, что $AG = \frac{2}{3}AN$ и $GN = \frac{1}{3}AN$. Так как точка G делит медиану AN в отношении 2 : 1, медиана считается разделённой на три равные части, из которых $\frac{2}{3}$ приходится на AG, а $\frac{1}{3}$ — на GN.

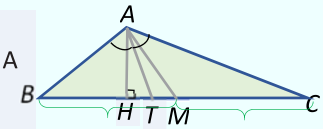
Ложные представления, возникающие у учеников. Ученики иногда путают медиану треугольника с биссектрисой и высотой либо считают, что они совпадают. Для устранения этого ошибочного представления целесообразно начертить треугольник, в котором эти три элемента не совпадают, и изобразить их отдельно.

Проведите из вершины А треугольника медиану, высоту и биссектрису.



Ложно Чтобы провести медиану из вершины А треугольника к противоположной стороне, отмечается середина противоположной стороны и соединяется с точкой А. Полученный отрезок одновременно является и биссектрисой, и высотой.

Doğru Из вершины А треугольника проводится отрезок к середине противоположной стороны. Это медиана. Угол при вершине А делится пополам, проводится биссектриса. Из вершины А к противоположной стороне проводится перпендикуляр. Полученный отрезок является высотой. $AH < AT < AM$.

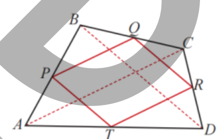


7. Выполняя задание, ученики доказывают Теорему 8. Учитель должен усиливать внимание к обсуждению каждого этапа выполнения задания и добиваться активного участия учеников.

8. Из информации, данной под рубрикой «подумай», ученики знают, что если дана одна часть медианы до точки пересечения, можно определить её полную длину.

а) Если AG = 12 см, то AN = 18 см, $GN = \frac{1}{3}AN$ = 6 см, б) Если CM = 21 см, то $CG = \frac{2}{3}CM$ = 14 см.

10. Основная цель задания — изучение одного из признаков параллелограмма и важного свойства выпуклого четырёхугольника — теоремы Вариньона: *четырёхугольник, вершины которого совпадают с серединами сторон произвольного выпуклого четырёхугольника, является параллелограммом. Стороны полученного параллелограмма параллельны диагоналям выпуклого четырёхугольника*. Доказательство некоторых важных теорем геометрии основано на этой теореме.



Задание выполняется на основании того, что стороны четырёхугольника PQRT являются средними линиями треугольников ABC, ADC, ABD и BCD. При выполнении пунктов задания ученики опираются на свойства средней линии треугольника, свойства параллелограмма и аксиому параллельности прямых.

г) Если AC = 12 см и BD = 8 см, то PQ = 6 см, PT = 4 см. Следовательно, периметр параллелограмма равен 20 см.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/wmyxfnkf *https://www.geogebra.org/m/uNW647XY*

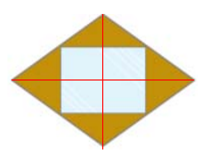
Дифференцированное обучение

Поддержка. Ученикам предлагается начертить произвольный выпуклый четырёхугольник и одну из его диагоналей. В полученных треугольниках проводятся средние линии, параллельные диагонали, и требуется найти средние линии при заданной длине диагонали или, наоборот, найти диагональ по заданным средним линиям.

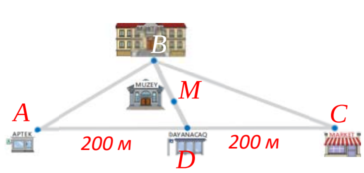
Углубление. Учитель спрашивает учеников: «В каком случае полученный в задаче 10 параллелограмм PQRT может быть квадратом?» Ученики должны определить случай, когда диагонали конгруэнтны и перпендикулярны. Учитель предлагает ученикам проверить, верно ли это свойство для вогнутых четырёхугольников.

Решение задач

11. Чтобы обосновать, что зеркало, закреплённое на доске в форме ромба, имеет прямоугольную форму, достаточно показать, что стороны зеркала параллельны диагоналям ромба. Так как диагонали ромба перпендикулярны, зеркало, стороны которого параллельны диагоналям, будет иметь прямоугольную форму. Поскольку диагонали ромба равны 64 см и 48 см, стороны зеркала равны 32 см и 24 см.
Тогда S = 768 см^2.



13. Для точного понимания задачи ученики тщательно анализируют условие, чертят рисунок по плану и делают необходимые обозначения.
$AD = CD$ = 200 м, BM = 400 – 280 = 120 м.
Известно, что по плану музей расположен в точке пересечения медиан треугольника ABC. Тогда $MD = BM : 2$ = 60 м.



Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Объясняет теорему о средней линии треугольника, доказывает её и применяет при решении задач.	Рабочие листы, учебник, РТ
Объясняет обратную теорему о средней линии треугольника и применяет её при решении задач.	Рабочие листы, учебник, РТ
Объясняет отношение деления в точке пересечения медиан треугольника и применяет его в задачах.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 5.6. Трапеция

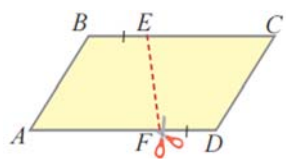
ПОДСТАНДАРТЫ	7-3.3.3. Применяет свойства параллелограмма, ромба, прямоугольника, квадрата и трапеции. 7-3.3.4. Объясняет свойства средней линии треугольника и трапеции.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Определяет виды трапеции. • Объясняет свойство средней линии трапеции. • Применяет свойства трапеции.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карты, рабочая тетрадь
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/j676Bp6d* *https://media.pearsoncmg.com/intl/pec/school/mathtv2/global/pcmg/math_tools/geometry2d/index.html* Задание: *https://www.geogebra.org/m/j9kupevU* *https://www.geogebra.org/m/AFerPTKK*

Побуждение

Ученикам представляются изображения крыш нескольких домов. Обсуждается форма крыши при виде спереди и сбоку. Выслушиваются мнения учеников о взаимном расположении сторон четырёхугольника, видимого сбоку. К классу обращаются с вопросом «чем отличаются эти фигуры друг от друга?» и вопрос обсуждается.

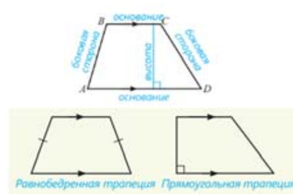
Исследование-обсуждение

Практическое задание. В исследовании выполняется практическое задание. Ученикам заранее поручается принести цветную бумагу и ножницы. Учитель может немного изменить задание. Например, как разделить нарисованный на бумаге параллелограмм на два конгруэнтных четырёхугольника, не являющихся параллелограммами? Ученики самостоятельно приходят к решению, изображённому в учебнике.



Изучение Трапеция

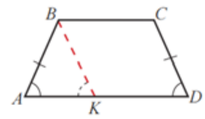
Учитель даёт информацию о трапеции как одном из видов четырёхугольника. Хотя у учеников имеются сведения о трапеции из младших классов, в этом классе они уже знакомятся со строгим определением фигуры. Основания, боковые стороны, углы, высота, диагонали, виды трапеции исследуются и обсуждаются вместе с учениками. Ученики знакомятся с видами трапеции и приводят примеры предметов, имеющих форму трапеции.



Подумай!

Здесь ученики, опираясь на свойство углов между двумя параллельными прямыми и секущей, объясняют, что сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне, равна 180°. Можно обсудить сумму углов трапеции, а также особенности углов в равнобедренной и прямоугольной трапециях.

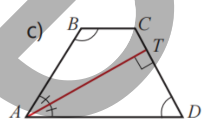
Ложные представления, возникающие у учеников. Ученики иногда ошибочно путают трапецию, особенно равнобедренную трапецию, с параллелограммом. Иногда из-за того, что основания трапеции параллельны, они считают их длины равными, а в некоторых случаях путают прямоугольную трапецию с прямоугольником. С помощью изображений до внимания учеников доводится, что только одна пара сторон трапеции параллельна, а две другие стороны не параллельны, а также что в прямоугольной трапеции только два угла являются прямыми.



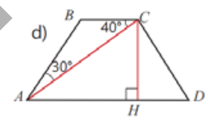
Задания

2. В равнобедренной трапеции ABCD из вершины B проводится отрезок BK, параллельный боковой стороне CD. Конгруэнтность углов при основании равнобедренной трапеции объясняется на основе свойств углов параллелограмма BCDK и равнобедренного треугольника ABK. После доказательства того, что ∠A ≅ ∠D, по свойству углов между двумя параллельными прямыми и секущей доказывается, что
$\angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - \angle D = \angle C$.

3. Для выполнения задания используется свойство углов, прилежащих к основанию трапеции.
в) В данной равнобедренной трапеции AT биссектриса, $\angle ATD = 90^\circ$. Требуется найти углы B и D. Ученик должен знать, что если трапеция равнобедренная, то $\angle A \cong \angle D$.
Поскольку $\angle D = 2\angle TAD$, то из прямоугольного треугольника ATD следует $\angle D + \angle TAD = 3\angle TAD = 90^\circ$. Отсюда, $\angle TAD = 30^\circ$, поэтому $\angle D = 60^\circ$ и $\angle B = 120^\circ$.

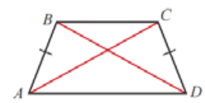


г) В этом задании ученик на основе суммы внутренних углов треугольника находит $\angle B$.
$\angle B = 110^\circ$. $\angle D = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \angle B = 70^\circ$.
В прямоугольном треугольнике CHD: $\angle HDC = 90^\circ - \angle D = 20^\circ$.



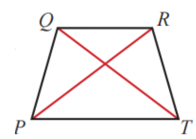
К сведению учителя! При выполнении заданий по геометрии все выводы обязательно должны быть обоснованы. В этом случае ученик быстрее усваивает изученное и понимает сущность и значение процесса доказательства.

4. В задании доказывается свойство равнобедренной трапеции. Хотя оно дано в форме задания, учитель должен подчеркнуть, что это именно свойство. Доказательство этого свойства основано на конгруэнтности треугольников, образованных диагоналями. Конгруэнтность треугольников BAD и CDA устанавливается по признаку СУС. Перед выполнением задания целесообразно повторить с учениками признаки конгруэнтности треугольников.



В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/AFerPTKK

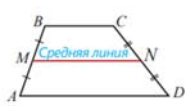
5. Ученики выполняют задание, опираясь на конгруэнтность диагоналей равнобедренной трапеции.
$QR = 6$ см, $P_{DPQR} = PQ + QR + PR = 15$ см и $P_{DPQT} = PQ + QT + PT = 20$ см, $PR \cong QT$ следовательно

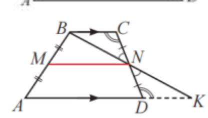


$$PQ + QR + PR = PQ + QR + QT = 15 \rightarrow PQ + QT = 15 - 6 = 9.$$
$$PQ + QT + PT = 20 \rightarrow PT = 20 - 9 = 11 \text{ см.}$$

Изучение Средняя линия трапеции

Учитель чертит на доске произвольную трапецию и поручает ученикам соединить отрезком середины её боковых сторон. Обсуждается взаимное расположение полученного отрезка и оснований. Теорема о свойстве средней линии трапеции доводится до сведения учеников. Доказательство теоремы выполняется совместно с учениками при обсуждении 6-го задания.

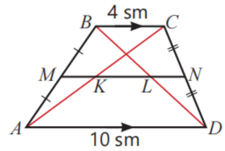




В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/bztqfhpr *https://www.geogebra.org/m/xnHcpJnM*

9. Даны отношение длин оснований трапеции, а также длина средней линии. Подставляя основания в формулу средней линии в виде 3k и 5k, находят основания трапеции. $12 = \frac{3k + 5k}{2} \rightarrow k = 3$. Основания трапеции равны 9 см и 15 см.

10. В этом задании, отвечая на вопросы, ученики определяют, как найти часть средней линии трапеции, заключённую между диагоналями.



- $MN = \frac{10 + 4}{2} = 7$ см.
- Отрезок LN является средней линией треугольника BCD, поэтому LN = 2 см.
- Отрезок KN является средней линией треугольника ACD, поэтому KN = 5 см.
- $KL = KN - LN$ = 3 см.

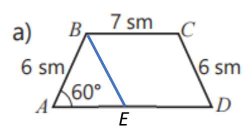
К сведению учителя! В этом задании длину отрезка KL можно также вычислить по формуле $KL = \frac{AD - BC}{2}$. Эта формула может быть обоснована учениками в ходе исследования. В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность: *https://www.geogebra.org/m/dpqfdhqm*

Ложные представления, возникающие у учеников. При изображении средней линии трапеции ученики допускают различные ошибки. Наиболее часто встречающиеся из них приведены в таблице.

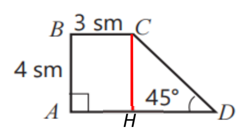
Ложные представления	Правильный ответ	Устранение ложных представлений
Средняя линия трапеции соединяет середины оснований.	Средняя линия трапеции соединяет середины боковых сторон.	В зависимости от положения изображения трапеции ученики могут перепутать её боковые стороны и основания. Обращается внимание на то, что боковые стороны трапеции не параллельны.
Средняя линия трапеции проходит через точку пересечения диагоналей.	Средняя линия трапеции не всегда проходит через точку пересечения диагоналей.	Наглядно показывается, что средняя линия трапеции пересекает диагонали, но не проходит через точку их пересечения.
Средняя линия трапеции делит её на две части с равными площадями.	Площади частей, на которые средняя линия делит трапецию, никогда не равны.	Изобразив среднюю линию трапеции, можно показать, что она делит трапецию на две различные по площади части. При изучении площади трапеции это представление станет для учеников более наглядным.

Ошибки, указанные в таблице, являются ошибками, которые некоторые ученики допускают для всех трапеций. Частные случаи не рассматриваются.

11. В задании по данным, приведённым на рисунке, требуется определить длину средней линии трапеции. Здесь основная цель — использование вспомогательных линий.

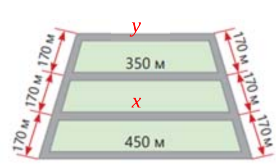


а) По данным обсуждается, как провести вспомогательную линию. Ученики, размышляя о том, зачем задан угол 60°, могут предположить возможность использования равностороннего треугольника. Учитель при необходимости должен дать определённое направление. В трапеции ABCD из вершины B проводится линия, параллельная стороне CD. Обосновывается, что полученный треугольник ABE является равносторонним. Тогда AE = 6 см и AD = 13 см. Средняя линия трапеции равна (13 + 7) : 2 = 10 см.



б) По данным на рисунке известно, что *ABCD* прямоугольная трапеция. Из вершины *C* проводится высота *CH*. Так как полученный треугольник CHD является равнобедренным прямоугольным, то $CH = HD$ = 4 см. Тогда AD = 7 см, а длина средней линии равна 5 см.

Решение задач



13. Парк имеет форму равнобедренной трапеции, а дорожки в середине парка являются средними линиями трапеций. На основе нахождения средней линии трапеции получаем

x = (350 + 450): 2 = 400 м и y = 350 · 2 – 400 = 300 м.

Практическое задание: Группам раздаются рабочие листы. Задания, приведённые в рабочих листах, выполняются с применением свойств трапеции. На основе данного примера для других групп также подготавливаются рабочие листы. Рекомендуется, чтобы в каждом рабочем листе были задания, относящиеся к различным свойствам трапеции.

Рабочий лист можно скачать по данной ссылке:
https://drive.google.com/file/d/1pUFSgW_rqhyJwCL0aRnsJ023PqDR0zDV/view?usp=sharing

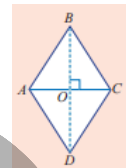
Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Различает равнобедренные и прямоугольные трапеции и использует их свойства при решении задач.	Рабочие листы, учебник, РТ
Комментирует теорему о средней линии трапеции, доказывает её и применяет при решении задач.	Рабочие листы, учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

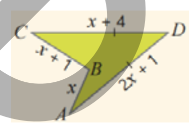
Побуждение. Понятия, отмеченные в заключении в конце раздела, повторяются вместе с учениками, проводится обобщение. Слова и новые понятия, изученные в разделе, ещё раз вспоминаются, их значение объясняется учениками, комментируются их связи с другими понятиями. Понятия, изученные в разделе:

Выпуклый четырёхугольник, невыпуклый (вогнутый) четырёхугольник, внутренний угол, внешний угол, диагональ, параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, средняя линия треугольника, медиана, трапеция, средняя линия трапеции.

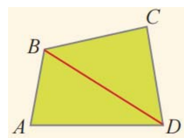


При подведении итогов раздела даётся обобщённая информация о широком применении четырёхугольников и их свойств в различных областях. Условие задачи, представленной в качестве первоначальной задачи под заголовком «Попытайтесь!», исследуется вместе с учениками. Записывается краткое условие задачи, проводится анализ, обсуждаются данные и то, что требуется найти. Задание выполняется с использованием свойств ромба, суммы углов треугольника и формулы площади. Несмотря на то что решение исходной задачи приведено в учебнике, целесообразно обсудить его с учениками.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

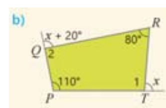


1. Ученики, выполняя задание, должны внимательно рассмотреть данные на рисунке и определить связь между сторонами вогнутого четырёхугольника. По условию стороны AD и CD равны. Тогда из уравнения $x + 4 = 2x + 1$ получаем $x = 3$. Следовательно, стороны четырёхугольника $AD = CD = 7$, $AB = 3$, $BC = 4$. Тогда $P = 21$.

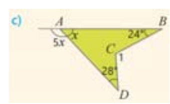


2. Четырёхугольник ABCD с периметром 25 см диагональю разделён на два треугольника с периметрами 20 см и 21 см. Очевидно, что периметр каждого треугольника равен сумме двух соответствующих соседних сторон четырёхугольника и диагонали. Обсуждая, ученики устанавливают, что длина диагонали входит в периметр обоих треугольников. Следовательно, если из суммы периметров треугольников вычесть периметр четырёхугольника, останется удвоенная длина диагонали. Тогда $BD = (20 + 21 - 25) : 2 = 8$ см. Эту задачу также можно решить, сложив длины отрезков и записав формулы для соответствующих периметров.

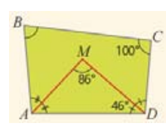
3. Задание относится к внутренним и внешним углам четырёхугольника. Ученики знают, что внутренний и внешний углы при одной вершине — смежные. По данным рисунка находятся неизвестные углы.



б) Составляется уравнение с использованием теоремы о сумме внутренних и внешних углов четырёхугольника. $x + 20° + (180° - 80°) + x + (180° - 110°) = 360° \to x = 85°$. $\angle 1 = 95°$, $\angle 2 = 75°$.



в) Здесь дан вогнутый четырёхугольник. На основании суммы внутреннего и внешнего углов при вершине A: $x + 5x = 180° \to x = 30°$. Тогда, $\angle 1 = 30° + 28° + 24° = 82°$.

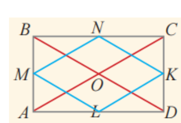


4. Биссектрисы AM и DM четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M под углом 86°. Задание выполняется поэтапно, на каждом этапе ученики обсуждают и находят необходимые величины.

• Сначала определяется $\angle MAD = 180° - (86° + 46°) = 48°$, $\angle BAD = 96°$, $\angle ADC = 92°$, $\angle B = 360° - (96° + 92° + 100°) = 72°$.

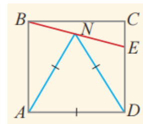
• Поскольку $\angle B + \angle C = 172°$ и $\angle AMD = 86°$, отмечается, что выполняется равенство $\angle AMD = (\angle B + \angle C) : 2$.

• В результате выполнения задания ученики приходят к выводу: *угол между биссектрисами двух смежных углов четырехугольника равен половине суммы двух других углов*. Истинность этого утверждения можно объяснить тем, что сумма внутренних углов треугольника, полученная из пересечения биссектрис, равна половине суммы внутренних углов четырехугольника. Поскольку сумма двух углов треугольника равна половине суммы двух углов четырехугольника, угол в вершине треугольника также равен половине суммы двух оставшихся углов четырехугольника. Это утверждение также можно проверить на различных примерах.



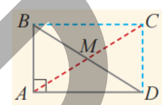
6. Ученики обращают внимание, что каждая диагональ прямоугольника ABCD делит его на два треугольника. В ходе обсуждения устанавливается, что средние линии треугольников ABD и BCD параллельны диагонали BD, а средние линии треугольников ABC и ACD параллельны диагонали AC и равны её половине. $MN = ML = NK = LK = 5$ см. Вспоминаются свойства ромба и обосновывается, что четырёхугольник $MNKL$ ромб. $P = 20$ см.

К сведению учителя! Иногда в таких случаях ученики ошибочно считают $MNKL$ квадратом из-за равенства его сторон и не обращают внимания на градусную меру углов. Учитель должен обратить внимание учеников на углы. Обосновывается, что четырехугольник является ромбом, потому что углы отличаются от 90°.



8. Перед выполнением задания целесообразно повторить с учениками сведения о квадрате, углах, высоте и биссектрисе равностороннего треугольника. Ученики определяют, что из равностороннего треугольника AND следует, что $\angle NAD = 60°$, а также из квадрата $\angle BAN$ = 90° – 60°= 30°. С другой стороны, треугольник ABN является равносторонним, потому что $AB = AD = AN$. Тогда из ΔABN следует, что $\angle BNA = (180° - \angle BAN) : 2 = 75°$. $\angle DNE = 180° - (60° + 75°) = 45°$, $\angle NDE = 30°$. Поскольку $BA \parallel CD$, то $\angle NEC = \angle ABN = (180° - 30°) : 2 = 75°$.

К сведению учителя! Решение этого задания может оказаться для учеников не таким уж простым. Полезно, чтобы ученики обосновали, на основании какого треугольника или какого правила находятся углы. Особенно следует объяснить, почему треугольник ABN является равнобедренным. При необходимости учитель должен направить учеников в нужное русло.

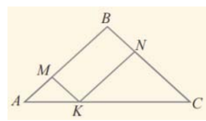


9. Факт о том, что в прямоугольном треугольнике высота, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, часто используется при решении задач на треугольники. Чтобы обосновать этот факт, ученики по данному указанию проводят медиану AM и продолжают её на такую же длину в противоположную сторону. Точки B и D соединяются с точкой C. Задание выполняется поэтапно, с ответами на вопросы.

• То, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом, обосновывается свойством из задания 13 на странице 117 учебника: *если диагонали четырёхугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.*

• Если $ABCD$ параллелограмм, то его противоположные углы равны. На основании этого свойства параллелограмм с одним прямым углом является прямоугольником

• Диагонали прямоугольника равны. Поскольку $AM = \frac{1}{2}AC$ и $AC = BD$, то $AM = \frac{1}{2}BD$.



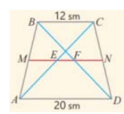
10. По условию ABC равнобедренный треугольник, а $MBNK$ параллелограмм, причём $AB = BC = 12$ см, $\angle A = \angle C = 40°$. Ученики анализируют рисунок и данные условия.

• Так как ABC равнобедренный треугольник и $\angle A = \angle C = 40°$, то $\angle B = 100°$. По свойствам противоположных и смежных углов параллелограмма углы параллелограмма $MBNK$ равны 100° и 80°.

• Поскольку $\angle BMK = 80°$, то $\angle AMK = 100°$, следовательно $\angle A = \angle K = 40°$. Треугольник AMK равнобедренный, значит $AM = MK$.

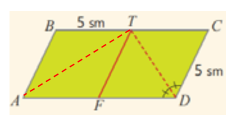
• Периметр параллелограмма $MBNK$ можно найти так.

$P = MK + MB + BN + NK = AM + MB + BN + NC =$ 12 см + 12 см = 24 см.



12. На рисунке проведены диагонали трапеции ABCD и её средняя линия MN. Средняя линия трапеции MN = 16 см. Отрезок MF — средняя линия треугольника ABD, поэтому MF = 10 см. Ученики уже знают, что ME — средняя линия треугольника ABC, а FN — средняя линия треугольника BCD. Тогда $ME = FN = 6$ см, $EF = EN - EF = 10 - 6 = 4$ см.

К сведению учителя! Часть средней линии трапеции, заключённая между диагоналями, равна половине разности оснований: $EF = \frac{AD-BC}{2} = \frac{20-12}{2} = 4$ см. Полезно обратить внимание учеников на эту формулу.



13. Данные на рисунке анализируются и исследуются учениками.

• В параллелограмме ABCD биссектриса DT образует равнобедренный треугольник DTC. Ученики обосновывают равнобедренность этого треугольника на основании свойства углов между параллельными прямыми и секущей. $TC = CD = 5$ см. Поскольку $TF \parallel AB \parallel CD$, то $TF = 5$ см. Следовательно, четырёхугольник $FTCD$ ромб. Ученики объясняют свойства ромба.

• Обсуждается, что диагональ ромба делит его на два равных треугольника. Если площадь треугольника CTD равна 8 см², то площадь ромба FTCD вдвое больше — 16 см².

• Поскольку стороны и углы параллелограммов ABTF и FTCD равны, то $ABTF \cong FTCD$.

• Так как площадь треугольника CTD равна 8 см², обосновывается, что площадь трапеции ABTD в 3 раза больше — 24 см². Учитель может дать ученикам некоторые указания для получения этого результата. Таким образом, площадь трапеции составляет 24 см².

• Аналогично устанавливается, что площадь параллелограмма ABCD равна 32 см².

К сведению учителя! В этом задании ученики должны находить площади трапеции и параллелограмма не по формуле, а как сумму площадей равных треугольников. Учитель может отметить, что формулы площадей этих фигур будут изучаться в старших классах.

14. Рассматривая план улиц на рисунке, ученики определяют, что он имеет форму трапеции, а улица «Чичекли» расположена на её средней линии. По маршруту пробега участники команды должны двигаться по сторонам трапеции. В ходе обсуждения выясняется, что длины оснований трапеции («Хейвалы» и «Чинарлы») неизвестны. Для нахождения длины маршрута достаточно знать их сумму. Ученики по формуле средней линии находят эту сумму. “Хейвалы” + “Чинарлы” = 2 · 150 м = 300 м. Следовательно, длина маршрута300 + 110 + 90 = 500 м. Команда должна пройти этот маршрут 4 раза.

Математический калейдоскоп

1. Запись любого нечётного числа в виде (2n + 1), а чётного — в виде 2n доводится до сведения учеников и объясняется. Обсуждается, как записываются последовательные нечётные и последовательные чётные числа. На основе выражений (2n + 1) и 2n ученикам показываются примеры получения последовательных нечётных и чётных чисел при различных целых значениях n.

а) Сумму любых двух последовательных нечётных чисел можно записать в виде $(2n + 1) + (2n + 3)$. Тогда $(2n + 1) + (2n + 3) = 4n + 4 = 4(n + 1)$. Так как n — целое число, выражение 4(n + 1) делится на 4.

б) Сумму любых трёх последовательных чётных чисел можно записать в виде $2n + (2n + 2) + (2n + 4)$. Тогда $2n + (2n + 2) + (2n + 4) = 6n + 6 = 6(n + 1)$. Так как n — целое число, выражение 6(n + 1) делится на 6.

2. а) Чтобы данное выражение было полным квадратом некоторого натурального числа, его показатель степени должен быть чётным. Тогда выражения $(2^5)^{13} = 2^{65}$ и $(7^{11})^{13} = 2^{143}$ не могут быть полными квадратами натурального числа, а выражение
$(5^6)^5 = 5^{30} = (5^{15})^2$ является полным квадратом числа 5^{15}.

б) Чтобы данное выражение было полным кубом некоторого натурального числа, его показатель степени должен делиться на 3. Тогда выражения $(2^5)^6=2^{30}=(2^{15})^3$ и $(9^9)^8=9^{72}=(9^{24})^3$ являются соответственно полными кубами чисел 2^{10} и 9^{24}, а выражение $(5^7)^8= 5^{56}$ не может быть представлено как полный куб натурального числа.

3. На первом этапе площадь вырезанного в центре треугольника составляет $\frac{1}{4}$ площади оставшегося треугольника. На втором этапе в каждом из трёх угловых треугольников снова вырезается средний треугольник. Так как площадь каждого углового треугольника равна $\frac{1}{4}$ площади исходного треугольника, то площадь каждого вновь вырезанного среднего треугольника равна $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$.

Таких треугольников 3, значит, на втором этапе вырезанная площадь равна $\frac{1}{16} \cdot 3 = \frac{3}{16}$.

Общая вырезанная площадь составляет $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$ часть от первоначальной площади.

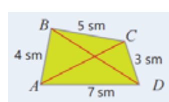
4. Это занимательное задание ученики могут решить, обсуждая его в группах. Решение можно представить следующим алгоритмом:

I. Одновременно переворачиваются песочные часы на 7 и 11 минут.

II. Когда заканчиваются 7-минутные часы, их сразу переворачивают снова. В этот момент в 11-минутных часах остаётся 4 минуты песка.

III. Когда заканчиваются оставшиеся 4 минуты в 11-минутных часах, 7-минутные часы снова немедленно переворачивают. Теперь 7-минутные часы стоят на стороне 4 минут.

IV. Когда заканчиваются эти 4 минуты, всего измерено 15 минут.



5. Так как при решении этого задания используется неравенство треугольника, целесообразно напомнить ученикам это правило. Рассматриваются два случая: 1) BD = 8 см; 2) AC = 8 см.

1) Если BD = 8 м, то для треугольника ABD неравенство треугольника выполняется, а для треугольника BCD — нет. Значит, BD не может быть равно 8 см.

2) Если AC = 8 см, то и для треугольника ACD, и для треугольника ABC неравенство треугольника выполняется.

Следовательно, диагональю длиной 8 см является AC.

АРОЧНЫЕ КОНСТРУКЦИИ В АРХИТЕКТУРЕ

Учитель поручает ученикам собрать информацию об арочных конструкциях: где они впервые появились, в каких сооружениях применялись. Собранная учениками информация обсуждается. Целесообразно продемонстрировать на рисунках, как в арках используются блоки призматической формы.

1. По данным на рисунке ученики записывают выражение для вычисления полной площади верхней и нижней поверхности арки. Верхняя поверхность состоит из прямоугольников со сторонами b и c, нижняя — со сторонами a и c. $S_{верх} = 9bc$ и $S_{ниж} = 9ac$.

При a = 75 см, b = 95 см, c = 2 м = 200 см получаем $S_{верх}$ = 17,1 м^2, $S_{ниж}$ = 13,5 м^2. При

2. По боковому изображению арки ученики определяют, что каждая арка соответствует дуге полуокружности в 20°, и находят углы трапеций.

3. Ученики собирают в интернете информацию о видах арок, их частях, областях применения и истории возникновения, готовят презентацию. В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:

https://www.geogebra.org/m/q3f7ekpr *https://www.geogebra.org/m/vZNteh9V*

4. Ученики разрабатывают проект арки в определённом стиле, определяют её размеры и количество необходимых блоков.

6-й РАЗДЕЛ

Функция

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	6	
Тема 6.1	Функция	2	7	3
Тема 6.2	График функции	2	11	6
Тема 6.3	Линейная функция и ее график	4	14	9
	Обобщающий урок. STEAM. “Путешествие в галактику Андромеды”	2	20	12
	МСО 1	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	12		

Краткий обзор раздела

В разделе вначале проверяются умения учеников отмечать точку в прямоугольной системе координат, определять координаты заданной точки, читать график; вспоминаются свойства прямой и обратной пропорциональной зависимости, с использованием их графиков решаются задачи. Затем вводятся понятия «функциональная зависимость», «функция». Объясняются способы задания функции, строится её график и исследуется его чтение, формируются умения получать различную информацию по графику. Рассматриваются линейная функция, её график, угловой коэффициент k и его нахождение, а также положение графика в зависимости от знака углового коэффициента

На что стоит обратить внимание?

Понятие «функция» иногда трудно воспринимается учениками. Так, выражение соответствия между входными и выходными элементами с помощью особого правила — функции — может быть не сразу понятно ученикам. Учитель должен обратить внимание на основную цель темы «Функция»: функция — это средство для описания и понимания соответствия между переменными. Это соответствие может быть выражено в различных формах: с помощью математических символов, графиков, таблиц, устного описания, ситуативных примеров и т. д.

Необходимо чётко объяснить, что изменение значения одной величины вызывает изменение значения другой величины. При объяснении таких величин целесообразно приводить больше примеров.

В теме «Линейная функция» ученики чаще всего испытывают трудности при установлении связи между способами задания функции, а также при получении информации об угловом коэффициенте k и свободном члене b по положению прямой. Поэтому полезно, чтобы учитель уделял больше внимания заданиям такого типа и их решению.

Развитие математического языка

В данном разделе вводятся и изучаются понятия «диаграмма соответствия», «функциональная зависимость», «функция», «зависимая переменная», «независимая переменная», «аргумент», «область определения», «множество значений», «линейная функция», «угловой коэффициент». Усвоение темы во многом зависит от правильного понимания новых понятий.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Диаграмма соответствия, функциональная зависимость, функция, зависимая переменная, независимая переменная, аргумент, область определения, множество значений, график функции, линейная функция, угловой коэффициент.

Необходимые предварительные знания и умения:

- Математические закономерности
- Свободные и зависимые величины
- Прямая и обратная пропорциональная зависимость
- Графическое представление зависимости
- Координаты точки
- Определение точки по её координатам

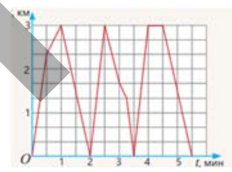
Междисциплинарная интеграция

Понятие «функция» широко используется в различных областях. Очень часто в повседневной жизни оно употребляется и как синоним слов «роль», «назначение». Функция прежде всего используется для описания зависимости явлений друг от друга, иными словами, причинно-следственных связей. Определение закономерностей в природе позволяет делать определённые прогнозы. Построение математических моделей процессов помогает формально выразить зависимости. График функции позволяет визуально анализировать эти зависимости. Знания и умения, полученные учениками по теме функции, применяются ими при решении различных задач по физике, химии, географии и другим предметам.

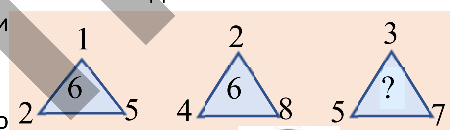
ТЕМА 6.1. Функция

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.3.1. Демонстрирует наличие первоначального представления о понятии функции.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Представляет понятие «функция» как соответствие между двумя величинами. • Различает способы задания функции. • Решает задачи, относящиеся к функциональной зависимости.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, рабочая тетрадь
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://phet.colorado.edu/az/simulations/function-builder* Задание: *https://www.abcmouse.com/learn/game/function-machine-fun* *https://media.pearsoncmg.com/intl/pec/school/mathtv2/global/pcmg/math_tools/iomachine/index.html*

Обсуждение исходной задачи



Материал, представленный на первой странице раздела, а также задача, приведённая под заголовком «Попытайтесь!», обсуждаются. Исследуется условие задачи и обсуждаются зависимости между величинами, изображёнными на графике, выслушиваются мнения учеников. После изучения тем раздела и формирования навыков чтения графиков в конце раздела решение этой задачи снова обсуждается, объясняются моменты, которые не были понятны на первом уроке.



Побуждение

Для побуждения ученикам можно предложить несколько заданий, связанных с математическими закономерностями, знакомыми им из младших классов.

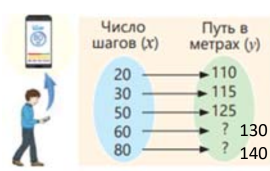
Либо можно предложить такую задачу: «Если из 1 ведра молока получают 300 г масла, то сколько масла получится из 2, 3, 6 вёдер молока?» В этом случае устанавливается связь между количеством вёдер молока и количеством полученного из него масла. Выслушиваются и обсуждаются ответы учеников. Ученикам можно предложить привести ещё несколько подобных примеров. Озвученные примеры обсуждаются.

В классах с техническими возможностями можно использовать видеоматериалы:

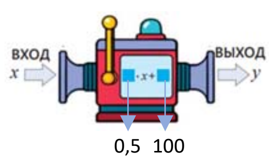
https://www.pbslearningmedia.org/resource/mgbh-math-ee-repfun/representing-functions/

https://youtu.be/lEhf75ma7Ww

Исследование-обсуждение



$y = 0{,}5x + 100$



Ситуация, представленная в исследовании, обсуждается совместно с учениками. Выслушиваются мнения учеников о длине пути, который прошёл Анар до магазина и после выхода из магазина. Исследуется связь между данными, представленными в диаграмме соответствия, и подбираются подходящие числа вместо знака «?».

Ученики на основе диаграммы соответствия определяют входные и выходные элементы вычислительной машины и записывают соответствующую зависимость: $y = 0{,}5x + 100$. Обращается внимание на то, почему соответствующие элементы в вычислительной машине являются входными и выходными.

В классах с техническими возможностями полезно использовать видеоматериалы:

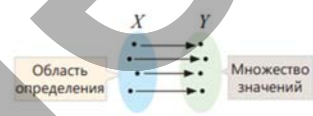
https://media.pearsoncmg.com/intl/pec/school/mathtv2/global/pcmg/

math_tools/iomachine/index.html

Изучение **Функция**

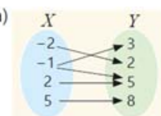
В примере отмечается, что зависимость длины пути (s), пройденного автомобилем, движущимся со скоростью 70 км/ч, от затраченного на этот путь времени (t) задаётся формулой $s = 70t$.
В диаграмме соответствия, приведённой в изучении, показана длина пути, пройденного за 1 час, 2 часа и 2,5 часа. Подчёркивается, что каждому значению независимой переменной соответствует только одно значение зависимой переменной.
В классах с техническими возможностями для объяснения темы можно использовать видеоматериалы: *https://www.geogebra.org/m/trcyjuqm,* *https://www.geogebra.org/m/jydj7gub*

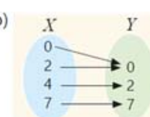
К сведению учителя! При объяснении функциональной зависимости или понятия «функция» необходимо обратить внимание учеников на то, что независимая или свободная переменная называется аргументом, а зависимая переменная — функцией этого аргумента. При этом особо следует отметить важность правильного использования понятий. Можно на примерах показать, какая переменная называется аргументом, а какая — зависящей от неё функцией. Для этого целесообразно дать информацию и о других значениях понятий аргумент и функция. Приводится обозначение аргумента через x, функции — через y, а также запись зависимости y от x в виде y(x). В 7-м классе нет необходимости подробно рассматривать область определения и множество значений функции. Эти понятия будут более глубоко изучаться в старших классах после знакомства с различными числовыми множествами. В теме даётся краткая информация, связанная с этими понятиями.

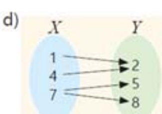


Анализируя пример из учебника, подчёркивается, что для некоторых функций по смыслу их область определения и множество значений не являются произвольными, а принимают определённые значения. Для нахождения площади квадрата со стороной a можно использовать таблицу с целью описания области определения и множества значений функции $S = a^2$. При этом обязательно следует обратить внимание учеников на то, что a и S принимают только положительные значения. Однако также необходимо довести до внимания учеников, что область определения и множество значений функции не всегда бывают только положительными. Рассматривая различные примеры, можно изучить разные случаи.

Задания

a)


b)


d)


1. Перед выполнением задания целесообразно напомнить, какая зависимость является функциональной, а какая — нет. Для этого можно проанализировать пример задания. Объясняются символы, представленные в диаграмме соответствия: элементы X и Y, связь между ними, направление стрелки и то, какой элемент какому элементу соответствует; подчёркивается, что одному элементу X соответствует только и только один элемент Y.
Как видно из диаграммы в пункте б), каждому элементу X соответствует только один элемент Y. Обращается внимание на то, что двум элементам X, таким как 0 и 2, соответствует один элемент Y. Этот случай должен быть специально проанализирован учителем. То есть, несмотря на то что двум различным значениям аргумента соответствует одно значение функции, согласно определению, данное соответствие является функциональной зависимостью.
В пункте г) отмечаются элементы X и Y. Элементам X, равным 1 и 4, соответствует один элемент Y (2). Однако элементу X, равному 7, соответствуют два элемента Y (5 и 8). Поскольку двум элементам множества X (1 и 4) соответствует один элемент множества Y (2), данное соответствие не является функциональной зависимостью.

К сведению учителя! В представленных диаграммах нескольким элементам множества X может соответствовать только один элемент множества Y и, наоборот, одному элементу множества X могут соответствовать несколько элементов множества Y. Очень важно различать эти два случая. Ученикам следует объяснить, что первый случай (одному или нескольким элементам X соответствует только один элемент Y) является функциональной зависимостью, а второй случай (одному элементу X соответствует несколько элементов Y) не является функциональной зависимостью.

В классах с техническими возможностями можно использовать данные ссылки:
https://www.geogebra.org/m/bhqzbpvc , https://www.geogebra.org/m/fyk2nsve
https://www.geogebra.org/m/kgrwy6ax, https://www.geogebra.org/m/fyk2nsve

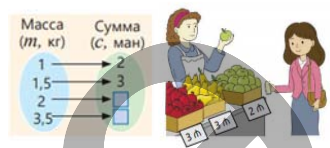
Дифференцированное обучение

Поддержка. Учитель изображает на доске несколько диаграмм. Ученикам предлагается определить входные и выходные элементы. Ученики проверяют результаты друг друга.

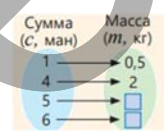
Углубление. Учитель может предложить ученикам несколько более сложных диаграмм соответствия и поручить определить, является ли соответствие функциональной зависимостью. При выполнении задания ученики проверяют правильность ответов друг друга.

3. На основе условия задачи для двух случаев изображены диаграммы.

а) Здесь входными элементами являются значения массы, а выходными элементами — сумма, оплачиваемая за каждую массу. То есть в качестве независимой величины берутся значения m, а в качестве зависимой величины — значения c. Закономерность между m и c имеет вид c = 2m, и значение величины c зависит от m. Следовательно, в пустые клетки диаграммы записываются числа 4 и 7.



б) В этом пункте входными элементами являются значения оплаченной суммы, а выходными элементами — значение массы. То есть в качестве независимой величины берётся c (оплаченная сумма), а в качестве зависимой величины — m (масса купленного на эту сумму яблока). Закономерность между c и m имеет вид m = 0,5c. Значение m зависит от c. В пустые клетки записываются числа 2,5 и 3.



Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики испытывают трудности при определении зависимости между величинами и допускают ошибки. Одной из основных причин этого связана с неправильным определением того, какая величина является зависимой, а какая — независимой. Можно привести два примера с одними и теми же величинами.

В приведённых примерах определите зависимые и независимые величины.
1) Если пешеход проходит 20 км за 4 часа, то за сколько часов он пройдёт 30 км с той же скоростью?
2) Пешеход за 4 часа проходит 20 км. Если он будет двигаться с той же скоростью, то сколько километров он пройдёт за 5 часов?

Ложно В обоих случаях расстояние зависит от времени.

Верно 1) Здесь расстояние является независимой переменной, а время — функцией. Так как в этом случае время определяется по заданному расстоянию.
2) В этом случае время является независимой переменной, а расстояние зависимой переменной. Так как по условию расстояние определяется по затраченному времени.

Изучение Способы задания функции

После первоначальных знаний о функции очень важно объяснить ученикам, каким образом задаётся функция или какими способами представляются зависимости между величинами. Разумеется, ученики уже ранее сталкивались с различными способами представления зависимостей между двумя величинами. В данной теме объясняется задание функции с помощью формулы, таблицы и графика.

К сведению учителя! Полезно обсудить с учениками, в каких случаях какой способ задания функции является более удобным. Так, представление изменения температуры с помощью формулы или определение закономерности между величинами в данных, представленных в виде таблицы, может вызывать трудности. По этой причине следует подчеркнуть значение способов задания функции.

Подумай!

Для определения наибольшей и наименьшей температуры воздуха в течение дня по графику, приведённому в учебнике, ученикам сначала предоставляется возможность свободно высказать свои мысли. Затем проводится обсуждение со всем классом. При этом основной целью является формирование умений читать связь между двумя величинами по графику. Поскольку ученики знакомы с подобными заданиями из младших классов, данный вопрос не вызывает трудностей. На основе графика определяется, в какие часы дня наблюдались эти температуры:
$T(0) = -2°C$ и $T(16) = 3°C$.

Дифференцированное обучение

Поддержка. В двухместный мотоцикл, помимо водителя, может сесть 1 пассажир, в пятиместный легковой автомобиль — 4 пассажира, а в девятиместный автомобиль — 8 пассажиров. Определяется зависимость между количеством мест и числом пассажиров в транспортных средствах с одним водителем, приводятся примеры транспортных средств, вмещающих большее количество пассажиров (например, многоместные автобусы, поезда и т. д.). Результат предлагается представить в виде таблицы и формулы.

x	2	5	9			
y	1	4	8			

Углубление. Ученикам можно предложить определённые графики и поручить составить таблицу, соответствующую зависимости между величинами, а если возможно, то записать формулу этой зависимости.

Ученикам можно предложить ознакомиться с информацией рубрики «Из истории математики». Также возможно дать дополнительные интересные сведения о функции.

Решение задач

7. Ученики умеют находить длину окружности и площадь круга. В данном задании длина окружности и площадь круга рассматриваются как функции, зависящие от его диаметра; ученики понимают, что между длиной окружности и диаметром, а также между площадью круга и диаметром существует функциональная зависимость.

Решение задачи:

а) Определяется зависимость длины окружности от диаметра по формуле $C = \pi d$.

$C = \pi d \approx 3 \cdot 3 = 9$ см, $C = \pi d \approx 3 \cdot 4 = 12$ см, $C = \pi d \approx 3 \cdot 5{,}1 = 15{,}5$ см.

б) Зависимость площади круга от его диаметра определяется формулой $S = \pi \frac{d^2}{4}$.

$S = \pi \frac{d^2}{4} \approx 3 \cdot \frac{1{,}2^2}{4} = 1{,}08$ мм^2, $S = \pi \frac{d^2}{4} \approx 3 \cdot \frac{3^2}{4} = 6{,}75$ см^2, $S = \pi \frac{d^2}{4} \approx 3 \cdot \frac{4{,}2^2}{4} = 13{,}23$ дм^2.

Дифференцированное обучение

Поддержка. Учитель может предложить ученикам записать формулы зависимости длины окружности и площади круга от радиуса. Для заданных значений радиуса выполняются соответствующие вычисления.

Углубление. Ученикам можно предложить рассматривать радиус окружности как функцию, зависящую от её длины, и поручить записать формулы нахождения радиуса или диаметра окружности по её длине. Для заданных значений длины окружности выполняются соответствующие вычисления.

8. *Решение задачи*:

а) Цена одной тетради составляет 50 гяп. = 0,5 маната. Известно, что куплено x тетрадей. Если общая сумма равна 3,5 маната, то при покупке x тетрадей сумма, заплаченная за тетради, должна быть вычтена из общей суммы. То есть формула функциональной зависимости между количеством купленных тетрадей и заплаченной за них суммой записывается в виде$y(x) = 3{,}5 - 0{,}5x$.

б) Для соответствующих значений x и y составляется таблица.

x	1	2	3	4	5	6	7
$y(x)$	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0

К сведению учителя! Учитель обращает внимание учеников на возможные значения x и y. Он может направлять учеников, задавая следующие вопросы: «Сколько максимум тетрадей можно купить на 3,5 маната? Какое условие должны удовлетворять значения x и y?» «Почему невозможно купить более 7 тетрадей?» «Из каких чисел состоят область определения функции и множество её значений?»

9. Перед решением задачи целесообразно дать информацию о нормальном атмосферном давлении.

в) Функциональная зависимость между глубиной и давлением выражается формулой $P = 1 + 0{,}1h$.

11. В задаче определяется связь между высотой, на которую поднялся альпинист, и временем, затраченным на подъём. Ученики, обсуждая, на основе данного графика определяют, за сколько минут на какую высоту поднялся альпинист. При этом следует отметить, что рассматривается средняя скорость. Ученики отвечают на вопросы по графику.

а) Альпинист поднялся на максимальную высоту 3000 м.

б) На наибольшую высоту он поднялся со средней скоростью $v = 3000 : 150 = 20$ м/мин.

в) На возвращение альпинист затратил 100 минут.

12. Объявления туров, предлагаемых для морской прогулки, изучаются учениками. Известно, что в первом прогулочном туре за каждый час оплачивается 4 маната и предварительная оплата отсутствует. Для второго тура предусмотрена предварительная оплата в размере 6 манатов и 1 манат за каждые полчаса.

а) Для первого тура сумма, оплачиваемая за x часов прогулки, рассчитывается по формуле $y = 4x$, а для второго тура — по формуле $y = 6 + 2x$. В формуле $y = 6 + 2x$ необходимо особо отметить смысл коэффициента 2.

б) При x = 2 часа и x = 4 часа рассчитывается сумма, оплачиваемая за каждый тур.

I тур: $y(2) = 4 \cdot 2 = 8$ ман. и $y(4) = 4 \cdot 4 = 16$ ман.

II тур: $y(2) = 6 + 2 \cdot 2 = 10$ ман. и $y(4) = 6 + 2 \cdot 4 = 14$ ман.

Как видно, для двухчасовой прогулки более выгоден I тур, а для четырёхчасовой прогулки — II тур.

в) Чтобы определить, за сколько часов прогулки туры предлагают одинаковую сумму, можно приравнять оплачиваемые суммы: $4x = 6 + 2x$. Полученное уравнение решается, и определяется x = 3 часа.

К сведению учителя! Ученики могут испытывать трудности при определении зависимости между уплачиваемой суммой и временем прогулки, особенно для формулы второго тура. В формуле y = 4x число 4 означает сумму, оплачиваемую за 1 час прогулки в первом туре. Для второго тура отмечается, что за полчаса, то есть за 0,5 часа, оплачивается 1 манат, следовательно, за 1 час необходимо заплатить 2 маната. Коэффициент 2 в формуле $y = 6 + 2x$ выражает сумму, оплачиваемую за 1 час.

При решении данного задания целесообразно составить таблицу, отражающую сумму, оплачиваемую за каждый час:

Туры	Формула	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$	$x = 7$
I тур	$y = 4x$	4	8	**12**	16	20	24	28
II тур	$y = 6 + 2x$	8	10	**12**	14	16	18	20

Как видно из таблицы, при x = 3 часа за оба тура оплачивается одинаковая сумма. При x > 3 часов более выгодной становится прогулка по II туру, что наглядно видно из таблицы.

В конце темы целесообразно провести обобщение, а также ещё раз обсудить изученный материал совместно с учениками.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Представляет понятие «функция» как соответствие между двумя величинами.	Рабочие листы, учебник, РТ
Определяет, каким способом задана данная функция, и представляет функцию, заданную одним способом, другим способом.	Рабочие листы, учебник, РТ
В задачах на зависимость между двумя величинами определяет независимую и зависимую величины, записывает зависимость между ними различными способами	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 6.2. График функции

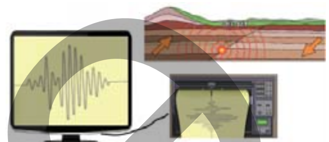
ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.3.1. Демонстрирует наличие первоначального представления о понятии функции.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет изменение функции по аргументу у функции, заданной графиком. • Читает информацию, представленную на графике. • Решает различные задачи, связанные с чтением графика.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, рабочая тетрадь
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/1046* *https://www.geogebra.org/m/gsk3qhxd* Задание: *https://www.geogebra.org/m/WXjrvFAv* *https://www.geogebra.org/m/evpekdp7*

Побуждение

С целью введения в тему учитель может представить различные графики. Например, электрокардиограмма является графическим изображением сердцебиения и сердечного ритма человека. Полученный здесь график даёт подробную информацию о количестве и ритме сердечных сокращений.
Или же на биржах изменение цен ценных бумаг и акций более наглядно представляется с помощью графиков. Задавая вопросы, учитель может вместе с учениками обсуждать изменение линий.

Исследование-обсуждение

В исследовании приводится информация о приборе сейсмографе. В классах с доступом к интернету можно обратиться к сайтам для получения информации об этом приборе.



Ученики знакомятся с информацией об использовании прибора, называемого сейсмографом, для регистрации подземных толчков во время землетрясений, и обсуждается принцип его работы. На заданные вопросы, обращённые к ученикам, даются ответы.

• Выслушиваются ответы учеников на вопрос: «Как можно объяснить связь между частотой или редкостью толчков и плотностью линий?» Совместно обсуждается и разъясняется, что при частых толчках часть, удерживающая бумагу, также часто вибрирует, в результате чего расстояние между вертикальными линиями уменьшается. При сильных толчках бумага вибрирует сильнее, вследствие чего увеличивается и высота линий.

• Если перо сейсмографа чертит только прямую линию, это означает отсутствие колебаний, то есть землетрясение не произошло (или землетрясение прекратилось).

Изучение График функции

График наглядно изображает, как функция изменяется в зависимости от аргумента. Учитель на основе приведённых примеров отмечает, что абсцисса каждой точки графика показывает значение аргумента, а ордината — соответствующее значение функции. Обращается внимание на возможность нахождения по графику соответствующего значения функции для каждого значения аргумента или, наоборот, значения аргумента для каждого значения функции. По графику координаты точки во многих случаях находятся приближённо. Приведённый в учебнике график зависимости высоты дерева от его возраста исследуется вместе с учениками. По графику определяется высота дерева по возрасту или возраст по заданной высоте. Можно предложить ученикам таблицу и поручить заполнить её на основе графика. Здесь обращается внимание на приближённое нахождение некоторых координат. Например, в возрасте 50 лет высота дерева составляет приблизительно 22 м.

x	20	30	40	50	60	80	90	100
$y(x)$	10	15	20	22	23	24	24,5	25

Подумай!

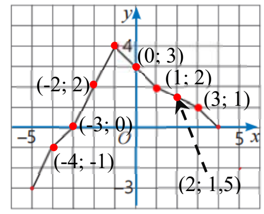
В данной рубрике, относящейся к теме, приведённый вопрос относится к прямой пропорциональной зависимости. На этот вопрос ученики могут ответить несколькими способами. Самый простой способ — подставить значения аргумента в функцию $y = 3x$ и найти значения функции. Ученики могут ответить на этот вопрос и более простым способом. Для этого необходимо проверить отношение ординаты к абсциссе в каждой паре чисел. Если это отношение равно 3, значит данная пара чисел принадлежит графику функции $y = 3x$.

Задания

1. В первом задании по данному графику отвечают на вопросы. Основная цель здесь — определение и запись учениками абсциссы и ординаты точек, расположенных на графике.

а) $x = -4$, то $y = -1$;
$x = -3$, то $y = 0$;
$x = 0$, то $y = 3$;
$x = 1$, то $y = 2$;
$x = 2$, то $y \approx 1{,}5$;
$x = 3$, то $y = 1$.

б) Здесь некоторым значениям y соответствуют два значения x. Эти случаи учитываются.
$y = -1$, то $x = -4$;
$y = 0$, то $x = -3$ и $x = 4$;
$y = 2$, то $x = -2$ и $x = 1$;
$y = 4$, то $x = -1$.



в) Под наибольшим и наименьшим значениями функции понимаются соответственно наибольшее и наименьшее значения y, принимаемые на изображённом промежутке. По графику наибольшее значение y равно 4, а наименьшее −3. По изображению можно обратить внимание на то, что множество значений функции состоит из чисел от −3 до 4. Значение y = −3 функция принимает при x = −5, а значение y = 4 при x = −1.

3. Для проверки принадлежности данных точек графику функции в формулу подставляется абсцисса точки и проверяется, совпадает ли полученное число с данной ординатой.

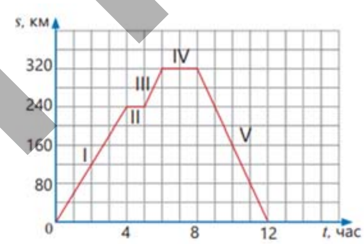
а) При x = −1 получаем y = x − 4 = −5. Поскольку координаты данной точки равны (−1; −3), эта точка не принадлежит графику.

При x = 2 получаем y = x − 4 = −2. Поскольку координаты данной точки равны (2; −2), эта точка принадлежит графику.

При x = 0 получаем y = x − 4 = −4. Поскольку координаты точки равны (0; −4), эта точка принадлежит графику.

В остальных пунктах данные точки проверяются аналогичным образом.

Изучение Чтение графиков



Обсуждается, каким образом по положению линий на данном графике можно получить информацию о движении грузового автомобиля. График исследуется вместе с учениками, и по положению каждой линии в результате обсуждения определяется направление движения грузового автомобиля, его скорость, пройденное расстояние, удаление от склада или приближение к складу и т. д.

К сведению учителя! Ученики иногда понимают ситуацию возвращения грузового автомобиля как изображение прямой линии, возвращающейся к началу координат. Следует обратить внимание на то, что удаление грузового автомобиля от склада при движении и приближение к складу при возвращении происходят в разные моменты времени. Целесообразно подробно обсудить этот момент с учениками.

В классах, имеющих технические возможности, можно использовать следующую ссылку:
https://www.geogebra.org/m/gsk3qhxd

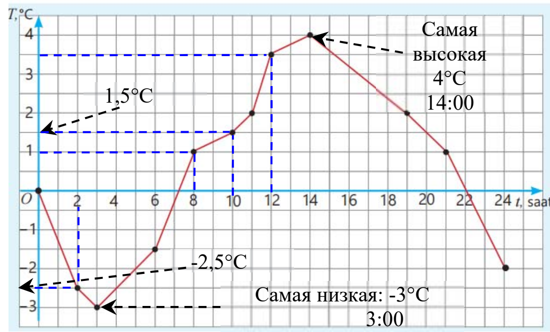
Подумай!

Ученики, продолжая исследование по данному графику, учитывая, что скорость грузового автомобиля остаётся постоянной, определяют скорость на участках I, II, III, IV и V.

- На участке I его средняя скорость равна 240 : 4 = 60 км/ч.
- На участке II его средняя скорость равна 0 : 1 = 0 км/ч.
- На участке III за 1 час грузовой автомобиль проходит 80 км, то есть его скорость составляет 80 км/ч.
- На участке IV его средняя скорость равна 0 : 2 = 0 км/ч.
- При возвращении, то есть на участке V, его средняя скорость равна 320 : 4 = 80 км/ч.

Расстояние 240 км от склада соответствует уровню линии II, что соответствует значениям t = 4 и t = 9. Если известно, что грузовой автомобиль начал движение в 22:00, то моменты времени, когда он находится на расстоянии 240 км от склада, приходятся на 02:00–03:00 и 07:00.

5. На данном графике изображена зависимость температуры воздуха в течение суток от времени. Ученики отвечают на вопросы на основе графика.

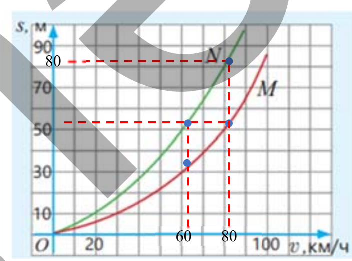


в) В течение суток самая низкая температура составила −3 °C в 3:00, а самая высокая температура 4 °C в 14:00.

г) В промежутке между 6 и 8 часами температура повысилась с −1,5 °C до 1 °C, то есть изменилась на 2,5 °C. В промежутке между 8 и 10 часами температура повысилась с 1 °C до 1,5 °C, то есть изменилась на 0,5 °C. В первом случае изменение температуры было больше. Это можно определить и по графику. Путём обсуждения с учениками проводится пояснение на графике.

д) В начале дня температура воздуха была 0 °C (в 0:00), а в конце дня (в 24:00) −2 °C. Температура в течение суток понизилась на 2 °C.

Решение задач



7. На графике изображена зависимость тормозного пути автомобиля от скорости на мокром и сухом асфальте. Для лучшего понимания условия задачи целесообразно сначала дать ученикам определённую информацию о тормозном пути.

Тормозной путь — это расстояние, которое транспортное средство проходит с момента срабатывания тормозной системы до полной остановки.

а) При сравнении ординат точек, соответствующих одинаковым абсциссам на линиях N и M, видно, что тормозной путь N больше. Следовательно, N — мокрый асфальт, а M — сухой асфальт.

б) Тормозной путь автомобиля, движущегося со скоростью 60 км/ч, на мокром асфальте (N) составляет 50 м, а на сухом асфальте (M) — 30 м.

в) Если тормозной путь на сухой дороге (M) равен 50 м, то автомобиль двигался со скоростью 80 км/ч. При этой скорости тормозной путь автомобиля на мокрой дороге (N) составит 80 м.

г) Тормозной путь автомобиля, движущегося со скоростью 70 км/ч по сухой дороге (M), составляет 40 м. Следовательно, он остановится, не доехав до препятствия, находящегося на расстоянии 45 м.

В конце урока проводится обобщение, изученный материал обсуждается вместе с учениками.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Объясняет изменение функции по аргументу у функции, заданной графиком.	Рабочие листы, учебник, РТ
Читает информацию, представленную на графике	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает различные задачи, связанные с чтением графика.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 6.3. Линейная функция и ее график

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.3.2. Объясняет понятие линейной функции. 7-2.3.3. Строит график линейной функции.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• В линейной функции объясняет изменение значения функции в зависимости от значения аргумента и изменение аргумента в зависимости от значения функции. • Строит график линейной функции или по графику считывает информацию.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, рабочая тетрадь
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://phet.colorado.edu/az/simulations/graphing-lines* https://video.edu.az/video/9262 *https://www.geogebra.org/m/djbCPanD* Задание: *https://www.geogebra.org/m/pvvcyzts* *https://www.mathspad.co.uk/interactives/linearGraphsTool/linearGraphsTool.php*

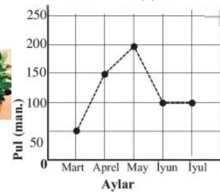
Побуждение

Ученикам предлагаются различные графики, и по этим графикам проводится опрос.

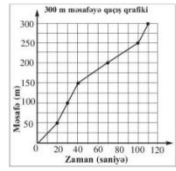
Например, по графику роста растения фикус можно задать такие вопросы: «Через сколько недель высота растения фикус стала 22 см?», «Какой была его высота на 8-й неделе?», «Какой была высота фикуса в начале измерений?», «На какой неделе высота фикуса составила 26 см?» и т. д. Ученики могут составлять и отвечать на вопросы по графику. Здесь обсуждается, как по любому значению одной переменной найти соответствующее значение другой переменной.

График роста фикуса

Сэкономленные деньги

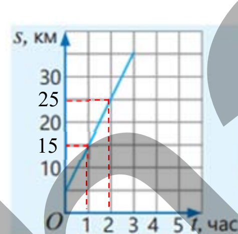


Зависимость между временем и расстоянием



Исследование-обсуждение

В исследовании на основе данного графика изучается зависимость расстояния, которое Эльхан проходит пешком и на скутере, от времени.



• Из графика видно, что через 1 час после начала езды на скутере Эльхан находится на расстоянии 15 км от дома, через 2 часа — на расстоянии 25 км.

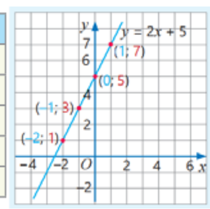
• Поскольку в момент начала езды на скутере Эльхан находился на расстоянии 5 км от дома, а через 1 час — на расстоянии 15 км, скорость движения на скутере находится следующим образом: $\vartheta = (15 - 5) : 1 = 10$ км/час.

• Формула зависимости расстояния Эльхана от дома от времени, затраченного на преодоление этого расстояния, записывается в виде $s = 10t + 5$. Эта формула обсуждается вместе с учениками. Разъясняются такие вопросы, как: «Что выражает 10t?», «Почему к нему прибавляется 5?» и т. п.

Изучение Линейная функция и её график

Из приведённой в исследовании задачи видно, что график зависимости между длиной пройденного пути и временем, затраченным на этот путь, является прямой линией. То есть эти величины линейно зависят друг от друга. Учитель объясняет линейную зависимость, раскрывает понятие «линейная функция», обращает внимание на её определение.

$y = 2x + 5$		
x	y	$(x; y)$
-2	1	$(-2; 1)$
-1	3	$(-1; 3)$
0	5	$(0; 5)$
1	7	$(1; 7)$



Пример, приведённый в учебнике, исследуется вместе с учениками, находятся значения y при различных значениях x, полученные точки отмечаются в прямоугольной системе координат и соединяются прямой линией.

При объяснении темы полезно использовать видеоматериалы: *https://video.edu.az/video/10364, https://media.pearsoncmg.com/intl/pec/school/mathtv2/global/pcmg/math_tools/coordinategrapher/index.html?mode=2*

Запомни!

Обращается внимание на данное утверждение. Особо подчёркивается, что график линейной функции представляет собой прямую линию. Поскольку через две точки проходит одна и только одна прямая, при построении графика линейной функции достаточно знать координаты двух точек. Целесообразно привести несколько примеров.

Задания

1. В задании для определения того, является ли функция, заданная формулой, линейной функцией, каждое равенство приводится к виду $y = kx + b$.

Ложные представления, возникающие у учеников: Ученики иногда допускают ошибки при определении k и b. Учитель должен обратить внимание учеников на приведение формулы к виду $y = kx + b$.

Определите k и b в данных функциях. а) $y = \frac{6x-8}{2}$ б) $y = -\frac{4+9x}{3}$

Ложно а) $y = \frac{6x-8}{2}$ здесь $k = 6$, $b = -8$. б) $y = -\frac{4+9x}{3}$ здесь $k = -4$, $b = 9$.

Верно Данные функции приводятся к виду $y = kx + b$.

а) $y = \frac{6x-8}{2} = \frac{6}{2}x - \frac{8}{2} = 3x - 4$ здесь $k = 3$, $b = -4$.

б) $y = -\frac{4+9x}{3} = \frac{-4}{3} + \frac{9}{3}x = -1\frac{1}{3} + 3x$ здесь $k = 3$, $b = -1\frac{1}{3}$.

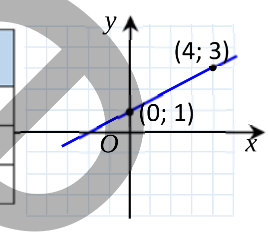
3. Ученики по заданной формуле находят координаты двух точек и, отмечая их в прямоугольной системе координат, строят график. При решении задания полезно использовать следующую ссылку: *https://www.mathspad.co.uk/interactives/linearGraphs2/linearGraphs2.php*

К сведению учителя! При построении графика функции ученики должны выбирать такие значения x, чтобы изображение графика в тетради было удобным. Такие значения обычно берутся вблизи начала координат, и нанесение полученных чисел в прямоугольной системе координат не должно вызывать затруднений. Например, в пункте е) в формуле $y = \frac{1}{2}x + 1$ целесообразно задавать чётные значения x, так как в этом случае для y получится целое число и точку будет легче отметить в прямоугольной системе координат.

$x = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 = 1$

$x = 4 \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 4 + 1 = 3$

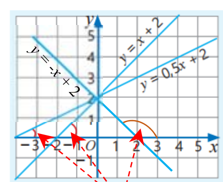
$y = \frac{1}{2}x + 1$		
x	y	$(x; y)$
0	1	(0; 1)
4	3	(4; 3)



Когда координаты являются дробными или большими числами, их нанесение требует определённой точности и является менее удобным.

Изучение Угловой коэффициент *k* графика линейной функции

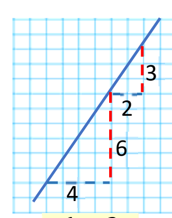
Обращается внимание учеников на положительное направление оси Ox в прямоугольной системе координат. Показывается угол, который образует любая прямая с положительным направлением оси Ox и который расположен в верхней полуплоскости, приводятся примеры. Обучение проводится на основе графиков различных линейных функций. Обсуждается, под каким углом эти графики пересекают ось абсцисс. Таким образом определяется, что вид угла, образуемого графиком линейной функции $y = kx + b$ с осью абсцисс, зависит от знака коэффициента k.



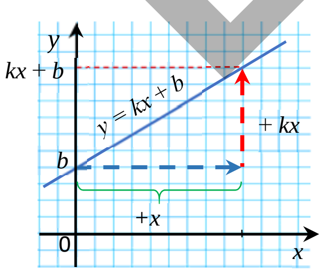
Угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox

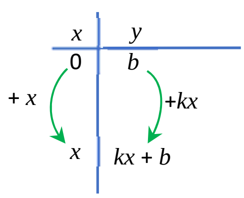
К сведению учителя! Одним из основных свойств линейной функции является постоянство отношения изменений значений функции и аргумента, соответствующих любым двум значениям аргумента. Эта постоянная является угловым коэффициентом графика линейной функции.

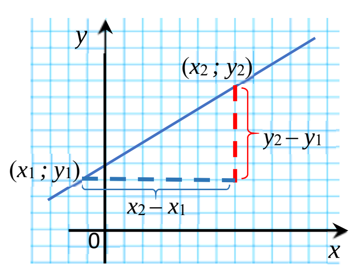
Это для любой функции вида $y = kx + b$ можно описать через соответствующее изменение значений следующим образом:



$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$







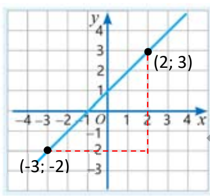
Таким образом, проводится обобщение: угловой коэффициент графика линейной функции можно найти по любым двум точкам $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, принадлежащим её графику, по формуле $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

В классах, имеющих технические возможности, целесообразно использовать указанные ссылки:

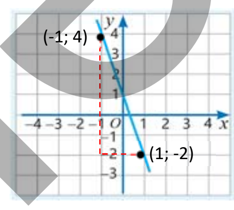
https://www.geogebra.org/m/vAvrp2wR, https://www.geogebra.org/m/vwbuapwu, https://www.geogebra.org/m/zrhg7bzm , https://www.geogebra.org/m/twutgg4r

4. Пример данного задания обсуждается с учениками. На графике определяются координаты любых двух точек, и на основе формулы $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ находится угловой коэффициент.

б) На данной прямой отмечаются точки (2; 3) и (−3; −2) и находится угловой коэффициент.
$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-2)}{2 - (-3)} = \frac{5}{5} = 1.$



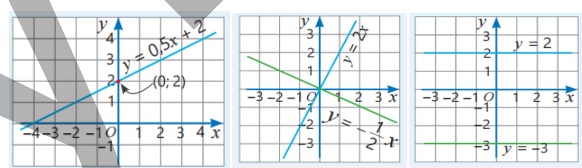
в) На графике определяются координаты двух точек: (−1; 4) и (1; −2), и находится угловой коэффициент: $k = -6$.



Ученики могут отметить и другие точки, принадлежащие этой прямой. Результаты учеников для различных точек можно сравнить. По знаку k можно определить вид угла.

Запомни!

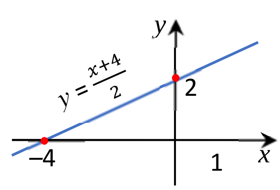
Обсуждаются координаты точки пересечения графика линейной функции $y = kx + b$ с осью ординат. В различных случаях определяется и подчёркивается связь между числом b и ординатой точки пересечения прямой с осью Оу.



Подчёркивается, что график линейной функции $y = kx + b$ пересекает ось Оу в точке (0; b), и на основе формулы объясняется, как определяется это число. Исследуются случаи в формуле линейной функции $y = kx + b$:
$k \neq 0$ и $b = 0$; $k = 0$ и $b \neq 0$; $k = 0$ и $b = 0$. Для каждого случая строятся графики.
Отмечается, что при $k = 0$ и $b = 0$ полученная прямая $y = 0$ является осью абсцисс.

7. В этом задании требуется записать формулу прямой, проходящей через начало координат и точку A (−2; 10). Ученик знает, что прямая, проходящая через начало координат, является прямой пропорциональностью вида y = kx. Следовательно, в формуле $y = kx + b$ значение $b = 0$. Угловой коэффициент k находится по формуле $k = \frac{y}{x}$. Действительно, если учесть, что $x_2 = 0$ и $y_2 = 0$, то $k = \frac{y_2 - y}{x_2 - x} = \frac{y}{x}$.
Таким образом, $k = \frac{y}{x} = \frac{10}{-2} = -5$. Следовательно, прямая, проходящая через точки O (0; 0) и A (−2; 10), задаётся формулой $y = -5x$.

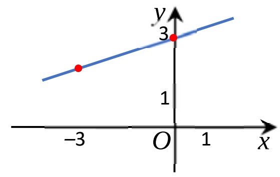
10. е) В формуле $y = \frac{x + 4}{2}$ при x = 0 получаем y = 2, а при y = 0 — x = −4. Следовательно, прямая пересекает ось ординат в точке (0; 2), а ось абсцисс — в точке (−4; 0). Эти точки отмечаются в прямоугольной системе координат, и через них проводится прямая. Полученная прямая является графиком функции $y = \frac{x+4}{2}$.



К сведению учителя! Часто для линейной функции, заданной формулой, проще найти координаты точек её пересечения с осями абсцисс и ординат и отметить эти точки. В этом случае целесообразно отметить, что для построения графика функции удобнее найти эти точки и провести через них прямую. Однако если координаты точек пересечения прямой с осями абсцисс или ординат являются дробными или большими числами, точно отметить их бывает сложно. В таком случае целесообразно использовать другие точки с целыми координатами.

12. В задании требуется определить формулу линейной функции.

а) Определяется точка пересечения графика с осью Оу: (0; 3).



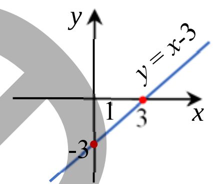
• Ордината точки пересечения с осью Оу является значением b: $b = 3$. Вторая точка на прямой — (−3; 2). По координатам точек (0; 3) и (−3; 2) находится угловой коэффициент: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{-3-0} = \frac{1}{3}$.

• Формула функции имеет вид $y = \frac{1}{3}x + 3$.

• Чтобы найти точку пересечения этого графика с осью Ox, в формуле $y = \frac{1}{3}x + 3$ нужно написать y = 0 и найти x: $x = -9$. Следовательно, график этой функции пересекает ось Ox в точке (−9; 0).

Дополнительно полезно использовать следующие ссылки:

https://www.geogebra.org/m/au985ys3, https://www.geogebra.org/m/gwx684ge



13. а) В прямоугольной системе координат отмечаются точки (0; −3) и (3; 0), и через них проводится прямая. Таким образом строится график прямой, проходящей через данные точки.

Чтобы записать формулу этой прямой, находится $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-(-3)}{3-0} = 1$.

В формуле $y = kx + b$ учитываются k = 1 и пара чисел (3; 0), в результате получается $y = x - 3$.

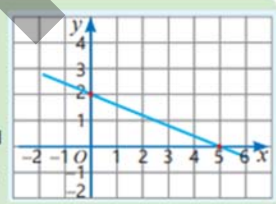
Исправь ошибку!

По отмеченным на графике точкам (0; 2) и (5; 0) найдите угловой коэффициент k.

$$k = \frac{2-0}{5-0} = 0{,}4$$

Используя точку пересечения графика с осью абсцисс, определяется значение b. В данном случае $b = 5$. Записывается формула функции.

$$y = 0{,}4x + 5$$



Сначала выслушиваются мнения нескольких учеников, затем мнения обобщаются и определяется правильный ответ.

$k = \frac{2-0}{5-0} = 0{,}4$

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-0}{0-5} = -0{,}4$

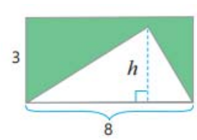
Находится отношение разности значений функции к разности значений аргумента.

Поскольку график пересекает ось абсцисс в точке y = 2, то b = 2. Формула функции имеет вид: $y = -0{,}4x + 2$

Для проверки правильности ответа можно найти значение y при x = 0 и значение x при y = 0.

Решение задач

15. *Решение задачи*



Высота треугольника, вырезанного из прямоугольника, не превышает высоту прямоугольника и больше нуля, то есть $0 < h \le 3$. Чтобы найти площадь закрашенной части, необходимо из площади прямоугольника вычесть площадь треугольника.

а) $S_{\text{закрашенной части}} = 24 - 4h$.

б) При $h = 0{,}8$; 1; 1,5; 3 получаем: $S(0{,}8) = 24 - 4 \cdot 0{,}8 = 20{,}8$, $S(1) = 20$, $S(1{,}5) = 18$, $S(3) = 12$.

в) Поскольку аргумент функции $S(h) = 12 - 4h$ удовлетворяет условию $0 < h \le 3$, он не может принимать значения −1, 0 и 4.

г) При $h = 3$ получаем: $S(3) = 12$.

18. Глобальное потепление является одной из самых серьёзных проблем современности. Перед решением задачи полезно провести обсуждение этой темы с учениками. В классах, имеющих технические возможности, полезно дать ученикам задание собрать информацию о снижении уровня воды, связанном с потеплением.

Решение задачи

• На основе условия задачи определяется формула зависимости уровня воды от времени: $h = 42 - 0{,}1t$.

• При $t = 1$ год, то $h = 42 - 0{,}1 = 41{,}9$ м; при $t = 2$ года, то $h = 41{,}8$ м; при $t = 5$ лет, то $h = 41{,}5$ м.
• Чтобы определить, через сколько лет уровень воды в озере составит 40 м, решается уравнение: $t = 20$ лет.

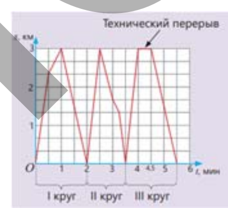
Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Объясняет формулу линейной функции.	Рабочие листы, учебник, РТ
Строит график линейной функции или по графику считывает информацию.	Рабочие листы, учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение. В заключении, представленном в конце раздела учебника, отмеченные понятия повторяются вместе с учениками, проводится обобщение. Изученные в разделе слова еще раз вспоминаются, их значение объясняется учениками. Основные понятия, указанные в заключении:

Диаграмма соответствия, входной элемент, выходной элемент, функция, аргумент, зависимая переменная, независимая переменная, область определения, множество значений, линейная функция, угловой коэффициент.

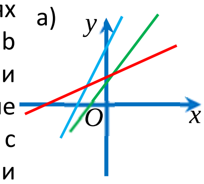


Решение задания под заголовком «Попытайтесь!» — начальной задачи — обсуждается с учениками. Записывается краткое условие задачи, проводится анализ. Решение задачи обсуждается вместе с учениками. Уделяется внимание правильному чтению графика. Хотя решение начальной задачи приведено в учебнике, чтение информации, представленной на графике, может быть затруднено для учеников. Учитель должен объяснить ученикам, как в данной прямоугольной системе координат определить движение болиду за каждый круг, его скорость и пройденное расстояние, и постараться, чтобы не осталось неясных моментов.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

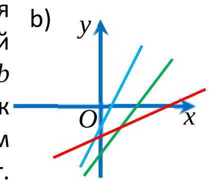
8. Целесообразно выполнить это задание в группах. Каждой группе предлагается обосновать приведённое в одном из вариантов утверждение, показывая примеры.

a)



а) При $k > 0$, $b > 0$, выслушиваются мнения учеников о том, в каких четвертях располагается график функции $y = kx + b$. Сначала уточняется, что выражает значение b и где оно принимает положительное значение. Известно, что прямая — график функции $y = kx + b$ — пересекает ось Oy в точке (0; b). При b > 0 график пересекает ось Oy выше начала координат. С другой стороны, при k > 0 прямая образует острый угол с положительным направлением оси Ox. Следовательно, при k > 0, b > 0 график функции y = kx + b схематически выглядит так, как показано на рисунке. То есть в этом случае график проходит через I, II и III четверти, а через IV четверть не проходит. Утверждение верно. Его можно обосновать примерами: $y = 2x + 4$, $y = 0{,}5x + 1$ и т.д.

b)



б) При $k > 0$, $b < 0$ расположение графика функции $y = kx + b$ по четвертям исследуется другой группой. Здесь обращается внимание на то, что при k > 0 прямая образует острый угол с положительным направлением оси Ox. При b < 0 график функции $y = kx + b$ пересекает ось Oy ниже начала координат. Следовательно, при k > 0, b < 0 график функции $y = kx + b$ схематически выглядит так, как показано на рисунке. То есть в этом случае график проходит через I, III и IV четверти, а через II четверть не проходит. Следовательно, высказанное утверждение неверно. Его можно обосновать, приводя примеры.
А пункты в) и г) также поручаются другим группам.

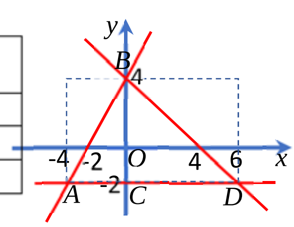
9. В одной и той же прямоугольной системе координат строятся графики данных функций. Сначала для каждой прямой составляется таблица. Прямая y = –2 — это прямая, пересекающая ось Oy в точке (0; –2) и параллельная оси абсцисс. Чтобы найти площадь полученного треугольника, можно найти половину площади прямоугольника длиной 9 единиц и шириной 6 единиц:

$y = 2x + 4$

x	y
0	4
-2	0

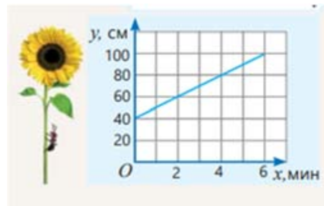
$y = 4 - x$

x	y
0	4
4	0



S = 27 кв. ед. Общую площадь можно также определить, найдя и сложив площади прямоугольных треугольников, образованных пересечением прямых.

14. в) Муравей движется вдоль стебля вверх равномерным прямолинейным движением. График, описывающий его движение, — это прямая y = kx + b. k — скорость муравья, b — расстояние от земли до его положения на стебле в начальный момент времени. Поскольку за 6 минут муравей поднимается на 60 см, то k = 10 см/мин. Следовательно, $y = 10x + 40$.



К сведению учителя! Ученики иногда неправильно понимают смысл коэффициентов k и b. Хотя начало прямой в точке (0; 40) на рисунке означает, что муравей уже поднялся на 40 см, некоторые ученики ошибочно считают, что его начальная высота от земли равна нулю. Если график будет внимательно исследован учениками, эти ошибки будут устранены. Кроме того, значение коэффициента k как скорости муравья подробно обсуждается с учениками.

Математический калейдоскоп

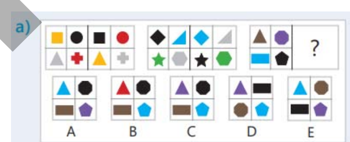
1. Если $a^2 - 2025b = b^2 - 2025a$ и $a \neq b$, $a + b$, то для нахождения значения выражения a + b выполняются некоторые преобразования: выделяется общий множитель, выносится за скобки и обе части равенства делятся на этот множитель.

$$a^2 - b^2 = 2025b - 2025a \to (a-b)(a+b) = 2025(b-a) \to (a-b)(a+b) = -2025(a-b)$$

Обе части делятся на $(a - b)$. $a + b = -2025$.

2. Для доказательства того, что для любого натурального числа n сумма $n^3 + 17n$ делится на 6, над этим выражением выполняются преобразования: $n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = n(n^2 - 1) + 18n = (n-1)n(n+1) + 18n$.
Последнее выражение является произведением трёх последовательных натуральных чисел, и это произведение всегда делится на 6. Причину делимости произведения $(n-1)n(n+1)$ на 6 можно обсудить с учениками. Поскольку второе слагаемое $18n$ также делится на 6, сумма $n^3 + 17n$ нацело делится на 6.

3. а) На рисунке дан тестовый вопрос логической последовательности.
Здесь правило изменения фигур выглядит следующим образом:
а) В каждом столбце форма остается неизменной, а цвета циклически меняются.
б) В каждой строке тип формы чередуется по определенному правилу:
треугольник → четырехугольник → многоугольник и т. д.

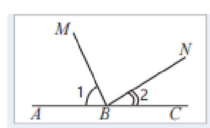


Рассматривая последнюю верхнюю строку, по последовательности цвета и формы можно определить, что подходящим вариантом в клетке со знаком «?» является вариант C.
б) В этом задании фигуры перемещаются, каждый раз смещаясь на одну клетку вправо. Следовательно, в следующей клетке должна быть изображена фигура из варианта D.

4. По условию задачи имеется 5 мешков с золотыми монетами, и только в одном из них монеты фальшивые. Масса настоящей золотой монеты на 1 г больше массы фальшивой. Требуется определить мешок с фальшивыми монетами, сделав одно взвешивание на весах. Для этого все мешки нумеруются от 1 до 5, и из каждого мешка берется столько монет, сколько соответствует его номеру, после чего монеты взвешиваются. Если бы во всех мешках были настоящие золотые монеты, масса взятых монет составила бы 10 г + 20 г + 30 г + 40 г + 50 г = 150 г.

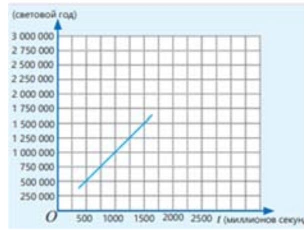
Но поскольку в одном из мешков находятся только фальшивые монеты, масса взятых монет будет меньше на количество граммов, соответствующее номеру этого мешка. Например, если общая масса монет равна 148 г, значит фальшивые монеты находятся во 2-м мешке.

5. В этом задании развернутый угол ABC разделен на три различных угла. Если $\angle 1 = 70° + x$, $\angle 1 - \angle 2 = 50° + 2x$, то для доказательства того, что $\angle MBN = 90°$, достаточно показать, что $\angle 1 + \angle 2 = 90°$.
Из равенства $\angle 1 - \angle 2 = 50° + 2x$ можно записать $\angle 2 = \angle 1 - (50° + 2x) = 70° + x - 50° - 2x = 20° - x$. Таким образом, $\angle 1 + \angle 2 = 70° + x + 20° - x = 90°$.



Следовательно, $\angle MBN = 180° - (\angle 1 + \angle 2) = 90°$.

“Путешествие в галактику Андромеды”



Фантастический корабль предназначен для межгалактических путешествий и направляется к галактике Андромеда, расположенной на расстоянии 2 500 000 световых лет от Земли. На рисунке дан график зависимости расстояния корабля от Земли от времени.

1. На основе графика, поскольку прямая проходит через начало координат, её формула имеет вид y = kx, а коэффициент k определяется по графику.

$k = \frac{s}{t} = \frac{500\,000}{500\,000\,000} = \frac{1}{1\,000}$ свет. год /с. Следовательно, $y = \frac{1}{1\,000}x$ или $y = 0{,}001x$.

2. Согласно формуле, скорость космического корабля равна $v = 0{,}001$ свет. год /с. Время, затрачиваемое на достижение галактики Андромеда, вычисляется по формуле $t = \frac{s}{v}$. $t = \frac{2\,500\,000}{0{,}001} = 2\,500\,000\,000$ секунд или 2500 миллионов секунд.

3. Используя интернет, можно определить максимальную космическую скорость, просмотрев поисковые сайты. Максимальная скорость составляет 190 км/с (692 000 км/ч). Эту скорость космический аппарат NASA *Parker Solar Probe* развил при сближении с Солнцем.

4. Ученики могут создать модель корабля для межгалактических путешествий. Форма корабля, его внутренняя экосистема для длительного полета описываются учениками, записываются предположения о видах топлива. Готовится презентация. Для получения дополнительной информации о галактике Андромеда ученикам можно рекомендовать использовать следующую ссылку: *https://astronomy.az/andromeda-qalaktikas-m-31*

7-й РАЗДЕЛ

Окружность, круг и шар

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	24	
Тема 7.1	Окружность	2	25	15
Тема 7.2	Центральный угол. Вписанный угол	3	29	18
Тема 7.3	Углы между хордами, секущими и касательными	4	33	21
Тема 7.4	Длина дуги. Площадь сектора	4	38	24
Тема 7.5	Шар. Площадь поверхности и объем шара	2	42	27
	Обобщающий урок. STEAM. “Планетарий"	2	46	29
	МСО-2	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**19**		

Краткий обзор раздела

В разделе ученики знакомятся с понятиями «касательная» и «секущая» к окружности. Они исследуют взаимное расположение двух окружностей, свойства углов в окружности, учатся вычислять длину дуги окружности, площадь сектора круга, площадь поверхности и объём шара. Применяя эти свойства и формулы, ученики решают задачи и закрепляют полученные знания и умения.

На что стоит обратить внимание?

Для изучения свойств дуг и углов в окружности важно сначала напомнить ученикам основные понятия геометрии, а также свойства углов, образованных секущей с двумя параллельными прямыми. Такой подход облегчает переход к теме и помогает связать новые знания с уже изученными.

Иногда ученики испытывают трудности при определении дуги, на которую опирается вписанный угол. Для обучения правильному выбору дуги целесообразно связывать стороны угла с начальной и конечной точками дуги и наглядно показывать это на примерах.

Правильное определение того, образован ли данный угол двумя пересекающимися хордами, касательной и секущей или двумя секущими, позволяет избежать типичных ошибок в последующих вычислениях. Обоснование используемого свойства способствует лучшему пониманию темы.

Ученики знакомы с единицами измерения различных величин и их преобразованиями (например, килограмм для массы, метр для длины и т.д.). Целесообразно подчеркнуть, что дуга характеризуется двумя величинами: градусной мерой и длиной. Учащимся следует дать сведения о градусной мере дуги и её длине.

При выражении дуги, градусную меру которой требуется найти, через переменную необходимо подчеркнуть, что у переменной указывается знак градуса.

Учитывая относительную сложность формирования пространственных представлений, при объяснении понятия шара рекомендуется обращаться к примерам из повседневной жизни (мяч, апельсин, глобус и т.д.) и наглядным моделям.

Развитие математического языка

Правильное определение понятий «секущая окружности», «касательная к окружности», «точка касания», «концентрические окружности», «дуга», «мажорная дуга», «минорная дуга», «градусная мера дуги», «длина дуги», «взаимное расположение двух окружностей», «центральный угол», «вписанный угол», «хорда», «угол между двумя секущими», «угол между секущей и касательной», «угол между хордами», «сектор круга», «площадь сектора», «радиус шара», «большой круг шара» служит основой для оценки степени усвоения этих понятий.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Секущая, касательная, концентрические окружности, дуга, мажорная дуга, минорная дуга, хорда, сектор

Необходимые предварительные знания и умения:

- Основные понятия геометрии
- Окружность и круг
- Признаки конгруэнтности треугольников
- Углы, образованные при пересечнии параллельных пря секущей

Междисциплинарная интеграция

Дуга окружности используется в географии при описании дуговых маршрутов на карте, в физике и инженерии — для вычисления длины кругового движения. Концентрические окружности применяются в астрономии для описания орбит планет, а в технологиях — для моделирования распространения радиолокационных и акустических волн. В инженерии дуги используются в опорных конструкциях, а в физике свойства хорд применяются при определении положения тел, закреплённых на дуге.

ТЕМА 7.1. Окружность

ПОДСТАНДАРТЫ	7-3.1.1. Объясняет понятия касательной и секущей к окружности. 7-3.1.2. Исследует взаимное расположение двух окружностей.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет понятие секущей окружности. • Объясняет понятие касательной к окружности. • Определяет взаимное положение прямой и окружности. • Применяет свойство касательных, проведённых из одной точки к окружности, при решении задач.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки,стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/*1192 *https://video.edu.az/video/1197* *https://video.edu.az/video/1263* *https://video.edu.az/video/1308* *https://www.geogebra.org/m/hw3TGaA3* *https://www.geogebra.org/m/H6CVRgbH*

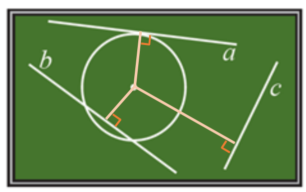
Обсуждение исходной задачи. На первой странице раздела ученикам даётся информация о том, в каких областях встречаются фигуры в форме круга и шара, подчёркивается, что они используются при изучении планет и многих небесных тел. Приводятся примеры областей применения площади поверхности и объёма шара. В задании «Попытайтесь!» проводится обсуждение нахождения требуемых величин на основе данных размеров, заданных на круговом манеже, и используется ранее полученные знания. Отмечается, что после усвоения знаний и умений, изученных в разделе, в конце раздела задание будет снова обсуждаться.

Побуждение

Ученики в тетради чертят окружность радиусом 2 см. Ученикам предлагается провести прямые на расстоянии 4 см, 3 см и 5 см от центра этой окружности. Затем учитель обращается к классу:
– Какая прямая имеет с окружностью одну точку пересечения? Какая прямая пересекает окружность в двух точках? Какая прямая не пересекает окружность?

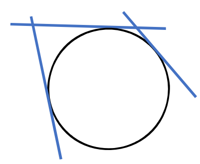
Можно организовать обсуждение с учениками о том, существует ли прямая, имеющая с окружностью три точки пересечения.

Исследование-обсуждение



Анар начертил на доске окружность и три прямые. Поскольку ученики ещё не знакомы с понятиями секущей и касательной, при ответах на вопросы на это обращается внимание. В тетради выполняется соответствующий чертёж.

• Длина отрезка, соединяющего точку, находящуюся внутри окружности, с её центром, меньше радиуса. Часть прямой, имеющей с окружностью две точки пересечения, находится внутри окружности, следовательно, прямая b расположена ближе к центру окружности.



• Ученики чертят в тетради окружность. На окружности отмечается точка, и для проведения прямой, проходящей через эту точку и находящейся на расстоянии, равном радиусу, от центра окружности, учитель с помощью наводящих вопросов напоминает ученикам некоторые свойства. Таким образом подчёркивается, что под расстоянием от точки до прямой понимается наименьшее расстояние, и что это расстояние равно длине перпендикуляра. Поскольку из данной точки к прямой можно провести только один перпендикуляр, делается вывод, что и прямая, находящаяся на расстоянии, равном радиусу, от центра окружности, является единственной. Отмечая одну точку на окружности, из каждой такой точки проводится одна такая прямая.

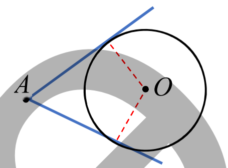
Изучение **Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная**

Ученикам даётся информация о трёх различных положениях прямой относительно окружности, о понятиях секущей, касательной и точки касания. Для каждого случая сравнивается расстояние прямой от центра окружности с радиусом.
Признак касательной к окружности доводится до внимания учеников.
Отмечается, что обычно на чертежах центр окружности обозначается точкой O, и поскольку это принято, в условии задачи он не указывается, если в этом нет необходимости.

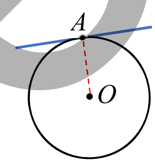
Задания

2. Определяется, верны или неверны утверждения. Мнения обосновываются с помощью чертежей.

а) Из точки, находящейся вне окружности, можно провести к окружности только одну касательную. *Утверждение неверно.*
Из точки, взятой вне окружности, можно провести к окружности две касательные. Эти прямые касаются окружности в двух различных точках. Обе прямые перпендикулярны радиусу, проведённому в точку касания.

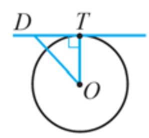


б) Из точки, лежащей на окружности, можно провести к окружности две касательные. *Утверждение неверно.*
Так как касательная, проведённая к окружности из точки, лежащей на окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в этой точке, к окружности можно провести только одну касательную.



в) Из точки, находящейся внутри окружности, невозможно провести касательную к окружности. *Утверждение верно.*
Не существует такой прямой, проходящей через точку, взятую внутри окружности, расстояние от которой до центра было бы равно радиусу. Так как часть прямой, проходящей через эту точку, находится внутри окружности, она пересекает окружность в двух точках, следовательно, провести касательную из этой точки невозможно.

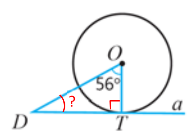
4. Требуется обосновать признак касательной к окружности, отвечая на вопросы. Отмечается, что прямая проходит через точку T окружности и перпендикулярна радиусу OT.
Строится соответствующий чертёж, и на прямой отмечается любая точка D, отличная от T.



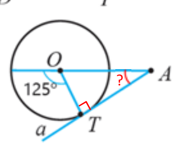
• Так как прямая перпендикулярна радиусу OT, то $OD > OT$.
• Поскольку прямая проходит через окружность только в точке T, остальная часть прямой находится вне окружности. Поэтому расстояние от центра окружности до любой точки, лежащей на прямой, больше радиуса.
• Согласно свойству перпендикуляра, проведённого из точки, не лежащей на прямой, из точки O к прямой можно провести только один перпендикуляр. Следовательно, у прямой не может быть общей точки с окружностью, кроме точки T.
• Так как прямая перпендикулярна радиусу OT, она является касательной.

6. Прямая α касается окружности в точке T. Используя то, что касательная перпендикулярна радиусу, по данным на рисунке находится градусная мера требуемого угла.

а) Так как прямая α является касательной, $\angle OTD = 90°$. Используя сумму внутренних углов треугольника, находится $\angle ODT$.
$\angle ODT = 180° - (90° + 56°) = 34°$



б) Так как прямая α является касательной, $\angle OTA = 90°$. Используя свойство внешнего угла треугольника, находится $\angle OAT$.
$\angle OAT = 125° - 90° = 35°$



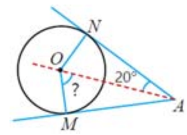
Можно также обсудить с учениками способ нахождения ответа, определив угол, смежный с углом 125°, и используя сумму внутренних углов треугольника.

К сведению учителя! Перед переходом к свойству касательных, проведённых к окружности из одной точки, ученикам предлагается начертить в тетради любую окружность. Ученики отмечают точку вне окружности, проводят к окружности касательные и сравнивают их длины. Целесообразно выполнять задание в парной работе.

В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/classic/y84xurvt

Затем свойство касательных, проведённых к окружности из одной точки, доводится до внимания учеников. Доказательство теоремы обсуждается с классом.

7. Из одной точки к окружности проведены две касательные. Находятся требуемые величины и объясняется способ их нахождения.

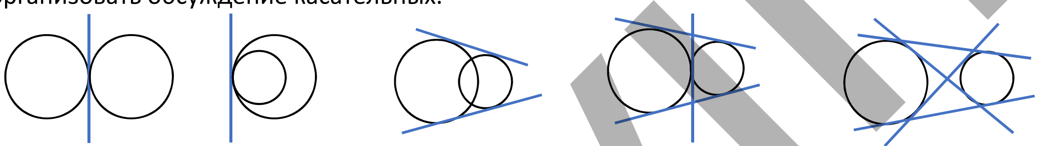


б) Так как AN и AM касательные, $\angle OMA = \angle ONA = 90°$. Поскольку центр окружности расположен на биссектрисе угла при точке A, $\angle OAN = \angle OAN = 20°$. Используя сумму внутренних углов треугольника, находится $\angle AOM$.
$\angle AOM = 180° - (90° + 20°) = 70°$.

Изучение Взаимное расположение двух окружностей

Ученикам приводятся примеры случаев, когда две окружности не имеют общих точек, имеют одну общую точку или пересекаются в двух точках. На основе взаимного расположения окружностей радиусов R и r обсуждаются отношения между расстоянием между их центрами и радиусами.

К сведению учителя! Ученикам можно также показать примеры случаев, когда при наличии общей точки двух окружностей проведённая прямая является касательной к обеим окружностям. Можно продемонстрировать различные изображения, связанные с взаимным расположением окружностей, и организовать обсуждение касательных.

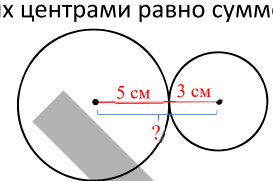


Показ таких примеров помогает ученикам правильно определять взаимное расположение окружностей и различать различные случаи.

В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/classic/f243eqbj

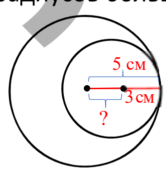
9. Найдите расстояние между центрами двух окружностей радиусами 5 см и 3 см.

а) Так как окружности касаются внешним образом, расстояние между их центрами равно сумме радиусов.



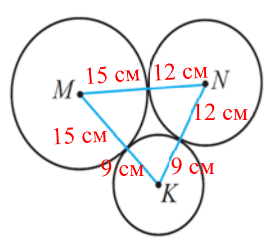
5 + 3 = 8 (см)

б) Так как окружности касаются внутренним образом, расстояние между их центрами равно разности радиусов большой и малой окружностей.



5 – 3 = 2 (см)

11. Согласно условию, данные отмечаются на чертеже. Так как окружности касаются внешним образом, их радиусы попарно складываются и находится расстояние между центрами.



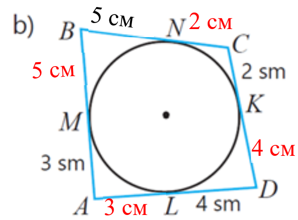
$MN = 15 + 12 = 27$ (см) $NK = 9 + 12 = 21$ (см) $MK = 9 + 15 = 24$ (см)

Находится периметр треугольника MNK: $P_{MNK} = 27 + 21 + 24 = 72$ (см)

Нахождение и сложение попарных сумм радиусов показывает, что в этом случае периметр треугольника можно найти, сложив радиусы и умножив результат на 2.

$P_{MNK} = 2 \cdot (9 + 12 + 15) = 72$ (см)

13. Отмечается, что окружность касается всех сторон данного многоугольника.



б) На основании того, что отрезки от одной точки до точек касания двух касательных к окружности равны, вычисляются стороны и периметр четырёхугольника.

$AB = 3 + 5 = 8$ (см) $\quad BC = 5 + 2 = 7$ (см)

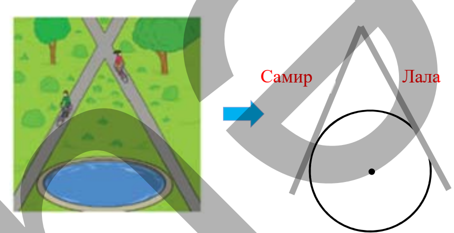
$CD = 2 + 4 = 6$ (см) $\quad AD = 3 + 4 = 7$ (см)

Находится периметр четырёхугольника: $P_{ABCD} = 8 + 7 + 6 + 7 = 28$ (см)

К сведению учителя! Равенство отрезков от одной точки до точек касания двух касательных к окружности будет широко использоваться в дальнейшем при решении задач, связанных с окружностью, описанной около многоугольника. Используя эти свойства, ученики будут изучать формулы связи между радиусом окружности и сторонами и площадью многоугольника и применять их при решении задач. Эти свойства важны для более глубокого усвоения учениками взаимосвязи окружности и многоугольника.

Решение задач

19. Две велосипедные дорожки, отходящие от перекрёстка, направлены по касательным к круглому бассейну. Отмечается, что Самир и Лала одновременно начинают движение от перекрёстка по разным дорожкам. Требуется найти скорость движения Лалы.



Решение задачи

• Находится расстояние, которое Самир проходит за 20 минут со скоростью 12 км/ч. $12 \cdot \frac{20}{60} = 4$ (км).

• Так как две велосипедные дорожки, отходящие от перекрёстка, направлены по касательным к круглому бассейну, Самир и Лала проходят пути одинаковой длины. Находится время, затраченное Лалой на этот путь. $20 + 10 = 30$ (мин)

Чтобы найти скорость Лалы, длина пройденного пути делится на время, затраченное на этот путь.

$4 : \frac{30}{60} = 8$ (км/час).

Ответ. 4 км; 8 км/час.

Формативное оценивание

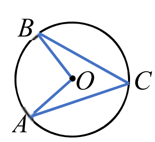
Критерии оценивания	Материалы оценивания
Различает секущую и касательную в окружности.	Учебник, РТ
Определяет взаимное положение прямой и окружности.	Учебник, РТ
Применяет свойство касательных, проведённых из одной точки к окружности, при решении задач.	Учебник, РТ

ТЕМА 7.2. Центральный угол. Вписанный угол

ПОДСТАНДАРТЫ	7-3.1.3. Применяет свойства углов в окружности.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Различает понятия центрального угла и вписанного угла в окружности. • Делит дуги окружности на мажорные и минорные дуги. • Применяет свойство вписанного угла.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки,стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/classic/evyhdzdh* *https://video.edu.az/video/1263* https://www.geogebra.org/m/f6wQbHfn#material/JjDd2TKw https://www.geogebra.org/m/qvBwwJx5 *https://www.geogebra.org/m/t5Cc9z4y*

Побуждение

Ученики в тетради чертят окружность радиусом 2 см. Центр окружности обозначается буквой О. На этой окружности отмечаются точки А, В и С, как показано на рисунке. Учитель предлагает каждому ученику соединить точки А, С и О с точками А и В. Затем ученики измеряют углы АОВ и АСВ и записывают их градусные меры в тетрадь. Полученные результаты обсуждаются в классе.



Исследование-обсуждение

Циферблат часов с делениями разделён на 12 равных частей. Вычисляется угол между каждой такой частью. $360^\circ : 12 = 30^\circ$

• Чтобы найти угол между стрелками часов в 9:00, отмечается, что в этот момент часовая стрелка стоит на 9, а минутная — на 12, после чего вычисляется угол. $3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$

Ученики также могут найти соответствующий угол, отметив, что часть циферблата между стрелками в 9:00 составляет $\frac{1}{4}$ часть циферблата. $360^\circ \cdot \frac{1}{4} = 90^\circ$

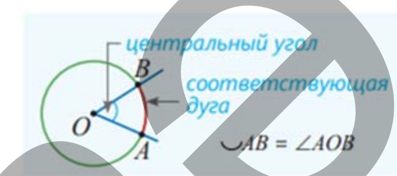
• Угол в 4:00 вычисляется аналогичным образом. $4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ или $360^\circ \cdot \frac{1}{3} = 120^\circ$

Отмечается, что угол в 8:00 также равен 120°.

Учитель может задать ученикам наводящие вопросы о том, как определяются части циферблата для соответствующего времени, а также предложить вычислить углы и для других целых часов.

Изучение Дуга окружности и центральный угол

Ученикам сообщается, что любые две точки, взятые на окружности, делят окружность на две части, и даётся информация о дуге окружности и центральном угле. Связь между дугой и центральным углом объясняется на примерах. Ученики знакомятся с понятиями большой и малой дуги, изучают правила их записи. Объясняется, почему большая дуга иногда обозначается тремя буквами.

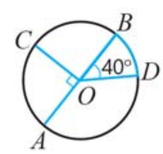


К сведению учителя! Новые понятия, с которыми знакомятся ученики, их объяснение и различие имеют большое значение для усвоения последующих знаний. Рекомендуется показать ученикам несколько примеров, связанных с различием между центральным углом, дугой, большой и малой дугами. Подчёркивается, что при обозначении дуги тремя буквами средняя буква указывает направление дуги.

Ученикам можно сообщить о различных способах записи обозначения дуги. В некоторых источниках знак дуги пишется перед буквами, в некоторых — над ними. Например, $\smile AB$, $\overset{\frown}{AB}$. Подчёркивается, что традиционно знак дуги пишется перед буквами.

Задания

2. На рисунке отмечается, что AB является диаметром окружности. Находятся градусные меры требуемых дуг или угла.



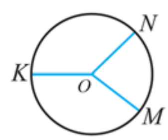
б) Поскольку центральный угол, соответствующий дуге BD, равен 40°, то $\smile BD = 40^\circ$

Так как углы AOD и BOD являются смежными, $\angle AOD = 180^\circ - \angle BOD = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

Так как AB диаметр, а угол COB равен 90°, то $\angle COB = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

$\angle COD = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$. Следовательно, $\smile COD = 130^\circ$.

4. В окружности проведены радиусы OM, ON и OK. Отмечается, что



$\angle MON : \angle NOK : \angle KOM = 3 : 4 : 5$.

Обозначается: $\angle MON = 3x$; $\angle NOK = 4x$; $\angle KOM = 5x$. Исходя из того, что сумма этих углов равна 360°, составляется и решается уравнение.

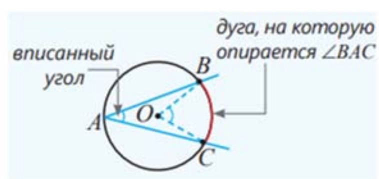
$3x + 4x + 5x = 360^\circ \rightarrow x = 30^\circ$.

$\angle MON = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$; $\angle NOK = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$; $\angle KOM = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$.

Находятся градусные меры дуг MN, NK и KM. $\smile MN = 90^\circ$; $\smile NK = 120^\circ$; $\smile KM = 150^\circ$

Изучение Вписанный угол

Отмечается, что угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом. До сведения учеников доводится теорема о вписанном угле (Теорема 2). С учениками обсуждаются примеры, связанные с положением центра окружности относительно вписанного угла.



В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать интерактивную деятельность: *https://www.desmos.com/geometry/ilc8jx93hv*

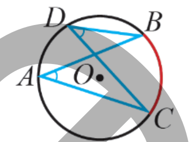
8. Заполняя пропуски соответствующими рассуждениями, завершается доказательство теоремы о вписанном угле (Теорема 2) для случая, когда сторона угла проходит через центр.

Предложение	Обоснование
1. $OA \cong OB$	1. OA и OB радиусы окружности.
2. $\angle A \cong \angle B$	2. AOB - равнобедренный треугольник.
3. $\angle BOC = \angle A + \angle B$	3. По свойству внешнего угла треугольника
4. $\angle BOC = 2 \cdot \angle A$	4. Поскольку $\angle A \cong \angle B$
5. $\angle A = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}\smile BC$	5. Поскольку $\angle BOC = 2\angle A$

Ученики могут начертить соответствующую таблицу в тетради и вписать нужные рассуждения в пустые места. Рекомендуется обсудить с учениками рассуждения, приведённые в столбце обоснований.
В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать интерактивную деятельность: *https://www.geogebra.org/classic/at6s9fas*

Подумай!

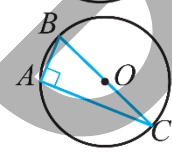
Ученики обосновывают следствия из Теоремы 2.



1. *Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, конгруэнтны.*

$\angle A = \frac{1}{2}\smile BC$ и $\angle D = \frac{1}{2}\smile BC$ ➡ $\angle A \cong \angle D$

Отмечается, что каждый из вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу, равен половине градусной меры этой дуги, поэтому такие углы конгруэнтны.

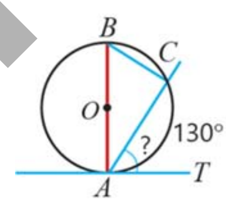


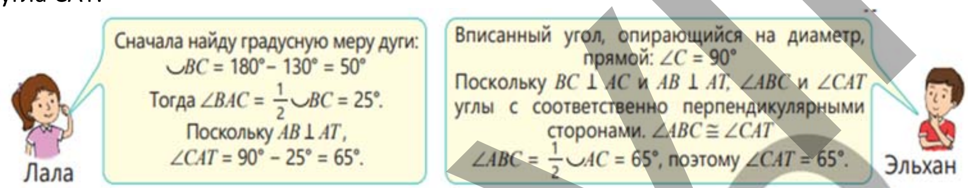
2. *Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, является прямым.*

$\angle BOC = 180^\circ$ и $\angle A = \frac{1}{2}\angle BOC$ ➡ $\angle A = 90^\circ$

Полуокружность — это дуга с градусной мерой 180°. Следовательно, вписанный угол, опирающийся на эту дугу, равен её половине.

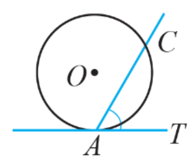
10. На рисунке отмечается, что AT является касательной к окружности, а AB диаметром. Исследуется, какими способами Лала и Эльхан нашли градусную меру угла CAT.



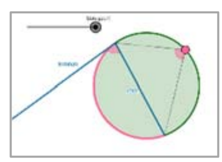


Каждый способ решения обсуждается в классе. Подчёркивается, что градусная мера угла между касательной и секущей, проведёнными из точки на окружности, равна половине градусной меры дуги, стягиваемой частью секущей, лежащей внутри окружности, то есть соответствующей хордой.

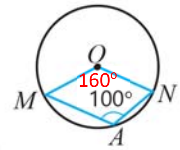
Запомни!



Отмечается, что если из любой точки A на окружности провести касательную AT и секущую AC, то угол CAT равен половине градусной меры дуги AC, и приводятся примеры.
В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать интерактивные задания: *https://www.geogebra.org/m/ngbmcjaz*



11. По данным на рисунке находится градусная мера требуемых дуг или угла.
б) По центральному углу определяется градусная мера дуги MAN.



$\angle MON = 160^\circ$ ➡ $\smile MAN = 160^\circ$

MN мажорная дуга. $\smile MN = 360^\circ - 160^\circ = 200^\circ$

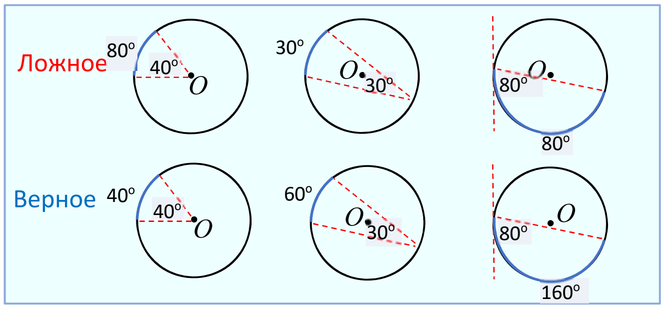
Угол MAN — вписанный угол, опирающийся на дугу MN.

$\angle MAN = \smile MN : 2 = 200^\circ : 2 = 100^\circ$

В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать интерактивные задания: *https://www.geogebra.org/m/qsrh4rh7*

К сведению учителя! Ученики часто испытывают трудности при применении свойств дуг, центральных и вписанных углов окружности. Целесообразно требовать от них обоснования того, какое именно свойство используется. Такой подход помогает ученикам правильно определять область применения свойств и глубже понимать содержание каждого из них.

Ложные представления, возникающие у учеников. При применении свойств окружности к решению задач ученики допускают определённые ошибки. Наиболее распространённой из них является неправильное установление связи между вписанным углом, центральным углом и дугой. Целесообразно организовать работу над ошибками, показывая ученикам несколько примеров.

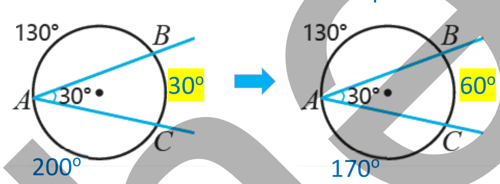


Исправь ошибку!

$\smile AC = 360° - (\smile AC + \smile BC) = 360° - (130° + 30°) = 200°$

Отмечается, что вписанный угол не равен градусной мере дуги, на которую он опирается. Градусная мера дуги BC записывается правильно, и вычисляется градусная мера дуги AC.

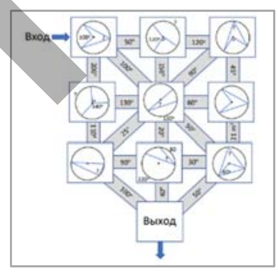
$\smile AC = 360° - (\smile AC + \smile BC) = 360° - (130° + 60°) = 170°$



Командная игра. Класс делится на группы. Каждой группе раздаются рабочие листы. В рабочем листе, начиная с окружности на «Входе», для каждой окружности требуется найти градусную меру угла или дуги, отмеченной знаком вопроса. По направлению числа, показывающего ответ, выполняются задания, продвигаясь к «Выходу». Группа, которая правильно и быстрее найдёт путь к выходу, объявляется победителем. Результаты обсуждаются.

Рабочий лист можно скачать по этой ссылке:

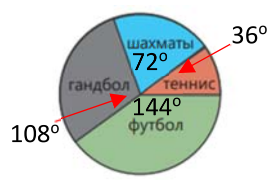
https://drive.google.com/file/d/1ejfS46wU3137vALg4vbN1jQYfFgsAr0v/view?usp=sharing



Решение задач

14. Число учеников 7-го класса, занимающихся теннисом, шахматами, гандболом и футболом, относится как 1 : 2 : 3 : 4. Каждый ученик занимается только одним видом спорта.

а) Число учеников, занимающихся теннисом, шахматами, гандболом и футболом, обозначается соответственно x, $2x$, $3x$, $4x$. Исходя из того, что сумма этих углов равна полному углу, составляется и решается уравнение.



$x + 2x + 3x + 4x = 360°$

$10x = 360°$

$x = 36°$

На диаграмме находятся соответствующие центральные углы

Теннис: 36°

Шахматы: $2 \cdot 36° = 72°$

Гандбол: $3 \cdot 36° = 108°$

Футбол: $4 \cdot 36° = 144°$

б) Исходя из того, что гандболом занимаются 6 человек, составляется пропорция для нахождения общего числа

Общее число учеников:

108° — 6

360° — x

$x = 20$ (человек)

в) Вычисляется количество учеников, занимающихся футболом и теннисом, и находится разность.

8 – 2 = 6 (человек)

Число занимающихся гандболом:

108° — 6

36° — x

$x = 2$ (человека)

Число занимающихся футболом:

108° — 6

144° — x

$x = 8$ (человек)

Ответ. а) 36°; 72°; 108° и 144°; б) 20 человек; в) 6 человек.

Обсуждение. Выслушиваются мнения учеников, решивших задачу различными способами.

Формативное оценивание

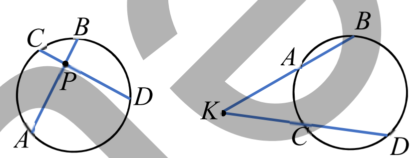
Критерии оценивания	**Материалы оценивания**
Различает понятия центрального угла и вписанного угла в окружности.	Рабочие листы, учебник, РТ
Делит дуги окружности на мажорные и минорные дуги.	Рабочие листы, учебник, РТ
Применяет свойство вписанного угла.	Рабочие листы, учебник, РТ

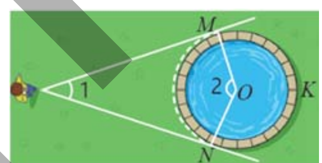
ТЕМА 7.3. Углы между хордами, секущими и касательными

ПОДСТАНДАРТЫ	7-3.1.3. Применяет свойства углов в окружности.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Применяет свойство угла между двумя пересекающимися хордами. • Применяет свойство угла между двумя секущими, проведёнными из точки вне окружности. • Применяет свойство угла между касательными, проведёнными из точки вне окружности.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки,стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/PgW8CVNX* *https://www.geogebra.org/m/qpP8xrw2* *https://www.geogebra.org/m/NzY8A9EV* *https://www.geogebra.org/m/GRw7cjVf* *https://www.geogebra.org/m/PgW8CVNX* Задание: *https://www.geogebra.org/m/PgW8CVNX*

Побуждение

Ученикам предлагается в тетради начертить две окружности радиусом 2 см, отметить одну точку внутри одной окружности и одну точку вне другой окружности. Учитель, изобразив данные рисунки на доске, может создать условия для того, чтобы ученики начертили их в тетрадях таким же образом. Далее обсуждается, в каких случаях пересекаются хорды, а в каких — секущие, и как положение точки пересечения влияет на величину угла между хордами или секущими. Задавая ученикам вопросы о том, где расположена точка пересечения секущей и касательной либо хорды и касательной — внутри окружности, вне её или на окружности, — можно закрепить представления учеников о положении точки пересечения.

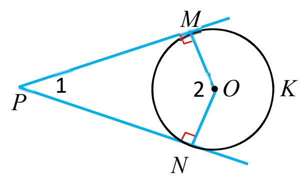




Исследование-обсуждение

Если взглянуть на круглый бассейн сбоку, то из точки наблюдения будет видна дуга MN, ограниченная касательными, проведёнными к окружности.

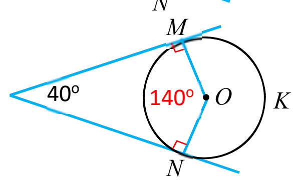
• Так как касательные перпендикулярны радиусам, и с использованием суммы углов четырёхугольника отмечается, что сумма градусных мер углов, обозначенных на рисунке цифрами, равна 180°.



$$\angle 1 + \angle 2 + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$
$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$$

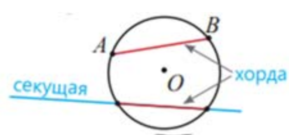
• При $\angle 1 = 40°$ сначала находится $\angle 2$, а затем соответствующие ему градусные меры минорной дуги MN и мажорной дуги MKN.

$\angle 2 = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ $\smile MN = 140^\circ$ $\smile MKN = 220^\circ$

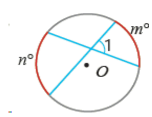


Изучение Угол между двумя пересекающимися хордами

Ученикам даётся информация о понятии хорды, приводятся примеры взаимного положения секущих окружности.

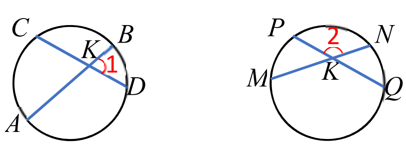


До сведения учеников доводится теорема о градусной мере угла между хордами (Теорема 3).



$$\angle 1 = \frac{1}{2}(m^\circ + n^\circ)$$

К сведению учителя! Некоторые ученики испытывают трудности при определении дуг, лежащих между сторонами угла, а также в случаях, когда искомый угол нельзя найти прямым применением формулы. Из-за различия длин дуг они считают, что и углы должны иметь разные градусные меры. Таким ученикам рекомендуется подчеркнуть, что точки пересечения сторон угла с окружностью являются концами дуг.



Показывая различные примеры и задавая наводящие вопросы, можно устранить возникающие трудности. Например: градусная мера угла 1 или 2 равна половине суммы каких дуг? Как, исходя из градусных мер дуг PM и NQ, найти градусную меру угла 2?
В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать интерактивную деятельность: *https://www.geogebra.org/m/fqh8stqb*

Задания

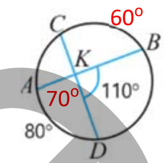
2. По данным на рисунке находится градусная мера требуемой дуги.
в) Из двух дуг, соответствующих двум пересекающимся хордам, одна известна, требуется найти другую. Сначала находится градусная мера соответствующего угла, расположенного в точке пересечения этих хорд, затем — градусная мера искомой дуги.

$\angle AKD + 110^\circ = 180^\circ$

$\angle AKD = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

$\frac{\smile AD + \smile BC}{2} = 70^\circ$

$\frac{80^\circ + \smile BC}{2} = 70^\circ \qquad \smile BC = 60^\circ$

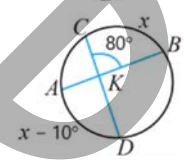


г) На основе данных составляется соответствующее уравнение и решается.

$\frac{\smile AD + \smile BC}{2} = 80^\circ$

$\frac{x + x - 10^\circ}{2} = \qquad x = 75^\circ$

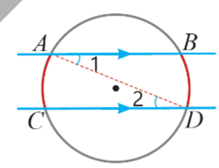
$\smile BC = 75^\circ$



Запомни!

Отмечается, что дуги окружности, расположенные между параллельными секущими (или хордами), являются конгруэнтными.

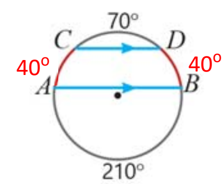
$\smile AC = \smile BD$



В данной окружности, проведя хорду AD, свойство обосновывается с использованием равенства вертикальных углов, вписанных углов и равенства соответствующих дуг. Подчёркивая, что хорда является частью секущей, объясняется, что дуги между параллельными секущими также конгруэнтны.

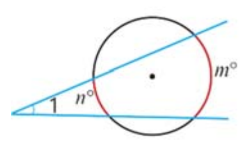
3. Хорды AB и CD параллельны. Найдите градусные меры требуемых дуг.
б) Из двух дуг между пересекающимися хордами одна известна, требуется найти другую. Сначала находится градусная мера соответствующего угла в точке пересечения хорд, затем — градусная мера искомой дуги.

Так как хорды AB и CD параллельны, $\smile AC = \smile BD$.
Градусные меры дуг AC и BD обозначаются через x, составляется и решается соответствующее уравнение.
$210^\circ + 70^\circ + x + x = 360^\circ$
$x = 40^\circ$ ➡ $\smile AC = 40^\circ$



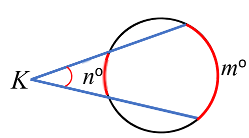
Изучение Угол между двумя секущими, проведёнными из точки вне окружности

Градусную меру угла между двумя секущими, проведёнными из точки вне окружности, можно найти по градусным мерам дуг, которые эти секущие отсекают от окружности. До сведения учеников доводится теорема о свойстве угла между двумя секущими, проведёнными из точки вне окружности (Теорема 4).

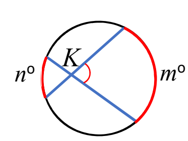


$$\angle 1 = \frac{1}{2}(m^\circ - n^\circ)$$

К сведению учителя! Основная трудность при нахождении угла между двумя секущими из точки вне окружности заключается в определении того, следует ли использовать половину суммы или половину разности дуг. Причиной является смешение различных типов углов. Взяв одни и те же дуги для точек внутри и вне окружности и сравнив градусные меры углов, можно обратить внимание учеников на определённые подсказки.



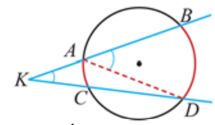
$\angle K = \frac{1}{2}(m^\circ - n^\circ)$



$\angle K = \frac{1}{2}(m^\circ + n^\circ)$

Если точка пересечения находится внутри окружности, хорды пересекаются, и для одной и той же пары дуг получается больший угол по сравнению со случаем пересечения вне окружности. Это показывает, что при пересечении внутри используется половина суммы дуг, а при пересечении вне — половина их разности. Таким образом, подчёркивается важность определения положения точки пересечения относительно окружности для выбора нужной формулы.
В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать интерактивную деятельность: *https://www.geogebra.org/m/PgW8CVNX*

4. Чертится окружность и вне ее отмечается точка K. Из этой точки к окружности проводятся секущие и хорда AD. Требуется обосновать справедливость формулы для угла между секущими. Находятся ответы на данные вопросы.



$\angle K = \frac{1}{2}(\smile BD - \smile AC)$

- Угол BAD является внешним углом треугольника KAD.
- По свойству внешнего угла треугольника $\angle BAD = \angle K + \angle ADK$
- Угол ADK равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается, то есть дуги AC.
- Угол BAD равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается, то есть дуги BD.
- Угол K выражается через градусные меры дуг BD и AC.

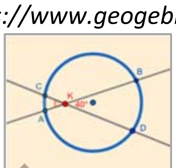
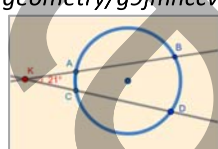
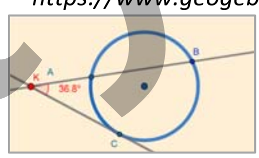
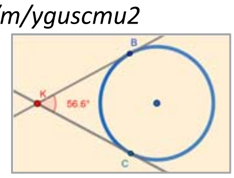
$$\angle K = \angle BAD - \angle ADK = \frac{\smile BD}{2} - \frac{\smile AC}{2} = \frac{1}{2}(\smile BD - \smile AC)$$

Рекомендуется обсудить с учениками, на каких свойствах основано получение каждого из ответов.

Запомни!

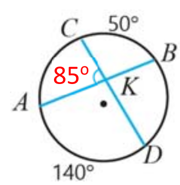
Подчёркивается, что угол между секущей и касательной, проведёнными к окружности из точки, расположенной вне окружности, а также угол между двумя касательными находятся по аналогичному правилу (Теорема 4). Проводится обсуждение с приведением примеров для обоих случаев.

К сведению учителя! Целесообразно объяснить ученикам, что в отличие от пересечения прямых внутри окружности, вне окружности возможны три различных случая: две секущие, секущая и касательная, две касательные. Показывая примеры для каждого случая, можно подчеркнуть, что теорема 4 применяется одинаково во всех ситуациях. Это показывает, что выбор формулы зависит не от того, являются ли прямые секущими или касательными, а только от положения точки пересечения относительно окружности. Такой подход помогает избежать путаницы и типичных ошибок при вычислениях.
В классах с техническими возможностями можно наглядно продемонстрировать с помощью интерактивной активности, как изменение положения точки пересечения прямых влияет на величину угла между ними:
https://www.geogebra.org/geometry/g9jmnccv *https://www.geogebra.org/m/yguscmu2*

Исправь ошибку!

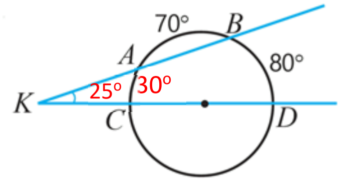
a) $\angle AKC = \frac{1}{2}(50^\circ + 140^\circ) = 95^\circ$



Отмечается, что угол, найденный по градусным мерам дуг BC и AD, является не углом AKC, а одним из смежных с ним углов, после чего вычисляется градусная мера угла AKC.

$\angle AKD = \frac{1}{2}(50^\circ + 140^\circ) = 95^\circ$ ➡ $\angle AKC = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$

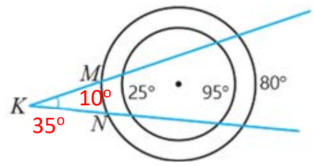
б) $\angle K = \frac{1}{2}(80^\circ - 70^\circ) = 5^\circ$



Подчёркивается, что угол K равен не половине разности дуг BD и AB, а половине разности дуг BD и AC. Сначала вычисляется градусная мера дуги AC, затем градусная мера угла K.

$\smile AC = 180^\circ - (80^\circ + 70^\circ) = 30^\circ$ ➡ $\angle K = \frac{1}{2}(80^\circ - 30^\circ) = 25^\circ$

9. На рисунке даны концентрические окружности. Требуется найти градусные меры угла K и дуги MN.



• На основании свойства угла между двумя секущими, проведёнными из точки вне окружности, вычисляется градусная мера угла K.

$\angle K = \frac{1}{2}(95^\circ - 25^\circ) = 35^\circ$

• Градусная мера дуги MN обозначается через x. Для нахождения искомой дуги составляется и решается соответствующее уравнение.

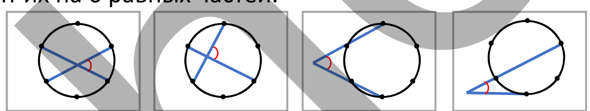
$35^\circ = \frac{1}{2}(80^\circ - x)$

$x = 10^\circ$ ➡ $\smile MN = 10^\circ$

К сведению учителя! В концентрических окружностях градусная мера угла между секущими равна половине разности дуг, лежащих внутри этого угла. Так как угол не изменяется, разность дуг также остаётся постоянной. Исходя из этого, можно найти градусную меру дуги MN, не вычисляя угол K.

Дифференцированное обучение

Учитель рисует на доске несколько окружностей и делит их на 6 равных частей.



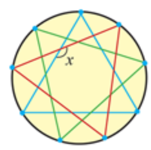
Поддержка. Учащимся раздаются рабочие листы с несколькими примерами различных случаев пересечения прямых на окружности. Каждому ученику предлагается вычислить угол между прямыми на рисунке и обосновать, какие свойства использовались при его нахождении.

Углубление. К доске приглашаются несколько учеников. Они отмечают на окружности дуги в 60° и 120°, используя точки деления, и приводят примеры случаев, когда эти дуги заключены между хордами. Ученикам предлагается определить, в каком случае по полученным изображениям можно вычислить угол между прямыми и обосновать, какие свойства использовались при нахождении этого угла.

Каждый ученик проверяет решение одного из одноклассников. Такая деятельность позволяет сравнивать случаи пересечения и подтверждать правильность применяемых свойств.

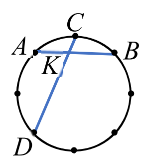
Решение задач

12. Внимание учащихся обращается на данный рисунок. Отмечается, что на окружности круглой стеклянной панели отмечены 9 точек и нанесён узор, как показано на рисунке. Требуется найти градусную меру угла, обозначенного переменной.



Привлечение. Учитель рисует на доске окружность, отмечает точки деления, делящие окружность на 8 равных частей, соединяет их, как на рисунке, и обращается к классу:

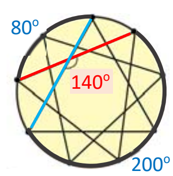
– Как найти длину дуги между точками деления? По каким дугам можно найти угол BKD?



Отвечая на вопросы, ученики находят градусную меру угла BKD.

Решение задачи

Определяется, между какими хордами расположен угол x. Чтобы найти градусные меры дуг между этими хордами, вычисляется градусная мера дуги между соседними точками деления.



Находится, сколько градусов составляет каждая дуга. 360° : 9 = 40°

Вычисляются градусные меры дуг, лежащих между соответствующими хордами.

$5 \cdot 40^\circ = 200^\circ$ $\quad 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$

Градусная мера угла x равна половине суммы найденных дуг.

$x = \frac{1}{2}(200^\circ + 80^\circ) = 140^\circ.$

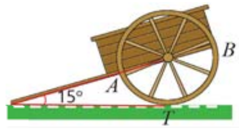
Ответ. 140°.

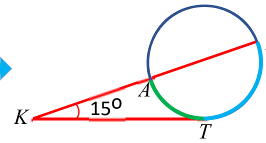
Обсуждение. Выслушиваются мнения учащихся, решивших задачу разными способами.

14. Отмечается, что точка касания колеса с землёй обозначена буквой T, рычаги тележки образуют с поверхностью земли угол 15° и соединены с осью колеса. Требуется найти градусные меры дуг AT и BT между землёй и рычагами тележки.

Решение задачи

Строится соответствующий рисунок, и прямая, проходящая через точку A, продлевается до точки B. $\smile AT = x$, поскольку AB диаметр, $\smile BT = 180^\circ - x$.





Исходя из того, что градусная мера угла между секущей и касательной, проведёнными из точки K вне окружности, равна 15°, составляется и решается соответствующее уравнение.

$$15^\circ = \frac{1}{2}(180^\circ - x - x)$$

$x = 75^\circ$ ➡ $\smile AT = 75^\circ$ $\smile BT = 105^\circ$

Ответ. 75° и 105°.

Обсуждение. Выслушиваются мнения учащихся, решивших задачу разными способами.

Формативное оценивание

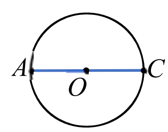
Критерии оценивания	Материалы оценивания
Применяет свойство угла между двумя пересекающимися хордами.	Рабочие листы, учебник, РТ
Применяет свойство угла между двумя секущими, проведёнными из точки вне окружности.	Рабочие листы, учебник, РТ
Применяет свойство угла между касательными, проведёнными из точки вне окружности.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 7.4. Длина дуги. Площадь сектора

ПОДСТАНДАРТЫ	7-3.2.1. Вычисляет длину дуги окружности. 7-3.2.2. Вычисляет площадь сектора круга.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Вычисляет длину дуги окружности. • Объясняет понятия «сектор круга», «радиус сектора», «угол сектора». • Вычисляет площадь сектора круга.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки,стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/dmg5pycw* *https://www.geogebra.org/m/pJUFaTWU* *https://classroom.amplify.com/activity/5e3a44e0cc1bf1754ed31299* Задание: *https://www.geogebra.org/m/vdhmaugb* *https://www.geogebra.org/m/k68zcpaz*

Побуждение

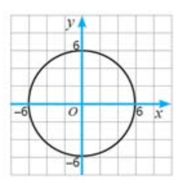
На доске чертится окружность и делится пополам. Учитель обращается к классу:
– На сколько равных частей диаметр делит окружность? Сколько градусов составляет угол AOC? Как найти градусную меру дуги AC? Как определить градусную меру дуги, охватывающей всю окружность? Если известен радиус окружности, как найти длину дуги AC?



Отвечая на вопросы, ученикам можно объяснить, что диаметр делит окружность на две полуокружности, длина каждой дуги равна половине длины окружности, два угла по 180° вместе образуют полный угол, а полный угол равен 360°.

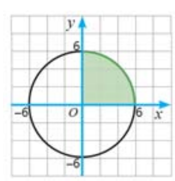
Исследование-обсуждение

Отмечается, что дана окружность с центром в начале координат. В этой окружности проведены дуги, соответствующие центральным углам 90°, 180° и 270°. Какую часть полного угла (360°) составляет градусная мера каждой дуги? Исходя из этого, как найти длину каждой дуги?



• Подчёркивается, что градусная мера каждой дуги составляет определённую часть полного угла (360°), и на этом основании длина дуги вычисляется как соответствующая часть длины окружности по правилу нахождения части числа.

Центральный угол 90° составляет $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ полного угла.



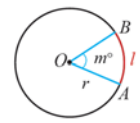
Следовательно, длина дуги, на которую опирается центральный угол 90°, равна $\frac{1}{4}$ части длины окружности.

• Аналогично можно отметить, что градусная мера каждой дуги составляет определённую часть полного угла, и на этом основании площадь соответствующей части круга также вычисляется как соответствующая часть площади круга. То есть площадь части круга, выделенной центральным углом 90°, равна $\frac{1}{4}$ части площади круга.

По такому же правилу с учениками обсуждается способ нахождения длин дуг и площадей частей круга, соответствующих центральным углам 180° и 270°.

Изучение **Длина дуги окружности**

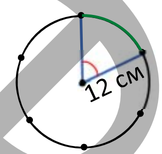
Ученикам разъясняется правило нахождения длины дуги. Обсуждается, как выводятся формулы, используемые для нахождения длины дуги, соответствующей центральному углу величиной m°.



$$l = \frac{m}{360} \cdot 2\pi r \quad \text{или} \quad l = \frac{m}{180} \cdot \pi r$$

Подумай!

Ученики уже знакомы со способом деления окружности на равные части. С помощью наводящих вопросов рекомендуется обобщить их представления о двух способах нахождения длины дуги. Путём вычислений можно показать, что ответы, полученные обоими способами, совпадают.



1-й способ. Определяется, какую часть окружности составляет центральный угол 60°, и находится длина окружности радиуса 12 см. $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$. В этой окружности длина дуги, соответствующей центральному углу 60°, вычисляется как $\frac{1}{6}$ часть длины окружности.

$2\pi r = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 12 = 24\pi$; $\quad l = \frac{1}{6} \cdot 24\pi = 4\pi$

2-й способ. По формуле для нахождения длины дуги с заданной градусной мерой вычисляется длина дуги, соответствующей центральному углу 60°. $l = \frac{60}{360} \cdot 2\pi \cdot 12 = 4\pi$

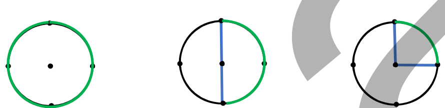
Нахождение ответа разными способами позволяет выбрать наиболее удобный метод решения и проверить правильность полученного результата.

В классах с техническими возможностями можно выполнить интерактивные задания:

https://www.geogebra.org/m/WudvGBz3 *https://www.geogebra.org/m/QGYcNPyY*

К сведению учителя! Выбор способа нахождения длины дуги зависит от градусной меры центрального угла. Если ясно, какую часть окружности составляет данный угол, удобнее находить длину дуги, взяв соответствующую часть длины окружности. В остальных случаях следует применять формулу, так как она позволяет напрямую использовать радиус и величину угла.

Длину дуги можно также находить, используя её прямую пропорциональность градусной мере. Закономерность рекомендуется объяснять на примерах. Например, на окружности радиуса 10 см демонстрируется связь между градусной мерой дуг и их длиной.



$20\pi \to 360°$ $\quad 10\pi \to 180°$ $\quad 5\pi \to 90°$

При уменьшении градусной меры дуги в 2, 4 и т. д. раза её длина также уменьшается соответственно в 2, 4 и т. д. раза. Это показывает, что длина дуги прямо пропорциональна её градусной мере.

Используя эту зависимость, ученикам объясняется выполнение соответствующих вычислений с помощью пропорции.

При выполнении заданий из учебника рекомендуется обсуждать, какой способ является более удобным.

Задания

4. В приведённом примере обсуждается предложенный способ решения. Ученики, используя пропорцию, находят требуемые величины.

c) $\downarrow$ 360° — 30 см $\downarrow$
$\quad x$ — 6 см

$\frac{360}{x} = \frac{30}{6}$

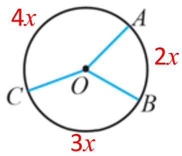
$x = 72°$

d) $\downarrow$ 18° — 3 см $\downarrow$
$\quad$ 360° — x

$\frac{18}{360} = \frac{3}{x}$

$x = 60$ см

5. Окружность радиуса 9 см разделена точками A, B и C на дуги. Градусные меры дуг AB, BC и AC соответственно относятся как 2 : 3 : 4.



Находятся градусные меры и длины дуг

$2x + 3x + 4x = 360^\circ$
$9x = 360^\circ$
$x = 40^\circ$

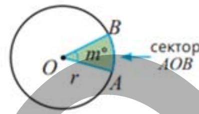
$\smile AB = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$
$\smile BC = 3 \cdot 40^\circ = 120^\circ$
$\smile AC = 4 \cdot 40^\circ = 160^\circ$

$l_{AB} = \frac{80}{380} \cdot 2\pi \cdot 9 = 4\pi$
$l_{BC} = \frac{120}{380} \cdot 2\pi \cdot 9 = 6\pi$
$l_{AC} = \frac{160}{380} \cdot 2\pi \cdot 9 = 8\pi$

Обсуждаются мнения учащихся, решивших задание различными способами.

Изучение Сектор круга и его площадь

Учащимся даётся информация о понятиях сектора круга, радиуса сектора, дуги сектора и угла сектора. Обсуждается, как выводится формула для нахождения площади сектора круга, соответствующего центральному углу $m°$.

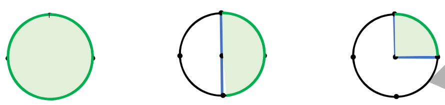


$$S_{сектор} = \frac{m}{360} \cdot \pi r^2$$

9. б) Требуется найти градусную меру центрального угла сектора с диаметром 12 и площадью 6π. Сначала находится радиус круга, затем данные подставляются в формулу и решается полученное уравнение.

$d = 12 \;\rightarrow\; r = 12 \qquad \frac{m}{360} \cdot \cancel{\pi} \cdot 6^2 = 6\cancel{\pi} \;\rightarrow\; m = 60^\circ$

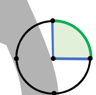
К сведению учителя! Рекомендуется ознакомить учеников со способами нахождения площади сектора круга. Если ясно, какую часть круга составляет угол сектора, удобнее находить площадь сектора, взяв соответствующую часть площади круга. В других случаях подчёркивается необходимость применения формулы. Одним из способов нахождения площади сектора является использование зависимости между площадью сектора и площадью круга. Рекомендуется на примерах показать, что площадь сектора прямо пропорциональна площади круга. Например, на секторе круга радиуса 10 см демонстрируется связь между градусной мерой угла сектора и его площадью.



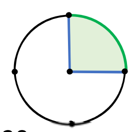
$100\pi \rightarrow 360°$ $\quad 50\pi \rightarrow 180°$ $\quad 25\pi \rightarrow 90°$

При уменьшении угла сектора в 2, 4 и т. д. раза площадь сектора также уменьшается соответственно в 2, 4 и т. д. раза. Это показывает, что площадь сектора прямо пропорциональна величине его угла.

Целесообразно, обращая внимание учеников на формулу, подчеркнуть, что площадь сектора прямо пропорциональна квадрату его радиуса, и объяснить это на примерах. При увеличении радиуса сектора в 2 раза его площадь увеличивается в 4 раза. Отмечается, что это справедливо и для диаметра. На основании формулы можно также указать, что площадь сектора прямо пропорциональна квадрату радиуса или диаметра.



$r = 10$ см
$\frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 10^2 = 25\pi$
10 см $\rightarrow 25\pi$



$r = 20$ см
$\frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 20^2 = 100\pi$
20 см $\rightarrow 100\pi$

Используя эти зависимости, ученикам объясняется выполнение соответствующих вычислений путём составления пропорций.

При выполнении заданий из учебника рекомендуется обсуждать, какой способ решения является более удобным.

10. Обсуждается способ решения, приведённый в показанном примере. Ученики, используя этот способ, находят требуемые величины.

б) $r = 3$; $l = 2\pi$; $S = ?$

$l = \frac{m}{360} \cdot 2\pi \cdot 3 = 2\pi \;\rightarrow\; m = 120^\circ$

$S = \frac{120}{360} \cdot \pi \cdot 3^2 = 3\pi$

в) $S = 4\pi$; $\rightarrow$ $r = ?$; $l = ?$

$S = \frac{40}{360} \cdot \pi \cdot r^2 = 4\pi \rightarrow r = 6$

$l = \frac{40}{360} \cdot 2\pi \cdot 6 = \frac{3}{4}\pi$

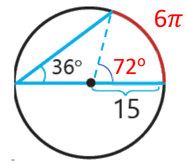
Исправь ошибку!

а) $l = \frac{36}{360} \cdot 2\pi \cdot 15 = 3\pi$

Так как угол 36° является вписанным, сначала необходимо найти соответствующий ему центральный угол.

$m = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$. *Вычисляется длина дуги, соответствующей центральному углу.*

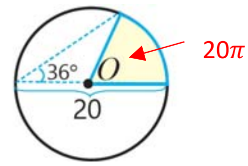
$l = \frac{72}{360} \cdot 2\pi \cdot 15 = 6\pi$



б) $S = \frac{72}{360} \cdot \pi \cdot 20^2 = 80\pi$

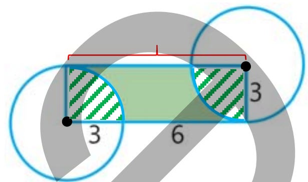
Поскольку диаметр равен 20, сначала находится радиус. $r = 20 : 2 = 10$. *Затем находится длина дуги, соответствующей центральному углу.*

$l = \frac{72}{360} \cdot \pi \cdot 10^2 = 20\pi$



14. По данным, приведённым на рисунке, находится площадь закрашенной части. Ответ выражается через π.

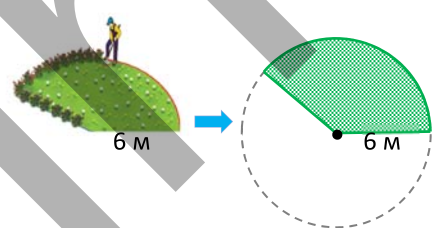
б) Находится общая площадь прямоугольника и заштрихованных частей, затем из площади прямоугольника вычитается площадь заштрихованных частей.



$\frac{90}{360} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 2 = 4{,}5\pi$ $\qquad$ $9 \cdot 2 - 4{,}5\pi = 18 - 4{,}5\pi$

Решение задач

17. Отмечается, что садовник выделил во дворе участок в форме сектора круга радиусом 6 м и углом 150° для посадки цветов ($\pi \approx 3$).



- Вычисляется площадь участка, отведённого под цветы.

$\frac{150}{360} \cdot \pi \cdot 6^2 \approx 45$ (м^2)

- Вычисляется периметр участка, отведённого под цветы.

$\frac{150}{360} \cdot 2\pi \cdot 6 = 15$ $\qquad$ $15 + 6 \cdot 2 = 27$ (м)

Определяется, сколько кустов роз можно посадить по периметру, если расстояние между ними составляет 50 см. Важно обратить внимание учеников на то, что все величины должны быть выражены в одинаковых единицах измерения.

50 см = 0,5 м; $\quad$ 27 : 0,5 = 54 (куста)

Ответ. 45 м, 54 куста

Обсуждение. Выслушиваются мнения учащихся, решивших задачу разными способами.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Вычисляет длину дуги окружности.	Рабочие листы, учебник, РТ
Объясняет понятия «сектор круга», «радиус сектора», «угол сектора».	Рабочие листы, учебник, РТ
Вычисляет площадь сектора круга.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 7.5. Шар. Площадь поверхности и объем шара

ПОДСТАНДАРТЫ	7-3.7.1. Вычисляет площадь поверхности шара. 7-3.7.2. Вычисляет объём шара.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Вычисляет площадь поверхности шара. • Вычисляет объём шара.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки,стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/nsgex9aj* *https://www.geogebra.org/m/ZHaaZ7E4* Задание: *https://www.geogebra.org/m/jvge9phq*

Побуждение

Формирование пространственных представлений во многом зависит от наглядного представления фигур. Целесообразно раздать ученикам стикеры с примерами предметов, встречающихся в повседневной жизни (мяч, глобус, апельсин, арбуз, пузырьки воды и т.д.), продемонстрировать их на уроке в наглядной форме, а в классах с техническими возможностями использовать симуляции.

Для побуждения учеников можно задать им направляющие вопросы:

– Какие предметы в форме шара вы можете назвать в повседневной жизни? В каких видах спорта используются мячи в форме шара? Если апельсин и арбуз шаровидной формы разрезать пополам, у какого из полученных кругов радиус будет больше? Как бы вы это объяснили?

Исследование-обсуждение

С учениками проводится обсуждение того, как Сабина разместила кожуру апельсина внутри четырёх кругов.

• Отмечается, что кожура апельсина полностью заполняет четыре конгруэнтных круга, следовательно, площадь поверхности апельсина равна суммарной площади четырёх кругов.

• Если радиус кругов равен 5 см, находится общая площадь четырёх кругов радиуса 5 см. $4 \cdot \pi \cdot 5^2 = 100\pi$

Эту деятельность можно наглядно выполнить в классе вместе с учениками.

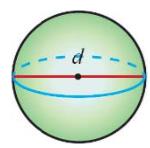
В классах с техническими возможностями аналогичную деятельность можно продемонстрировать ученикам: *https://youtu.be/YC4t5JpSos4* *https://www.geogebra.org/m/cbzg7ghq*

Изучение Площадь поверхности шара

Отмечается, что все точки поверхности шара находятся на одинаковом расстоянии от его центра. Ученикам даются сведения о радиусе, диаметре и большом круге шара. Подчёркивается, что площадь поверхности шара в 4 раза больше площади его большого круга, приводятся примеры.

$$S_{шара} = 4\pi r^2$$

Подумай!



Также подчёркивается, что площадь поверхности шара с диаметром d можно найти по формуле $S_{шар} = \pi d^2$. Ученики могут обосновать это, подставив $d = 2r$ в формулу или записав $r = \frac{d}{2}$ в формулу $S_{шар} = 4\pi r^2$.

$S_{шар} = \pi d^2 = \pi \cdot (2r)^2 = \pi \cdot (2r)^2 = 4\pi r^2$ или $S_{шар} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot (\frac{d}{2})^2 = 4\pi \cdot \frac{d^2}{4} = \pi d^2$

К сведению учителя! Ученики в предыдущих классах уже знакомы с понятием площади поверхности трёхмерных фигур — куба, прямоугольного параллелепипеда, прямой призмы с треугольным основанием. Так как поверхность этих фигур состоит из многоугольников, для нахождения площади достаточно представить их грани. Поскольку поверхность шара не состоит из плоских фигур, понять его площадь без наглядного представления сложнее. Обращение к практическим примерам облегчает усвоение этого понятия. Например, рекомендуется подчеркнуть, что при вычислении количества материала для изготовления мяча или краски для окрашивания бака в форме шара определяется именно площадь поверхности шара.

Задания

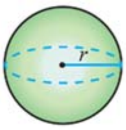
2. Площадь большого круга шара дана. Ученики находят площадь поверхности шара, исходя из того, что он в 4 раза больше площади большого круга.

а) Если площадь большого круга равна 6π см², то площадь поверхности шара равна $6\pi \cdot 4 = 24\pi$ (см²)

Внимание!

Отмечается, что наша планета называется Земным шаром, так как имеет приблизительно форму шара. Ученикам даются сведения о Северном и Южном, Восточном и Западном полушариях. Подчёркивается, что экватор является большим кругом Земли, а Гринвичский меридиан — полуокружностью.

4. Площадь поверхности шара радиуса r равна площади боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты 2r. Это впервые установил древнегреческий учёный Архимед. Ученики, находя площади поверхности цилиндра и шара на рисунке, проверяют справедливость этого утверждения.



Отмечается, что площадь поверхности шара равна $4\pi r^2$.

Записывается формула для вычисления площади поверхности цилиндра.
$2\pi rh = 2\pi \cdot r \cdot 2r = 4\pi r^2$

Изучение Объём шара

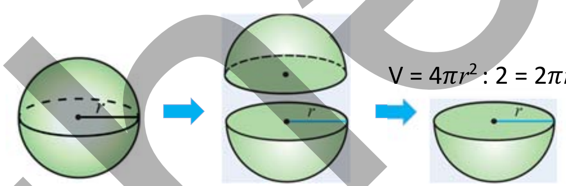
Отмечается, что объём шара прямо пропорционален кубу его радиуса, формула вычисления объёма доводится до сведения учеников.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Подумай!

Так как шар состоит из двух полушарий, отмечается, что объём полушария равен половине объёма шара, и записывается соответствующая формула.

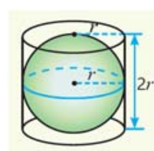
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 : 2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3$$



$V = 4\pi r^2 : 2 = 2\pi r^2$

К сведению учителя! Способ вывода формулы объёма шара ученики изучат в старших классах. В данной теме важно, чтобы ученики усвоили, что объём шара прямо пропорционален кубу радиуса, и научились вычислять его по формуле. Это можно объяснить с помощью практической деятельности, как в видео, опуская шар в цилиндрический сосуд: *https://youtu.be/h4j8l3p22e8*

Из истории математики



Подчёркивается, что древнегреческий учёный Архимед ещё в 225 г. до н.э. доказал, что площадь поверхности шара в 4 раза больше площади его большого круга, а также что и площадь поверхности, и объём шара составляют две трети площади полной поверхности и объёма описанного вокруг него цилиндра.

6. Требуется найти диаметр и объём шара, площадь поверхности которого равна 64π см².
По формуле площади поверхности шара находится радиус. $4\pi r^2 = 64\pi \rightarrow r = 4$ см

Вычисляется объём шара. $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 = \frac{256}{3}\pi$ (см^3)

Решение задач

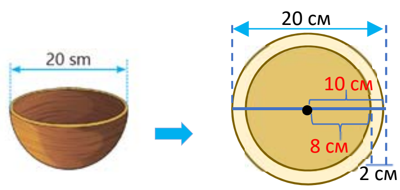
9. Отмечается, что глиняный сосуд в форме полушара имеет внешний диаметр 20 см и толщину 2 см. Требуется найти объём и массу глины, затраченной на изготовление сосуда. Изобразив вид сосуда сверху, можно показать, что получаются концентрические окружности. Таким способом ученики могут легче определить соответствующие радиусы.

Решение задачи

- Вычисляются внешний и внутренний радиусы полушара.

$r_{внешний} = 20 : 2 = 10$ (sm) $\qquad r_{внутренний} = 10 - 2 = 8$ (sm)

Для нахождения объёма глины из объёма внешнего полушара вычитается объём внутреннего.



$V_{внешний} - V_{внутренний} = \frac{2}{3}\pi \cdot 10^3 - \frac{2}{3}\pi \cdot 8^3 \approx 1022$ (sm^3)

- Если плотность глины равна 2,74 г/см³, вычисляется масса сосуда. Ответ округляется до целых.

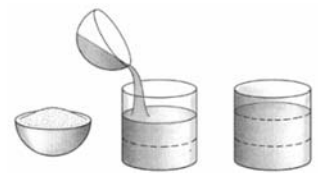
$m = \rho \cdot V = 2{,}74 \cdot 1022 \approx 2800$ (г)

Ответ. 1022 см³, 2800 г.

Обсуждение. Выслушиваются мнения учащихся, решивших задачу разными способами.

Практическое задание

Находится объём цилиндра радиуса r и высоты 2r.



- Сосуд в форме полушара с тем же радиусом, что и цилиндр, наполняется песком и пересыпается в цилиндр.
- При повторении этого действия 3 раза наблюдается, что цилиндр заполняется полностью, на основании чего делается вывод, что объём шара в 3 раза больше объёма цилиндра.

В классах с техническими возможностями можно использовать аналогичные симуляции: *http://dmentrard.free.fr/GEOGEBRA/Maths/Surfvolsphe2MD.html*

К сведению учителя! Для преодоления трудностей, связанных с пространственными фигурами, ученикам можно предложить на этапе составления плана решения соотносить объёмные фигуры с плоскими. Правильное установление этой связи помогает ученикам визуально понять тему, спланировать решение и развивать пространственное мышление. Например, можно подчеркнуть, что вид полушария сверху представляет собой круг, что этот круг является большим кругом шара и что его радиус равен радиусу шара. Используя этот приём, учитель может направить учеников к применению уже известных им понятий о круге и тем самым облегчить усвоение новой темы.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Вычисляет площадь поверхности шара.	Учебник, РТ
Вычисляет объём шара.	Учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение

Понятия, приведённые в кратком обзоре раздела учебника, повторяются с учениками. Термины, изученные в разделе, напоминаются учителем. По мере называния каждого понятия учащиеся объясняют его содержание и приводят примеры.

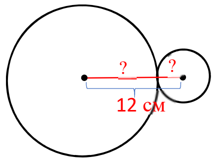
Секущая окружности, касательная окружности, концентрические окружности, полуокружность, центральный угол, дуга, мажорная дуга, минорная дуга, вписанный угол, хорда, сектор круга, шар, радиус шар, большой круг шара, полушар.

Информация о фигурах в форме круга и шара, представленная на первой странице раздела, вспоминается вместе с учениками. Отмечается, что планеты и многие небесные тела имеют форму шара, а также указывается, какие геометрические фигуры и их свойства используются при их изучении и получении сведений об их размерах. В задании «Попытайтесь!» вопросы, связанные с круговым манежем, были обсуждены в начале раздела. Данные ответы вспоминаются и сравниваются с решением исходной задачи.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

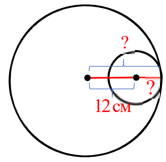
4. Расстояние между центрами двух касающихся окружностей равно 12 см, их радиусы находятся в отношении 1 : 3. Радиусы окружностей обозначаются как 3x и x. В соответствии с условием составляются уравнения и решаются.

а) Так как окружности касаются внешним образом, расстояние между центрами равно сумме радиусов.



$3x + x = 12$
$4x = 12$
$x = 3$ (см)
$3 \cdot 3 = 9$ (см)

б) Так как окружности касаются внутренним образом, расстояние между центрами равно разности радиусов большей и меньшей окружностей.



$3x - x = 12$
$2x = 12$
$x = 6$ (см)
$3 \cdot 6 = 18$ (см)

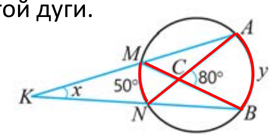
7. Вычисляется градусная мера угла или дуги, обозначенной переменной. При нахождении нескольких неизвестных важно, чтобы ученики правильно установили связи между данными.

в) На основании рисунка дан угол между двумя пересекающимися хордами и одна из дуг окружности, заключённых между этими хордами.

На основании свойства угла между пересекающимися хордами находится градусная мера другой дуги.

$\frac{50^o + y}{2} = 80^o$

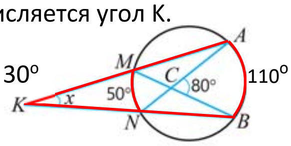
$y = 110^o$



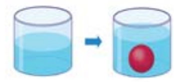
На основании свойства угла между секущими, проведёнными из точки вне окружности, вычисляется угол К.

$\angle K = \frac{110^\circ - 50^\circ}{2} = 30^o$

$x = 30^o$

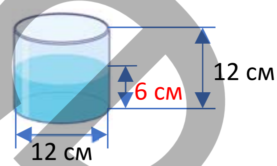


12. Требуется определить, на какую высоту поднимется уровень воды, если в цилиндрический сосуд диаметром и высотой 12 см, наполовину заполненный водой, опустить железный шар радиусом 3 см.



Привлечение. Стеклянный сосуд с некоторым количеством воды ставится на стол. Учитель готовит кубы или сферические тела разных размеров, чтобы опустить их в сосуд, и обращается к классу. При погружении какого тела объём воды увеличится больше? Как это определить? Если объём воды увеличится в 2 раза, во сколько раз увеличится её высота? Отвечая на вопросы, фигуры опускаются в воду, результаты обсуждаются.

Решение задачи



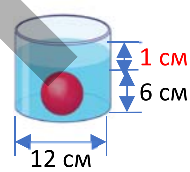
Наполовину заполненный водой сосуд означает, что уровень воды составляет 6 см. Находится радиус сосуда и вычисляется объём воды в нём.

$r = 12 : 2 = 6$ (см)

$V_{\text{вода}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 6 = 216\pi$

Вычисляется объём опущенного в сосуд шара. $V_{\text{шар}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$ (см^2)

Так как объём воды увеличивается на объём шара, объём шара делится на площадь основания цилиндра и находится, на сколько сантиметров увеличилась высота воды.



$36\pi : 36\pi = 1$ (см)

Ответ. 1 см.

Обсуждение. Выслушиваются мнения учащихся, решивших задачу разными способами.

Математический калейдоскоп

1. Анар, используя цифры 5, 7, 8, записал однозначные, двузначные, трёхзначные и четырёхзначные числа в порядке возрастания. 5, 7, 8, 55, 57, 58, 75, 77, 78, ...

• Чтобы найти число, стоящее на 40-м месте, необходимо определить закономерность.

Количество однозначных чисел: 3

Кол-во двузначных чисел: $3^2 = 9$

Кол-во трехзначных чисел: $3^3 = 27$

5, 7, 8, 55, 57, 58, 75, 77, 78, 85, 87, 88, 555, 557, ...

3 9 27

По этому правилу находится общее количество однозначных, двузначных и трёхзначных чисел. 3 + 9 + 27 = 39.

Следовательно, следующее число, то есть 40-е, будет наименьшим четырёхзначным числом, соответствующим условию. Это число 5555.

Продолжая закономерность, находится количество четырёхзначных чисел.

Количество четырёхзначных чисел: $3^4 = 81$

Находится общее количество однозначных, двузначных, трёхзначных и четырёхзначных чисел. 39 + 81 = 120. Следовательно, 100-е число — четырёхзначное.

Ответ: 5555, четырёхзначное число.

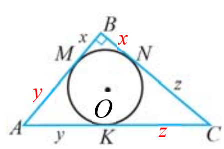
2. Окружность касается сторон прямоугольного треугольника ABC в точках M, N, K.

$AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см.

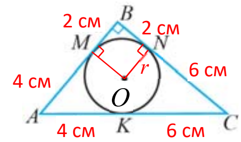
а) Касательные, проведённые из одной точки к окружности, равны. $MB = BN = x$, $AM = AK = y$, $CN = CK = z$

Составляется система уравнений и находятся длины отрезков.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + z = 8 \\ y + z = 10 \end{cases}$$



$x = 2$; $y = 4$; $z = 6$.



б) Сторона AB делится точкой касания на отрезки 4 см и 2 см, сторона BC — на 2 см и 6 см, сторона AC — на 6 см и 4 см.
в) Так как точки M и N точки касания, углы BMO и BNO прямые, следовательно, MBNO — квадрат. Это означает, что радиус окружности равен 2 см.

3. Известно, что поезд проходит мимо столба за 27 секунд, а тоннель длиной 660 м — за 60 секунд. Требуется найти скорость поезда.

Решение задачи
Прохождение поезда мимо столба за 27 секунд означает, что за это время он проходит путь, равный своей длине. Обозначив скорость поезда через x, получаем, что его длина равна 27x. При прохождении тоннеля поезд проходит путь, равный сумме длины поезда и длины тоннеля, то есть $660 + 27x$. Так как этот путь поезд проходит за 60 секунд, составляется уравнение и решается.
$660 + 27x = 60x$
$x = 20$ м/с
Ответ. Скорость поезда 20 м/с.

S.T.E.A.M. *"ПЛАНЕТАРИЙ"*

Отмечается, что планетарий — это специальное пространство, позволяющее с помощью современных технологий наблюдать модель Вселенной, состоящей из звёзд, планет и комет. Куполообразный потолок в форме полушара создаёт условия для наблюдения небесных тел со всех сторон и формирует эффект нахождения под открытым небом.

1. Купол планетария имеет форму полушара диаметром 12 м.

Площадь поверхности: $S = 2\pi r^2 = 72\pi$ (м²) Объем: $V = \frac{2}{3}\pi r^3 = 144\pi$ (м³)

2. На круговом экране в секторе с радиусом 6 м и центральным углом 90° изображена группа звёзд.

Площадь сектора: $S = \frac{90}{360}\ \pi \cdot 6^2 = 9\pi \approx 28{,}27$ (м²) Длина дуги: $l = \frac{90}{360} \cdot 2\pi \cdot 6 = 3\pi \approx 9{,}42$ (м)

3. Ученики изготавливают модель купола. Если радиус модели равен 30 см, они вычисляют площадь поверхности и объём.

Площадь поверхности: $S = 2\pi r^2 = 1800\pi$ (см²) Объем: $V = \frac{2}{3}\pi r^3 = 18000\pi$ (см³)

4. Следует обратить внимание учащихся на то, что такие пространства используются не только для наблюдения планет, но и для демонстрации фильмов, музыкальных программ и визуальных шоу. Купольные или сферические экраны охватывают изображение со всех сторон, создавая у зрителя эффект присутствия в реальной среде. Это делает такие пространства особенно удобными для современного кино, концертов и цифрового искусства.

Можно рассказать ученикам о MSG Sphere в Лас-Вегасе — одном из объектов с самым большим сферическим экраном в мире.

В классах с техническими возможностями рекомендуется использовать видеоматериалы.
https://youtu.be/U0s144AKnaU
Ученикам можно предложить, собрав информацию о подобных пространствах, творчески подойти к задаче и подготовить презентации собственных моделей планетариев, новых возможностей и дополнительных эффектов, усиливающих впечатление зрителей. Рекомендуется организовать небольшую выставку подготовленных моделей. Такая деятельность стимулирует учащихся, развивает навыки исследования, аргументации идей и командной работы.

8-й РАЗДЕЛ

Линейное уравнение. Система уравнений. Неравенство

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	50	
Тема 8.1	Линейное уравнение с одной переменной	2	51	33
Тема 8.2	Линейное уравнение с двумя переменными и его график	3	54	35
Тема 8.3	Система уравнений	2	58	38
	Задачи и примеры	1	61	40
Тема 8.4	Решение системы линейных уравнений методами подстановки и сложения	3	62	42
Тема 8.5	Решение задач с помощью систем уравнения	4	65	46
Тема 8.6	Уравнения с модулем	2	69	48
Тема 8.7	Неравенства	2	71	50
Тема 8.8	Приблизительные вычисления. Абсолютная и относительная погрешность	2	74	52
	Обобщающий урок. STEAM. “Умные светофоры”	2	78	54
	МСО 8	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	25		

Краткий обзор раздела

В этом разделе ученики овладеют знаниями и умениями, относящимися к линейному уравнению с одной переменной и его решению, линейному уравнению с двумя переменными, его графику и решению, уравнению прямой. Они изучат решение систем линейных уравнений с двумя переменными различными способами, будут применять решение системы уравнений к задачам из реальных ситуаций. Ознакомятся с темами решения простых уравнений с модулем, простых неравенств, нахождения абсолютной и относительной погрешности результата при измерениях и приближённых вычислениях.

На что стоит обратить внимание?

При решении уравнений ученики прежде всего должны обратить внимание на определение способов нахождения неизвестного. Целесообразно вместе с учениками повторить правила нахождения неизвестного слагаемого, уменьшаемого, вычитаемого, множителя, делителя и делимого. При решении уравнений ученики иногда затрудняются определить, с какого действия начать и какое правило применить. Кроме того, после решения уравнения не всегда проверяется, является ли найденное число корнем уравнения. Проверка правильности корня формирует у учеников умение самостоятельно находить и исправлять ошибки в выполненном решении.

Система линейных уравнений с двумя переменными и способы её решения изучаются впервые, и приобретаемые знания опираются на ранее полученные учениками знания о решении уравнений. Основная цель решения задач с помощью системы уравнений — формирование и развитие у учеников умения составлять уравнение по условию задачи.

Развитие математического языка

В этом разделе вводятся и изучаются понятия: «линейное уравнение с одной переменной», «линейное уравнение с двумя переменными», «график линейного уравнения с двумя переменными», «уравнение прямой», «система уравнений», «метод подстановки», «метод сложения», «относительная погрешность», «абсолютная погрешность». Для хорошего усвоения темы целесообразно чётко разъяснить новые понятия и их свойства.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Линейное уравнение с одной переменной, линейное уравнение с двумя переменными, график линейного уравнения с двумя переменными, уравнение прямой, система уравнений, метод подстановки, метод сложения, неравенство, приближённые вычисления, относительная погрешность, абсолютная погрешность.

Необходимые предварительные знания и умения:

- Выражения с переменной
- Уравнение, корень уравнения
- Модуль числа
- Линейная функция, её график
- Простое неравенство
- Действия над обыкновенными и десятичными дробями
- Отношение
- Процент
- Округление

Междисциплинарная интеграция

Как и в математике, при изучении других предметов широко используются уравнения, системы уравнений и неравенства. В физике — задачи на скорость, путь и время; в химии — задачи на количество вещества, растворы и смеси; в географии — задачи на масштаб; в экономике — задачи на доходы и расходы, бюджет; в биологии — задачи, связанные с делением клетки и др., решаются с помощью уравнений, систем уравнений или неравенств.

ТЕМА 8.1. Линейное уравнение с одной переменной

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.1.3. Находит значение многочлена при заданном значении переменных. 7-2.2.1. Исследует и решает линейное уравнение с одной переменной.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Находит значение многочлена. • Исследует линейное уравнение с одной переменной, определяет наличие или отсутствие корней.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки,стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/fjekqnuh* Задание: *https://www.geogebra.org/m/k6arM5Ga* *https://www.geogebra.org/m/epyvqfcm* *https://www.geogebra.org/m/ny5ffz3h*

Обсуждение исходной задачи

В данном разделе сначала даётся информация об использовании уравнений и неравенств для решения различных задач в повседневной жизни, экономике, инженерии, медицине и других сферах. Обсуждается применение уравнений и неравенств при решении задач на производительность труда, в строительстве — для определения требуемой нагрузки и сейсмостойкости инженерных сооружений и др.

В качестве первоначальной проблемы анализируется условие задачи и рассматривается, как составить уравнение для определения содержания витамина C в апельсиновом и яблочном соке. На первом уроке ученики могут не полностью решить задачу под заголовком «Попытайтесь». Ученикам сообщается, что к решению задачи вернутся в конце раздела.

Побуждение

Ученикам можно задать различные вопросы о ранее встречавшихся уравнениях и способах их решения. Обсуждается, как составить уравнение по условию задачи. Например, учитель предлагает ученикам задачу: «У Анара книг на 5 больше, чем у Лалы. Известно, что вместе у них 27 книг. Сколько книг у каждого ребёнка?» Полученные ответы анализируются и составляется уравнение. Ученики также могут приводить свои примеры.

Исследование-обсуждение

По данным, представленным в таблицах, составляется уравнение для нахождения времени, которое Сабина и Анар тратят на чтение в течение дня, и отвечают на вопросы.

Имя \ Время (час)	Суббота	Воскресенье
Сабина	x	$2x-1$
Анар	$x+1$	x

Имя \ Время (час)	Суббота	Воскресенье
Самир	$x+1$	$x+2$
Айнур	$x+4$	x

• Для нахождения времени, затраченного каждым ребёнком на чтение за два дня, записывается выражение.

Сабина: $x + 2x - 1 = 3x - 1$, Анар: $x + 1 + x = 2x + 1$, Самир $x + 1 + x + 2 = 2x + 3$, Айнур $x + 4 + x = 2x + 4$.

• Учитывается, что Сабина и Анар за два дня потратили на чтение одинаковое время; из составленного уравнения определяется это время. $3x - 1 = 2x + 1 \rightarrow x = 2$.

Следовательно, Сабина ($3 \cdot 2 - 1 = 5$) и Анар ($2 \cdot 2 + 1 = 5$) потратили на чтение 5 часов.

• Если Самир и Айнур за два дня потратили бы одинаковое время, то оно должно было бы быть корнем уравнения $2x + 3 = 2x + 4$. Это уравнение упрощается. $0 \cdot x = 1$.

При умножении на ноль произведение не может быть равно 1. Следовательно, числа, удовлетворяющего этому уравнению, не существует. Значит, Самир и Айнур потратили на чтение разное время.

Изучение

Линейное уравнение с одной переменной

Учитель даёт информацию о линейном уравнении с одной переменной (с одним неизвестным). Обсуждается, что уравнение называется линейным с одной переменной или с одним неизвестным, поскольку в записи участвует одна переменная (одно неизвестное). Обращается внимание на то, что уравнение является линейным; ученикам объясняется степень переменной (неизвестного) и запись линейного уравнения с одной переменной в виде $ax = b$. Рассматриваются приведённые в разделе уравнения и объясняется, почему они являются линейными с одной переменной. Если выражения в левой и правой частях уравнения являются многочленами первой степени, то, используя свойства равенств, уравнение записывается в виде эквивалентного ему уравнения $ax = b$. Особо подчёркивается, когда и как меняются знаки.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/azusfm5x

Подумай!

Ученики обсуждают, почему уравнение $4x^2 = 25$ не является линейным. Объясняется степень уравнения и смысл выражения «линейный». Поскольку степень переменной в данном уравнении равна двум, подчёркивается, что оно не является линейным.

К сведению учителя!

Ученики могут не понять связь понятия линейного уравнения со степенью уравнения. Поэтому при объяснении темы рекомендуется обращать внимание на степень уравнения и подчёркивать, что для линейного уравнения степень переменной должна быть равна единице, приводить примеры.

Задания

1. Вопрос, приведённый в рубрике «Подумай», можно рассматривать как применение задания. Для каждого варианта ученик определяет, является ли уравнение линейным, по его степени. Однако вариант г) целесообразно обсудить более подробно.

г) Уравнение $0 \cdot x = 0$ считается линейным с одной переменной, так как степень x равна 1, и это уравнение имеет бесконечно много корней. В следующем разделе решение такого уравнения подробно объясняется.

2. Проверяется, является ли заданное значение переменной корнем уравнения. Ученики подставляют данные числа в уравнение и проверяют истинность полученного равенства, то есть определяют, равны ли полученные числа в левой и правой частях равенства.

Ложные представления, возникающие у учеников.

Проверка того, является ли данное число корнем уравнения, иногда неправильно понимается учениками. Если в записи уравнения одна и та же переменная встречается два или более раз, ученики иногда подставляют значение только в одно место, игнорируя остальные. Учителю следует обратить внимание на необходимость подстановки значения во все места записи переменной и разъяснить это на примерах, чтобы устранить данную ошибку.

2. б) Определите, является ли число y = 0,3 корнем уравнения $\frac{1}{3}y + 0{,}5y - \frac{1}{4} = 0$.

Ложно $\frac{1}{3} \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot y - \frac{1}{4} = 0 \to 0{,}1 + 0{,}5y - 0{,}25 = 0$.

Ученик здесь либо находит y, либо не может решить. Это приводит к получению ошибочного результата при проверке, является ли данное число корнем уравнения.

Верно В уравнении $\frac{1}{3}y + 0{,}5y - \frac{1}{4} = 0$ место каждого y подставляется 0,3: $\frac{1}{3} \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 - \frac{1}{4} = 0 \to 0 = 0$. Также после приведения подобных членов в уравнении можно учитывать значение переменной.

4. В данных уравнениях в пустую клетку следует записать такое число, чтобы полученные уравнения были эквивалентными. Целесообразно обратить внимание учеников на то, почему уравнение, полученное после выполнения соответствующих преобразований данного уравнения, является ему эквивалентным.

б) Обе части уравнения $\frac{y}{2} - \frac{y}{4} = 2$ умножаются на 4.

$(\frac{y}{2} - \frac{y}{4}) \cdot 4 = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow 2y - y = 8$.

г) Обе части уравнения $\frac{b}{4} + \frac{b}{6} = 1$ умножаются на 12.

$(\frac{b}{4} + \frac{b}{6}) \cdot 12 = 1 \cdot 12 \Leftrightarrow 3b + 2b = 12 \to 5b = 12$.

5. С учениками обсуждается, какое преобразование следует выполнить в каждом уравнении, после чего уравнения решаются.

f) $5x - 2 = \frac{1}{2}x + 4$ Записывается уравнение.

$5x - \frac{1}{2}x = 4 + 2$ Неизвестные члены переносятся в левую часть уравнения, числа — в правую часть.

$4\frac{1}{2}x = 6$ Приводятся подобные члены.

$x = 1\frac{1}{3}$ Находится корень уравнения.

$5 \cdot 1\frac{1}{3} - 2 = \frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} + 4 \rightarrow 4\frac{2}{3} = 4\frac{2}{3}$. Проверяется правильность ответа.

g) $\frac{y+3}{6} = -1\frac{2}{3}$ Записывается уравнение.

$\frac{y+3}{6} = \frac{-5}{3}$ Правая часть уравнения переводится в неправильную дробь.

$y + 3 = -10$ Обе части уравнения умножаются на 6.

$y = -13$ Находится корень уравнения.

$\frac{-13+3}{6} = \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3} = -1\frac{2}{3}$. Полученное число подставляется вместо переменной в уравнение и проверяется правильность ответа.

Изучение **Решение линейного уравнения с одной переменной**

Учитель обсуждает с учениками, что значит решить уравнение. Решить уравнение — значит найти все его корни, превращающие его в верное равенство, или установить, что корней нет. Объясняется, как находятся корни линейного уравнения ax = b при различных значениях a и b, обращается внимание на случаи существования единственного корня, бесконечного числа корней или отсутствия корней.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/sfecqmqd *https://www.geogebra.org/m/nwdeffef*

7. В пустые клетки следует записать такое число, чтобы уравнение не имело корня. Отсутствие корня уравнения означает, что коэффициент при x равен нулю, а свободный член отличен от нуля.

a) $\boxed{2}x + 5 = 2x + 6$, $0 \cdot x = 1$ b) $\boxed{3}x + 3 = 3(x + 5)$, $0 \cdot x = 12$ d) $\boxed{4}(x - 1) = 4x - 2$, $0 \cdot x = 2$.

8. Ученик должен записать в пустые клетки такие числа, чтобы в полученном уравнении коэффициент при x и свободный член были равны нулю.

$\boxed{3}x + 2 = 3x + 2$ $-\boxed{4}(x + 2) = -4x + \boxed{(-8)}$ $3(x - \boxed{2}) = \boxed{3}x - 6$.

9. Получение нуля в ответе у некоторых учеников создаёт представление, что уравнение не имеет корня. Чтобы избежать такой ошибки, целесообразно подчеркнуть, что ноль как число может быть корнем любого уравнения, и решить соответствующие примеры.

10. Чтобы найти корень данных уравнений, сначала необходимо их упростить. Здесь обращается внимание на выполнение возможных преобразований и освобождение уравнения от дробей путём умножения обеих частей равенства на наименьший общий знаменатель этих дробей. С учениками обсуждается, почему такие уравнения умножаются на НОК знаменателей. Перед решением уравнений можно повторить с учениками правило нахождения наименьшего общего кратного чисел. Целесообразно обсудить с учениками пример, приведённый в задании.

f) $\frac{3y}{4} - \frac{1}{2} = 2y - 3$. Обе части равенства умножаются на НОК(4; 2) = 4. $3y - 2 = 8y - 12 \rightarrow y = 2$.

g) $\frac{a+1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{a}{6}$. Обе части равенства умножаются на НОК(2; 3; 4; 6) = 12. $4a + 4 + 9 = 6 + 2a \rightarrow a = -3{,}5$.

h) $\frac{x-2}{3} + \frac{x+1}{2} = \frac{x}{4} + 1$. Обе части равенства умножаются на НОК(2; 3; 4) = 12. $4x - 8 + 6x + 6 = 3x + 12 \rightarrow x = 2$.

11. Перед решением уравнений данного задания целесообразно напомнить, как знак минус перед скобкой влияет на выражение внутри скобок. Если в записи уравнения имеются вложенные скобки, обсуждается, какие преобразования выполняются в первую очередь.

c) $y - 3(y - 2(y + 1)) = 1$. При решении данного уравнения можно выполнить различные преобразования. Каждое преобразование исследуется вместе с учениками, выслушиваются мнения учеников о том, какое из них удобнее или понятнее.

$y - 3y + 6(y + 1)) = 1$ Число 3 умножается на выражение в скобках.	$y - 3(y - 2y - 2) = 1$ Число 2 умножается на $(y + 1)$.
$-2y + 6y + 6 = 1$ Число 6 умножается на $(y + 1)$.	$y + 3y + 6 = 1$ Число 3 умножается на полученное выражение.
$y = -1,25$ Находится корень уравнения.	$y = -1,25$ Находится корень уравнения.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/bud6yvtd *https://www.geogebra.org/m/faquv9aQ*

Дифференцированное обучение

Ученикам раздаются рабочие листы или задания на стикерах. Цель — формирование у учеников логического мышления и прикладных навыков.

Поддержка. Ученикам раздаются карточки, на которых записаны линейные уравнения с одной переменной.

1. Какие из чисел −3, 0 и 6,4 являются корнем уравнения $0,5x + 2,5 = x - 0,7$?

2. Если число $x = 2\frac{1}{3}$ является корнем уравнения $10\frac{2}{5} - 6x = a$, найдите a.

Ученики проверяют правильность ответов друг друга.

Углубление. Ученикам предлагаются следующие задания.

а) При каком значении а уравнение ах = 12 имеет решение? А при каком значении решения не имеет?

б) Запишите линейное уравнение, решением которого является х = 2. Составьте задачу, соответствующую этому уравнению.

Решение задач

12. *Решение задачи*

Анализируется условие задачи, обращается внимание на то, что расстояние от Ханкенди до Гянджи не изменяется, однако при движении туда и обратно скорость и время различны. Выслушиваются мнения учеников о способе нахождения расстояния и по условию составляется уравнение.

При движении из Ханкенди в Гянджу: $t_1 = 2$ часа, $v_1 = x$ км/час.

При возвращении из Гянджи в Ханкенди: $t_2 = 1,6$ часа, $v_2 = v_1 + 20 = x + 20$ (км/час)

Так как расстояние не изменяется, можно записать уравнение $2x = 1,6(x + 20)$.

Ответ. 80 км/час.

13. Учениками вспоминаются формулы нахождения периметров земельных участков прямоугольной и квадратной формы.

• Записываются и приравниваются выражения для периметров фигур, стороны которых заданы переменной. Полученное уравнение решается.

$2(x - 2 + 2x - 1) = 4x \rightarrow x = 3$.

• Периметры прямоугольника и квадрата приравниваются и решается полученное уравнение.

$2(a - 1 + a + 2) = 4a \rightarrow 4a + 2 = 4a \rightarrow 0 = 2$.

Так как данное равенство неверно, периметры прямоугольника и квадрата со сторонами, заданными в условии, не могут быть равны.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/zvqq6dek *https://www.geogebra.org/m/a5x3jqfz*

Практическое задание: Группам раздаются рабочие листы. Здесь решаются данные линейные уравнения с одной переменной и находится требуемый код. Рабочий лист можно загрузить по данной ссылке:
https://drive.google.com/file/d/1tkCfaHW5WIP7vEZ2KMnmAnWo3-ZdwTW2/view?usp=drive_link

Формативное оценивание

Критерии оценивания	**Материалы оценивания**
Находит значение многочлена при различных значениях переменной.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает линейное уравнение с одной переменной.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает задачу, составляя линейное уравнение с одной переменной.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 8.2. Линейное уравнение с двумя переменными и его график

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.2.3. Решает систему линейных уравнений с двумя переменными различными способами.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет линейное уравнение с двумя переменными. • Анализирует корни линейного уравнения с двумя переменными. • Решает задачу с помощью линейного уравнения с двумя переменными.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки,стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/UagYGTcc#material/Prnw45eJ* Задание: *https://www.geogebra.org/m/Xs59nbxJ* *https://www.geogebra.org/m/hbhmghve* *https://www.geogebra.org/m/pvvcyzts*

Побуждение

Во многих реальных задачах наблюдается зависимость двух величин друг от друга. Например, зависимость между количеством купленных товаров и общей оплаченной суммой, зависимость между суммой, разностью, произведением или частным двух переменных и принимаемыми ими значениями и т.д.
Учитель записывает на доске равенства $x + y = 10$, $xy = 17$, $x - y = 5$ и спрашивает, какие натуральные значения могут принимать переменные x и y. Выслушиваются мнения учеников.

Исследование-обсуждение

Масса яблок обозначается x кг, масса бананов y кг.

• По данному условию записывается уравнение $2x + 3y = 12$. Обсуждаются возможные значения x и y.

• Обсуждается, как определить массу бананов по данному уравнению, если куплено 1,5 кг или 3 кг яблок. Подставляя в уравнение вместо x значения 1,5 и 3, находят y:
$2 \cdot 1{,}5 + 3y = 12 \rightarrow y = 3$ (кг), $2 \cdot 3 + 3y = 12 \rightarrow y = 2$ (кг).

Изучение Линейное уравнение с двумя переменными

Учитель даёт информацию о линейном уравнении с двумя переменными (или двумя неизвестными), доводит до внимания учеников его определение и формулу. Приводятся примеры линейных уравнений с двумя переменными, а также на примерах объясняются нелинейные уравнения с двумя переменными.
В отличие от линейного уравнения с одной переменной, решение линейного уравнения с двумя переменными записывается в виде пары (x; y), также учитель обращает внимание на эквивалентные уравнения. Выражение переменной y через x в линейном уравнении с двумя переменными демонстрируется на примерах, приведённых в учебнике или дополнительных примерах.

Подумай!

В приведённом в разделе изучения уравнении с двумя переменными переменная x выражается через y. Полученное выражение обсуждается. Ученики объясняют, чем оно отличается от выражения, полученного при выражении переменной y через x.
К сведению учителя! Можно обратить внимание учеников на то, что удобнее выражать ту переменную, коэффициент которой равен 1. Учитель приводит соответствующие примеры, выполняется выражение переменных и результаты обсуждаются с учениками. Например, в линейном уравнении $x + 3y = 8$ объясняется, какая из записей удобнее $x = 8 - 3y$ или $y = \frac{8-x}{3}$.

Задания

1. Исследуется, являются ли данные уравнения линейными уравнениями с двумя переменными. Ученики, основываясь на форме записи линейного уравнения с двумя переменными ($ax + by = c$) , определяют соответствие данных уравнений условию. Рассматриваются случаи деления на переменную или присутствия произведения переменных, объясняется, что несмотря на наличие двух переменных, такие уравнения не являются линейными.
f) В равенстве $2 = \frac{4}{a} + b$ участвуют две переменные, однако переменная a находится в знаменателе. Так как в линейном уравнении с двумя переменными деление на переменную отсутствует, подчёркивается, что данное уравнение не является линейным.

2. Данная пара чисел подставляется в линейное уравнение с двумя переменными и проверяется равенство значений обеих частей уравнения. Если полученные числа равны, считается, что данная пара чисел является решением уравнения, в противном случае обосновывается, что решением не является..

в) При $m = -3$ и $n = 2$ в уравнении $\frac{m}{3} - \frac{n}{2} + 2 = 0$ получаем $\frac{-3}{3} - \frac{2}{2} + 2 = -2 + 2 = 0$, следовательно, данная пара чисел является решением этого уравнения.

4. В данных уравнениях переменная у выражается через х.

г) Уравнение $2x + \frac{1}{3}y = -6$ решается двумя способами.

г) $2x + \frac{1}{3}y = -6$ Записывается уравнение.	$\frac{1}{3}y = -2x - 6$ Одночлен $2x$ переносится вправо.
$6x + y = -18$ Обе части умножаются на 3.	$\frac{1}{3}y : \frac{1}{3} = (-2x - 6) : \frac{1}{3}$ Обе части делятся на $\frac{1}{3}$.
$y = -6x - 18$ Переменная у выражается через х.	$y = -6x - 18$ Переменная у выражается через х.

5. Ученики, выражая одну переменную через другую в данных уравнениях, записывают любые три решения.

$1{,}2x + 2y = 0{,}6 \rightarrow$ а) $x = 0{,}5 - 1\frac{2}{3}y$ и б) $y = 0{,}3 - 0{,}6x$. Примеры решений уравнения: (0; 0,3), (0,5; 0), (–4,5; 3).

> Запишите любое решение уравнения $-2x + 3y = 6$.
>
> Ложно В уравнении записывается $x = 1$ и $y = 2$.
> $-2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = -2 + 6 = 4$ (1; 2)
>
> Верно В уравнении записывается $x = 1$ и находится y.
> $-2 \cdot 1 + 3 \cdot y = 6 \rightarrow y = 2\frac{2}{3}$ $(1; 2\frac{2}{3})$
> В уравнении записывается $y = (-2)$ и находится x.
> $-2x + 3 \cdot (-2) = 6 \rightarrow x = -6$ (– 6; – 2)

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда при определении какого-либо решения данного уравнения ученики ошибочно подставляют определённые числа вместо обеих переменных и выполняют вычисления. Это одна из наиболее распространённых ошибок учеников при нахождении решений линейных уравнений с двумя переменными. Они должны знать, что при нахождении решения линейного уравнения с двумя переменными вместо одной из переменных подставляется любое число, после чего находится соответствующее этому числу значение второй переменной, и таких пар чисел существует бесконечно много.

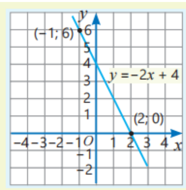
7. Запись любой мысли, утверждения или предложения, выраженных на математическом языке, в виде уравнения, равенства, тождества или неравенства с помощью математических символов является необходимым навыком, который должен формироваться у учеников. У ученика, умеющего выражать прочитанное предложение с помощью символов, развивается математическая грамотность и логическое мышление. В данном задании ученики записывают данные выражения в виде уравнений.

а) $2a + b = 6$ б) $m - \frac{n}{2} = 4$ в) $k - q = 6$.

Изучение График линейного уравнения с двумя переменными

В предыдущем разделе изучения ученики научились определять пары чисел, являющиеся решениями линейного уравнения с двумя переменными. Здесь обращается внимание на то, что графиком линейного уравнения с двумя переменными ax + by = c является прямая линия, при этом подчёркивается, что хотя бы один из коэффициентов a или b отличен от нуля.

$y = -2x + 4$		
x	y	$(x; y)$
–1	6	(–1; 6)
2	0	(2; 0)



В качестве примера вместе с учениками исследуется график линейного уравнения с двумя переменными, приведённый в учебнике. Переменная у выражается через х и уравнение записывается в виде y = kx + b, после чего, задавая два значения х, находят значения у. Точки с полученными координатами отмечаются в прямоугольной системе координат и соединяются. Обосновывается, что график является прямой линией. Ученики из раздела функций знакомы с формулой линейной функции y = kx + b. Учениками могут быть объяснены угловой коэффициент прямой, а также точки её пересечения с осями абсцисс и ординат.

Затем исследуются случаи, когда прямая параллельна оси Ох или оси Оу. В прямоугольной системе координат строятся прямые с одинаковыми угловыми коэффициентами и вместе с учениками исследуется их взаимное расположение, обращается внимание на параллельность таких прямых.

$y = 0{,}5x + 3$	
x	y
0	3
2	4

$y = 0{,}5x$	
x	y
0	0
2	1

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/jjuxbbsv *https://www.geogebra.org/m/ct8hEHhD*
https://www.geogebra.org/m/k4pKgSpW *https://www.geogebra.org/m/zTMwMjw8*

К сведению учителя! При объяснении данной темы учитель обращает внимание учеников на обе формы записи линейного уравнения. Выбор формы зависит от данных условий. Возможен переход от одной формы записи линейного уравнения к другой. *I форма:* $ax + by = c$, *II форма:* $y = kx + b$,
Например, данное в изучении уравнение $y = -2x + 4$ можно записать в виде $2x + y = 4$.

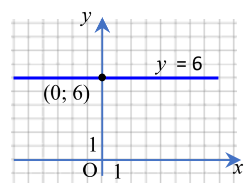
Подумай!

В линейном уравнении с двумя переменными ax + by = c числа a, b, c обсуждаются с учениками. Рассматриваются случаи, когда каждое из них равно нулю или отлично от нуля. Исследуется, в каком случае график уравнения параллелен оси Ox, а в каком совпадает с осью Ox. Устанавливается, что если b ≠ 0, c ≠ 0 и a = 0, то полученная прямая параллельна оси Ox. Если a = 0, b ≠ 0, c = 0, то получается уравнение y = 0. График этого уравнения совпадает с осью Ox. Для каждого случая приводятся примеры и строятся графики.
В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/hbhmghve https://www.geogebra.org/m/gwx684ge

К сведению учителя! Если в линейном уравнении с двумя переменными $ax + by = c$ значение a = 0, то уравнение записывается в виде $y = \frac{c}{b}$, и его график, пересекая ось Oy в точке (0; $\frac{c}{b}$), является параллельным оси Ox. Из записи уравнений $y = \frac{c}{b}$ и y = 0 видно, что значение y является постоянным числом и не изменяется при любых значениях x. Поскольку в записи уравнения переменная x не участвует, ученики могут не полностью понять этот момент. Поэтому учитель должен объяснить ученикам смысл выражения «x принимает произвольные значения», записывая уравнение $ax + by = c$ в виде $0 \cdot x + by = c$ или $0 \cdot x + by = 0$.

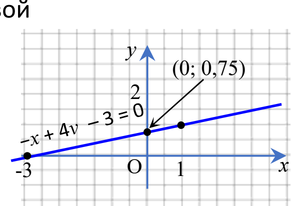
9. По уравнению прямой строится её график.

е) $\frac{y}{3} + 2 = 4 \rightarrow y = 6$



Отмечается, что график является прямой, параллельной оси Ox, и проходит через I и II четверти. С учениками можно обсудить, в какой точке график пересекает ось Oy. График функции y = 6 пересекает ось Oy в точке (0; 6) и параллелен оси Ox.

10. Данные уравнения записываются в виде y = kx + b, находится угловой коэффициент k. Подставляя в формулу x = 0, определяется точка пересечения прямой с осью Oy, после чего строится график. Для построения графика достаточно знать координаты двух точек.

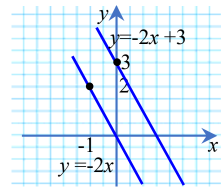


б) В уравнении $-x + 4y - 3 = 0$ при $x = 0$ находится $y = 0{,}75$. Следовательно, данная прямая пересекает ось Oy в точке (0; 0,75). Строится график прямой и проверяется правильность ответа.
В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/m5ak9stj *https://www.geogebra.org/m/S8QhwdX6*

11. В каждом пункте даны три линейных уравнения. Ученики приводят уравнения к виду y = kx + b и на основании равенства угловых коэффициентов k определяют, графики каких уравнений являются параллельными.

б) Прямые $y = -1{,}5x + 5$ и $y = -1\frac{1}{2}x + 5$ параллельны, а прямая $y = 1{,}5x$ им не параллельна.	г) Прямые $y = 0{,}5x$ и $y = 0{,}5x + 4$ параллельны, а прямая $y = 2x + 2$ им не параллельна.

12. Решение, приведённое в примере, рассматривается совместно с учениками, определяется угловой коэффициент прямой, параллельной данной прямой. Эта прямая проходит через точку, заданную в условии, следовательно, подставляя значения абсциссы и ординаты этой точки в уравнение прямой y = kx + b, можно найти b.

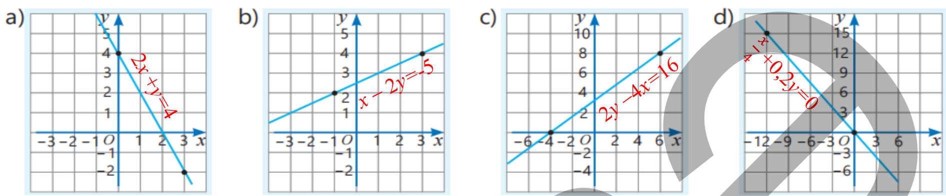


c) Требуемая прямая $y = kx + b$ параллельна прямой $2x + y = 0$, то есть прямой $y = -2x$. Следовательно, $k = -2$. Также прямая $y = -2x + b$ проходит через точку $C(-0{,}5;\ 4)$. Значит, её координаты удовлетворяют равенству$y = -2x + b$. $4 = -2\cdot(-0{,}5) + b \to b = 3$. Таким образом, уравнение искомой прямой: $y = -2x + 3$. Ученики, строя графики, ещё раз убеждаются, что прямые с одинаковыми угловыми коэффициентами являются параллельными.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:

https://www.geogebra.org/m/x3frstxn *https://www.geogebra.org/m/fc7afjdn*

13. Для определения того, какому линейному уравнению с двумя переменными соответствует данный график,



можно использовать различные способы. Ученики, подставляя координаты любой точки графика вместо переменных в данные уравнения, по полученному верному равенству определяют уравнение, соответствующее графику.

a) Прямая проходит через точки (0; 4) и (–2; 3). Учитывая координаты этих точек в данных уравнениях, определяется, что график соответствует уравнению $2x + y = 4$:

$x - 2y = -5 \to 0 - 2\cdot 4 = -8 \neq -5$ и $-2 - 2\cdot 3 = -8 \neq -5$. Не соответствует.

$5y - 4x = 16 \to 5\cdot 4 - 4\cdot 0 = 20 \neq 16$ и $5\cdot 3 - 4\cdot(-2) = 23 \neq 16$. Не соответствует.

$\frac{x}{4} + 0{,}2y = 0 \to \frac{0}{4} + 0{,}2\cdot 4 = 0{,}8 \neq 0$ и $\frac{-2}{4} + 0{,}2\cdot 3 = 0{,}1 \neq 0$. Не соответствует.

$2x + y = 4 \to 2\cdot 0 + 4 = 4$ и $2\cdot(-2) + 3 = 4$. Соответствует.

Следовательно, данная прямая является графиком уравнения $2x + y = 4$.

К сведению учителя! Данное задание можно решить и другим способом. Записав данные уравнения в виде y = kx + b, определяется коэффициент k. По координатам двух точек каждого графика находится угловой коэффициент прямой и устанавливается, какому линейному уравнению с двумя переменными соответствует каждый график.

15. Если графики пересекаются на оси Ох, значит ордината точки пересечения равна нулю.

a) В уравнениях $ax - y = 4$ и $x + 4y = -2$ учитывается, что $y = 0$: $ax - 0 = 4$ и $x + 4\cdot 0 = -2$

Решается второе уравнение. $x + 4\cdot 0 = -2 \to x = -2$

Значение x подставляется в первое уравнение и находится значение a. $ax - 0 = 4 \to a\cdot(-2) = 4 \to a = -2$.

Таким образом, координаты точки пересечения графиков уравнений $-2x - y = 4$ и $x + 4y = -2$: (–2; 0).

Дифференцированное обучение

Поддержка. Ученикам предлагаются следующие задания:

а) Постройте график уравнения $x - y = 3$.

б) Для уравнения $3x + y = 6$ запишите любые два решения.

в) В обоих уравнениях выразите одну переменную через другую.

Результаты проверяются другими учениками.

Углубление. Основная цель заданий — анализ свойств графика и понимание понятия углового коэффициента. Ученикам на рабочих листах предлагаются задания:

• Найдите координаты точек пересечения графика уравнения $y = -2x + 3$ с осями абсцисс и ординат.

• У какого из данных уравнений угол, образованный графиком с осью абсцисс, больше?

• Задача: если начальная оплата за такси составляет 3 маната, а стоимость каждого километра 2 маната, запишите уравнение, выражающее общую оплату, и постройте его график.

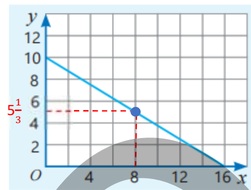
Решение задач

17. Условие задачи обсуждается с учениками. По условию дрон A, перевозя каждый раз x кг груза, совершает 10 полётов, а дрон B, перевозя каждый раз y кг груза, совершает 15 полётов. Общая масса перевезённого груза определяется выражением $10x + 15y$.

• Так как доставленная помощь составляет 160 кг, записывается линейное уравнение с двумя переменными: $10x + 15y = 160$.

• Отмечается, что дрон A за один полёт перевозит 8 кг груза. Вычисляется, сколько килограммов груза должен перевозить дрон B за один полёт.

$10 \cdot 8 + 15y = 160 \rightarrow y = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$.



• Отмечается, что координаты точки $(8;\ 5\frac{1}{3})$ на графике соответствуют требуемому ответу.

Анализ задачи целесообразно представить в виде таблицы.

Дрон	Количество полётов	Груз за один полёт (кг)	Общий перевезённый груз (кг)
A	10	x	$10x$
B	15	y	$15y$
A + *B*	25	$x + y$	160

Ответ. Дрон B должен перевозить за один полёт $5\frac{1}{3}$ кг груза.

Игра «Кто победил?». На полу класса строится прямоугольная система координат. Ученики делятся на две группы. Ученики одной группы называют другой группе координаты двух точек: (3; 2) и (−1; 4). Два ученика этой группы изображают данные точки в координатной системе на полу и с помощью натянутой верёвки показывают прямую линию. На следующем этапе вторая группа предлагает координаты двух точек первой группе, и игра продолжается таким образом. Побеждает группа, которая выполнит задание правильно и быстрее.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Объясняет линейное уравнение с двумя переменными.	Рабочие листы, учебник, РТ
Определяет решение линейного уравнения с двумя переменными.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает задачу с помощью линейного уравнения с двумя переменными.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 8.3. Система уравнений

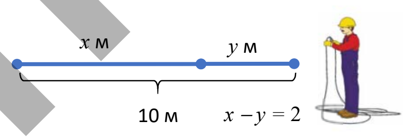
ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.2.3. Решает систему линейных уравнений с двумя переменными различными способами. 7-2.2.4. Решает задачи с применением линейных уравнений с одной переменной и систем линейных уравнений с двумя переменными.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет смысл решения системы линейных уравнений с двумя переменными. • Решает систему линейных уравнений с двумя переменными графическим способом. • Применяет систему линейных уравнений с двумя переменными к реальным ситуациям.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки,стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/5504* *https://video.edu.az/video/11556* Задание: *https://www.geogebra.org/m/yjpjntf9* *https://www.geogebra.org/m/grj55upc* *https://www.geogebra.org/m/nwctDjF9*

Побуждение

Учитель начинает введение в тему, представляя примеры, связанные с реальными ситуациями. Ученикам задаются вопросы о том, как найти два числа, если известны их сумма и разность, или, например, если 1 тетрадь и 1 ручка вместе стоят 6 манатов, а 2 тетради и 1 ручка — 8 манатов, как определить цену тетради и ручки и т.п. В результате обсуждения ученики понимают, что в подобных случаях составления одного уравнения недостаточно.

Исследование-обсуждение

На рисунке изображены части провода длиной 10 м. Обращается внимание на то, что одна часть на 2 м длиннее другой. Подобные задачи знакомы ученикам из предыдущих классов. Они могут принять одну часть за неизвестную, выразить через неё длину другой части и составить одно уравнение по сумме частей. Однако учитель предлагает обозначить каждую часть неизвестной и направляет учеников к составлению двух уравнений в соответствии с условием задачи.



Выслушиваются мнения учеников и записываются соответствующие уравнения: $x + y = 10$ и $x - y = 2$.

Изучение **Система линейных уравнений с двумя переменными**

Учитель даёт определение понятия системы линейных уравнений с двумя переменными и обращает внимание на форму её записи. Объясняется, что решение системы линейных уравнений с двумя переменными задаётся в виде пары чисел (x; y) и что она означает. Как и в случае уравнений с одной переменной, решение системы уравнений заключается в нахождении её решения или установлении отсутствия решений. На примерах учитель объясняет, как проверять, является ли данная пара чисел решением системы уравнений. Ученики уже умеют строить график линейного уравнения с двумя переменными. Построением графиков уравнений данной системы наглядно показывается наличие или отсутствие решения системы. Обращается внимание на то, что координаты точки пересечения прямых являются решением системы уравнений. В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность: *https://www.geogebra.org/m/cay7jjca*

Задания

2. Среди данных пар чисел определяется пара, являющаяся решением системы уравнений. Ученики подставляют все три пары чисел вместо переменных системы уравнений и делают вывод на основании полученных равенств.

c) (-9; 8) $\rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 + 8 = 1 \\ \frac{-9}{4} + \frac{8}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \ {}^{1}\ 1 \\ \frac{5}{12} \ {}^{1}\ 1 \end{cases}$ *Пара чисел (–9; 8) не является решением данной системы уравнений, так как ни одно равенство системы не является верным.*

(9; -8) $\to \begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + (-8) = 1 \\ \frac{9}{4} + \frac{-8}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ \frac{-5}{12} \neq 1 \end{cases}$

Пара чисел (9; –8) не является решением данной системы уравнений, так как одно из равенств системы неверно.

(-8; 9) $\to \begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 + 9 = 1 \\ \frac{-8}{4} + \frac{9}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 1 = 1 \end{cases}$

Пара чисел (–8; 9) является решением данной системы уравнений, так как выполняются оба равенства.

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики проверяют выполнение только одного уравнения системы и, не проверяя другое, либо даже если оно не выполняется, считают данную пару чисел решением системы. Следует обратить внимание учеников на то, что пара чисел должна удовлетворять каждому уравнению системы.

$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}$ Является ли пара чисел (–1; 3) решением данной системы уравнений?

Ложно Поскольку пара чисел (–1; 3) является решением уравнения x+2y=5, она является решением системы уравнений.

Верно Пара чисел (–1; 3) является решением уравнения x + 2y = 5, однако не является решением уравнения x – y = –1, следовательно, не является решением системы уравнений.

3. В этом задании ученики записывают в пустые клетки такие числа, чтобы данная пара чисел являлась решением системы уравнений. Для этого значения переменных x и y подставляются в уравнение и определяется требуемое число.

c) Пара чисел (6; 0) подставляется в систему уравнений $\begin{cases} y + 2x = £ \\ y = £ - 3x \end{cases}$.

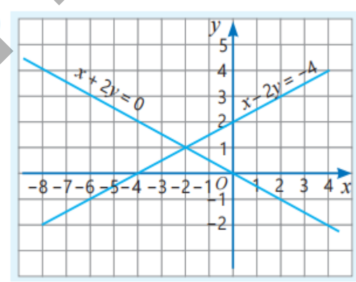
$\begin{cases} 0 + 2 \cdot 6 = \boxed{12} \\ 0 = \boxed{18} - 3 \cdot 6 \end{cases}$ Таким образом, в первую пустую клетку записывается число 12, во вторую — число 18.

4. Ученики по уравнениям, записанным на графиках, составляют систему уравнений. Точка пересечения прямых определяется по прямоугольной системе координат. Полученную пару чисел подставляют вместо переменных системы уравнений и проверяют правильность ответа по выполнению равенств.

b) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$ Точка пересечения этих прямых это (–2; 1). При подстановке в систему уравнений x = –2 и y = 1 получаются верные равенства: $\begin{cases} -2 + 2 \cdot 1 = 0 \\ -2 - 2 \cdot 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -4 = -4 \end{cases}$

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность: *https://www.geogebra.org/m/grj55upc*

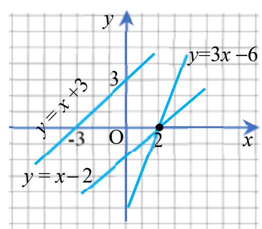
b)



6. Не строя графики данных уравнений, определяется, в какой точке они пересекаются на оси абсцисс или оси ординат.

а) Если прямые пересекаются на оси абсцисс, во всех трёх уравнениях принимается y = 0 и находится координата x.

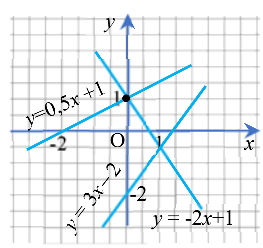
$y = 3x - 6$	$y = x - 2$	$y = x + 3$
$3x - 6 = 0$	$x - 2 = 0$	$x + 3 = 0$
$x = 2$	$x = 2$	$x = -3$



Таким образом, прямые $y = 3x - 6$ и $y = x - 2$ пересекаются на оси Ox в точке (2; 0).

б) Если прямые пересекаются на оси ординат, во всех трёх уравнениях принимается x = 0 и находится y.

$y = -2x + 1$	$y = 3x - 2$	$y = 0{,}5x + 1$
$y = -2 \cdot 0 + 1$	$y = 3 \cdot 0 - 2$	$y = 0{,}5 \cdot 0 + 1$
$y = 1$	$y = -2$	$y = 1$



Таким образом, прямые $y = -2x + 1$ и $y = 0{,}5x + 1$ пересекаются на оси Oy в точке (0; 1).

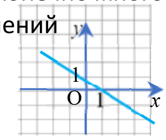
Запомни!

Наличие единственного решения системы линейных уравнений с двумя переменными, бесконечного числа решений или отсутствие решения можно определить по взаимному расположению графиков уравнений системы:

- ✓ если угловые коэффициенты прямых различны, они пересекаются, то есть система уравнений имеет единственное решение;
- ✓ если угловые коэффициенты прямых и точки пересечения с осью Oy совпадают, прямые совпадают, то есть система уравнений имеет бесконечное число решений;
- ✓ если угловые коэффициенты прямых одинаковы, а точки пересечения с осью Ox различны, прямые параллельны, то есть система уравнений не имеет решения.

Одно решение

Бесконечно много решений



Нет решений

Все три случая обосновываются примерами. В классах с техническими возможностями можно использовать видео материалы:

https://video.edu.az/video/5660 *https://video.edu.az/video/5769*

https://www.geogebra.org/m/zbtzpvs2

8. Высказывания, приведённые в задании, обсуждаются и обосновываются учениками. В ходе исследования целесообразно приводить примеры, соответствующие данным утверждениям.

а) Утверждение о том, что система уравнений, соответствующая прямым, пересекающим ось абсцисс в одной и той же точке, не имеет решения, неверно, так как если прямые пересекаются в одной точке, система имеет единственное решение. Утверждение неверно.

б) Прямые с одинаковыми угловыми коэффициентами параллельны, следовательно, система уравнений не имеет решения. Утверждение неверно.

в) Прямые, имеющие одинаковый угловой коэффициент и пересекающие ось ординат в одной и той же точке, совпадают, следовательно, данная система уравнений имеет бесконечное число решений. Утверждение верно.

Дифференцированное обучение

Поддержка. Ученикам предлагается простая система уравнений и задание найти её решение построением графика.

Например, найдите решение системы уравнений $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$ построив графики.

Углубление. Основная цель заданий — формирование у учеников навыков определения числа решений системы, параллельных и совпадающих прямых. Например, ученикам предлагаются задания:

1) Сравните количество решений систем уравнений: $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x + 0{,}5y = 3 \end{cases}$

Какая из этих систем не имеет решения, а какая имеет бесконечное число решений?

2) Исследуйте вопросы: «Почему система, графики уравнений которой параллельны, не имеет решения?», «Почему система, графики уравнений которой совпадают, имеет бесконечное число решений?». Мнения учеников обсуждаются.

Решение задач

9. Ученики анализируют условие задачи.

Решение задачи

Ученики обсуждают количество туристов, размещённых в трёхместных и четырёхместных палатках, количество палаток и общее число туристов. К классу обращаются с вопросами:

– Если количество трёхместных палаток обозначить через x, а четырёхместных — через y, как записать уравнение, соответствующее общему числу палаток?

– Какая связь существует между числом туристов, размещённых в трёхместных и четырёхместных палатках, и общим числом туристов во всех палатках?

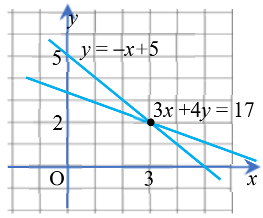
Если количество трёхместных палаток равно x, а четырёхместных — y, тогда общее число палаток:

x + y = 5. Если учитывать, что число туристов в трёхместных палатках равно 3x, в четырёхместных — 4y, а общее число туристов составляет 17 человек, второе уравнение будет:

3x + 4y = 17.

• Записывается соответствующая система уравнений: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 4y = 17 \end{cases}$

• Строятся графики уравнений $\begin{cases} y = -x + 5 \\ y = -0{,}75x + 4{,}25 \end{cases}$ и определяются координаты точки пересечения: (3; 2).



Ответ. Количество трёхместных палаток равно 3.

10. Согласно условию задачи, компания по прокату велосипедов предлагает варианты оплаты А и В.

Решение задачи

Учитель задаёт ученикам вопросы о сумме оплаты по каждому тарифу:

Какова стоимость аренды за 1 час по тарифу А?

Какое условие оплаты установлено по тарифу В?

Выслушиваются ответы учеников. Исследуется данный график.

• За 2 часа езды на велосипеде по тарифу А оплачивается 8 манатов, по тарифу В 6 манатов.

• Определяется, какой график соответствует какому тарифу: график синего цвета описывает тариф А, график красного цвета — тариф В.

• Записывается соответствующая система уравнений: $\begin{cases} y = 4x \\ y = 2x + 2 \end{cases}$

• Точка пересечения графиков (1; 4). То есть по обоим тарифам за 1 час езды на велосипеде оплачивается 4 маната.

• Из графиков видно, что для езды более 1 часа тариф В выгоднее, так как в этом случае суммы оплаты меньше по сравнению с другим тарифом.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Объясняет понятие системы уравнений.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает систему линейных уравнений с двумя переменными графическим способом.	Рабочие листы, учебник, РТ
Составляет систему линейных уравнений с двумя переменными в соответствии с условием задачи и решает её построением графика.	Рабочие листы, учебник, РТ

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

Ученики в предыдущих темах раздела познакомились с понятиями «линейное уравнение с одной переменной», «линейное уравнение с двумя переменными», «система уравнений», «решение системы уравнений графическим способом», выполнили различные задания, относящиеся к ним. С целью закрепления знаний и умений, приобретённых по данной теме, следующие задачи и примеры исследуются и решаются совместно с учениками.
В классах с техническими возможностями целесообразно использовать интерактивную деятельность.
https://www.geogebra.org/m/PQCUvc3M

Решение заданий

1. Данные уравнения ученики самостоятельно решают, объясняя способы решения.

а) $1\frac{1}{2}x = -3 + 3{,}5x$
$3{,}5x - 1\frac{1}{2}x = 3$ Неизвестные переносятся в одну сторону равенства.
$2x = 3$ Приводятся подобные слагаемые.
$x = 1{,}5$ Находится ответ.
$1\frac{1}{2} \cdot 1{,}5 = -3 + 3{,}5 \cdot 1{,}5$ Ответ проверяется.
$2{,}25 = 2{,}25$

г) $-\frac{1}{4}a + \frac{5}{8} = -2$
$2a + 5 = 16$ Обе части умножаются на (– 8).
$2a = 11$ Обе части делятся на 2.
$a = 5{,}5$ Находится ответ.
$-\frac{1}{4} \cdot 5{,}5 + \frac{5}{8} = -2$ Ответ проверяется.
$-2 = -2$

3. Данная пара чисел подставляется в уравнение и находится значение а.
в) пара чисел (4; –5) подставляется в уравнение $\frac{x}{2} - \frac{ay}{5} = ax + y$: $\frac{4}{2} - \frac{a \cdot (-5)}{5} = a \cdot 4 + (-5) \rightarrow a = 2\frac{1}{3}$.

4. Требуется найти решение данного линейного уравнения с двумя переменными, состоящее из одинаковых чисел. В этом случае учитывается, что в уравнении x = y. То есть вместо x записывается y или вместо y записывается x.

б) $7x - 3y = -4$
$7x - 3x = -4$
$x = -1$ и $y = -1$
Ответ. (–1; –1).

или

г) $x + 5y + 2 = 8$
$y + 5y + 2 = 8$
$y = 1$ и $x = 1$
Ответ. (1; 1).

8. В уравнениях, заданных в виде $y = kx + b$, выслушиваются мнения учеников о числе решений системы уравнений на основании значений угловых коэффициентов и свободных членов. Уравнения, не заданные в виде y = kx + b, приводятся к этому виду.

в) $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -0{,}75x + 0{,}251 \\ y = -0{,}5x + 1 \end{cases}$ Как видно из уравнений, угловые коэффициенты прямых различны. Следовательно, эти прямые пересекаются и данная система уравнений имеет единственное решение. Правильность ответа можно обосновать построением графика.

К сведению учителя! Уравнения, заданные в виде ax + by = c, можно делать вывод о числе решений и без приведения к виду y = kx + b. Для этого находится отношение соответствующих коэффициентов обоих уравнений системы.

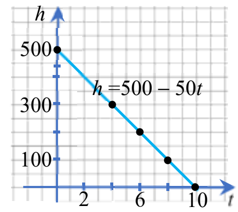
- ✓ Если отношение коэффициентов при x отличается от отношения коэффициентов при y, прямые пересекаются, система уравнений имеет единственное решение.
- ✓ Если отношение коэффициентов при x равно отношению коэффициентов при y, прямые параллельны, соответствующая система уравнений решений не имеет.
- ✓ Если отношение коэффициентов при x, коэффициентов при y и свободных членов одинаково, прямые совпадают, соответствующая система уравнений имеет бесконечно много решений.

$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ В данном уравнении отношение коэффициентов при x равно $\frac{3}{1} = 3$, отношение коэффициентов при y равно $\frac{4}{2} = 2$, отношение свободных членов равно $\frac{1}{1} = 1$. Поскольку $3 \neq 2$, прямые пересекаются, следовательно, система уравнений имеет единственное решение.
В классах с техническими возможностями целесообразно использовать интерактивную деятельность.
https://www.geogebra.org/m/zbtzpvs2

9. Анализируется условие задачи. Воздушный шар, поднявшийся на определённую высоту, оттуда опускается вниз со скоростью 50 м/мин.

• Если воздушный шар за 2 минуты опустился на 100 м и оказался на высоте 400 м от земли, значит, первоначально он поднялся на высоту 500 м.

• Зависимость высоты (h) воздушного шара от времени (t) с момента начала спуска выражается уравнением h = 500 − 50t. Строится график этого уравнения. При построении графика на оси абсцисс единичный отрезок можно принять равным 1, а на оси ординат 100 единиц.

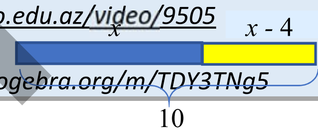


• При t = 4 минуты шар будет находиться на высоте
h = 500 − 50 · 4 = 300 (м).

• Когда воздушный шар достигнет земли, то есть h = 0, поэтому решается уравнение 500 − 50t = 0: t = 10 минут.

ТЕМА 8.4. Решение системы линейных уравнений методами подстановки и сложения

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.2.3. Решает системы линейных уравнений с двумя переменными различными способами. 7-2.2.4. Решает задачи с применением линейных уравнений с одной переменной и систем линейных уравнений с двумя переменными.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Решает систему линейных уравнений с двумя переменными методом подстановки. • Решает систему линейных уравнений с двумя переменными методом сложения. • Применяет системы линейных уравнений с двумя переменными к реальным ситуациям.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки,стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение*: https://video.edu.az/video/5529* *https://video.edu.az/video/9505* Задание*: https://www.geogebra.org/m/rveckrec* *https://www.geogebra.org/m/bud6yvtd* *https://www.geogebra.org/m/TDY3TNg5*

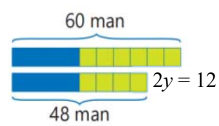


Побуждение

Учитель, опираясь на знания, изученные в предыдущей теме, обращается к ученикам с вопросом на основе реальной ситуации или готовой системы уравнений. Например: «Какие два натуральных числа имеют сумму 10 и разность 4?» Ученики, построив соответствующую модели задачу, проводят обсуждение. Определяются натуральные числа, удовлетворяющие условию.

Исследование-обсуждение

Ситуация, представленная в исследовании, доводится до внимания учеников. Для двух случаев, предложенных в условии, составляются уравнения. Цена одного аквариума принимается равной x манатам, цена одной неоновой рыбки — y манатам. Учитывается, что за один аквариум и 4 неоновые рыбки вместе заплачено 48 манатов, а за один аквариум и 6 неоновых рыбок — 60 манатов, составляются и исследуются уравнения. $x + 4y = 48$ и $x + 6y = 60$. При необходимости учитель может задать определённое направление. Ученики, опираясь на модель, представленную на рисунке, могут определить, что цена 1 неоновой рыбки равна (60 − 48) : 2 = 6 манатов, а затем найти цену аквариума (24 маната).



Изучение **Решение системы уравнений методом подстановки**

Учитель знакомит учеников с правилом решения системы линейных уравнений с двумя переменными методом подстановки. Поэтапно изучается выражение одной переменной через другую, подстановка этого выражения во второе уравнение и решение полученного линейного уравнения с одной переменной с последующим нахождением неизвестных. На примере вместе с учениками обсуждаются данный способ решения и шаги проверки решения.

При объяснении темы полезно использовать интерактивную деятельность: *https://www.geogebra.org/m/TDY3TNg5*

Подумай!

В примере, приведённом в разделе Изучение, переменная у выражена через х. Ученики решают данную систему уравнений, выразив переменную х через у.

$\begin{cases}2x+y=4\\3y-x\ =5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2-0{,}5y\\3y-x\ =5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2-0{,}5y\\3y-(2-0{,}5y)\ =5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2-0{,}5y\\3y-2+0{,}5y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2-0{,}5\cdot 2\\y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Обсуждается, в каком уравнении выполнение подстановки является более удобным, объясняется причина. Обращается внимание на то, что целесообразнее выражать переменную, коэффициент которой равен единице. Подчёркивается, что независимо от того, какая переменная выражается через другую, результат получается одинаковым.

1. Система уравнений решается методом подстановки. Определяется, какую переменную удобнее выразить через другую. Ответы записываются в виде пары чисел и проверяются.

d) $\begin{cases}a-b=-1\\3a+b\ =0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-(-3a)=-1\\b=-3a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-0{,}25\\b=0{,}75\end{cases}$

Проверка правильности ответа: $\begin{cases}(-0{,}25)-0{,}75=-1\\3(-0{,}25)+0{,}75\ =0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1=-1\\0\ =0\end{cases}$

Ответ. (–0,25; 0,75).

2. Если в уравнениях данной системы имеются дроби или выражения в скобках, сначала целесообразно упростить уравнения. Также следует обратить внимание учеников на необходимость записи подставляемого выражения в скобках при подстановке вместо переменной.

1. Первая часть первого уравнения умножается на 2 и упрощается. Во втором уравнении переменная x выражается через y.

d) $\begin{cases}\frac{x}{2}+y=5\\x-2y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ +2y=10\\x=2y+6\end{cases}$

2. В первом уравнении вместо переменной x записывается соответствующее выражение.

$\begin{cases}(2y+6)\ +2y=10\\x=2y+6\end{cases}$

3. Полученное линейное уравнение с одной переменной решается.

$2y+6+2y=10$

4. Полученное число записывается в уравнение x = 2y + 6 и находится x.

$x=2\cdot 1+6=8.$

Следовательно, пара (8; 1) является решением системы уравнений. Решение системы можно проверить подстановкой. $\begin{cases}\frac{8}{2}+1=5\\8-2\cdot 1=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5=5\\6=6\end{cases}$ *Ответ*. (8; 1).

Ложные представления, возникающие у учеников. При решении системы уравнений методом подстановки ученики иногда ошибочно считают, что подстановка всегда выполняется в первом уравнении. Если ученик учитывает, в каком уравнении подстановка выполняется проще и удобнее, изучение будет более эффективным.

> $\begin{cases}3x+7y=3\\x-2y\ =\ 2\end{cases}$ В данной системе уравнений какую переменную удобнее выразить через другую?
>
> I уравнение выражается как $x=\frac{3-7y}{3}$ или $y=\frac{3-3x}{7}$. Если эти выражения учесть во II уравнении, то получится $\frac{3-7y}{3}-2y=2$ или $x-\frac{3-3x}{7}=2$.
>
> II уравнение выражается как $x=1+2y$ или $y=0{,}5x-1$. Если эти выражения учесть в I уравнении, то получится $3(1+2y)-2y=2$ или $x-2(0{,}5x-1)=2$.
>
> Как видно, выражения, полученные при подстановке во II уравнении, проще по сравнению с выражениями, полученными в I уравнении.

3. После упрощения уравнений системы выполняется соответствующая подстановка.

1. В обоих уравнениях раскрываются скобки и выполняется упрощение. Во втором уравнении переменная b выражается через a.

c) $\begin{cases}5(4a+7)-2b=-1\\1-2(a+2b)=4a-3b\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}20a-2b=-36\\6a+b=1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}10a-b=-18\\ \ldots\end{cases}$

2. В первом уравнении вместо переменной b записывается соответствующее выражение.

$\begin{cases}10a-(1-6a)=-18\\b=1-6a\end{cases}$

3. Полученное линейное уравнение с одной переменной решается.

$10a-1+6a=-18$

$a=-\frac{17}{16}$

4. Полученное число записывается в уравнение $b=1-6a$ и находится b: $b\ =\frac{59}{8}$.

Полученные числа подставляются в оба уравнения и проверяется правильность ответа.

Ответ. $\left(-\frac{17}{16};\frac{59}{8}\right)$.

4. Трудности, возникающие при решении системы уравнений графическим способом, в данном уроке устраняются с помощью метода подстановки. Ученики понимают, что по сравнению с изученным ранее графическим способом система уравнений методом подстановки решается более удобно. Представленная задача записывается в виде системы уравнений и решается.

1. В обоих уравнениях раскрываются скобки и выполняется упрощение. Во втором уравнении переменная y выражается через x. c) $\begin{cases}2x-y=1\\x+3y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-1\\x+3y=4\end{cases}$	**2.** В первом уравнении вместо переменной y записывается соответствующее выражение. $\begin{cases}y=2x-1\\x+3\cdot(2x-1)=4\end{cases}$	**3.** Полученное линейное уравнение с одной переменной решается. $x+6x-3=4$ $x=1$	**4.** Полученное число записывается в уравнение $y=2x-1$ и находится y. $y=2\cdot1-1=1.$

Полученные числа подставляются в оба уравнения для проверки правильности ответа.
Ответ. (1; 1).

К сведению учителя! Можно решить систему уравнений обоими способами и обсудить методы решения. Хотя нахождение решения системы уравнений методом подстановки удобнее по сравнению с графическим способом, графический способ также имеет свои преимущества. Решая систему уравнений графическим способом, ученики фактически понимают геометрическую интерпретацию системы уравнений.

Изучение **Решение системы уравнений методом сложения**

Учитель доводит до внимания ученики метод сложения системы линейных уравнений с двумя переменными. Для этого рассматриваются коэффициенты переменных в уравнениях системы. Обращается внимание на одинаковые переменные, коэффициенты которых являются противоположными числами. Напоминается, что сумма противоположных чисел равна нулю. С ученики исследуется сложение уравнений почленно и получение линейного уравнения с одной переменной. Если в системе уравнений коэффициенты одинаковых переменных не являются противоположными числами, ученики на примере обучаются умножению обеих частей уравнения (или уравнений) на число, отличное от нуля, и приведению коэффициентов одной из переменных к противоположным числам.

В классах с техническими возможностями можно использовать видео материалы: *https://video.edu.az/video/5753*
https://video.edu.az/video/1309   *https://video.edu.az/video/6001*   *https://video.edu.az/video/9712*

Подумай!

В приведённом в изучении примере системы уравнений ученики решили систему, получив линейное уравнение с одной переменной относительно x. Здесь же ставится требование получить линейное уравнение с одной переменной относительно y. Следовательно, ученики должны привести коэффициенты переменной x к противоположным числам. В этом случае обе части первого уравнения умножаются на (−2). Ученики, приведя коэффициенты x к противоположным числам и сложив уравнения почленно, получают линейное уравнение с одной переменной относительно y.

1. Для того чтобы коэффициенты x были противоположными числами, обе части первого уравнения умножается на (−2). c) $\begin{cases}x-3y=1\\2x+y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+6y=-2\\2x+y=2\end{cases}+$	**2.** Уравнения складываются почленно. Полученное линейное уравнение с одной переменной решается. $(-2x+6y)+(2x+y)=-2+2$ $7y=0$ $y=0$	**3.** В одном из уравнений системы, записав y = 0, находится значение x. $x+3\cdot0=1$ $x=1$

Ответ. (1; 0).

6. При решении данной системы уравнений необходимо умножить обе части каждого уравнения на некоторое число. Ученики должны помнить о приведении коэффициентов одной и той же переменной к противоположным числам.

a) $\begin{cases}2x-3y=4\\3x-2y=11\end{cases}$ Как видно, коэффициенты при x равны 2 и 3. Их НОК равен 6. Если первое уравнение умножить на 3, а второе на (−2), коэффициенты при x станут противоположными числами.

1. Первое уравнение умножается на 3, второе уравнение умножается на (−2).

$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 9y = 12 \\ -6x + 4y = -22 \end{cases} +$

2. Уравнения складываются почленно. Полученное уравнение с одной переменной решается.

$(6x - 9y) + (-6x + 4y) = 12 + (-22)$

$-5y = -10$

$y = -2$

3. В одном из уравнений системы, записав $y = -2$, находится значение x.

$2x - 3 \cdot (-2) = 4$

$x = 5$

Полученные числа подставляются в оба уравнения и проверяется правильность ответа.

$\begin{cases} 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 4 \\ 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ 11 = 11 \end{cases}$

Ответ. (5; 2).

К сведению учителя! В системе уравнений можно привести коэффициенты при одной и той же переменной к противоположным числам и сложить полученные уравнения почленно. При этом коэффициенты этой переменной приводятся к наименьшему общему кратному данных чисел, и учитывается, что они должны иметь противоположные знаки. Например, в пункте е) коэффициенты при переменной a равны −3 и 5. В этом случае они приводятся к НОК(3; 5) = 15: в первом уравнении коэффициент при a становится −15, а во втором равен 15. При решении системы уравнений методом почленного сложения для нахождения второй переменной достаточно подставить значение первой переменной в одно из уравнений системы. Однако для более лёгкого получения ответа полезно подчеркнуть, какое именно уравнение целесообразнее выбрать.

1. Первое уравнение умножается на 5, второе умножается на 3.

е) $\begin{cases} 7b - 3a = -4{,}2 \\ 5a + 2b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35b - 15a = -21 \\ 15a + 6b = 21 \end{cases} +$

2. Уравнения складываются почленно. Полученное уравнение с одной переменной решается.

$(35b - 15a) + (15a + 6b) = -21 + 21$

$b = 0$

3. В одном из уравнений системы, записав b = 0, находится значение a.

$5a + 2 \cdot 0 = 7$

$a = 1{,}4$

Полученные числа подставляются в оба уравнения и проверяется правильность ответа.

$\begin{cases} 7 \cdot 0 - 3 \cdot 1{,}4 = -4{,}2 \\ 5 \cdot 1{,}4 - 2 \cdot 0 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4{,}2 = -4{,}2 \\ 7 = 7 \end{cases}$

Ответ. (1,4; 0).

9. Уравнения данной системы предварительно освобождаются от знаменателя и упрощаются. Для этого обе части уравнения умножаются на такое число, чтобы коэффициенты стали целыми числами. Определяется умножение обеих частей уравнений системы на НОК чисел, находящихся в знаменателях данных дробей.

1. Обе части уравнения умножаются на 12.

а) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 12 \\ 4x + 3y = 36 \end{cases} +$

2. Уравнения складываются почленно. Полученное уравнение с одной переменной решается.

$(4x - 3y) + (4x + 3y) = 12 + 36$

$x = 6$

3. В одном из уравнений системы, записав x = 6, находится значение y.

$4 \cdot 6 + 3y = 36$

$y = 4$

Полученные числа подставляются в оба уравнения и проверяется правильность ответа.

$\begin{cases} \frac{6}{3} - \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{6}{3} + \frac{4}{4} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 3 = 3 \end{cases}$

Ответ. (6; 4).

е) В одном из уравнений системы знаменатели равны 5 и 4, а в другом — 2 и 3. Следовательно, обе части первого уравнения умножаются на НОК(5; 4) = 20, а обе части второго уравнения — на НОК(2; 3) = 6.

1. Обе части первого уравнения умножаются на 20, обе части второго уравнения умножаются на 6. В полученных уравнениях для приведения коэффициентов при y к противоположным числам первое уравнение умножается на 2, второе уравнение умножается на 5.

$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 5 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 5y = 100 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 10y = 200 \\ 15x - 10y = 30 \end{cases} +$

2. Уравнения складываются почленно. Полученное уравнение решается.

$(8x + 10y) + (15x - 10y) = 200 + 30$

$23x = 230$

$x = 10$

3. В одном из уравнений системы, записав x = 10, находится значение y.

$3 \cdot 10 - 2y = 6$ $\qquad y = 12$

Полученные числа подставляются в оба уравнения и проверяется правильность ответа.

$$\begin{cases} \frac{10}{5} + \frac{12}{4} = 5 \\ \frac{10}{2} - \frac{12}{3} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = 5 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Ответ. (10; 12).

10. Используя уравнение прямой, проходящей через заданные точки, составляется и решается система уравнений.

d) $\begin{cases} -2k + b = 2 \\ k + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow$ Следовательно, уравнение прямой имеет вид y = -3x + 4.

12. В этом задании сначала по данным уравнениям составляется система и решается. Подставляя найденные значения переменных в уравнение $ax + y$ = 17, определяется значение а.

$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = -8 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ $\quad ax + y = 17 \rightarrow 3a + 2 = 17 \rightarrow a = 5$.

Ответ. a = 5.

Решение задач

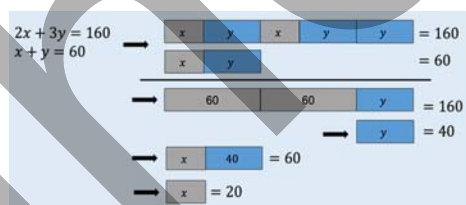
13. Условие задачи обсуждается с учениками. В соответствии с условием составляется и решается система уравнений.

Решение задачи

Учитель задаёт ученикам вопросы о скорости велосипедиста при спуске и подъёме:

1) Какова скорость велосипедиста при спуске? А при подъёме? Почему скорости различаются?

2) Какое общее расстояние проехал велосипедист? Сколько времени он затратил на этот путь?



Выслушиваются ответы учеников. Повторяются знания учеников о пути, времени и скорости.

Можно построить модель, соответствующую решению задачи. В этом случае ученики визуально видят решение и лучше понимают условие.

Время движения велосипедиста при спуске обозначается через x минут, при подъёме — через y минут. Тогда первое уравнение системы имеет вид x + y = 60.

Длина пути, пройденного при спуске, равна 200x, при подъёме 300y. Тогда второе уравнение системы: 200x + 300y = 16000,

или 2x + 3y = 160.

Записывается соответствующая система уравнений: $\begin{cases} 2x + 3y = 160 \\ x + y = 60 \end{cases}$

Решение системы уравнений будет (20; 40). Велосипедист затратил на спуск 20 минут, на подъём 40 минут.

Ответ: 20 минут, 40 минут.

Дифференцированное обучение

Поддержка. Ученикам предлагается несколько систем уравнений. Перед решением обсуждается, какой способ решения наиболее удобен. Выслушиваются мнения учеников.

a) $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x - 4y = -3 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$

Углубление. Ученикам предлагается система уравнений: $\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

Учитель обращается к ученикам с вопросами: «Сколько решений имеет данная система?», «Какие результаты получатся при решении системы всеми тремя способами?», «Какая связь существует между уравнениями?». Ответы обсуждаются.

В классах с техническими возможностями для проведения практической работы или заданий игрового характера можно использовать предложенные ссылки: *https://www.geogebra.org/m/xfwkxsfa*
https://mathbitsnotebook.com/JuniorMath/Equations/EQSystemsPractice.html

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Решает систему уравнений методом подстановки.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает систему уравнений методом сложения.	Рабочие листы, учебник, РТ
Составляет систему линейных уравнений с двумя переменными в соответствии с условием задачи и решает её различными способами.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 8.5. Решение задачи с помощью системы уравнений

ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.2.3. Решает систему линейных уравнений с двумя переменными различными способами. 7-2.2.4. Решает задачи с применением линейных уравнений с одной переменной и систем линейных уравнений с двумя переменными.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Составляет систему линейных уравнений с двумя переменными в соответствии с условием задачи. • Решает систему линейных уравнений с двумя переменными различными способами в соответствии с условием задачи. • Проверяет правильность решения системы линейных уравнений, составленной по условию задачи.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки,стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/5719* Задание: *https://video.edu.az/video/10320* *https://video.edu.az/video/5108*

Побуждение

Учитель представляет ученикам задачи, соответствующие различным реальным ситуациям. «Количество кур и кроликов во дворе равно 12. Общее число их ног равно 32. Сколько кур и кроликов во дворе?» Анализируется условие задачи, с учениками проводятся обсуждения этапов решения. Выслушиваются мнения учеников об определении данных и требуемого, составлении плана решения.

Исследование-обсуждение

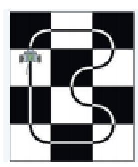
Ситуация, представленная в исследовании, доводится до внимания ученики. Анализируется условие:
Билет для взрослых — 7 манат, билет для детей — 5 манат.
Количество пассажиров — 6 человек.
Оплаченная сумма — 34 маната.

• Ученики отмечают, что из 6 пассажиров могут быть 1 ребёнок и 5 взрослых, 2 ребёнка и 4 взрослых, 3 ребёнка и 3 взрослых, 4 ребёнка и 2 взрослых, 5 детей и 1 взрослый, и определяют, в каком случае оплаченная сумма составляет 34 маната. Отмечается, что условие задачи выполняется только для 2 взрослых и 4 детей. Однако обращается внимание на то, что такой способ решения не является удобным.

• Обращается внимание на возможность составления системы уравнений в соответствии с условием задачи. Приняв число взрослых за x человек, а число детей за y человек, составляется и решается соответствующая система уравнений.

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 7x + 5y = 34 \end{cases} \to (2;\,4).$$

Изучение **Решение задачи с составлением системы уравнений**



Учитель вместе с учениками проводит анализ задачи в соответствии с условием. Объяснение по этапам «понять задачу, составить план, решить и проверить» обсуждается совместно с учениками. Исследуются вопросы «Что нужно найти?», «Что известно?», «Как можно решить задачу?», решается составленная по условию система уравнений и проверяется правильность решения. Подробное обсуждение каждого этапа с учениками важно для развития навыков самостоятельного решения задач.

В классах с техническими возможностями можно использовать видео материалы:
https://video.edu.az/video/5108 *https://video.edu.az/video/5754* *https://video.edu.az/video/5711*

Подумай!

В задаче, приведённой в изучении, система уравнений выполнена методом почленного вычитания. Ученики встречались с решением системы уравнений данным способом в задании №7 предыдущей темы. С применением метода почленного вычитания решается пример системы уравнений. Выслушиваются мнения учеников о способах решения, выполняемых почленным вычитанием уравнений при равенстве коэффициентов одной и той же переменной или умножением обеих частей одного из уравнений на (−1) с последующим почленным сложением уравнений. Кроме того, обращается внимание на возможность применения метода подстановки.

Задания

2. Ученики, анализируя условие задачи, определяют данные и требуемое.

Решение задачи

Число, задуманное Лалой, обозначается через x, а число, задуманное Самиром, — через y. По условию сумма этих чисел равна 12. Ученики определяют, что одно из уравнений имеет вид x + y = 12. По другому условию утроенное число, задуманное Лалой, на 1 больше удвоенного числа, задуманного Самиром. Следовательно, второе линейное уравнение с двумя переменными имеет вид 3x − 2y = 1.

Система уравнений записывается и решается любым способом. Выбор способа предоставляется ученику. Ученик может объяснить, какой способ он выбрал и почему применил именно его.

$\begin{cases} x + y = 12 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 24 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 25 \\ x + y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases} \rightarrow$ (5; 7).

Полученный ответ подставляется в систему уравнений и проверяется правильность. $\begin{cases} 5 + 7 = 12\,\mathrm{R} \\ 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1\mathrm{R} \end{cases}$

Ответ. Число, задуманное Лалой, равно 5, а число, задуманное Самиром, равно 7.

Обсуждение. Система уравнений, составленная по условию задачи, может быть решена и другими способами. Выслушиваются мнения учеников по этому поводу.

6. Анализируется условие задачи. Вспоминаются знания учеников о движении лодки по реке и скорости.

Решение задачи

Скорость моторной лодки в стоячей воде обозначается через x, а скорость течения реки — через y. Известно, что при движении лодки по течению её скорость в стоячей воде увеличивается на скорость течения, то есть скорость лодки по течению равна (x + y). При движении против течения скорость лодки уменьшается на скорость течения, то есть скорость лодки против течения равна (x − y).

Известно, что моторная лодка проходит расстояние 80 км по течению за 4 часа, тогда её скорость по течению равна $x + y = 80 : 4 = 20$ (км/час). С другой стороны, лодка проходит то же расстояние обратно за 5 часов, следовательно, $x - y = 80 : 5 = 16$ (км/час).

Направление	Скорость (км/час)	Время (час)	Путь (км)
Против течения	$x - y$	5	80
По течению	$x + y$	4	80

$\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 36 \\ x - y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow$ (18; 2)

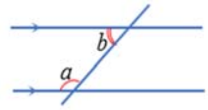
Полученный ответ подставляется в систему уравнений и проверяется правильность. $\begin{cases} 18 + 2 = 20 \\ 18 - 2 = 16 \end{cases}$

Ответ. Скорость моторной лодки в стоячей воде 18 км/час, а скорость течения реки 2 км/час.

Ложные представления, возникающие у учеников. Часто ученики принимают решение системы линейных уравнений с двумя переменными, составленной по условию задачи, за ответ задачи, не проверяя его. Они упускают из виду, что ответом является только решение, удовлетворяющее условию задачи. Поэтому целесообразно, чтобы ученики проверяли соответствие полученного решения условию задачи.

8. Анализируется условие задачи.

Решение задачи



Ученикам задаются вопросы о свойстве внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей, выслушиваются ответы, напоминается, что сумма внутренних односторонних углов равна 180°. Больший из внутренних односторонних углов обозначается через a, меньший — через b. По условию по сумме a + b и разности a − b составляются два уравнения.

Сумма внутренних односторонних углов равна 180°, а их разность по условию равна 40°. Тогда решается полученная система линейных уравнений с двумя переменными: $\begin{cases} a + b = 180° \\ a - b = 40° \end{cases} \rightarrow$ (110°; 70°)

Полученный ответ подставляется в систему уравнений и проверяется правильность. $\begin{cases} 110° + 70° = 180° \\ 110° - 70° = 40° \end{cases}$

Ответ. Меньший из внутренних односторонних углов между двумя параллельными прямыми и секущей равен 70°.

К сведению учителя! При составлении системы уравнений по условию задачи учитель должен в течении нескольких минут посредством вопросов и ответов добиться полного анализа задачи. Учитель не должен давать ученику уравнения системы в готовом виде, обозначение переменных и составление уравнений должны выполняться учеником. Рекомендуется не использовать всегда одни и те же переменные при составлении уравнений. Ученик должен понимать, что сущность решения задачи не зависит от того, какими буквами обозначены переменные. Также целесообразно, чтобы ученики объясняли, что выражает каждое уравнение системы, и приводили различные объяснения и подходы к одной и той же задаче.

11. В задаче предусмотрено использование правила нахождения процента числа. По этой причине во время обсуждения с учениками повторяется правило нахождения процента.

Решение задачи

Сад	Масса яблок (кг)	Масса груш (кг)	Масса урожая (кг)
I	m	n	650
II	$1{,}1m$	$1{,}2n$	740

Масса яблок, собранных с первого сада, обозначается через m, масса груш — через n. В этом случае по условию масса яблок, собранных со второго сада, равна $1{,}1m$, а масса груш — $1{,}2n$. Как получены эти выражения, обсуждается с учениками.
По условию общий урожай, собранный с первого сада, составляет 650 кг, а со второго сада — 740 кг. Следовательно, система линейных уравнений с двумя переменными имеет вид $\begin{cases} m + n = 650 \\ 1{,}1m + 1{,}2n = 740 \end{cases}$.

$\begin{cases} m + n = 650 \\ 1{,}1m + 1{,}2n = 740 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 650 - m \\ 11m + 12n = 7400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 400 \\ n = 250 \end{cases} \rightarrow (400; 250)$

Полученный ответ подставляется в систему уравнений и проверяется правильность.

$\begin{cases} 400 + 250 = 650 \\ 1{,}1 \cdot 400 + 1{,}2 \cdot 250 = 740 \end{cases}$

Ответ. С первого сада собрали 400 кг яблок и 250 кг груш, со второго сада — 440 кг яблок и 300 кг груш.

13. Вспоминаются знания учеников о скорости лодки против течения и по течению реки. Обсуждаются понятия собственной скорости лодки или скорости в стоячей воде.

Решение задачи

Скорость лодки в стоячей воде обозначается через x, скорость течения реки — через y. Тогда скорость против течения равна (x – y), а скорость по течению равна (x + y). По первым данным лодка движется 2 часа против течения и 1 час по течению. В этом случае путь, пройденный лодкой за 2 часа против течения, равен 2(x – y) км, а путь, пройденный за 1 час по течению, равен (x + y) км. По вторым данным путь против течения равен (x – y) км, а путь по течению — (x + y) км. Если в первом случае лодка проходит 20 км, а во втором — 14 км, то в соответствии с условием составляется и решается система линейных уравнений с двумя переменными.

	Путь против течения (км)	Путь по течению (км)	Общий путь (км)
I случай	$2(x-y)$	$x+y$	20
II случай	$x-y$	$x+y$	14

$\begin{cases} 2(x-y) + (x+y) = 20 \\ (x+y) + (x-y) = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 20 \\ 2x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 7 \end{cases} \rightarrow (7; 1)$

Полученный ответ подставляется в систему уравнений и проверяется правильность.

$\begin{cases} 2(7-1) + (7+1) = 20 \text{ R} \\ (7+1) + (7-1) = 14 \text{ R} \end{cases}$

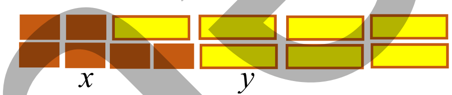
Ответ. Скорость лодки по течению равна 8 км/час.

К сведению учителя! При анализе условия задачи ученики испытывают трудности при определении известного и неизвестного. Иногда одну и ту же величину выражают двумя разными переменными, путают, к какой переменной относятся данные числа. Некоторые ученики при наличии двух неизвестных составляют только одно уравнение, не учитывая второе уравнение или условие. Одним из ошибочных представлений при составлении системы уравнений по условию задачи является то, что ученики не приводят единицы измерения к одинаковому виду. При анализе задачи целесообразно требовать от учеников представления данных и требуемого на рисунке, в таблице или схеме.

14. Условие задачи анализируется совместно с учениками.
Решение задачи
Вспоминается запись двузначного числа в виде суммы разрядных слагаемых. Если двузначное число записано как $\overline{ab}$, то обращается внимание на запись $\overline{ab}$ = $10a+b$. Здесь a обозначает цифру десятков, a b — цифру единиц. По условию $a + b = 9$ является одним из уравнений системы. С другой стороны, если полученное при перестановке цифр двузначное число $\overline{ba}$ на 45 единиц меньше числа $\overline{ab}$, то второе уравнение системы имеет вид $\overline{ab} - \overline{ba}$ = 45. С учётом разложения двузначных чисел второе уравнение записывается как $9a - 9b = 45$.

Составляется и решается система уравнений, соответствующая условию задачи. $\begin{cases} a + b = 9 \\ 9a - 9b = 45 \end{cases} \rightarrow (7;\ 2)$.

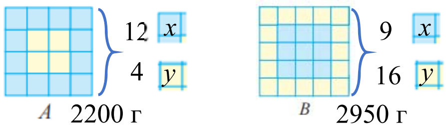
Ответ. Первоначальное число равно 72.
15. Условие данной задачи анализируется совместно с учениками.
Привлечение
Полезно построить модель, соответствующую условию. Длина меньших частей обозначается через x, длина больших частей — через y.



Решение задачи
По условию записывается и решается система линейных уравнений с двумя переменными. В условии задачи длина доски дана равной 1 метру. Ученики, записав 1 м = 100 см, могут составить систему уравнений в виде $\begin{cases} 2x + 4y = 100 \\ 4x + 3y = 100 \end{cases}$.
Ответ. лина одной большой части равна 20 см.
В классах с техническими возможностями можно использовать видео материалы:
https://video.edu.az/video/5691   *https://video.edu.az/video/16254*
20. Условие данной задачи обсуждается с учениками. Объясняется снятие 1 балла за 4 неправильных ответа и анализируется, как в этом случае составляется уравнение. Число правильных ответов обозначается через x, число неправильных ответов — через y.
За каждый правильный ответ → + 1 балл   За 4 неправильных ответа → – 1 балл, то есть за 1 неправильный ответ → – 0,25 балл.

Имя	Число вопросов	Набранный балл	Число правильных ответов	Число неправильных ответов	I уравнение	II уравнение
Анар	*20*	*17,5*	x	y	$x + y = 20$	$x - 0{,}25y = 17{,}5$
Самир	*21*	*16*	x	y	$x + y = 21$	$x - 0{,}25y = 16$

• Если Анар ответил всего на 20 вопросов, первое уравнение системы будет x + y = 20. Известно, что Анар набрал 17,5 балла, следовательно, можно записать x − 0,25y = 17,5. Таким образом, $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - 0{,}25y = 17{,}5 \end{cases} \Rightarrow$ (18; 2).
• Если Самир ответил на 21 вопрос, первое уравнение системы будет x + y = 21. Известно, что Самир набрал 16 баллов, следовательно, можно записать x − 0,25y = 16. Таким образом, $\begin{cases} x + y = 21 \\ x - 0{,}25y = 16 \end{cases} \Rightarrow$ (17; 4).
Можно составить таблицу в соответствии с условием задачи.
Ответ. Анар правильно ответил на 18 вопросов и дал больше правильных ответов по сравнению с Самиром.
21. Кубоиды A и B составлены из одинаковых по размеру синих и жёлтых маленьких кубиков. Масса одного синего кубика обозначается через x, масса одного жёлтого кубика — через y. На основе данных, представленных на рисунке, составляется и решается система линейных уравнений с двумя переменными любым способом. Можно представить модель, соответствующую условию.



$\begin{cases} 12x + 4y = 2200 \\ 9x + 16y = 2950 \end{cases} \Rightarrow (150;\ 100).$

Ответ. асса одного синего кубика равна 150 грамм.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Составляет систему линейных уравнений с двумя переменными в соответствии с условием задачи.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает систему линейных уравнений с двумя переменными различными способами в соответствии с условием задачи.	Рабочие листы, учебник, РТ
Проверяет правильность решения системы линейных уравнений, составленной по условию задачи.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 8.6. Уравнения с модулем

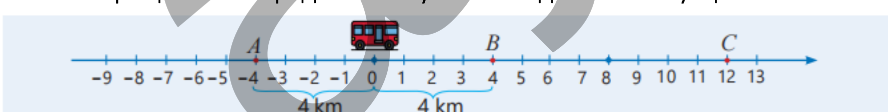
ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.2.2. Решает простые уравнения с модулем.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Решает простые уравнения с модулем. • Решает задачи, составляя уравнение с модулем.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки,стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/12136* *https://www.youtube.com/watch?v=fce-XL3qGXE* Задание: *https://www.geogebra.org/m/kpnDNRTK*

Побуждение

Исследуются координаты точек, находящихся на координатной оси на одинаковом расстоянии от начала координат. Повторяется понятие и определение модуля числа. Выслушиваются мнения учеников. Ученикам задаётся вопрос: «Что можно сказать о точках, расположенных на одинаковом расстоянии от некоторой точки на координатной оси?» Вопрос обсуждается с изображением на координатной оси.

Исследование-обсуждение

Внимание учеников обращается на представленную в исследовании ситуацию.



• Если принять, что положение автобуса соответствует началу координат, то совместно с учениками определяется, какое равенство верно для координат остановок A и B: |a| = 4.

• Рассматривается случай, когда остановка B находится на одинаковом расстоянии от остановок A и C, исследуется, какое равенство верно для координат остановок A и C: |a − 4| = 8.

Изучение Уравнения с модулем

Даётся определение уравнения с модулем, приводятся примеры. Ученикам предоставляется информация о способах решения уравнений с модулем. С использованием изображения на числовой оси и определения модуля рассматриваются различные примеры, обсуждаются способы их решения. Выслушиваются мнения учеников о том, какой способ решения является наиболее удобным.

Запомни!

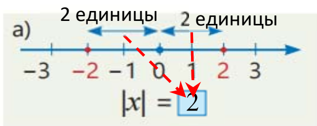
Все три случая, представленные под заголовком «Запомни», подробно обсуждаются вместе с учениками. Каждый случай объясняется на примерах.

Уравнение	$c > 0$	$c = 0$	$c < 0$
$\lvert ax + b \rvert = c$	Получаются два линейных уравнения.	Получается одно линейное уравнение.	Уравнение не имеет корней.

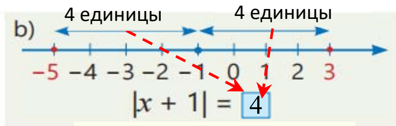
	$ax + b = c$ и $ax + b = -c$	$ax + b = 0$	
Пример	$\lvert 2x + 5 \rvert = 7$ $2x + 5 = 7$ и $2x + 5 = -7$ $x = 1$ и $x = -6$	$\lvert -x + 4 \rvert = 0$ $-x + 4 = 0$ $x = 4$	$\lvert 0{,}5x - 1 \rvert = -3$

Задания

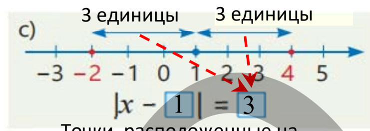
2. Ситуации, представленные на рисунке, обсуждаются с учениками. В каждом пункте по данной числовой оси определяется соответствующее число для пустой клетки. Обращается внимание учеников на расположение чисел, находящихся на одинаковом расстоянии от начала координат. Связь между понятиями модуля и расстояния наглядно объясняется на числовой оси.



Точки, расположенные на расстоянии 2 единиц от 0.

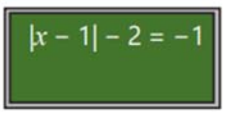


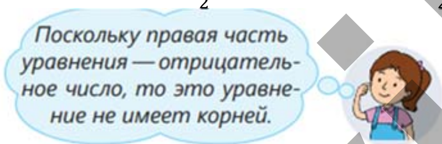
Точки, расположенные на расстоянии 4 единиц от -1



Точки, расположенные на расстоянии 3 единиц от 1

3. При решении задания ученики должны учитывать случаи, когда модуль числа равен положительному числу, нулю или отрицательному числу, а также соответствующие решения.
h) $\left|\frac{x}{2} - 1\right| = 9$. Здесь модуль равен положительному числу, следовательно, уравнение записывается в виде двух линейных уравнений и решается: $\frac{x}{2} - 1 = 9 \rightarrow x = 20$ и $\frac{x}{2} - 1 = -9 \rightarrow x = -16$.





4. Мнение Лалы обсуждается вместе с учениками. На первый взгляд ученики могут считать её мнение верным, так как в правой части уравнения стоит отрицательное число. Однако обращается внимание на то, что в левой части уравнения находится разность модуля и числа 2. Число −2 переносится в правую часть уравнения, и модуль становится равным 1. Это уравнение имеет два корня: $|x - 1| = 1 \rightarrow x = 2$ и $x = 0$.
Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики допускают различные ошибки при решении уравнений с модулем. Целесообразно анализировать приведённые примеры вместе с учениками и организовывать работу над ошибками.

Ложно	$\lvert x - 3 \rvert = -9$ $x - 3 = -9$ $x = -6$	$\lvert x + 3 \rvert = 2$ $x + 3 = 2$ $x = -1$	$\lvert x + 1{,}2 \rvert = 0{,}4$ $x + 1{,}2 = 0$ $x = -1{,}2$
Верно	$\lvert x - 3 \rvert = -9$ *Нет решения.*	$\lvert x + 3 \rvert = 2$ $x + 3 = 2$ и $x + 3 = -2$ $x = -1$ и $x = -5$	$\lvert x + 1{,}2 \rvert = 0{,}4$ $x + 1{,}2 = 0{,}4$ и $x + 1{,}2 = -0{,}4$ $x = -0{,}8$ и $x = -1{,}6$

6. В этом задании устанавливается связь между данными уравнениями и условиями. Изобразив решения этих уравнений на числовой оси, ученики могут получить результат в более наглядной форме. Во втором задании ученики уже анализировали связь между свободным числом внутри модуля и числом в правой части уравнения. Каждое уравнение анализируется по тому же правилу, после чего определяются ответы.
а) Корни находятся на расстоянии 5 единиц от начала координат. $|x| = 5$.
б) Корни находятся на расстоянии 5 единиц от числа −2. $|x + 2| = 5$.
в) Корни находятся на расстоянии 5 единиц от числа 2. $|x - 2| = 5$.
8. Анализируется условие задачи.

Решение задачи
• Катер за t часов проходит расстояние 20t км. В этом случае через t часов расстояние между маяком и катером будет равно $|20t - 70|$ км.
• Сказано, что через t часов катер находится на расстоянии 5 км от маяка.
В этом случае катер может находиться со стороны порта или в противоположной стороне. Тогда расстояние может быть равно (70 − 5) км или (70 + 5) км. Следовательно, катер остановился на расстоянии 65 км — ближайшем к порту, или 75 км — наиболее удалённом.
• Данное положение катера выражается уравнением $|20t - 70| = 5$.
Обсуждение. Выслушиваются мнения учеников, решивших задачу различными способами.

Дифференцированное обучение
Поддержка. Ученикам предлагаются задания, выполнение которых помогает понять смысл модуля и причину возникновения двух случаев. Целью является формирование у учеников навыков самостоятельного решения простых уравнений вида |ax + b| = c.
Решите уравнения:. 1) $|x| = 5$, 2) $|x-7| = 9$, 3) $|2x+1| = -6$, 4) $|x+1| = 0$.
Углубление. Важно формировать у учеников различные подходы к решению уравнений с модулем, в том числе навыки исследования в зависимости от значения параметра. С этой целью можно предложить следующие задания:
При каких значениях m уравнение |x – 3| = m имеет: а) одно решение, б) два решения, в) не имеет решения?

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Применяет понятия модуля и расстояния при решении уравнений.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает простые уравнения с модулем.	Рабочие листы, учебник, РТ
Составляет уравнение с модулем в соответствии с условием задачи и решает задачу.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 8.7. Неравенства

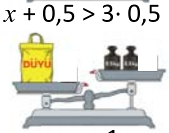
ПОДСТАНДАРТЫ	7-2.2.5. Определяет рациональные значения переменной, удовлетворяющие простому неравенству.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Решает простые неравенства. • Изображает решение неравенства на числовой прямой. • Составляет и решает неравенство в соответствии с условием задачи.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки,стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: https://www.geogebra.org/m/SdubJSbh#material/Huq24Spq Задание: *https://www.geogebra.org/m/ns2xr6na* *https://www.geogebra.org/m/SdubJSbh#material/qWKKhnvU*

Побуждение
Учитель обращается к ученикам с вопросами: 1) «У Анара должно быть не менее 10 манатов, чтобы он смог купить выбранную книгу. Сможет ли Анар купить книгу, если у него будет 10 манатов, 12 манатов, 8 манатов?»
2) «Абитуриент может набрать максимум 700 баллов на выпускном и вступительном экзаменах. Может ли абитуриент набрать 450, 700, 725 баллов?»
Как можно записать эти предложения с помощью математических символов? Вопросы исследуются совместно с учениками, выслушиваются мнения о неравенстве.

Исследование-обсуждение

Масса риса на весах обозначается через x, записывается соответствующее неравенство: x + 0,5 > 1,5.
• Если с обеих чаш весов убрать по одному грузу, это означает, что из обеих частей неравенства вычитается 0,5. В этом случае получаем неравенство x > 1. Ученики должны уметь объяснить, что при снятии с обеих чаш весов грузов одинаковой массы положение весов не изменяется. Здесь подчёркивается, что масса риса больше 1 кг.
• На основании полученного неравенства x > 1 ученики определяют, что масса риса не может быть 0,5 кг, 0,75 кг, но может быть 1,2 кг, 2 кг, 2,5 кг. Ответы объясняются.

$x + 0,5 > 3 \cdot 0,5$



$x > 1$

Изучение **Решение неравенств**

Ученикам напоминаются простые неравенства $x > a,\ x < a,\ x \geq a,\ x \leq a$. Обращается внимание на то, что под решением неравенства понимается множество всех чисел, удовлетворяющих данному неравенству.
Примеры, приведённые в учебнике, изображаются на числовой прямой и обсуждаются. Наглядно показывается, как изображается принадлежность или непринадлежность числа a множеству решений.

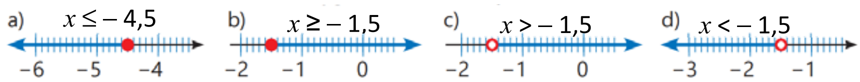
В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивную деятельность:
https://www.geogebra.org/m/bYGED3dY *https://www.geogebra.org/m/SdubJSbh#material/zsvhxxjh*

Подумай!

Решения неравенства $x \geq -0{,}9$ исследуются учениками и изображаются на числовой прямой. Отмечаются несколько примеров, входящих в множество решений. Обсуждается, принадлежит ли число −0,9 множеству решений.

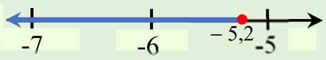
Задания

2. В этом задании ученики записывают символами неравенства, решения которых изображены на числовой прямой. Каждая запись объясняется учениками.



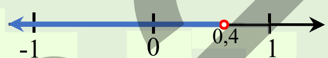
5. Решение неравенства изображается на числовой прямой, и среди этих решений находится число, удовлетворяющее условию.

в) $x \leq -5{,}2$



Среди целых чисел, меньших −5,2, наибольшим целым числом является −6.

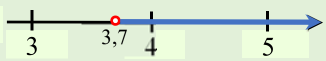
г) $x < 0{,}4$



Среди целых чисел, меньших 0, 4, наибольшим целым числом является 0.

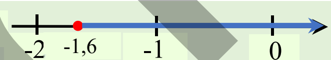
6. Определяется множество решений данных неравенств и среди них находится наименьшее целое число.

в) $x > 3{,}7$



Среди целых чисел, больших 3,7, наименьшим целым числом является 4.

г) $x \geq -1{,}6$

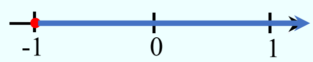


Среди целых чисел, больших −1,6, наименьшим целым числом является −1.

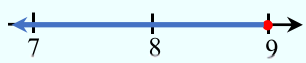
Ложные представления, возникающие у учеников. Нахождение наибольшего или наименьшего целого числа, удовлетворяющего неравенству, иногда понимается учениками неверно. Так, ученики ошибочно принимают за ответ целое число, большее или меньшее числа, стоящего в правой части простого неравенства, ориентируясь только на выражения «наибольшее» или «наименьшее». Для устранения таких ошибок полезно изображать решение на числовой прямой.

a) Найдите наименьшее целое решение, удовлетворяющее неравенству $x \geq -1$.
b) Найдите наибольшее целое решение, удовлетворяющее неравенству $x < 9$.

Ложно a) $x \geq -1$ *Ответ*. -2



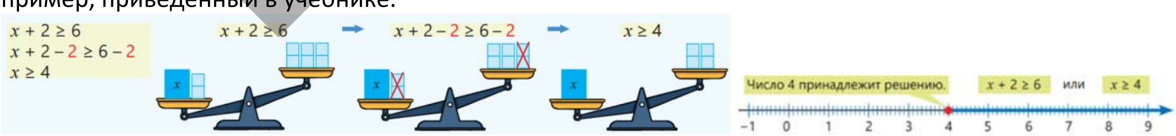
b) $x < 9$ *Ответ*. 10



Верно a) $x \geq -1$ *Ответ*. -1 b) $x < 9$ *Ответ*. 8

Изучение Равносильные неравенства

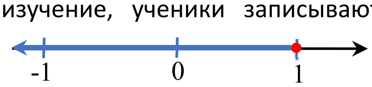
Ученики знакомы с понятием равносильности из темы уравнений. Их знания о равносильности актуализируются. Рассматриваются примеры прибавления или вычитания одного и того же числа к обеим частям неравенства, отмечается, что при этом получаются равносильные неравенства. Обсуждается пример, приведённый в учебнике.



Путём изображения на числовой прямой на примерах объясняется, что число 4 и все числа, расположенные правее числа 4, являются решениями неравенств $x + 2 \geq 6$ или $x \geq 4$.

Подумай!

На основании свойства равносильности, приведённого в разделе изучение, ученики записывают неравенство, равносильное неравенству $x - 2 \leq -1$. Для приведения данного неравенства к простому виду к обеим частям прибавляется 2 и



получается равносильное ему неравенство x ≤ 1. Множество решений данного неравенства наглядно изображается на числовой прямой.

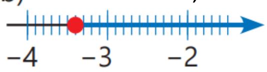
К сведению учителя! Ученики иногда могут не понимать, почему данное неравенство приводится к равносильному неравенству. Учитель должен объяснить ученикам, что преобразование неравенства вида $x - 2 \le -1$ и запись его в более простом виде позволяют удобнее определить множество решений.

8. В этом задании данные неравенства заменяются равносильными неравенствами и соотносятся с изображениями на числовой прямой.

a) $x - 2 \le -5{,}4$

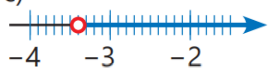
$x \le -3{,}4$

b) $x - 2 \ge -5{,}4$



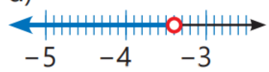
$x \ge -3{,}4$

c) $x - 2 > -5{,}4$



$x > -3{,}4$

d) $x - 2 < -5{,}4$



$x < -3{,}4$

Решение задач

12. За 5 минут до прибытия поезда на станцию по расписанию объявляется, что он задержится, однако неизвестно, на сколько минут. По условию задачи это время (x) в любом случае должно быть больше 5 минут.
• Соответствующее условию неравенство имеет вид $x > 5$.
• Обосновывается, что верным является второе изображение на числовой прямой.

13. Анализируется условие задачи.
Решение задачи
Масса груза, помещаемого в чемодан, обозначается через x. Тогда масса заполненного чемодана равна x + 1,5. Учитывается условие авиабилета о том, что масса багажа не должна превышать 23 кг. По условию масса заполненного чемодана не может превышать 23 кг.
Следовательно, необходимо решить неравенство $x + 1{,}5 \le 23$..
a) $x + 1{,}5 \le 23 \rightarrow x \le 21{,}5$.
b) По множеству решений данного неравенства определяется, что масса груза в чемодане может быть 19,5 кг, 22 кг, а 25 кг не входит в множество решений.
c) Наибольшее число, входящее в множество решений данного неравенства, равно 21,5. Следовательно, масса груза, помещаемого в чемодан, может быть не более 21,5 кг.

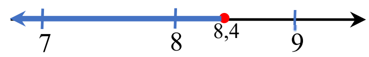
14. На основании данных требуется определить соответствующее неравенство и найти, какой максимальной могла быть первоначальная температура пищи.
Привлечение
Обсуждается температура морозильной камеры холодильника и причины, по которым продукты, хранящиеся в ней, не портятся. Обращается внимание учеников на замедление активности ферментов и различных химических реакций в продуктах при низкой температуре, а также на полное прекращение микробиологических процессов.
Решение задачи
Известно, что для длительного хранения пищи в морозильной камере температура не должна превышать −18°C, а при охлаждении пищи на 10°C она достигает подходящей температуры хранения.
Учитывается, что разность первоначальной температуры пищи T и 10°C должна быть меньше −18°C.
Соответствующее условию неравенство имеет вид $T - 10 \le -18$. Равносильное ему неравенство: $T \le -8$. Наибольшая температура, входящая в множество решений, равна −8°C.
Ответ. −8°C.

15. Обсуждается условие задачи.
Привлечение
Ученикам задаются вопросы: «Сколько тетрадей по цене 1,2 маната можно купить на имеющиеся 20 манатов? Какое наибольшее количество тетрадей можно купить?» Ученики отвечают на вопросы и обсуждают полученные результаты.
Решение задачи

Цена 3 тетрадей составляет 3,6 маната. Цена книги обозначается через x. Учитывается, что оплаченная сумма не должна превышать 12 манатов. Требуется определить максимально возможные расходы на 3 тетради и одну книгу. Ученики устанавливают, что соответствующее условию неравенство имеет вид 3,6 + x ≤ 12.

• $3,6 + x \leq 12 \Leftrightarrow x \leq 8,4$.

• Наибольшее число, входящее в множество решений данного неравенства, равно 8,4. Следовательно, цена книги может быть не более 8,4 маната. В соответствии с множеством решений определяется, что цена книги может быть 5 манатов, 7,40 маната, однако число 8,90 не входит в множество решений.



Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Определяет неравенство, равносильное данному неравенству.	Рабочие листы, учебник, РТ
Находит множество решений простого неравенства.	Рабочие листы, учебник, РТ
Решает задачу с помощью неравенства.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 8.8. Приблизительные вычисления.
Абсолютная и относительная погрешность

ПОДСТАНДАРТЫ	7-1.1.5. Находит абсолютную и относительную погрешность результата измерения. 7-1.2.3. Находит значение числового выражения.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Находит абсолютную погрешность результата измерения. • Находит относительную погрешность результата измерения. • Находит значение числового выражения.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки,стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.nagwa.com/en/videos/138104137874/* *https://www.geogebra.org/m/srtxeqjz* Задание: *https://www.geogebra.org/m/bsq57h5b*

Побуждение

Учитель обращается к ученикам с вопросами: «Каково расстояние от Земли до Солнца?», «Какова площадь поверхности Луны?», «Сколько часов в сутках?» и т.д. Выслушиваются мнения учеников о том, какие из этих чисел являются точными, а какие — приближёнными. У учеников спрашиваются примеры, соответствующие точным и приближённым значениям.

Исследование-обсуждение

Ученики обсуждают результаты измерений, проведённых Лалой и Анаром. Сравниваются ошибки, допущенные детьми при измерении карандаша и доски.

• Находится разность результата каждого ребёнка с точным измерением.

Лала: 11 − 10 = 1 (см). Анар: 101 − 100 = 1 (см).

• Отмечается, что хотя в обоих случаях при измерении получено на 1 см больше, в первом случае по отношению к 10 см погрешность больше. Обращается внимание на то, что результат Анара является более удовлетворительным, и выслушиваются мнения учеников.

Изучение **Абсолютная погрешность**

Обращается внимание учеников на многие области, где вычисления выполняются с помощью измерений. Выслушиваются мнения учеников об ошибках — погрешностях, возникающих при измерении или оценивании роста человека, массы, температуры воздуха и т.д. Например, ученики приблизительно оценивают массу какого-либо предмета в классе, названные значения сравниваются с его точной массой, определяется значение с наименьшей погрешностью.

Обсуждаются ответы детей на вопрос, приведённый в учебнике. Объясняется, что при наличии в лесу 780 деревьев Анар допустил ошибку, назвав на 80 деревьев больше, а Айнур — на 20 деревьев больше, и определяется, чья оценка ближе к точному ответу. Таким образом, ученики, находя модуль разности между точным и приближённым значениями, определяют, чей ответ ближе к точному значению.

Учитель даёт определение абсолютной погрешности и отмечает, что если точное значение величины обозначить через x, а приближённое — через a, то абсолютная погрешность находится по выражению $|x - a|$.

Рассматривается решение примера, приведённого в разделе Изучение, объясняется нахождение абсолютной погрешности, полученной при округлении числа.

Задания

3. Числители данных дробей делятся на знаменатели с помощью калькулятора, полученные десятичные дроби округляются до заданных разрядов. Определяется абсолютная погрешность округления.

$3\frac{5}{6} = 3{,}888...$

а) полученная периодическая десятичная дробь округляется до десятых: $3{,}888... \approx 3{,}9$.

Абсолютная погрешность: $|3\frac{5}{6} - 3{,}9| = |3\frac{5}{6} - 3\frac{9}{10}| = |\frac{-1}{15}| = 0{,}0(6) \approx 0{,}07$.

б) полученная бесконечная периодическая десятичная дробь округляется до сотых: $3{,}888... \approx 3{,}89$.

Абсолютная погрешность: $|3\frac{5}{6} - 3{,}89| = |3\frac{5}{6} - 3\frac{89}{100}| = |\frac{-17}{300}| \approx 0{,}05666... \approx 0{,}06$.

$1\frac{5}{17} \approx 1{,}29411764706$ а) полученная десятичная дробь округляется до десятых: $1{,}2\underline{9}4 \approx 1{,}3$.

Абсолютная погрешность: $|1\frac{5}{17} - 1{,}3| = |1\frac{5}{17} - 1\frac{3}{10}| = |\frac{-1}{170}| \approx 0{,}006$.

б) полученная десятичная дробь округляется до сотых: $1{,}2\underline{9}4 \approx 1{,}29$.

Абсолютная погрешность: $|1\frac{5}{17} - 1{,}29| = |1\frac{5}{17} - 1\frac{29}{100}| = |\frac{7}{1700}| \approx 0{,}004$.

В классах с техническими возможностями можно использовать онлайн-калькуляторы:

https://www.calculator.net https://www.online-calculator.com https://www.desmos.com/scientific?lang=tr

Запомни!

Иногда точное значение величины неизвестно. В этом случае обращается внимание учеников на невозможность определения абсолютной погрешности. Если известно, между какими числами находится точное значение, подчёркивается возможность нахождения этого значения с определённой точностью. Обсуждается пример, приведённый в учебнике, выслушиваются мнения учеников о равенстве T = 14,5 ± 0,5 (°C).

К сведению учителя! Для правильного понимания учениками понятия абсолютной погрешности целесообразно выполнять измерения с помощью линейки, весов и других приборов, подчёркивать связь между точным значением, приближённым значением и погрешностью измерения, рассматривать примеры неверных решений и исправление ошибок.

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики ошибочно принимают абсолютную погрешность за отрицательное число. Они должны помнить, что абсолютная погрешность задаётся модулем и понимать, что модуль здесь показывает не расстояние, а величину погрешности. С другой стороны, иногда ученики путают точное и приближённое значения величины. Они должны помнить, что точное значение является теоретическим или реальным истинным значением, а приближённое — результатом измерения или округления. Во многих случаях ученики считают, что абсолютная погрешность возникает только при округлении. Однако при выполнении заданий, связанных с измерениями и приближёнными вычислениями, они убеждаются, что абсолютная погрешность возникает не только при округлении.

> Длина пути от дома до школы составляет 100 шагов. Анар сказал, что это расстояние равно 113 шагам, а Лала — 135 шагам. Найдите абсолютную погрешность.
>
> Ложно Анар: 100 – 113 = –13, Лала: 100 – 135 = – 35.
>
> Верно Анар: |100 – 113| = 13, Лала: |100 – 135| = 35.

Изучение Относительная погрешность

Учитель на основе примера, приведённого в разделе Изучение, показывает, что при измерении на одних и тех же весах массы сахарного песка (1200 ± 0,1) и массы золота (10 ± 0,1) абсолютные погрешности одинаковы. Возникает вопрос: как сравнить погрешности измерений в этом случае? При обсуждении примера определяется, что масса сахарного песка определена более точно по сравнению с золотом. Учитель сообщает, что более точная оценка измерения определяется нахождением отношения абсолютной погрешности к модулю приближённого значения, и вводит понятие относительной погрешности.

Если точное значение величины обозначить через x, а приближённое — через a, то относительная погрешность находится по выражению $\frac{|x-a|}{|a|}$.

Относительная погрешность выражается в процентах: $\frac{|x-a|}{|a|} \cdot 100\%$.

В приведённом примере определяется, в каком случае погрешность измерения больше — при расстояниях от Баку до Шуши или от Земли до Луны, и обсуждается нахождение относительных погрешностей.

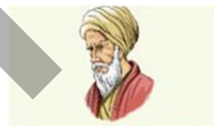
К сведению учителя! В некоторых источниках относительная погрешность определяется как отношение абсолютной погрешности к точному значению величины: $\frac{|x-a|}{|x|} \cdot 100\%$. Однако поскольку точное значение величины известно не всегда, целесообразно находить относительную погрешность как отношение абсолютной погрешности к приближённому значению. Это связано с тем, что погрешности в основном относятся к измерениям, а точное значение измерений не всегда возможно определить.

9. В этом задании по данным определяется, в каком случае относительная погрешность меньше. Для этого в каждом случае находится абсолютная погрешность и вычисляется относительная погрешность.

Абс. погрешность	Относительная погрешность	Абс. погрешность	Относительная погрешность
а) $a = 120 \pm 0{,}2$	$\frac{0{,}2}{120} \cdot 100\% \approx 0{,}17$ %	$b = 2300 \pm 15$	$\frac{15}{2300} \cdot 100\% \approx 0{,}65$ %

Таким образом, поскольку 0,17 % < 0,65 %, при измерении числа a относительная погрешность меньше.

Из истории математики



Гияс-ад-дин аль-Каши
(1380–1429)

Историческая информация о знаменитом среднеазиатском учёном Гияс ад-дине аль-Каши доводится до сведения учеников, сообщается о его заслугах в записи числа π. Он был одним из известных математиков и астрономов Османского государства XVI века. Наиболее значительным трудом Гияс ад-дина Джемшида аль-Каши является книга «Ключ арифметики», в которой представлены математические знания средневекового исламского мира во всех направлениях. Ученикам можно поручить собрать информацию о Гияс ад-дине Джемшиде аль-Каши из интернет-источников.

Решение задач

11. Ученики округляют длины сторон пола прямоугольной формы до целых и в обоих случаях находят площадь пола.

5,9 ≈ 6 (м), 4,3 ≈ 4 (м). $S_1 = 5{,}9 \cdot 4{,}3 = 25{,}37$ (м²), $S_2 = 6 \cdot 4 = 24$ (м²).

• Абсолютная погрешность: $|24 - 25{,}37| = 1{,}37$ (м).

Относительная погрешность: $\frac{1{,}37}{24} \cdot 100\% \approx 5{,}7\%$.

• Известно, что ковёр заказан по округлённому значению площади пола. Хотя округлённое значение площади меньше точного значения, длина ковра (6 м) больше длины пола (5,9 м), поэтому такой ковёр не покроет пол.

13. Ученики сначала находят точное значение выражения, вычисляя сумму обыкновенных дробей. Затем переводят дроби в десятичные, округляют их до сотых и находят приближённое значение выражения.

• Точное значение выражения: $\frac{1}{3} + 3\frac{5}{6} = 3\frac{7}{6} = 4\frac{1}{6}$.

Приближённое значение выражения: $\frac{1}{3} + 3\frac{5}{6} \approx 0{,}33 + 3{,}83 = 4{,}13$.

Абсолютная погрешность: $|4\frac{1}{6} - 4{,}13| = |4\frac{1}{6} - 4\frac{13}{100}| = \frac{11}{300} \approx 0{,}04$.

• Точное значение выражения: $2\frac{1}{7} - 3\frac{3}{8} = -1\frac{13}{56}$.

Приближённое значение выражения: $2\frac{1}{7} - 3\frac{3}{8} \approx 2{,}14 - 3{,}38 = -1{,}24$.

Абсолютная погрешность: $|-1\frac{13}{56} - (-1{,}24)| \approx |-1{,}23 + 1{,}24| \approx 0{,}01$.

Относительная погрешность: $\frac{0{,}01}{|-1{,}24|} \cdot 100\% = \frac{100}{124}\% \approx 0{,}8\%$.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Находит абсолютную погрешность результата измерения.	Рабочие листы, учебник, РТ
Находит относительную погрешность результата измерения.	Рабочие листы, учебник, РТ
Применяет приближённые вычисления при решении задач.	Рабочие листы, учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение. Упомянутые в заключении понятия повторяются с учениками, проводится обобщение. Слова и новые понятия, изученные в разделе, снова вспоминаются, и ученики объясняют их значение. Основные понятия, упомянутые в заключении:

Линейное уравнение с одной переменной, линейное уравнение с двумя переменными, график линейного уравнения с двумя переменными, система линейных уравнений с двумя переменными, метод подстановки, метод сложения, уравнение с модулем, неравенство, приближённое вычисление, абсолютная погрешность, относительная погрешность.

На первой странице раздела условие задачи, приведённой под заголовком «Попытайтесь!», исследуется совместно с ученики, анализируется, обсуждаются данные и величины, которые требуется найти. На основе данных задачи составляется и решается соответствующая система уравнений для нахождения количества апельсинового или яблочного сока в смеси. На первом уроке обсуждаются трудности, возникающие перед ученики при решении этой задачи. В конце раздела обращается внимание на то, какие новые знания были изучены и использованы при решении задачи.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

1. Данные уравнения решаются учениками. Перед решением уравнения целесообразно, чтобы ученик объяснил, какие правила он будет применять при решении данного уравнения. Следует уделять внимание проверке ответов.

d) $|x-\frac{x}{4}|=9$

$|\frac{3x}{4}|=9$

$\frac{3x}{4}=9$ и $\frac{3x}{4}=-9$

$x=12$ и $x=-12$.

Ответ. 12 и –12.

g) $\frac{m-1}{3}+1=m$

$m-1+3=3m$

$m=1$.

Ответ. 1.

h) $6-|5-\frac{x}{3}|=1$

$|5-\frac{x}{3}|=5$

$\frac{15-x}{3}=5$ и $\frac{15-x}{3}=-5$

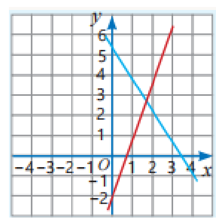
$x=0$ и $x=30$.

Ответ. 0 и 30.

4. Для ответа на поставленные вопросы ученики должны ещё раз вспомнить случаи, когда уравнение имеет бесконечное число решений или не имеет корней.

а) Чтобы уравнение (a – 2)x = b – 3 имело бесконечное число решений, должно выполняться a – 2 = 0 и b – 3 = 0. Отсюда получаем a = 2 и b = 3.

6. Результаты, полученные Сабиной и Анаром по графикам, анализируются по точному значению. По графику трудно точно определить координаты точки пересечения. В этом случае для нахождения абсциссы точки пересечения используются уравнения прямых.



Правые части уравнений y = 3x – 2 и y = –1,5x + 5,02 приравниваются, и полученное уравнение решается: $3x-2=-1,5x+5,02 \to x=1,56$.

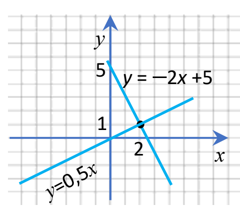
По результатам каждого ученика находится абсолютная погрешность и проводится сравнение.

• Абсолютная погрешность результата Сабины: |1,5 – 1,56| = 0,06.

• Абсолютная погрешность результата Анара: |1,6 – 1,56| = 0,04.

Ответ. Абсолютная погрешность результата Сабины больше.

10. Для записи уравнений требуемых прямых ученики применяют знания об уравнении прямой (y = kx + b), угловом коэффициенте k и ординате точки пересечения прямой с осью Oy.



Прямая с угловым коэффициентом −2 и ординатой точки пересечения с осью Oy, равной 5: y = −2x + 5.

Прямая с угловым коэффициентом 0,5, проходящая через начало координат: y = 0,5x.

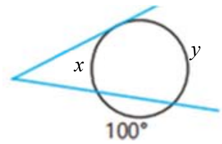
В прямоугольной системе координат строятся графики этих прямых и определяются координаты точки пересечения.

На следующем этапе для проверки правильности ответа решается система уравнений.

$\begin{cases} y = -2x + 5 \\ y = 0{,}5x \end{cases} \Rightarrow (2; 1).$

Ученики также могут проверить правильность решения, построив графики данных прямых и подставив полученную пару чисел в систему уравнений.

11. В этом задании ученики вспоминают изученные сведения о дугах, расположенных между касательной и секущей окружности, их градусных мерах и полном угле. По условию составляется система линейных уравнений с двумя переменными. Градусная мера меньшей дуги обозначается через x, большей — через y. По условию 20% от x равны 30% от y, следовательно, первое уравнение системы: 0,2y = 0,3x.



С другой стороны, сумма градусных мер трёх дуг образует полный угол: $x + y + 100° = 360°$.

$\begin{cases} 0{,}2y = 0{,}3x \\ x + y = 260° \end{cases} \Rightarrow (x; y) = (104°; 156°).$

Ответ. Градусная мера большой дуги равна 156°.

17. Рассматриваются масса купленных покупателем фруктов и оплаченная за них сумма. Решение задачи выполняется поэтапно.

Решение задачи

Известны суммы, оплаченные за яблоки и гранаты различной массы: требуется найти первоначальную цену 1 кг яблок. Цена 1 кг яблок обозначается через x, цена 1 кг гранатов — через y. Тогда сумма, оплаченная за 2 кг яблок и 1 кг гранатов, выражается как (2x + y).

Если цена яблок уменьшается на 20%, она составит 0,8x маната, а если цена гранатов уменьшается на 30%, она составит 0,7y маната. Тогда сумма оплаты за 2 кг яблок и 1 кг гранатов выражается как (2·0,8x + 0,7y).

По условию составляется и решается система уравнений.

$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 1{,}6x + 0{,}7y = 6{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 8 \\ 16x + 7y = 61 \end{cases} \rightarrow 16x + 7(-2x + 8) = 61 \rightarrow x = 2{,}5,\ y = 3.$

Целесообразно выполнить проверку ответа.

Ответ. Первоначальная цена 1 кг яблок составляет 2,5 маната.

18. Анализируется условие задачи.

Решение задачи

Количество двухкомнатных квартир обозначается через x, трёхкомнатных — через y. Общее количество квартир выражается как (x + y). Так как общее число комнат в двухкомнатных и трёхкомнатных квартирах одинаково, записывается 2x = 3y.

По условию составляется и решается система уравнений:.

$\begin{cases} x + y = 100 \\ x = 1{,}5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2{,}5y = 100 \\ x = 1{,}5y \end{cases} \Rightarrow x = 60,\ y = 40.$

Целесообразно выполнить проверку ответа.

Ответ. 60 двухкомнатных квартир, 40 трёхкомнатных.

Математический калейдоскоп

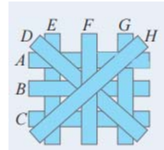
1. По данным уравнениям находится значение выражения $x + y + z$.

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = -6 \\ x + z = 10 \end{cases}$ Уравнения складываются почленно: $2x + 2y + 2z = 7 \rightarrow x + y + z = 3{,}5$.

b) $\begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ x + y - 2z = -4 \\ 2x + 6y + 4z = 11 \end{cases}$ Уравнения складываются почленно: $6x + 6y + 6z = 7 \rightarrow x + y + z = 1\frac{1}{6}$.

c) $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2z + y = 5 \\ x + z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = -2 \\ 2z + y = 5 \\ x + z = 9 \end{cases}$ Уравнения складываются почленно: $3x + 3y + 3z = 12 \Leftrightarrow x + y + z = 4$.

2. На рисунке прямоугольники, наложенные друг на друга, определяются последовательно, начиная с самого нижнего до самого верхнего: C, E, B, G, A, D, F, H. Ученики обосновывают свои ответы по рисунку.



3. Машина движется в прямоугольной системе координат из точки (1; 3) в точку (17; 43) вдоль прямой $y = kx + b$: $k = \frac{43-3}{3-1} = \frac{5}{2}$

Из уравнения прямой $y = kx + b$ при $x = 1$, $y = 3$, $k = \frac{5}{2}$ находится b.

$y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{5x+1}{2}$

Чтобы значение этой дроби было натуральным числом, выражение в числителе должно делиться на 2.

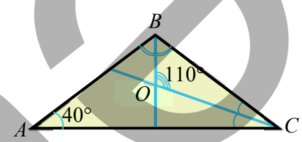
(5x + 1) — чётное число → 5x — нечётное число → x должно быть нечётным.

Тогда x = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17} , y = {3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43}.

Следовательно, при движении вдоль этой прямой машина проходит через точки с натуральными координатами: (1; 3), (3; 8), (5; 13), (7; 18), (9; 23), (11; 28), (13; 33), (15; 38), (17; 43).

Ответ. 9 точек.

4. Ученики по данным рисунка определяют угол между биссектрисами углов B и C треугольника ABC. По условию ∠B + ∠C = 180° − 40° = 140°.
Так как биссектрисы делят углы пополам, в треугольнике BOC
∠OBC + ∠OCB = 70°. Тогда ∠BOC = 110°.



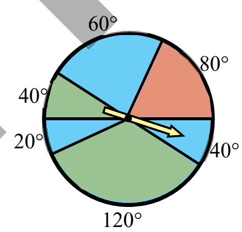
5. Ученики могут определить площадь сектора круга. Перед решением задачи анализируются данные на рисунке и отвечаются вопросы.

• Центральный угол сектора, на который указывает стрелка, равен 40°.

Тогда $S = \frac{40°}{360°} \cdot$ ⍰ $\cdot 15^2 = 25$⍰ (см^2)

• Сектор красного цвета составляет $\frac{80°}{360°} = \frac{2}{9}$ части круга.

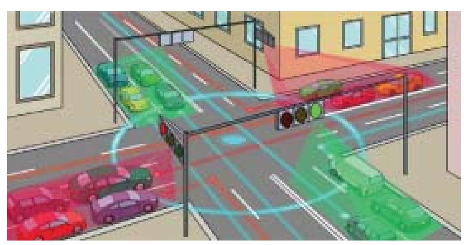
• Находится градусная мера большого зелёного сектора круга:
360° – (20° + 40° + 60° + 80° + 40°) = 120°.



Вероятность того, что при одном вращении стрелка попадёт на зелёный сектор, равна $\frac{40° + 120°}{360} = \frac{4}{9}$.

STEAM Умные светофоры

Рост числа автомобилей вызывает в крупных городах пробки, что становится проблемой и требует поиска путей её решения. Для предотвращения пробок используются «умные светофоры». В таких светофорах продолжительность горения красного и зелёного сигналов регулируется в зависимости от загруженности дорог. Ученики могут исследовать такие светофоры, чтобы лучше понять принцип их работы.



1. В часы пик зелёный сигнал «умного светофора» горит на 30 секунд дольше красного. Известно, что 1 час = 60 минут = 3600 секунд. Жёлтый сигнал за 1 час горит всего 2 минуты = 120 секунд. В часы пик известно, что зелёный и красный сигналы загораются по 24 раза. Продолжительность одного включения красного сигнала обозначим через x. Тогда по условию продолжительность зелёного сигнала равна (x + 30) секунд. Таким образом, за 1 час: красный сигнал горит 24x секунд, зелёный 24(x + 30) секунд, а жёлтый 120 секунд. По условию составляется и решается уравнение.

$24x + 24(x + 30) + 120 = 3600 \rightarrow x = 57{,}5$ (с).

Вычисляется, сколько секунд составляет продолжительность одного включения зелёного сигнала. 57,5 + 30 = 87,5.

2. 2026 год в Азербайджане объявлен «Годом градостроительства и архитектуры». В крупных городах одной из главных проблем является возникновение пробок из-за роста транспорта. Ученикам поручается подготовить презентацию о современных технологиях, используемых для предотвращения пробок в крупных городах.

3. Ученикам предлагается изучить историю создания ИСУТ (Интеллектуальной системы управления транспортом) в городе Баку, исследовать причины возникновения пробок и подготовить предложения по их устранению. Ученики могут собрать информацию о строительстве новых дорог, выделении автобусных полос, создании велосипедных дорожек.

В классах с техническими возможностями можно использовать видео материалы.

https://www.youtube.com/watch?v=oK_kN2T18d4&t=17s

9-й РАЗДЕЛ

Вращение и симметрия. Задачи на построение

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	82	
Тема 9.1	Вращение в координатной плоскости	3	83	57
Тема 9.2	Симметрия относительно точки	2	87	60
Тема 9.3	Задачи на построение	3	90	62
	Обобщающий урок. STEAM. “Ковры Азербайджана"	2	94	64
	МСО-4	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**12**		

Краткий обзор раздела

В разделе ученики знакомятся с правилами построения фигур, полученных в результате поворота фигуры вокруг заданной точки, а также фигур, симметричных данной фигуре относительно заданной точки; с определением координат точки, полученной при повороте вокруг начала координат на 90°, 180°, 270°. Ученики учатся с помощью циркуля и линейки без делений строить биссектрису угла и серединный перпендикуляр к отрезку, определять фигуры с центральной симметрией, находить координаты точек, симметричных относительно начала координат, выполнять построение, решать задачи на построение.

На что стоит обратить внимание?

Ученики с 3-го класса знакомы с понятиями симметрии и перемещения, в 4-м классе по теме «Геометрические орнаменты» они научились создавать орнаменты, составляя различные узоры с использованием перемещения, зеркального отражения и поворота. Умения, приобретённые на уровне начального образования, начиная с 5-го класса, ещё более углубляются. Важно напомнить знания о видах движения, полученные в предыдущих классах. Такой подход облегчает ученикам переход к теме и помогает связать новые знания с ранее изученными понятиями.

Иногда ученики испытывают трудности в различении поворота по направлению движения часовой стрелки и поворота против направления движения часовой стрелки. Таким ученикам рекомендуется объяснить различие между этими двумя понятиями, показать примеры на аналоговых часах.

Для построения фигуры, полученной в результате поворота, важно, чтобы все её вершины повернулись вокруг центра поворота на один и тот же угол и в одном и том же направлении. На это правило следует обращать внимание и при построении фигуры на координатной плоскости, полученной при повороте на заданный угол относительно начала координат, а также при построении фигур, симметричных относительно начала координат.

Иногда ученики испытывают трудности при определении фигур, симметричных относительно начала координат, а также фигур с центральной симметрией. Таким ученикам целесообразно напомнить, что одна из фигур, симметричных относительно точки, получается из другой поворотом на 180° вокруг центра симметрии.

При переходе к задачам на построение целесообразно объяснить ученикам разницу между построением и черчением фигуры. При черчении фигур можно использовать линейку с делениями. Однако важно сообщить, что в задачах на построение измерение с помощью линейки с делениями для определения равных отрезков и расстояний не считается правильным.

Развитие математического языка

Правильное определение понятий «поворот», «угол поворота», «центр поворота», «полный поворот», «поворот по направлению движения часовой стрелки», «поворот против направления движения часовой стрелки», «поворот вокруг начала координат», «симметрия вращения», «центр симметрии», «фигура с центральной симметрией», «построение», «линейка без делений» и «серединный перпендикуляр» позволяет оценить степень усвоения этих понятий.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Поворот, угол поворота, центр поворота, полный поворот, симметрия вращения, центр симметрии, фигура с центральной симметрией*, построение, серединный перпендикуляр.*

Необходимые предварительные знания и умения:

• Прямоугольная система координат
• Симметрия, перемещение, поворот
• Построение треугольника по двум сторонам и у
между ними, по стороне и прилежащим к ней углам

Междисциплинарная интеграция

Понятия поворота и симметрии используются в математике при построении геометрических фигур, в физике — при моделировании сил и движения. В информатике поворот и симметрия составляют основу компьютерной графики, анимации и дизайна игр. В искусстве и архитектуре эти понятия играют важную роль при создании орнаментов, узоров и конструктивных форм.

ТЕМА 9.1. Вращение в координатной плоскости

ПОДСТАНДАРТЫ	7-3.5.1. Применяет понятие поворота на координатной плоскости.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Находит фигуру, полученную в результате поворота плоской фигуры вокруг заданной точки на определённый угол. • Чертит фигуру, полученную в результате поворота.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.geogebra.org/m/dxrrxhmz* *https://www.geogebra.org/m/vvc8vue3* *https://www.geogebra.org/m/stxgycpr* *https://www.geogebra.org/m/gfsyjhts* *https://www.geogebra.org/m/k8xgaxek*

Обсуждение исходной задачи

Рассматривается план парка. Озвучиваются координаты заданных объектов. Ученики знакомы с правилами нахождения координат фигур, полученных в результате перемещения по горизонтальной или вертикальной прямой, а также симметричных относительно координатных осей. Правила повторяются, отмечается, что точки, в которых расположены тир и аттракцион, симметричны относительно оси абсцисс, а качели установлены на 2 единицы левее и на 2 единицы выше тира. Ученики пытаются ответить на другие вопросы. Данные ответы обсуждаются с классом .

Побуждение

Ученики умеют находить, какую часть длины окружности составляет длина дуги. Учитель демонстрирует аналоговые часы и задаёт ученикам наводящие вопросы:

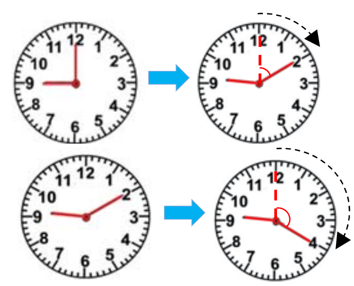
– Что означает 1 полный оборот часовой стрелки? За сколько минут минутная стрелка совершает 1 полный оборот? Из скольких градусов состоит полный оборот? Как определить новое положение при повороте?

Отвечая на вопросы, ученики отмечают, что минутная стрелка за 60 минут поворачивается на 360°, то есть за 1 минуту поворачивается на 6° и таким образом принимает новое положение.

Исследование-обсуждение

На основе того, что минутная стрелка за 1 минуту поворачивается на 6°, отвечают на вопросы:

• Если минутная стрелка повернётся на 60°, можно различными способами определить, который час показывает часы.



Отмечается, что 60° составляет $\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$ полного оборота.

Находится $\frac{1}{6}$ часть от 60 минут. $60 \cdot \frac{1}{6} = 10$ (мин)

Следовательно, если часы показывают 09:00 и минутная стрелка повернётся на 60°, часы покажут 09:10.

• Отмечается, что чтобы часы, показывающие 09:00, показали 09:20, должно пройти 20 минут. Если за 1 минуту минутная стрелка поворачивается на 6°, то вычисляется, на сколько градусов она повернётся за 20 минут:

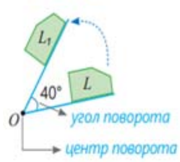
$20 \cdot 6° = 120°$.

Следовательно, если минутная стрелка повернётся на 120°, часы покажут 09:20.

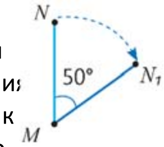
В классах с техническими возможностями можно выполнить интерактивное задание. *https://www.geogebra.org/m/guexu62V*

Изучение **Поворот**

Отмечается, что при повороте плоской фигуры вокруг некоторой точки О на заданный угол положение фигуры изменяется, но её размеры не изменяются, то есть получается фигура, конгруэнтная данной.



Ученикам сообщается о понятиях поворота по направлению движения часовой стрелки и против направления движения часовой стрелки, о том, как они обозначаются, а также о том, что центр поворота не изменяется, и проводится обсуждение на примерах.

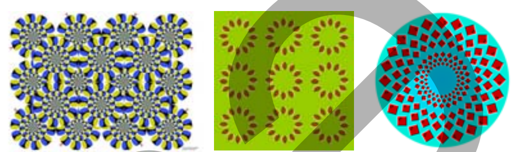


К сведению учителя! Под поворотом любой фигуры вокруг центра поворота на определённый угол понимается поворот всех её точек на один и тот же угол. Поэтому для понимания понятия поворота ученикам важно сначала понять поворот точки. Однако поскольку поворот фигур для учеников более нагляден, целесообразно сначала показывать примеры на фигурах. Также следует подчеркнуть, что фигуры, полученные в результате поворота, являются конгруэнтными.

В классах с техническими возможностями можно выполнить интерактивное задание.

https://www.geogebra.org/m/ugjhcmer

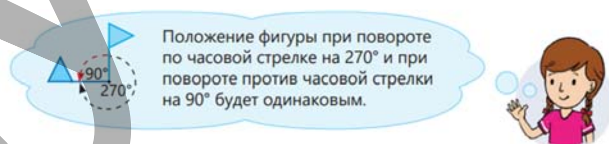
Одним из основных моментов при изучении темы является усвоение новых математических понятий. Развитие математического языка позволяет ученикам правильно формулировать эти понятия и корректно применять их в практических заданиях. Особенно важно усвоение понятий поворота, центра поворота, направления поворота (по направлению движения часовой стрелки или против него) и угла поворота.



Ученикам можно показывать различные иллюстрации, а также давать информацию об оптических иллюзиях. Оптические иллюзии — это визуальные явления, возникающие в результате несоответствия между изображением, воспринимаемым глазом, и его обработкой мозгом. В таких изображениях объекты могут казаться движущимися, увеличивающимися, уменьшающимися или вращающимися, хотя на самом деле изображение статично. Оптические иллюзии возникают под влиянием особенностей зрительной системы, света и тени, цветового контраста и геометрической структуры и широко используются как в научных, так и в учебных целях. Описание фигуры, полученной в результате поворота, важно для правильного её построения учениками.

Задания

2. Обсуждается мнение Айнур. Отмечая, что полный оборот равен 360°, ученики могут показать, как получается 90°: 360° − 270° = 90°.
Поэтому в обоих случаях при повороте относительно исходного положения получается одинаковый результат. То есть, хотя направление поворота и величина угла различны, если сумма углов составляет 360°, в итоге положения фигур, полученные в результате поворота, совпадают.



Отвечают на вопросы.

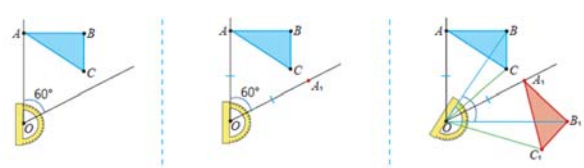
а) При повороте на 180° по направлению движения часовой стрелки и при повороте на 180° против направления движения часовой стрелки получаются одинаковые положения фигуры, поскольку 180° + 180° = 360°.

б) При повороте на 120° по направлению движения часовой стрелки и при повороте на 120° против направления движения часовой стрелки положения фигуры не совпадают, поскольку 120° + 120° = 240° ≠ 360°.

в) Определяется, при каком повороте по направлению движения часовой стрелки получится то же положение, что и при повороте на 200° против направления движения часовой стрелки. 360° − 200° = 160°.

Изучение Построение фигуры, полученной в результате поворота

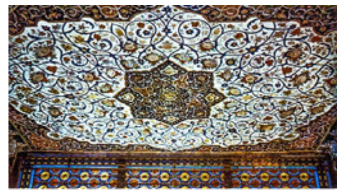
Ученикам объясняется, как по заданной последовательности строится фигура, полученная в результате поворота. В процессе объяснения, фиксируя шаги, по мере построения фигуры ученики более чётко видят последовательность выполнения операции поворота. Это облегчает понимание того, как получается новая фигура.



В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать видеоматериал. *https://youtu.be/6G609L17mbM*

К сведению учителя! Можно спросить у учеников, где они встречали фигуры, полученные в результате поворота, предложить привести примеры. В классах с техническими возможностями можно, используя симуляции, создавать различные орнаменты на основе фигур, полученных в результате поворота. *https://www.geogebra.org/m/sbfrxndk*

Мавзолей Момине-хатун



Дворец шекинских ханов

Целесообразно сообщить ученикам, что узоры, основанные на фигурах, полученных в результате поворота, встречаются во многих исторических памятниках. В частности, в восточной и исламской архитектуре орнаменты строятся путём повторения геометрических фигур, повернутых вокруг центра на определённый угол. В Азербайджане такие орнаменты с симметрией вращения отчётливо наблюдаются в украшениях таких архитектурных памятников, как Дворец Ширваншахов, Дворец шекинских ханов, Мавзолей Момине-хатун.

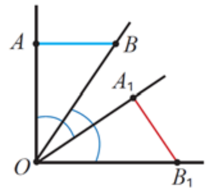
Ученикам можно также сообщить о современных архитектурных объектах, в которых используется поворот. Например, дом Sharifi-ha House в Тегеране — комнаты на фасаде могут поворачиваться на 90°, что придаёт зданию изменяющийся эстетический облик.
https://www.youtube.com/shorts/M7NfUorIng8

Практическое задание. На листе чертится произвольный треугольник ABC и вне треугольника отмечается точка O. Берётся калька (прозрачная бумага) такого размера, чтобы покрыть фигуру и точку O, и помещается поверх основного листа. Ученики по указанной последовательности чертят фигуры, полученные в результате поворота.

1) Наложив кальку на данную фигуру, начертите фигуру и отметьте точку O так, чтобы она совпадала.
2) Закрепив лист и кальку в точке O, поверните кальку вокруг точки O на заданный угол (например, 60°).
3) Новую фигуру, полученную в результате поворота, обозначьте как $A_1B_1C_1$.

Ученики демонстрируют полученные результаты, проводится обсуждение с классом.
В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать ученикам видеоматериал.
https://www.youtube.com/shorts/o0eUccf9saA

3. На рисунке изображена фигура синего цвета и одна из вершин фигуры, полученной в результате поворота этой фигуры вокруг точки M. Фигуры чертятся в тетради, и фигуры, полученные в результате поворота, дополняются в тетради.
В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать ученикам аналогичную деятельность.
https://www.desmos.com/calculator/kohoey3j60



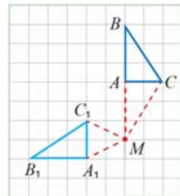
4. O При повороте вокруг точки O отрезок AB перешёл в отрезок A_1B_1. Отвечают на вопросы и обосновывают, что $AB \cong A_1B_1$.

- ри повороте каждая точка фигуры движется по дуге окружности вокруг центра поворота. При этом расстояние от этой точки до центра поворота остаётся неизменным. Следовательно, поскольку отрезок AB повернут вокруг точки O и расстояние не изменяется, то $OA \cong OA_1$ *и* $OB \cong OB_1$
- Так как отрезок AB повернут вокруг точки O, то $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$.
- $\angle AOA_1 = \angle AOB + \angle BOA_1$ и $\angle BOB_1 = \angle A_1OB_1 + \angle BOA_1$.

Поскольку угол BOA_1 является частью углов AOA_1 и BOB_1, то получается, что $\angle AOB = \angle A_1OB_1$.

- Треугольники AOB и A_1OB_1 конгруэнтны по признаку СУС. $\Delta AOB \cong \Delta A_1OB_1$
- Поскольку $\Delta AOB \cong \Delta A_1OB_1$, то $AB \cong A_1B_1$

Исправь ошибку!



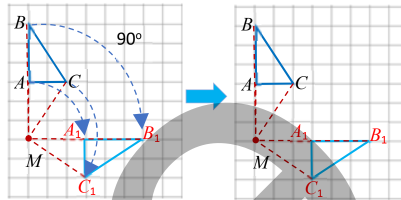
Фигура, построенная по данному алгоритму, может и не быть фигурой, полученной в результате поворота. Для получения точного результата необходимо исправить ошибку во втором шаге и отметить, что берётся не произвольная точка, а точка, удовлетворяющая условию $MA = MA_1$.

Фигура, полученная при повороте треугольника ABC вокруг точки M на 90° по направлению движения часовой стрелки, строится следующим образом:

1) Проводится луч MA и строится угол 90° по направлению движения часовой стрелки с одной стороной MA.

2) На второй стороне угла откладывается отрезок $MA_1 = MA$ и отмечается точка A_1.

3) Теми же шагами отмечаются точки B_1 и C_1. Точки A_1, B_1 и C_1 соединяются.



Подчёркивается важность правильного выбора направления при повороте. На рисунке несоответствие некоторых измерений также показывает, что фигура построена не в соответствии с условием. На данном изображении $\angle AMA_1 \neq \angle CMC_1$, $MA \neq MA_1$.

Таким образом, ошибки определяются и чертится треугольник, полученный в результате поворота треугольника ABC.

К сведению учителя! Предотвратить типичные ошибки можно, обратив внимание учеников на два важных момента, связанных с поворотом.

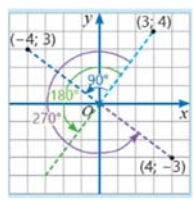
✓ В результате поворота расстояние от всех точек до центра поворота не изменяется.

✓ Фигура, полученная в результате поворота, конгруэнтна данной фигуре.

Таким образом, ученики понимают, что поворот не изменяет форму и размеры фигуры, а изменяет только её положение на плоскости. Это помогает делать правильные выводы в задачах на построение и доказательство, связанных с поворотом.

Изучение **Поворот на координатной плоскости**

На рисунках изображён поворот треугольника с вершинами A (1; 1), B (1; 4), C (3; 1) вокруг начала координат против направления движения часовой стрелки на 90°, 180°, 270°. С классом обсуждается, как по рисунку определяются координаты вершин треугольника, полученного при каждом повороте.



- Объясняется, как изменяются координаты точки при повороте вокруг начала координат против направления движения часовой стрелки на 90°, 180° и 270°. Целесообразно сопровождать такие объяснения примерами.

Поворот на 90°	Поворот на 180°	Поворот на 270°
(3; 4) ➡ (−4; 3)	(3; 4) ➡ (−3; −4)	(3; 4) ➡ (4; −3)

Внимание!

Поворот точки вокруг начала координат по направлению движения часовой стрелки можно заменить поворотом в противоположном направлении для нахождения координат соответствующей точки.

К сведению учителя! При объяснении этой информации рекомендуется приводить примеры и организовывать обсуждение с классом. Во 2-м задании темы приведены примеры, показывающие связь между поворотом против направления движения часовой стрелки и по направлению движения часовой стрелки. Можно напомнить, что если точка поворачивается вокруг начала координат на 90° по направлению движения часовой стрелки, то это можно заменить поворотом на 360° – 90° = 270° против направления движения часовой стрелки. В этом случае полученные фигуры совпадают. Такой подход упрощает нахождение координат и позволяет использовать правило нахождения координат при повороте против направления движения часовой стрелки для поворота по направлению движения часовой стрелки.

6. На рисунке изображена фигура синего цвета и одна из вершин фигуры, полученной в результате её поворота вокруг начала координат. Записываются координаты вершин данной фигуры и фигуры, полученной в результате поворота, фигура дополняется.

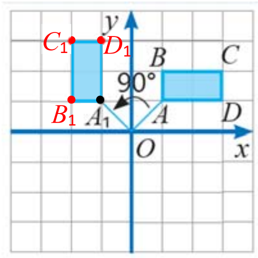
а) Поворот против часовой стрелки на 90°

A (1; 1) → A_1 (–1; 1)

B (1; 2) → B_1 (–2; 1)

C (3; 2) → C_1 (–2; 3)

D (3; 1) → D_1 (–1; 3)

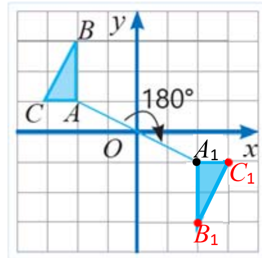


б) Поворот по часовой стрелке на 180°

A (–2; 1) → A_1 (2; –1)

B (–2; 3) → B_1 (2; –3)

C (–3; 1) → C_1 (3; –1)



Запомни!

Отмечается, что некоторые фигуры при повороте вокруг определённой точки до полного оборота несколько раз совпадают сами с собой, такие фигуры называются фигурами, обладающими симметрией вращения. В учебнике указано, что равносторонний треугольник при повороте вокруг центра тяжести на 120°, 240°, 360° совпадает сам с собой. Рекомендуется приводить дополнительные примеры.

Квадрат при повороте вокруг точки пересечения диагоналей на 90°, 180°, 270° совпадает сам с собой.

Параллелограмм, прямоугольник, ромб при повороте вокруг точки пересечения диагоналей на 180° совпадают сами с собой.

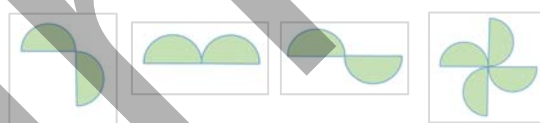
Ученики могут показать, почему эти фигуры обладают симметрией вращения, изображая их.

В классах с техническими возможностями можно выполнять аналогичные интерактивные задания.

https://www.geogebra.org/m/z9tM2QKu *https://www.geogebra.org/m/gWxUsE46*

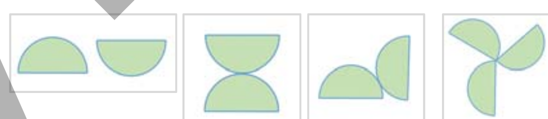
Дифференцированное обучение

Поддержка. На листе чертится простая фигура (например, полукруг, дуга или небольшая кривая линия). Ученикам предлагается, поворачивая эту фигуру, как показано на рисунке, начертить полученные изображения. Таким способом они проверяют, какое изображение получено.



Для изображений, полученных поворотом, объясняется направление поворота и примерно на какой угол выполнен поворот; для изображений, не являющихся результатом поворота, объясняется, какое преобразование выполнено.

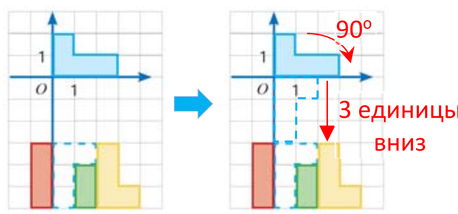
Углубление. Ученикам предлагается несколько изображений. Сначала требуется определить фигуры, полученные в результате поворота одной фигуры, затем проверить ответ, выполнив черчение. Для изображений, полученных поворотом, объясняется направление поворота и примерно на какой угол выполнен поворот; для изображений, не являющихся результатом поворота, объясняется, какое преобразование выполнено.



Решение задач

9. Гюльсом в игре «Тетрис» хотела привести фигуру синего цвета в указанное положение.

- Для этого Гюльсом должна повернуть фигуру вокруг начала координат на 90° по направлению движения часовой стрелки, затем выполнить перемещение на 3 единицы вниз.
- D Запишите координаты вершин фигуры, полученной в результате поворота.



(0; 0) → (0; 0) (1; 2) → (2; –1) (3; 1) → (1; –3)

(0; 2) → (2; 0) (1; 1) → (1; –1) (3; 0) → (0; –3)

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Чертит фигуру, полученную в результате поворота плоской фигуры вокруг заданной точки на определённый угол.	Рабочие листы, учебник, РТ
Чертит фигуру, полученную в результате поворота.	Рабочие листы, учебник, РТ

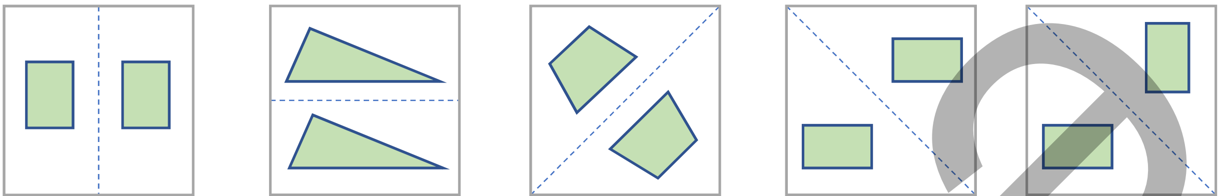
ТЕМА 9.2. Симметрия относительно точки

ПОДСТАНДАРТЫ	7-3.5.2. Объясняет понятие симметрии относительно точки, чертит фигуру, симметричную данной относительно точки.

ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет понятие симметрии относительно точки. • Чертит фигуру, симметричную данной относительно точки. • Определяет фигуры с центральной симметрией.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://youtu.be/QWX39H9kKvE* Игра: *https://www.geogebra.org/m/teeqnrnr* *https://www.geogebra.org/m/JNKeQvXn*

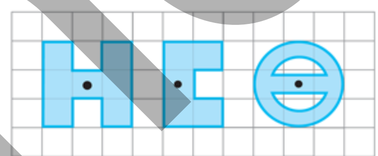
Побуждение

Ученикам демонстрируются рабочие листы с изображениями различных фигур. Ученикам предлагается определить, являются ли фигуры на рабочем листе симметричными относительно заданной прямой. Выслушиваются мнения учеников и организуется обсуждение. Затем ответ проверяется путём сгибания по соответствующей линии.



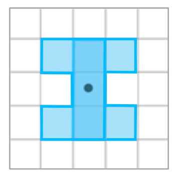
Исследование-обсуждение

На клетчатой бумаге из каждой фигуры, показанной на рисунке, выполняются две копии, одна из которых вырезается. Острый конец циркуля устанавливается в отмеченную точку на другой копии, и каждая вырезанная фигура поворачивается вокруг этой точки на 180°. Полученные результаты обсуждаются.



1 и 3 фигуры совпадают сами с собой в результате поворота на 180° вокруг отмеченной точки.

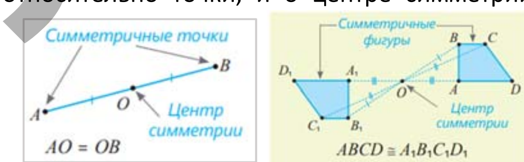
А 2 фигура не совпадает с самой собой в результате поворота на 180° вокруг отмеченной точки.



Для выполнения задания можно использовать прозрачную кальку. Ученики, используя кальку, могут, перерисовывая фигуры, полученные в результате поворота, увидеть, какие фигуры совпадают сами с собой.

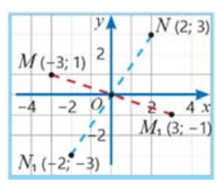
Изучение Симметрия относительно точки

Ученикам даётся информация о точках, симметричных относительно точки, и о центре симметрии. Приводятся примеры. Отмечается, в каком случае две фигуры являются симметричными относительно точки, подчёркивается, что фигуры, симметричные относительно точки, конгруэнтны, и что одна из таких фигур получается из другой поворотом на 180° вокруг центра симметрии; организуется обсуждение с показом примеров.



Ученикам объясняется связь между координатами точек, симметричных относительно начала координат на координатной плоскости, приводятся примеры.

$M(-3; 1) \Rightarrow M_1(3; -1)$ $N(2; 3) \Rightarrow N_1(-2; -3)$



В классах с техническими возможностями можно выполнить интерактивное задание. *https://www.geogebra.org/m/JNKeQvXn*

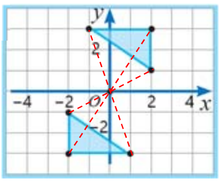
Подумай!

Отмечается, что координаты точки, симметричной относительно начала координат точке, расположенной в 1-й четверти, равны противоположным значениям координат этой точки. Поскольку координаты точки в 1-й четверти являются положительными числами, их противоположные значения — отрицательные числа. Отмечается, что точка, обе координаты которой отрицательны, расположена в 3-й четверти.

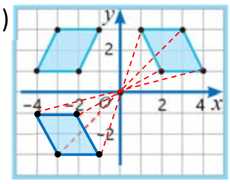
К сведению учителя! Ученики знакомы с понятиями симметрии, перемещения и поворота с уровня начального образования. В 8-м классе они более глубоко изучают сущность симметрии относительно точки, осознают, что новая фигура получается путём изменения положения каждой точки фигуры по определённому правилу. В этом процессе основным моментом является то, что фигура, полученная в результате симметрии, конгруэнтна исходной фигуре. Именно это свойство обеспечивает ученикам правильное построение симметричной фигуры, её распознавание и обоснование по отношению к данной фигуре.

Задания

3. На рисунке для определения того, являются ли фигуры симметричными относительно начала координат, сравниваются координаты вершин.

а) 

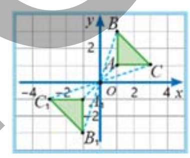
(–1; 2) → (1; –2)
(2; 1) → (–2; –1)
(2; 3) → (–2; –3)
Треугольники симметричны относительно начала координат.

б) 

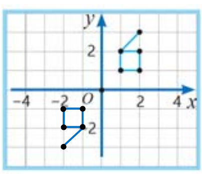
(1; 3) → (–1; 3) (2; 1) → (–2; 1)
(1; 3) → (–1; 3) (4; 1) → (–4; 1)
Параллелограммы не симметричны относительно начала координат. Сравнение можно провести, начертив фигуру, симметричную относительно начала координат.

Запомни!

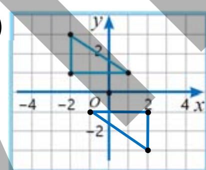
Подчёркивается, что для построения фигуры, симметричной данному многоугольнику относительно начала координат, сначала отмечаются точки, симметричные вершинам данной фигуры относительно начала координат, затем эти точки последовательно соединяются. Ученикам объясняется пример построения соответствующей фигуры.



4. Чертится фигура, симметричная данной относительно начала координат. Записываются координаты отмеченных точек и симметричных им точек.

а) 

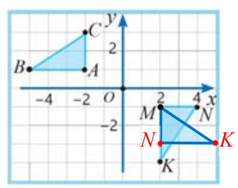
(1; 1) → (–1; –1)
(1; 2) → (–1; –2)
(2; 1) → (–2; –1)
(2; 2) → (–2; –2)
(2; 3) → (–2; –3)

в) 

(1; 1) → (–1; –1)
(–2; 1) → (2; –1)
(–2; 3) → (2; –3)

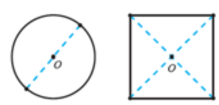
Исправь ошибку!

Точки A (–2; 1) и M (2; –1) симметричны относительно начала координат. Следовательно, фигуры ABC и MNK являются фигурами, симметричными относительно начала координат. Однако того, что только одна вершина симметрична относительно начала координат, недостаточно для того, чтобы фигура была симметричной относительно начала координат; соответствующие вершины C и N, B и K также должны быть симметричны относительно начала координат. Следовательно, фигуры ABC и MNK не являются симметричными относительно начала координат.



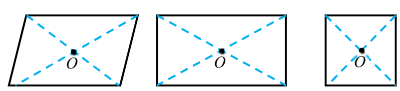
Изучение Центрально-симметричная фигура

Отмечается, что если для всех точек фигуры симметричные относительно некоторой точки точки также принадлежат этой фигуре, то такая фигура называется симметричной относительно точки. Подчёркивается, что фигуры, симметричные относительно точки, также называются центрально-симметричными, приводятся примеры.



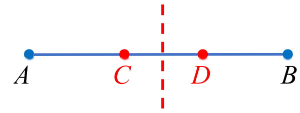
В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать видеоматериал. *https://www.geogebra.org/m/n9TcdSqt*

К сведению учителя! При приведении примеров фигур с центральной симметрией целесообразно подчёркивать центр симметрии. Например, отмечается, что окружность симметрична относительно своего центра, а параллелограмм — относительно точки пересечения диагоналей. Поскольку прямоугольник, ромб и квадрат являются частными случаями параллелограмма, они также обладают центральной симметрией относительно точки пересечения диагоналей.

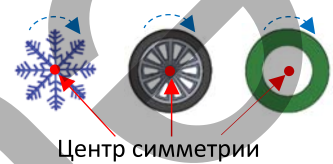


Для более точного формирования понятия у учеников следует обратить внимание и на фигуры, не имеющие центра симметрии. В качестве простейшего примера можно привести треугольник, поскольку относительно ни одной его точки все точки фигуры не располагаются попарно взаимно противоположно. Такое сравнение помогает более ясно понять сущность понятия центральной симметрии.

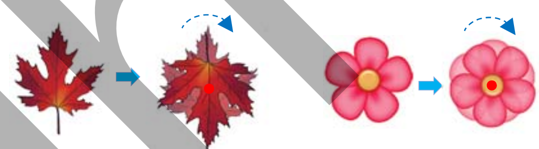
Подумай!

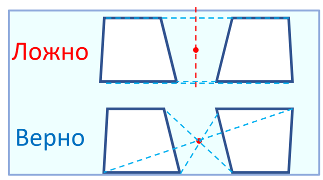


Для обоснования того, что отрезок является фигурой с центральной симметрией, проводится отрезок AB и на нём берётся произвольная точка C. Необходимо доказать, что точка D, расположенная на противоположной стороне относительно середины отрезка на таком же расстоянии от неё, также принадлежит отрезку AB. По определению середины отрезка для любой точки C на отрезке существует вторая точка D, находящаяся на таком же расстоянии от середины. Поскольку точки C и D лежат на одном и том же отрезке, эти точки симметричны. Следовательно, для любой точки, взятой на отрезке, симметричная ей точка также лежит на этом отрезке. Отмечается, что середина отрезка является центром симметрии данного отрезка, а сам отрезок — фигурой с центральной симметрией.



5. Требуется определить, какие из изображённых на рисунке фигур имеют центр симметрии. Иногда ученики испытывают трудности при определении фигур с центральной симметрией. Сначала определяются фигуры, имеющие центр симметрии. Путём поворота этих фигур вокруг точки на 180° показывается, что они совпадают сами с собой. Таким способом удобнее определять фигуры, имеющие центр симметрии. В качестве центра симметрии обычно выбирается точка, находящаяся на равном расстоянии от границ фигуры. Если в фигуре найдётся хотя бы одна точка, симметричная которой точка не принадлежит данной фигуре, то эта фигура не является фигурой с центральной симметрией. По этому правилу можно показать, что модель листа и цветка не обладает центральной симметрией. Путём поворота вокруг точки на 180° можно также определить фигуры, не являющиеся центрально-симметричными. Как видно, в результате поворота фигуры не совпадают. Следовательно, эти фигуры не имеют центра симметрии.



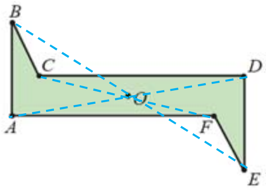


Ложные представления, возникающие у учеников. екоторые ученики путают симметрию относительно точки с осевой симметрией. Таким ученикам можно предложить соединить соответствующие вершины фигур. Таким образом ученики увидят, что точки пересечения не совпадают. Это показывает, что фигуры не являются симметричными относительно точки.

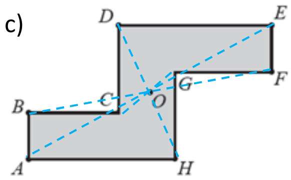
В 6-м классе ученики познакомились с понятием симметрии относительно прямой. Они изучили правило нахождения координат фигуры, симметричной данной относительно оси абсцисс или ординат в координатной системе. Сравнительное представление симметрии относительно прямой и симметрии относительно точки, а также правил построения соответствующих симметричных фигур способствует правильному усвоению этих понятий.

Вид симметрии	Построение симметричной фигуры	Основные свойства
Осевая симметрия	Чтобы построить фигуру, симметричную данному многоугольнику относительно оси абсцисс или оси ординат, отмечаются точки, симметричные его вершинам, и последовательно соединяются.	При сгибании вдоль оси симметрии эти две фигуры совпадают.
Симметрия относительно точки	Чтобы построить фигуру, симметричную данному многоугольнику относительно начала координат, сначала отмечаются точки, симметричные вершинам данной фигуры, затем они последовательно соединяются.	Одна из фигур, симметричных относительно точки, получается из другой поворотом на 180° вокруг центра симметрии.

6. На рисунке изображена фигура с центральной симметрией. Точка O является центром симметрии фигуры. Чтобы показать вершины фигуры, симметричные относительно этой точки, через точку O проводятся прямые линии, и расстояние каждой вершины от точки O не изменяется. При этом точка O является точкой пересечения прямых, соединяющих соответствующие симметричные вершины.

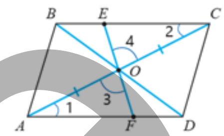
b) 

A и D
B и E
C и F

c) 

A и E
B и F
C и G
D и H

7. На рисунке точка O является точкой пересечения диагоналей параллелограмма. Отмечается, что прямая, проходящая через эту точку, пересекает стороны параллелограмма в точках E и F. Отвечая на вопросы, обосновывается, что параллелограмм симметричен относительно точки O.



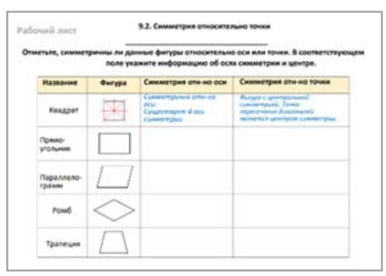
• ∠1 и ∠2 — накрест лежащие внутренние углы при параллельных прямых, поэтому ∠1 = ∠2.
∠3 и ∠4 — вертикальные углы, поэтому ∠3 = ∠4.
Поскольку диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, $AO = OC$.
• По признаку УСУ $\Delta AOF \cong \Delta COE$
• Поскольку $\Delta AOF \cong \Delta COE$, то $EO = OF$. Следовательно, точка O является серединой отрезка EF.
• При повороте параллелограмма вокруг точки O на 180° вершины, находящиеся на одинаковом расстоянии от этой точки, совпадают друг с другом. Так как AO = OC и BO = OD, точка A переходит в точку C, а точка B — в точку D. При вращении сохраняются длины сторон и величины углов, параллельные стороны остаются параллельными. Поэтому после поворота на 180° все стороны и углы параллелограмма совпадают с первоначальным положением, то есть с самим параллелограммом.
В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать аналогичную интерактивную деятельность. *https://www.geogebra.org/m/r6e5vSD3*

К сведению учителя! Сообщив ученикам два важных момента, связанных с симметрией относительно точки, можно предотвратить типичные ошибки.

- ✓ Расстояния от вершин многоугольника и соответствующих им вершин многоугольника, симметричного относительно данной точки, до центра симметрии не изменяются, однако фигуры располагаются в противоположных направлениях.
- ✓ Симметричные фигуры являются конгруэнтными.

Подчёркивание этих свойств показывает, что изменяется только положение фигуры на плоскости. Это помогает делать правильные выводы при решении задач на симметрию.
Можно предложить ученикам провести сравнительный анализ сведений о центре симметрии и оси симметрии некоторых фигур. Такой подход помогает ученикам более ясно понять различие между указанными понятиями и правильно определить, каким видом симметрии обладает фигура. Одновременно путём сравнения ученики легче понимают, что одна и та же фигура может иметь и ось симметрии, и центр симметрии.

Практическое задание. Класс делится на группы. Каждой группе раздаётся рабочий лист. Таблица, указанная в рабочем листе, заполняется по образцу.
Рабочий лист можно скачать по ссылке:
https://drive.google.com/file/d/1R0wdJMimOTA_-jMfajVXH-dYpzYOc5NJ/view?usp=drive_link


Рабочий лист

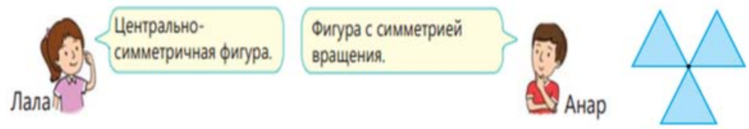
9.2. Симметрия относительно точки

Отметьте, симметричны ли данные фигуры относительно оси или точки. В соответствующем поле укажите информацию об осях симметрии и центре.

Название	Фигура	Симметрия отн-но оси	Симметрия отн-но точки
Квадрат		Симметричен отн-но оси. Существует 4 оси симметрии	Фигура с центральной симметрией. Точка пересечения диагоналей является центром симметрии
Прямо-угольник			
Параллело-грамм			
Ромб			
Трапеция			

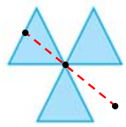
Решение задач

9. В задаче требуется обосновать, чьё мнение является правильным.

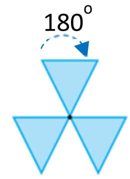


Решение задачи

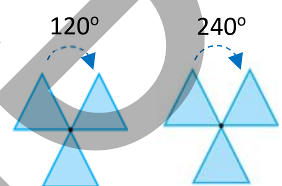
• По мнению Самира, данная фигура является центрально-симметричной. Можно выбрать такую точку на фигуре, что симметричная ей относительно центра симметрии точка не будет принадлежать фигуре, следовательно, эта фигура не является центрально-симметричной.



Это также можно показать, повернув фигуру на 180°, что она не является центрально-симметричной.



• По мнению Айнур, фигура обладает симметрией вращения. При повороте фигуры вокруг указанной точки на 120°, 240° и 360° она совпадает сама с собой. Следовательно, мнение Айнур верно.
Ответ. Мнение Айнур верно.
Обсуждение. Можно проверить, что при повороте фигуры на 180° она не совпадает сама с собой, а при вращении вокруг точки на 120°, 240° и 360° совпадает сама с собой.



Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Чертит фигуру, симметричную данной относительно точки.	Рабочие листы, учебник, РТ
Определяет фигуры с центральной симметрией.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 9.3. Задачи на построение

ПОДСТАНДАРТЫ	7-3.6.1. С помощью циркуля и линейки строит серединный перпендикуляр к отрезку и биссектрису угла.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• С помощью циркуля и линейки строит серединный перпендикуляр к отрезку. • С помощью циркуля и линейки строит биссектрису угла.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://www.mathspad.co.uk/i2/construct.php* *https://www.mathsisfun.com/geometry/constructions.html* *https://www.geogebra.org/m/wFFfQfQF* *https://www.geogebra.org/m/sbzbnyzd*

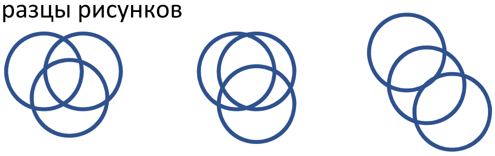
Побуждение

Учитель готовит по два экземпляра каждого рабочего листа с написанной инструкцией, выбирает 4 учеников и, раздав им листы, поручает выполнить рисунок согласно инструкции. Выполненные рисунки демонстрируются ученикам.

A

Начертите окружность радиусом 2 см. Установив иглу циркуля последовательно в двух различных точках на этой окружности, каждый раз с тем же радиусом начертите новые окружности.

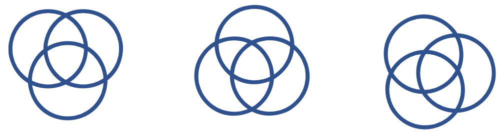
Образцы рисунков



B

Начертите окружность радиусом 2 см. Установив иглу циркуля в одной точке на окружности, тем же радиусом начертите новую окружность. Затем, установив иглу циркуля в точке пересечения окружностей, снова начертите окружность тем же радиусом.

Образцы рисунков



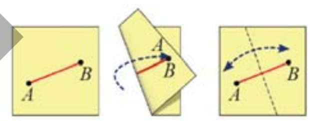
Учитель задаёт ученикам вопросы: Какие рисунки, полученные по инструкции, могут быть неконгруэнтными? Как вы это объясните? Почему рисунки, выполненные по инструкции В, всегда конгруэнтны?

Выслушиваются мнения учеников и организуется обсуждение. В конце учитель отмечает, что рисунки, полученные по инструкции А, могут отличаться друг от друга. Причина в том, что шаги сформулированы недостаточно точно. По инструкции В полученные рисунки отличаются друг от друга только вращением. Следовательно, они всегда конгруэнтны. Так как шаги заданы точно и последовательность выражена правильно. Чтобы данная инструкция приводила к построению конгруэнтной фигуры, важно точное формулирование шагов и правильное выполнение последовательности.

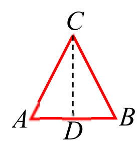
В классах с техническими возможностями можно выполнить интерактивную деятельность. *https://www.euclidea.xyz*

Исследование-обсуждение

На листе бумаги чертится отрезок AB. Лист сгибается так, чтобы точки A и B совпали. Затем лист раскрывается.



- Так как при сгибании листа точки A и B совпадают, отмечается, что относительно линии сгиба точки A и B симметричны. Следовательно, линия сгиба делит отрезок AB пополам.
- Чертится треугольник ABC, и чтобы показать, что для любой точки C на образовавшейся линии сгиба расстояния до точек A и B равны, ученикам задаются наводящие вопросы:

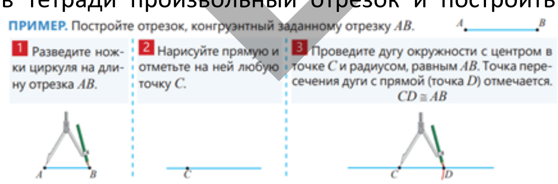


– Как можно объяснить, что в треугольнике ABC отрезок CD (медиана) лежит на линии сгиба? На каком свойстве основано то, что если CD является медианой, то он также является и биссектрисой, и высотой?

На вопросы даются ответы, и объясняется, что линия сгиба перпендикулярна отрезку AB.

Изучение Задачи на построение

Отмечается, что в задачах на построение геометрические фигуры строятся без измерений, используя только циркуль и линейку без делений. Линейка без делений предназначена для проведения прямых линий, и обращается внимание учеников на то, что её можно заменить любым предметом с ровным краем; циркуль используется для построения окружностей и отрезков заданной длины. Демонстрируется алгоритм построения отрезка, конгруэнтного данному отрезку AB. Ученикам можно предложить начертить в тетради произвольный отрезок и построить к нему конгруэнтный отрезок по данному алгоритму.



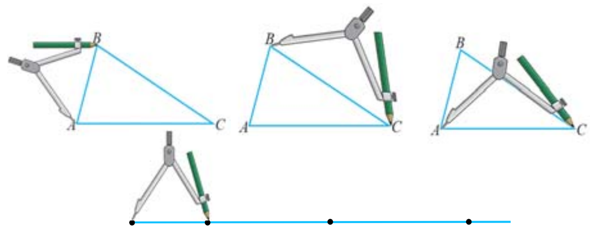
Решение задачи на построение не ограничивается только указанием способа построения, но также включает обоснованное доказательство того, что полученная в результате построения фигура является требуемой. В этом процессе объясняется, почему каждый шаг выбран правильно, и на основе свойств доказывается, что полученная фигура удовлетворяет заданным условиям.

К сведению учителя! Целесообразно чётко объяснить ученикам различие между черчением и построением фигур. Напоминается, что в 6 классе при построении треугольника по двум сторонам и углу между ними, а также по одной стороне и прилежащим к ней углам, длины сторон измерялись линейкой с делениями, а углы — транспортиром. В задачах на построение за основу берутся не конкретные измерения, а свойства фигуры, поэтому используется только линейка без делений и циркуль.

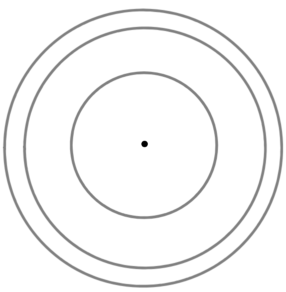
Задания

1. Проводится прямая линия, и на ней последовательно откладываются отрезки, конгруэнтные сторонам треугольника, изображённого на рисунке.

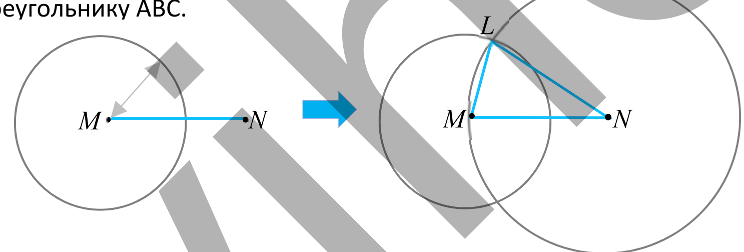
- Таким способом строится отрезок, длина которого равна периметру треугольника.



- Отмечается произвольная точка. С центрами в отмеченной точке строятся окружности требуемых радиусов.



- Строится отрезок MN, равный отрезку AC; с центром в точке M проводится окружность радиусом, равным AB, а с центром в точке N — окружность радиусом, равным BC. Одна из точек пересечения окружностей обозначается L. Эта точка соединяется с точками M и N. Таким образом, строится треугольник MLN, конгруэнтный треугольнику ABC.



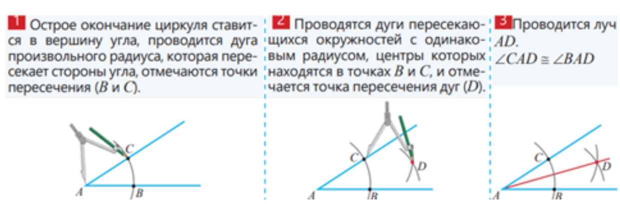
Из истории математики

Линейка и циркуль на протяжении тысячелетий были одними из самых важных инструментов геометрии. В Древнем Египте циркуль использовался главным образом в практических целях — для измерения расстояний и обозначения земельных участков. Евклид (325–265 гг. до н. э.) в своём труде Начала определил основные правила построений с использованием циркуля и линейки без делений. Дополнительно можно отметить, что в последующие периоды Аполлоний Пергский и Архимед развивали евклидову геометрию в направлении построения более сложных фигур и исследования их свойств с помощью этих инструментов.

Ложные представления, возникающие у учеников. В задачах на построение линейка и транспортир используются не для измерения, а только для проведения прямых линий. При построении фигуры следует обращать внимание не на измерение, а на соблюдение заданного угла, расстояния и свойств фигуры. Необходимо подчеркнуть ученикам, что правильность результата зависит не от инструмента, а от умения правильно строить и корректно использовать свойства фигуры.

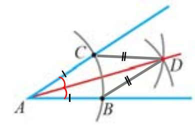
Изучение Построение биссектрисы угла

Ученикам объясняется способ построения биссектрисы угла с помощью линейки и циркуля. Ученикам можно предложить начертить в тетради произвольный угол и построить его биссектрису по алгоритму.



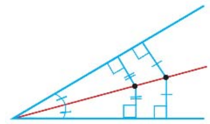
В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать ученикам подобную деятельность. *https://www.geogebra.org/m/AErPynA8*

Подумай!



Точки B и C соединяются с точкой D, рассматриваются полученные треугольники ABD и ACD. Так как AC и AB — радиусы, то AC ≅ AB. Аналогично можно показать, что CD ≅ BD. Для треугольников ABD и ACD сторона AD является общей. По признаку CCC ΔABD ≅ ΔACD. Поскольку в конгруэнтных треугольниках соответствующие углы равны, ∠CAD = ∠BAD. Следовательно, AD является биссектрисой.

Запомни!



Любая точка, лежащая на биссектрисе, находится на одинаковом расстоянии от сторон угла. Для объяснения свойства из точки, взятой на биссектрисе, опускаются перпендикуляры к сторонам угла. В полученных прямоугольных треугольниках один из острых углов равен благодаря биссектрисе. Поскольку прямоугольные треугольники с равным острым углом конгруэнтны, получаем, что длины перпендикуляров, опущенных к сторонам угла, равны. Следовательно, точка расположена на одинаковом расстоянии от сторон угла.
Это свойство позволяет правильно выполнять построения без необходимости измерения расстояний.
В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать ученикам подобную деятельность..
https://www.geogebra.org/m/xcU5cQY5

Исправь ошибку!

Определяется ошибка в алгоритме построения биссектрисы и рисунок перерисовывается для сравнения. На втором этапе дуга должна проводиться одним и тем же радиусом из обеих точек пересечения, а не только из одной точки. В противном случае проведённый луч может не быть биссектрисой.
Чтобы построить биссектрису, острие циркуля ставится в вершину угла и проводится дуга произвольного радиуса, отмечаются точки её пересечения со сторонами угла. Затем острие циркуля устанавливается в каждую из этих точек и тем же радиусом внутри угла проводятся две дуги. Луч, проведённый из вершины угла через точку пересечения полученных дуг, является биссектрисой угла.

Изучение **Построение серединного перпендикуляра к отрезку**

Ученикам даётся информация о понятии серединного перпендикуляра к отрезку. Объясняется способ построения серединного перпендикуляра к данному отрезку. Ученикам можно предложить начертить в тетради произвольный отрезок и построить его серединный перпендикуляр по алгоритму.
• Серединный перпендикуляр делит отрезок на две равные части и перпендикулярен ему. Если любую точку, например точку C, взятую на этой прямой, соединить с концами отрезка, то в полученном треугольнике ABC отрезок CM является одновременно высотой и медианой, поэтому подчёркивается, что треугольник ABC является равнобедренным. Следовательно, AC = CB. Таким образом отмечается, что любая точка, лежащая на серединном перпендикуляре, находится на одинаковом расстоянии от концов отрезка.
В классах с техническими возможностями можно продемонстрировать ученикам подобную деятельность.
https://www.geogebra.org/m/wFFfQfQF

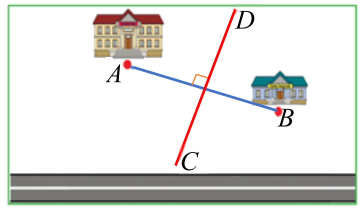
Дифференцированное обучение

Поддержка. На доске чертятся несколько отрезков. Ученикам предлагается разделить эти отрезки пополам. Ученики объясняют, как они это выполнили построением.

Углубление. На доске чертятся несколько отрезков. Ученикам можно предложить различные задачи на построение.
В тетради предлагается начертить отрезок, затем его серединный перпендикуляр и обосновать, что любая точка на серединном перпендикуляре находится на одинаковом расстоянии от концов отрезка.
Также ученикам можно предложить различные задачи на построение:
– Разделите отрезок AB на четыре равные части.
– Из отмеченной точки P на прямой MN восстановите к ней перпендикуляр.
– Постройте треугольник по заданным сторонам a, b, c.
Ученики выполняют задание, объясняя последовательность построения.

Решение задач

8. На шоссе необходимо построить автобусную остановку так, чтобы она находилась на одинаковом расстоянии от школы и детского сада.



Решение задачи

Отмечается, что для того чтобы остановка находилась на одинаковом расстоянии от школы и детского сада, она должна располагаться на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему эти объекты. Выполняется соответствующий рисунок, строится отрезок и его серединный перпендикуляр.

Ответ. Если автобусную остановку на шоссе построить на серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему соответствующие точки школы и детского сада, то остановка будет находиться на одинаковом расстоянии от обоих объектов.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
С помощью циркуля и линейки строит серединный перпендикуляр к отрезку.	Рабочие листы, учебник, РТ
С помощью циркуля и линейки строит биссектрису угла.	Рабочие листы, учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение

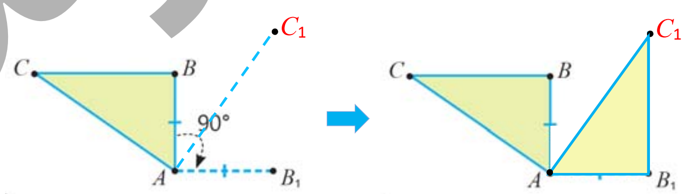
Понятия, приведённые в заключении раздела учебника, повторяются с учениками. Изученные по разделу термины напоминаются ученикам учителем. При произнесении каждого понятия ученики объясняют его содержание и приводят примеры.

Вращение, угол вращения, центр вращения, полный оборот, симметрия вращения, центр симметрии, фигура с центральной симметрией, построение, серединный перпендикуляр.

Вспоминается информация о применении симметрии, приведённая на первой странице раздела. Подчёркивается, что симметрия имеет как эстетическое, так и функциональное значение. Отмечается, что широкое применение симметрии в природе, искусстве и технике связано с её прочностью, устойчивостью и точностью. Обсуждавшийся в начале раздела план парка из задания «Попытайтесь!» и способ нахождения координат объектов по заданным условиям вспоминаются. Повторяются данные ответы и способы решения, сравнивается решение исходной задачи.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

3. Показана точка, в которую переходит точка B при вращении треугольника ABC вокруг вершины A на 90° по часовой стрелке. Строится точка, в которую переходит точка C, и в тетради чертится фигура, полученная вращением.



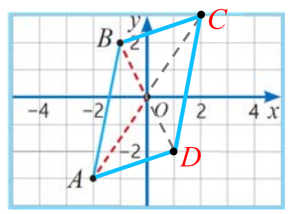
6. Точка пересечения диагоналей параллелограмма ABCD находится в начале координат.

• Записываются координаты вершин A и B. A (–2; –3) и B (–1; 2)

• Поскольку диагонали параллелограмма пересекаются в начале координат, его вершины C и D симметричны вершинам A и B соответственно относительно начала координат. Определяются координаты вершин C и D.

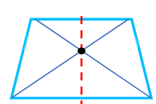
A (–2; –3) $\to$ C (2; 3) B (–1; 2) $\to$ D (1; –2)

• Отмечаются и достраиваются вершины параллелограмма.

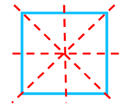


7. Определяется, является ли утверждение верным или неверным. Ученики объясняют своё мнение, приводя примеры.

а) Точка пересечения диагоналей равнобедренной трапеции является её центром симметрии. *Ложно.*

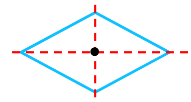


Равнобедренная трапеция не является фигурой, симметричной относительно точки, то есть она не является фигурой с центральной симметрией. Фигуры, симметричные относительно точки, при вращении на 180° вокруг центра симметрии совпадают сами с собой, то есть имеют центр симметрии.

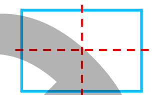


б) Квадрат имеет четыре оси симметрии. *Верно.*
Диагонали квадрата и прямые, проходящие через середины его сторон, являются его осями симметрии.

в) Ромб является фигурой с центральной симметрией. *Верно.*
Диагонали ромба делятся точкой пересечения пополам. Точка пересечения диагоналей является центром симметрии ромба, то есть при вращении на 180° ромб совпадает сам с собой.

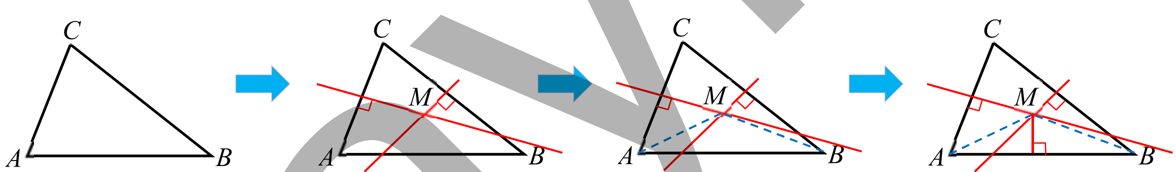


г) Прямоугольник имеет одну ось симметрии. *Ложно.*
Прямые, проходящие через середины сторон прямоугольника, являются его осями симметрии. Следовательно, прямоугольник имеет две оси симметрии.



13. В парке отдыха и развлечений планируются работы по реконструкции. По условию требуется определить, как с помощью циркуля и линейки без делений определить место для установки скамейки и место, отведённое для пикника.

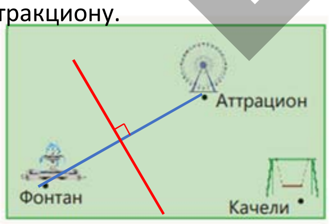
Привлечение. Учитель рисует на доске треугольник, ученики с помощью циркуля проводят серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC и обозначают точку их пересечения буквой M. Затем учитель задаёт ученикам наводящие вопросы, чтобы показать, что серединные перпендикуляры сторон этого треугольника пересекаются в одной точке:
– На каком свойстве основано равенство AM = MB?
– Как объяснить, что высота, проведённая из точки M к стороне AB, одновременно является и медианой?
– На каком свойстве основано равенство расстояний от точки M до вершин треугольника?



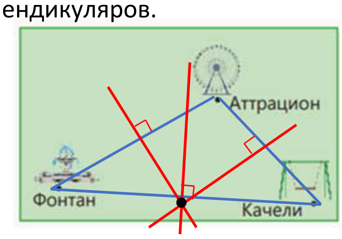
На вопросы даются ответы. Учитель, обобщая, отмечает, что так как AM = MB, треугольник ABC является равнобедренным. Высота, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, одновременно является и медианой. Следовательно, эта высота лежит на серединном перпендикуляре к стороне AM. На основании этого точка M является точкой пересечения серединных перпендикуляров. Так как точка пересечения серединных перпендикуляров равноудалена от концов отрезка, то $AM = MB = MC$.

Решение задачи

•Строится серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки, соответствующие фонтану и аттракциону.

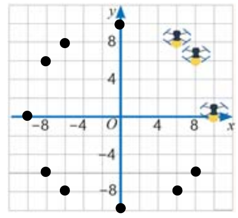


• Также строятся серединные перпендикуляры к отрезкам, соединяющим точки, соответствующие аттракциону и фонтану, а также аттракциону и качелям. Находится точка пересечения серединных перпендикуляров.



Ответ. Построив серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки, соответствующие фонтану и аттракциону, и найдя точку пересечения; соединив попарно точки, соответствующие фонтану, аттракциону и качелям, построив серединные перпендикуляры к сторонам полученного треугольника и найдя точку их пересечения.

14. На мероприятии предусмотрено использование светящихся дронов для демонстрации в небе различных фигур. На рисунке показаны положения трёх дронов в координатной системе. Отмечается, что остальные дроны располагаются в координатах, соответствующих повороту каждого изображённого дрона относительно начала координат на 90°, 180°, 270° против часовой стрелки.



Определяются координаты дронов на рисунке и координаты, соответствующие их повороту относительно начала координат на 90°, 180°, 270° против часовой стрелки.

Поворот на 90°	Поворот на 180°	Поворот на 270°
(6; 8) → (–8; 6)	(6; 8) → (–6; –8)	(6; 8) → (8; –6)
(8; 6) → (–6; 8)	(8; 6) → (–8; –6)	(8; 6) → (6; –8)
(10; 0) → (0; 10)	(10; 0) → (–10; 0)	(10; 0) → (0; –10)

Ответ. 12 дронов.

Математический калейдоскоп

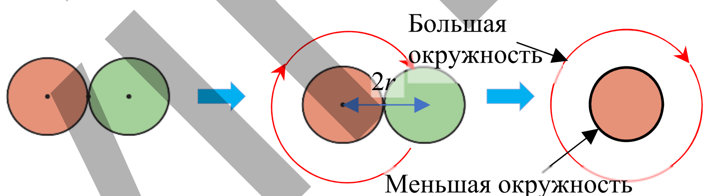
1. К левой части равенства применяется формула куба суммы двучлена. Полученное выражение упрощается, с помощью преобразований показывается, что оно тождественно равно выражению в правой части.

$$(a + b + c)^3 = ((a + b) + c)^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 =$$

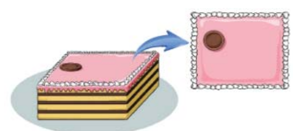
$$= \underbrace{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}_{(a+b)^3} + \underbrace{3ac^2 + 3bc^2 + 6abc}_{3(a+b)^2c} + \underbrace{3ac^2 + 3bc^2}_{3(a+b)c^2} + c^3 =$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

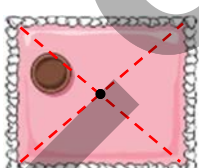
3. Два диска в форме круга с одинаковыми радиусами соприкасаются. Требуется найти, сколько раз один из дисков совершит оборот вокруг своей оси, если, катясь по другому диску, вернётся в исходное положение. Обозначим радиус каждого из катящихся дисков через r. Когда один из них совершает один полный оборот вокруг другого, его центр описывает окружность вокруг центра большого диска. Так как радиус этой окружности равен 2r, её длина равна 4πr. Поскольку длина окружности одного диска равна 2πr, чтобы найти число оборотов, длину большой окружности делят на длину меньшей окружности. $4\pi r : 2\pi r = 2$.



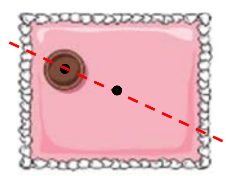
5. На торте в форме прямоугольного параллелепипеда сверху находится круглый шоколад. Требуется разрезать торт по одной прямой так, чтобы и торт, и шоколад были разделены пополам. Вид прямоугольного параллелепипеда сверху — прямоугольник.



Точка пересечения диагоналей прямоугольника является его центром симметрии.



Чтобы разделить круг пополам, прямая должна проходить через центр круга. Следовательно, чтобы разделить пополам и прямоугольник, и круг, необходимо разрезать по прямой, соединяющей их центры симметрии.



Ответ. Чтобы разделить торт и шоколад пополам, нужно разрезать торт по прямой, соединяющей центр симметрии прямоугольника (его вид сверху) и центр симметрии круга.

"КОВРЫ АЗЕРБАЙДЖАНА"

Ученикам сообщается информация об искусстве ковроткачества, отмечается, что это древний и широко распространённый вид искусства. Подчёркивается, что ковроткачество в Азербайджане возникло примерно 5 тысяч лет назад. Отмечается, что в азербайджанском ковроткачестве преобладают орнаменты геометрической формы, имеющие символическое значение.

1. Исследуется, имеются ли на изображённом ковре фигуры с центральной симметрией, фигуры с симметрией вращения.

2. На коврах, используемых дома, или на изображениях ковров, найденных в интернете, приводятся примеры симметрии относительно точки, фигуры с центральной симметрией, фигуры с симметрией вращения.

3. С использованием симметрии относительно точки и симметрии вращения подготавливается эскиз ковра с различными узорами. Ученикам, обладающим навыками рисования, можно поручить изобразить увиденные ими ковры, а в классах с техническими возможностями — подготовить орнаменты и ковровые узоры с помощью различных компьютерных программ.

4. Ученикам сообщается, что азербайджанское ковроткачество является традиционным народным искусством с очень древней историей и включено в Список нематериального культурного наследия ЮНЕСКО. В интернете исследуются образцы азербайджанского коврового искусства, подготавливается презентация об их видах и ковровых узорах.

10-й РАЗДЕЛ	Статистика и вероятность

Тема №	Название	Часы	Учебник (стр.)	Рабочая тетрадь (стр.)
	Предварительная проверка	1	98	
Тема 10.1	Частота события	2	99	66
Тема 10.2	Элементарное событие	3	103	69
Тема 10.3	Несовместимые события	3	106	71
	Обобщающий урок. STEAM. “Система электронной очереди”	2	110	73
	МСО-5	1		
	ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО РАЗДЕЛУ	**12**		

Краткий обзор раздела

В разделе ученики научатся составлять таблицу частот для несгруппированных данных, описывать множество элементарных событий, которые могут произойти в ходе испытания, а также различать противоположные и несовместимые события. Кроме того, на основе таблицы частот они будут развивать навыки вычисления среднего арифметического, медианы и моды, познакомятся с правилами вычисления вероятности несовместимого события и, применяя полученные знания, будут решать различные задачи.

На что стоит обратить внимание?

Ученики уже знакомы с правилами определения среднего арифметического, медианы и моды для несгруппированных данных. При объяснении понятия «событие» важно чётко различать невозможные, случайные и достоверные события. Правильное различение возможных и благоприятных исходов является одним из основных условий вычисления вероятности наступления события. При решении заданий первоначальной проверки важно выявить, какие трудности связаны с необходимыми предварительными знаниями и умениями, и организовать работу над ошибками.

Особое внимание следует уделить различению частоты события и вероятности его наступления. Следует отметить, что частота события показывает приближённое значение вероятности, вычисленное на основе собранных данных. На этой основе можно делать прогнозы для будущих результатов.

При нахождении медианы набора данных необходимо уделять особое внимание их расположению в возрастающем или убывающем порядке, а также тому, является ли количество данных чётным или нечётным.

Определяя, являются ли данные события несовместимыми, следует объяснять ученикам на простых примерах из повседневной жизни, почему эти события являются несовместимыми.

Поскольку иногда ученики испытывают трудности при определении противоположных событий, это понятие следует особо подчеркнуть.

Правильное определение несовместимых и противоположных событий играет важную роль при вычислении вероятности.

Важно ознакомить учеников с различными способами вычисления вероятности случайного события. Это позволяет выбрать наиболее удобный и эффективный способ решения конкретной задачи.

Развитие математического

Правильное определение понятий «среднее арифметическое», «мода», «медиана», «событие», «невозможное событие», «достоверное событие», «равновозможные события», «случайное событие», «элементарное событие», «вероятность события», «частота события», «таблица частот», «возможные исходы», «благоприятные исходы», «несовместимые события» и «противоположные события» даёт основание оценить, насколько эти понятия усвоены.

Математические понятия и термины, усвоенные в разделе

Частота события, таблица частот, возможные исходы, благоприятные исходы, несовместимые события и противоположные события.

Необходимые предварительные знания и умения:

- Среднее арифметическое, медиана и мода
- Представление данных
- Случайное событие
- Вероятность события

Междисциплинарная интеграция

Методы статистики и теории вероятностей широко применяются для системного анализа данных и принятия обоснованных решений. На уроках физики обработка результатов измерений, нахождение средних значений и оценка погрешностей эксперимента выполняются на основе статистических методов. В биологии передача наследственных признаков, динамика численности популяций и вероятности изменений объясняются с использованием понятия вероятности. В географии длительные наблюдения климатических показателей, их сравнение и прогнозирование будущих изменений основываются на анализе статистических данных.

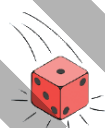
ТЕМА 10.1. Частота события

ПОДСТАНДАРТЫ	7-5.1.1. Строит и интерпретирует таблицу частот для несгруппированных данных. 7-5.1.2. Строит и интерпретирует таблицу относительных частот для несгруппированных данных. 7-5.1.3. На основе таблицы частот вычисляет среднее арифметическое, медиану, моду.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Строит и интерпретирует таблицу частот для несгруппированных данных. • На основе таблицы частот вычисляет среднее арифметическое, медиану, моду.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение *https://video.edu.az/video/13566* *https://www.geogebra.org/m/aJtnnd24* Задание: *https://www.mathopolis.com/questions/q.html?t=skill&skillno=963*

Обсуждение исходной задачи. На первой странице раздела приведены примеры областей применения статистики и теории вероятностей. Эти теории имеют особое значение также для оценки рисков при принятии решений в различных сферах. Представленная информация доводится до учеников. Целесообразно показать ученикам примеры, соответствующие описаниям, связанным с нахождением вероятности. Например:

Выбор одного шарика из мешка с шариками, перемешав их и не глядя.

При подбрасывании монеты может выпасть одна из двух сторон. Это рассматривается как самая простая модель вероятности.



При бросании изображённой на рисунке игральной кости может выпасть одна из шести граней. В этом случае определяется вероятность выпадения любого числа очков.

Задание «Попытайтесь!» обсуждается с классом. Ученики, используя свои предыдущие знания, пытаются ответить на вопросы. Подчёркивается, что после изучения новых знаний и умений в течение раздела в конце раздела задание будет обсуждено повторно.

Побуждение

Учитель пишет на доске названия времён года. Каждый ученик подходит к доске и ставит одну черту напротив названия времени года, в котором он родился. В каком времени года больше всего учеников с днём рождения, а в каком — меньше всего? Как найти вероятность того, что случайно выбранный ученик родился летом?

Выслушиваются мнения учеников, организуется обсуждение.

Исследование-обсуждение

Среди учеников класса был проведён опрос о том, каким способом они добираются до школы. Каждый ученик поставил одну черту в соответствующей ячейке таблицы.

Способ	Кол-во	
На автобусе	𝍸|	6
На метро	||||	4
На машине	||||	4
Пешком	𝍸𝍸|	11

• Обращая внимание на таблицу, на основании количества черт отмечается, что больше всего тех, кто приходит в школу пешком.

• Ученики знакомы с правилом нахождения вероятности как отношением числа благоприятных исходов к числу возможных исходов. Так как число возможных исходов не изменяется, отмечается, что при наибольшем числе благоприятных исходов вероятность также будет больше. Определяется число возможных и благоприятных исходов и вычисляется вероятность.

Число благоприятных исходов: 11

Число возможных исходов: 6 + 4 + 4 + 11 = 25

$$\frac{\text{Число благоприятных исходов}}{\text{Число возможных исходов}} = \frac{11}{25}$$

Изучение Таблица частот

Отмечается, что, анализируя статистические данные, можно сделать различные выводы. Для этого сначала составляется таблица частот, затем проводится статистический анализ, о чём сообщается ученикам, и приведённый пример обсуждается с классом.

Цвет	Число	Частота
Красный	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25$
Синий	8	$\frac{8}{20} = 0{,}4$
Фиолетовый	4	$\frac{4}{20} = 0{,}2$
Зеленый	3	$\frac{3}{20} = 0{,}15$
Итого	20	1

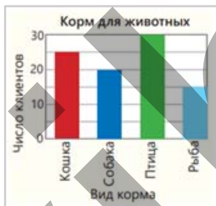
Вспоминается информация о частоте события. Отмечается, что отношением числа наступлений интересующего нас события к общему числу испытаний называется частота события. Подчёркивается, что частота может выражаться также в процентах; на основе таблицы в примере частота выбора красного цвета выражается в процентах.
Можно поручить ученикам выразить в процентах частоты выбора других цветов.

Подумай!

На основе таблицы найденные частоты складываются и показывается, что их сумма равна 1. $0{,}25 + 0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}15 = 1$.

Задания

3. В зоомагазине данные о количестве клиентов, купивших корм для животных в течение одной недели, представлены на диаграмме. Составляется таблица частот.



Вид корма	Число	Частота
Кошка	25	$\frac{5}{18}$
Собака	20	$\frac{1}{3}$
Птица	30	$\frac{2}{9}$
Рыба	15	$\frac{1}{6}$
Итого	90	1

25 + 20 + 30 + 15 = 90

$\frac{25}{90} = \frac{5}{18}$; $\frac{20}{90} = \frac{2}{9}$; $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$; $\frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.

Даются ответы на поставленные вопросы.

- В течение одной недели было продано 90 кормов для животных.
- Частота покупателей, купивших корм для птиц, равна $\frac{2}{9}$.
- Находится сумма частот покупателей, купивших корм для рыб и собак. $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 0{,}5$.
- На основе данных частот ожидается, что из 126 клиентов примерно $126 \cdot \frac{5}{18} = 35$ купят корм для кошек, а $126 \cdot \frac{1}{6} = 21$ — корм для рыб. Следует отметить, что эти расчёты основаны на принятии относительных частот в качестве экспериментальной вероятности и носят прогнозирующий характер.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания:
https://www.mathopolis.com/questions/q.html?t=skill&skillno=1119
https://www.ixl.com/math/grade-7/make-predictions-using-experimental-probability

К сведению учителя! В 6 классе ученики изучали построение таблицы частот для сгруппированных данных. В 7 классе ученики учатся строить таблицу частот для несгруппированных данных. Ученики должны сначала сгруппировать данные по соответствующим категориям, затем вычислить частоту для каждой категории. Рекомендуется, чтобы учитель подчеркнул несколько моментов.

- ✓ *Частота показывает то, что произошло в прошлом. Частота помогает прогнозировать будущее.*
- ✓ *Если одинаковые условия сохраняются, частоту можно использовать как вероятность для будущего.*
- ✓ *Это не точный ответ, а наиболее разумное, убедительное ожидание.*
- ✓ *Частота по сути является «экспериментальной вероятностью», то есть показывает приближённое значение вероятности, вычисленное на основе собранных данных. На этой основе можно делать прогнозы о будущих результатах.*

Вес борца (кг)	Число	Частота
60	4	$\frac{4}{20} = 0{,}2$
70	3	$\frac{3}{20} = 0{,}15$
80	7	$\frac{7}{20} = 0{,}35$
90	6	$\frac{6}{20} = 0{,}3$
Итого	20	1

Изучение **Нахождение моды, среднего арифметического и медианы по таблице частот**

Отмечается, что находить моду статистических данных на основе таблицы частот удобнее. На приведённом примере ученикам объясняется способ нахождения моды и среднего арифметического. Подчёркивается, что сумма произведений значений величин на соответствующие частоты равна их среднему арифметическому; приводится пример. С учениками обсуждается способ нахождения медианы в ряду данных.

Медиана (80 + 80) : 2 = 80 (кг)

60, 60, 60, 60, 70, 70, 70, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 90, 90, 90, 90, 90, 90

Четное число

К сведению учителя! Отмечается, что, анализируя данные статистически, можно сделать различные выводы. Среднее арифметическое, медиана и мода в ряду данных помогают получить разную информацию о данных. Рекомендуется дать ученикам информацию о значении каждого показателя и привести примеры того, какой из них более удобен для конкретной ситуации.

Среднее арифметическое — более удобно, если данные не слишком изменчивы и отсутствуют резко большие или малые значения. Например, среднее арифметическое баллов по математике в классе показывает общий уровень достижений класса.

Медиана — более удобна, если среди данных есть очень маленькие или очень большие значения. Например, в списке доходов компании можно найти медиану и, определив количество доходов выше и ниже медианы, получить информацию о доходах.

Мода — служит для нахождения наиболее часто встречающегося значения среди данных. Это более удобно при наличии очень маленьких или очень больших значений. Например, можно получить информацию о самом продаваемом товаре в магазине в течение дня.

Ученикам можно показать примеры применения статистического анализа в реальной жизни. Например, участница Крымской войны Флоренс Найтингейл, используя статистические исследования и правильное, наглядное представление результатов, смогла убедить высшее командование Великобритании в необходимости коренных изменений в устройстве военного госпиталя, где лечились больные и раненые. В результате менее чем за шесть месяцев уровень смертности в этих госпиталях снизился с 42 % до 2,2 %. Тем самым она спасла множество человеческих жизней. Это показывает, что статистические результаты играют важную роль в принятии решений и решении проблем.

6. На основе таблицы записывается ряд данных и находится медиана.

Купюры	5 ₼	10 ₼	20 ₼
Число	2	4	3

Медиана 10 (ман)

5 ман, 5 ман, 10 ман, 10 ман, 10 ман, 10 ман, 20 ман, 20 ман, 20 ман

Нечетное число

К сведению учителя! Нахождение медианы путём записи ряда данных более удобно, когда количество данных невелико. По мере увеличения количества данных упорядочивание становится затруднительным. Поэтому целесообразно дать ученикам информацию о способе нахождения медианы на основе таблицы.

Купюры	5 ₼	10 ₼	20 ₼
Число	2	4	3

2 + 4 = 6

6 + 3 = 9

На основе таблицы вычисляется общее количество данных. Так как число нечётное, определяется, какое по счёту значение в середине ряда будет записано. В ряду из 9 данных в середине будет записано 5-е значение. На основе таблицы отмечается, что 5-е значение равно 10 манатам.

Из истории математики

Одно из исследований по вычислению частоты, проведённых некоторыми математиками, жившими в разные времена, доводится до учеников. Внимание учеников направляется на таблицу. Отмечается, что в таблице приведены результаты испытаний, проведённых некоторыми учёными, связанных с событием выпадения числовой стороны подброшенной монеты. Представленные данные обсуждаются с учениками.

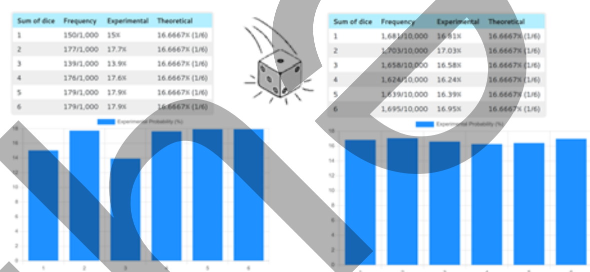
Запомни!

Доводится до внимания учеников, что в результате многократного повторения одного и того же испытания на основе частоты события можно приблизительно определить его вероятность. Отмечается, что по мере увеличения числа испытаний частота соответствующего события приблизительно равна вероятности его наступления.

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания:
https://www.nctm.org/adjustablespinner/

Практическое задание. К доске по очереди приглашаются 10 учеников. Каждый ученик один раз бросает игральную кость и записывает полученный результат на доске. Полученные результаты обобщаются и составляется соответствующая столбчатая диаграмма. Для каждого случая наблюдается результат, даются ответы на вопросы.

- Какова была частота выпадения 1 очка?
- Какова была частота выпадения 2 очков?
- Если число испытаний будет 100, сколько раз можно ожидать выпадение 4 очков?



С учениками можно проанализировать результаты, полученные при проведении того же испытания большее число раз с помощью симуляции..
https://www.mathmammoth.com/practice/dice-roller

На рисунке приведены результаты, полученные при числе испытаний 1000 и 10000. Таким способом можно показать, что по мере увеличения числа испытаний частота события приближается к вероятности этого события.

В симуляции возможность изменять число испытаний и числа создаёт условия для того, чтобы ученики могли непосредственно наблюдать, как изменяются результаты. Это способствует визуальному, практическому и логическому пониманию понятия вероятности, и в результате более глубокому и прочному усвоению темы.

7. Спиннер разделён на 4 сектора. При 20 вращениях ученикам предоставляется информация о результате.

а) определяется, что стрелка 12 раз остановилась на секторе с нечётным числом, и вычисляется частота события остановки на секторе с нечётным числом.

3 1 2 1 3 1 2 1 4 3 2 2 1 4 1 4 3 1 1 2 $\rightarrow$ $\frac{12}{20} = 0,6$

б) На основе результата испытания приблизительная вероятность того, что при следующем вращении стрелка остановится на секторе с числом 3, равна частоте остановки на числе 3 по результатам 20 испытаний.

3 1 2 1 3 1 2 1 4 3 2 2 1 4 1 4 3 1 1 2 $\rightarrow$ $\frac{4}{20} = 0,2$

Дифференцированное обучение

Каждый ученик класса записывает на карточке, из скольких букв состоит его имя, и бросает её в мешок. Ученики несколько раз вытаскивают из мешка по одной карточке и записывают число, указанное на карточке, на доске. Последовательно проводится 10 испытаний.

Поддержка. Ученикам поручается составить таблицу частот полученных результатов, найти среднее арифметическое, моду и медиану данных чисел.

Углубление. На основе результатов 10 испытаний ученикам поручается сделать прогноз для процесса из 20 испытаний, найти частоту учеников, в имени которых 5, 6 и т.д. букв, объяснить, что выражают среднее арифметическое, медиана и мода данных.

В классах с техническими возможностями правильность полученных результатов можно проверить, используя калькулятор по ссылке. *https://claydesk.ai/calculators/education/mean-median-mode-calculator.html*

Решение задач

10. Отмечаются результаты опроса среди посетителей Бакинского зоопарка о любимых животных.

Решение задачи

Название животного	Счет	Частота
Лев	卌 卌 ||	$\frac{12}{45}$
Слон	卌 卌 |||	$\frac{13}{45}$
Медведь	卌 ||||	$\frac{1}{5}$
Обезьяна	卌 卌 |	$\frac{11}{45}$

• Дополняется таблица, записав частоты.

Лев: 12 человек Слон: 13 человек Медведь: 9 человек Обезьяна: 11 человек

Вычисляется, сколько посетителей участвовало в опросе.

$12 + 13 + 9 + 11 = 45$

Лев: $\frac{12}{45}$ Слон: $\frac{13}{45}$ Медведь: $\frac{9}{45} = \frac{1}{5}$ Обезьяна: $\frac{11}{45}$

• Определяется, что животное с наименьшей частотой, это медведь.

Ответ. Медведь — животное с наименьшей частотой.

11. В магазине электроники в течение месяца было продано всего 640 мониторов трёх видов.

Размер монитора	Частота
14-дюймов	0,15
15-дюймов	0,3
17-дюймов	0,55

Решение задачи

• Вычисляется, сколько мониторов каждого вида было продано за месяц.

14 дюймов: $640 \cdot 0{,}15 = 96$

15 дюймов: $640 \cdot 0{,}3 = 192$

17 дюймов: $640 \cdot 0{,}55 = 352$

• Приблизительная вероятность того, что в следующем месяце проданный монитор будет 17-дюймовым, равна частоте продажи 17-дюймового монитора среди проданных мониторов за месяц. Следовательно, эта вероятность приблизительно равна 0,55.

• Если в следующем месяце будет продано всего 800 мониторов, можно так оценить, сколько из них будут 14-дюймовыми.

$800 \cdot 0{,}15 = 120$

Ответ. 96, 192, 352; 0,55; 120.

Проектная работа. Каждый ученик собирает данные о возрасте, росте, массе и других показателях членов своей семьи. На основе собранных данных составляется таблица частот. По составленной таблице для данных вычисляются среднее арифметическое, мода и медиана. Полученные результаты объясняются, связывая их с повседневной жизнью.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Строит и интерпретирует таблицу частот для несгруппированных данных.	Рабочие листы, учебник, РТ
На основе таблицы частот вычисляет среднее арифметическое, медиану, моду.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 10.2. Элементарное событие

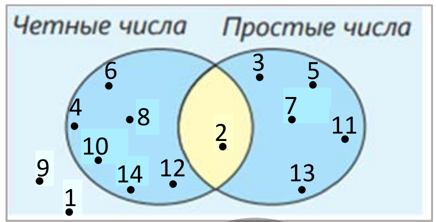
ПОДСТАНДАРТЫ	7-5.2.1. Описывает событие как подмножество пространства элементарных событий. 7-5.2.2. Вычисляет вероятность события.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Описывает случайное событие как подмножество множества элементарных событий. • Описывает события с помощью диаграммы Эйлера–Венна. • Вычисляет вероятность события в испытании с равновозможными элементарными исходами.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: *https://video.edu.az/video/11347* *https://video.edu.az/video/11486* *https://www.geogebra.org/m/dg9fngjc* Задание: *https://www.mathopolis.com/questions/q.html?t=skill&skillno=531*

Побуждение

На стол ставится коробка с несколькими красными, синими и зелёными ручками. Один из учеников записывает на доске количество ручек в коробке, затем перемешивает их и кладёт обратно в коробку. Учитель обращается к классу:

– Какое событие является достоверным, какое событие является невозможным: извлечение из коробки карандаша, извлечение из коробки ручки? Какого цвета ручка имеет меньшую вероятность быть извлечённой, а какого цвета — большую? Как определить равновозможные события?

Исследование-обсуждение



Шары, пронумерованные от 1 до 14, по очереди вытаскиваются из мешка. Отмечается, что ученик, вытащивший шар с чётным номером, получает большой подарок, а ребёнок, вытащивший шар с простым номером, — маленький подарок.

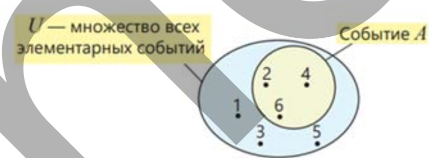
• Извлечённые чётные и простые числа записываются в соответствующие части диаграммы Эйлера–Венна.

• Подчёркивается, что только число 2 соответствует пересечению диаграммы.

• Если будут извлечены шары с числами 1 и 9, они отмечаются вне кругов. Значит, могут произойти 2 такие события.

Изучение Элементарное событие

Ученикам даётся информация об элементарном событии и приводятся примеры. Сообщается, что множество элементарных событий обозначается буквой U. Если событие A — это «выпадение чётного числа очков» при бросании игральной кости, то показывается, что это событие состоит из трёх элементарных событий: «выпадение двух очков», «выпадение четырёх очков», «выпадение шести очков».



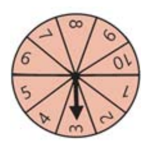
Подчёркивается, что событие A является подмножеством множества всех элементарных событий, и его изображение на диаграмме Эйлера–Венна обсуждается с классом..

Подумай!

Для показа возможных исходов при подбрасывании монеты берётся одна монета.
Например, на монете (20 гяпиков) можно показать, что при её подбрасывании выпадет либо сторона с числом (R), либо сторона с изображением герба (X). Следовательно, при подбрасывании монеты возможны два исхода. Записывается множество элементарных событий. $U = \{R, X\}$

Проводя в классе испытания с различными монетами, можно продемонстрировать ученикам элементарные события.

Задания

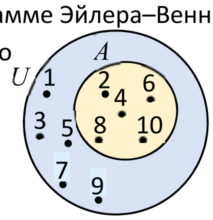


2. При вращении стрелки спиннера записывается множество возможных элементарных событий.

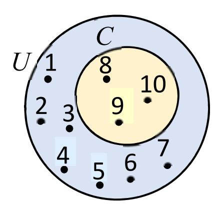
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Возможные случайные события записываются как подмножество множества элементарных событий и изображаются на диаграмме Эйлера–Венна.

а) Выпавшее число чётное.
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$



в) Выпавшее число больше 7.
$C = \{8, 9, 10\}$



Запомни!

Ученикам даётся информация о равновозможных событиях, приводятся примеры. Например, при бросании кости число элементарных событий равно 6, и каждое из них равновозможно. Следовательно, вероятность каждого элементарного события равна $\frac{1}{6}$.

Подумай!

Отмечается, что при наступлении одного из элементарных событий ни одно другое элементарное событие не происходит. А также каждое событие, являющееся результатом испытания, представляет собой подмножество множества всех элементарных событий. Следовательно, если собрать все элементарные события, получаются все возможные исходы. Согласно классическому определению вероятности, вероятность события равна отношению числа благоприятных исходов к числу возможных исходов. Поскольку все элементарные события вместе образуют все возможные исходы, в этом случае число благоприятных исходов равно числу возможных исходов. В результате сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1.

3. Все элементарные события, являющиеся результатом случайного испытания, равновозможны. По вероятности одного элементарного события определяется их количество.

а) Так как вероятность равна $\frac{1}{15}$, число элементарных событий, которые могут произойти в результате случайного испытания, равно 15.

4. В мешке находится 1 белый, 1 чёрный, 1 зелёный, 1 синий и 1 жёлтый шарик. Самир случайно вытаскивает один шарик.

а) Записываются возможные элементарные события.

Этот шарик белого цвета, этот шарик чёрного цвета, этот шарик зелёного цвета, этот шарик синего цвета, этот шарик жёлтого цвета.

б) Вероятность каждого из этих событий можно вычислить так. $\frac{1}{1+1+1+1+1} = 0{,}2$

Изучение **Вероятность события**

Объясняется правило нахождения вероятности события в испытании, исходы которого являются равновозможными элементарными событиями, на приведённом примере обсуждается, как вычисляется вероятность.

Благоприятные исходы – 2, 3, 5, 7

$$P(A) = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

Элементарные исходы – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Ученикам сообщается, что вероятность невозможного события равна 0, а вероятность достоверного события равна 1.

Подумай!

Когда число благоприятных исходов равно 0, то есть вероятность наступления невозможного события равна нулю. Когда число благоприятных исходов равно числу возможных исходов, то есть вероятность наступления достоверного события равна 1, это известно ученикам. Поскольку число случайных событий может быть не больше числа возможных исходов, а вероятность события не является отрицательным числом, объясняется, что для вероятности выполняется неравенство $0 \leq P(A) \leq 1$.

6. В блюде находится 4 сливовых, 5 абрикосовых и 3 вишнёвых пирога.

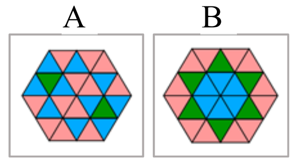
Находится число возможных исходов: 4 + 5 + 3 = 12

Отмечается число благоприятных исходов: 5

Вероятность события, что случайно взятый пирог окажется абрикосовым, равна $\frac{5}{12}$.

К сведению учителя! Ученики информированы о правилах вычисления частоты на основе результата испытания и вычисления вероятности наступающего события. Частота события при заранее известных возможностях наступления события находится на основе математических вычислений в результате определённого испытания. В некоторых источниках это называется теоретической вероятностью. Вероятность события же основывается на фактических результатах, полученных в результате многократного повторения одного и того же испытания. Это называется экспериментальной вероятностью. При малом числе испытаний экспериментальная вероятность может значительно отличаться от теоретической вероятности. Однако по мере увеличения числа испытаний экспериментальная вероятность приблизительно равна теоретической вероятности. Можно вспомнить практическое задание, приведённое в предыдущей теме.

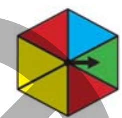
Дифференцированное обучение



Поддержка. Ученикам раздаётся один из рабочих листов с изображением фигуры, состоящей из конгруэнтных треугольников. Ученики, определяя количество цветов на каждом рабочем листе, отвечают на поставленные вопросы. Какова вероятность того, что выбранный треугольник будет синего цвета? Вероятность события, что выбранный треугольник будет какого цвета больше? Есть ли равновероятные события? Как это определить?

Углубление. Ученикам раздаются рабочие листы с изображением фигуры, состоящей из конгруэнтных треугольников. Ученики, определяя количество цветов на каждом рабочем листе, отвечают на поставленные вопросы. Вероятность события, что выбранный треугольник будет какого цвета больше 0,5? Какая это фигура? В какой фигуре вероятность выбора одного из цветов в два раза больше вероятности выбора зелёного треугольника? Какой это цвет?

Решение задач



7. Стрелка спиннера, разделённого на конгруэнтные треугольники, вращается и останавливается на одном из цветных треугольников.

• Записывается множество возможных элементарных событий.

U = {зелёный, красный, жёлтый, жёлтый, красный, синий}

• Поскольку количество жёлтых и красных треугольников одинаково, события остановки стрелки на этих цветах являются равновозможными.

8. В книжном шкафу размещены 20 книг художественной литературы, 30 книг по математике и 50 книг по естественным наукам. Айнур случайно взяла одну книгу из шкафа.

а) Поскольку вероятность выбора книги, которых больше по количеству, выше, вероятность выбора книги по естественным наукам больше.

б) Вычисляется вероятность события, что книга, взятая Айнур, относится к математике. $\frac{30}{20+30+50} = 0{,}3$

Формативное оценивание

Критерии оценивания	Материалы оценивания
Описывает случайное событие как подмножество множества элементарных событий.	Рабочие листы, учебник, РТ
Описывает события с помощью диаграммы Эйлера–Венна.	Рабочие листы, учебник, РТ
Вычисляет вероятность события в испытании с равновозможными элементарными исходами.	Рабочие листы, учебник, РТ

ТЕМА 10.3. Несовместимые события

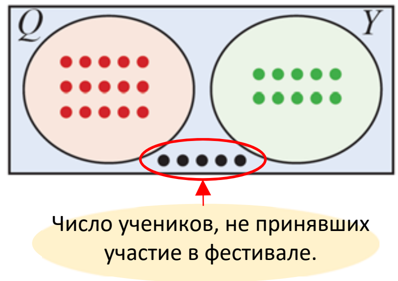
ПОДСТАНДАРТЫ	7-5.2.3. Комментирует аксиомы теории вероятностей. 7-5.2.4. Комментирует простые следствия аксиом.
ЦЕЛИ ОБУЧЕНИЯ	• Объясняет несовместимые события и вычисляет их вероятность. • Определяет события, противоположные данному событию. • Вычисляет вероятность события, используя противоположное ему событие.
ПРИНАДЛЕЖНОСТИ	Рабочие листы, карточки, стикеры
ЭЛЕКТРОННЫЕ РЕСУРСЫ	Изучение: https://video.edu.az/video/11343 https://www.geogebra.org/m/zpsvtrtp *https://www.geogebra.org/m/w2xphbmu*

Побуждение

В теме «Элементарные события» ученикам был задан вопрос о цвете ручки, извлечённой из коробки с несколькими красными, синими и зелёными ручками. Учитель, представив ту же ситуацию, может использовать для побуждения учеников дополнительные вопросы:

– Возможно ли, чтобы извлечённая из коробки ручка была одновременно красного и синего цвета? Как определить число возможных исходов для события, что ручка будет красного или синего цвета? Как это найти, используя общее количество ручек и количество зелёных ручек?

Исследование-обсуждение



Отмечается, что из 30 учеников класса часть, участвующая в фестивале, сидит на красных (Q), другая часть — на зелёных (Y) местах, и на диаграмме Эйлера–Венна дана информация об их количестве.

• Отмечается, что число благоприятных исходов для события, при котором случайно выбранный ученик сидит на красном месте, равно 15.

• Чтобы случайно выбранный ученик был участником фестиваля, он должен сидеть либо на красных, либо на зелёных местах. Число таких учеников можно найти двумя способами.

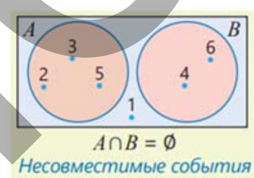
✓ Вычитая из общего числа учеников класса число учеников, не участвующих в фестивале: 30 – 5 = 25.

✓ Складывая число учеников на красных и зелёных местах: 15 + 10 = 25.

Следовательно, имеется 25 возможных исходов. Рекомендуется задавать ученикам вопросы и направлять их к использованию обоих способов решения.

• Отмечается, что для события «случайно выбранный ученик сидит на красном месте» число благоприятных исходов равно 15.

Изучение Несовместимые события



Ученикам даётся информация о несовместимых событиях и приводятся примеры. Сообщается, что событие $A \cup B$ h означает наступление хотя бы одного из событий A или B. Отмечается, что вероятность суммы несовместимых событий равна сумме их вероятностей, и пример обсуждается с классом.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Задания

1. Из коробки с шариками, пронумерованными от 1 до 15, случайно извлекается один шарик. Событие A – номер шарика равен 8, B – номер шарика равен 5, C – номер шарика является нечётным числом, D – номер шарика является чётным числом. Рекомендуется обсудить с учениками, как определяются несовместимые события. Поскольку одновременное наступление событий A və B, A və C, C və D невозможно, отмечается, что такие события являются несовместимыми.

К сведению учителя! Ученики испытывают трудности при выборе несовместимых событий, определяя, почему другие события не являются несовместимыми. В этом случае целесообразно объяснить ученикам, что некоторые другие события могут происходить одновременно. Например, в задании 1 события A – номер шарика равен 8 и D – номер шарика является чётным числом происходят одновременно, поэтому они не являются несовместимыми.

Изучение Противоположные события

Обратные события разъясняются ученикам. Ученикам объясняется, как обозначаются обратные события и правило вычисления их вероятности, и приводятся примеры.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

3. Кубик бросают один раз. Событие A – выпало 6 очков, B – выпало число меньше 6, C – выпало четное число, T – выпало нечетное число, M – выпало составное число, S – выпало простое число. Определяются противоположные события: A və B, C və T.

Отмечается, что в результате испытания происходит только одно из противоположных событий, поэтому остальные события не являются противоположными.

К сведению учителя! При объяснении темы противоположных событий особое значение имеет проверка умения учеников правильно определять событие, противоположное данному. Для этого учитель сначала должен работать с простыми ситуациями, затем может попросить учеников словесно выразить случай «ненаступления» события. Представление различных примеров помогает закреплению этого понятия у учеников.

Ученикам объясняется, что если непосредственно вычислить вероятность события трудно, можно найти вероятность противоположного события и вычесть её из 1. Например, в задании 3 при бросании игральной кости можно продемонстрировать ученикам два способа нахождения вероятности события «не выпадет 6 очков», то есть выпадет 1, 2, 3, 4 или 5 очков.

1-й способ. Под событием «не выпадет 6 очков» понимается выпадение одного из чисел 1, 2, 3, 4 или 5. Число благоприятных исходов равно 5, число возможных исходов равно 6, поэтому вероятность равна $\frac{5}{6}$.

2-й способ. Поскольку вероятность выпадения 6 очков равна $\frac{1}{6}$, вероятность противоположного события, то есть невыпадения 6 очков, равна $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

Использование противоположных событий является одним из эффективных способов нахождения вероятности объединения или пересечения несовместимых, а также в дальнейшем независимых событий. Формирование этого умения облегчает вычисление вероятности.

Исправь ошибку!

Карточки с числами от 1 до 15 были разложены на столе лицевой стороной вниз. Вероятность события (A), что число на случайно выбранной карточке является простым, равна 0,4. Чтобы найти вероятность события ($\bar{A}$), что число на случайно выбранной карточке является составным, недостаточно использовать только вероятность события, что число является простым. Если число не является простым, оно может быть равно 1. Следовательно, вероятность находится так.

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$; $0{,}6 - \frac{1}{15} = \frac{8}{15}$.

Ученикам, допускающим такие ошибки, следует объяснить, что для натурального числа существуют три возможных случая: число может быть простым, составным или равным 1. Следовательно, противоположным событию «число является составным» является не только «число является простым», а «число не является составным», то есть простое или равное 1.

Ложные представления, возникающие у учеников. Иногда ученики при определении противоположного события не могут правильно определить понятие «ненаступление события» и в результате путают противоположное событие с другим событием. Самый простой пример этого — принятие события «число не является составным» как «число является простым». В рубрике «Исправь ошибку» в задании была объяснена допущенная в связи с этим ошибка. При вычислении вероятности важно заранее учитывать этот момент. Можно поручить ученикам при нахождении вероятности противоположного события словесно формулировать соответствующее событие и противоположное ему событие.

Найдите вероятность события, что случайно выбранное число из чисел от –2 до 2 не является положительным.

Ложно	Если число не является положительным, значит, оно отрицательное. Так как среди чисел от –2 до 2 отрицательными являются –2 и –1, вероятность равна 0,4.	$\frac{2}{5} = 0{,}4$
Верно	Если число не является положительным, значит, оно либо отрицательное, либо равно нулю. Следовательно, это числа –2, –1 и 0. В этом случае вероятность равна 0,6.	$\frac{3}{5} = 0{,}6$

Подобные ошибки приводят к неправильным результатам при вычислении вероятности. Поэтому необходимо особо подчеркнуть ученикам важность полного перечисления всех возможных случаев при определении противоположного события.

6. При бросании игральной кости требуется найти вероятность события, противоположного произошедшему событию.

а) Выпало 6 очков. Противоположным этому событию является событие невыпадения 6 очков. Так как вероятность выпадения 6 очков равна $\frac{1}{6}$, вероятность противоположного события находится так. $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

в) Выпавшее число не является ни простым, ни составным. Противоположным этому событию является событие выпадения 1 очка. Так как вероятность события, что выпавшее число является простым или составным, равна $\frac{5}{6}$, вероятность противоположного события находится так: $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

Эту вероятность можно найти и так. Противоположное событие — выпадение 1 очка. Следовательно, имеется один возможный исход. Это означает, что вероятность наступления события равна $\frac{1}{6}$.

Решение задач

7. Когда автомобиль приближается к перекрёстку, могут произойти элементарные события A, B, C и D. На основании данных требуется найти вероятность наступления события D.

В задаче указаны следующие данные.

A: “Повернуть направо” C: “Ехать прямо”

B: “Повернуть налево” D: “Развернуться”.

$P(A) = 0{,}4$ $P(B) = 0{,}3$ $P(C) = 0{,}18$

Решение задачи

Если происходит один из 4 данных случаев, ни один из остальных трёх произойти не может. Следовательно, эти события являются несовместимыми. Вероятность наступления события D равна вероятности того, что ни одно из событий A, B или C не произойдёт. На основании правила нахождения вероятности противоположных событий вычисляется вероятность наступления события D.

$P(D) = 1 – (P(A) + P(B) + P(C)) = 1 – (0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}18) = 0{,}12$

Ответ. 0,12

8. В теннисном клубе 15 взрослых членов, 12 молодых и 8 подростков. Карточки с именем каждого участника помещены в ящик регистрации. Найдите вероятность события, что случайно извлечённая карточка принадлежит определённому участнику.

Решение задачи

а) Вероятность события, что карточка принадлежит взрослому участнику: $\frac{15}{15+12+8} = \frac{3}{7}$

б) Вероятность события, что карточка принадлежит подростку: $\frac{8}{15+12+8} = \frac{8}{35}$

в) Вероятность события, что карточка принадлежит молодому участнику: $\frac{12}{15+12+8} = \frac{12}{35}$

г) Вероятность события, что карточка не принадлежит ни молодому, ни взрослому, можно найти двумя способами.

1-й способ. Если карточка не принадлежит ни молодому, ни взрослому, значит, она принадлежит подростку. Вероятность события, что карточка принадлежит подростку, равна $\frac{8}{35}$.

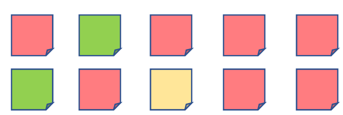
2-й способ. События, что карточка принадлежит молодому и взрослому, являются несовместимыми. Чтобы найти вероятность события, противоположного событию «карточка принадлежит молодому или взрослому», складываются вероятности этих событий и вычитаются из 1.

$1 – (\frac{3}{7} + \frac{12}{35}) = \frac{8}{35}$

Ответ. $\frac{8}{35}$

9. В игре в дартс на доске подвешены 6 красных, 4 синих, 5 жёлтых и 5 зелёных шаров. В результате броска один из шаров обязательно будет сбит. Найдите вероятность события, что при случайном броске будет сбит красный, жёлтый или зелёный шар. Задачу можно решить несколькими способами.

Привлечение



На стол ставится коробка, в которой находятся 7 красных, 2 зелёных и 1 жёлтый стикер. Ученикам, сообщив цвет и количество каждого стикера, задаются вопросы.

– Какое событие является противоположным событию, что извлечённая из коробки карточка имеет красный или зелёный цвет? Как можно вычислить вероятности этих событий?

После нескольких наводящих вопросов ответы учеников обобщаются и отмечается, что вероятность извлечения из коробки красного или зелёного стикера можно найти тремя способами:.

- ✓ *на основе отношения числа благоприятных исходов к числу возможных исходов*
- ✓ *найдя сумму вероятностей несовместимых событий*
- ✓ *используя противоположное событие*

Ответ находится каждым способом, и с классом обсуждается, какой способ является более удобным.

Решение задачи

1-й способ. При случайном броске число благоприятных исходов для события «попадание в красный, жёлтый или зелёный шар» (16) делится на число возможных исходов (20). $\frac{16}{20} = 0{,}8$

2-й способ. При случайном броске отдельно находится вероятность каждого из событий: попадание в красный, жёлтый или зелёный шар.

Красный: $\frac{6}{6+4+5+5} = 0{,}3$ Зеленый: $\frac{5}{6+4+5+5} = 0{,}25$ Желтый: $\frac{5}{6+4+5+5} = 0{,}25$

Так как эти события являются несовместимыми, вероятность наступления одного из них равна сумме найденных вероятностей. 0,3 + 0,25 + 0,25 = 0,8.
3-й способ. ротивоположным событию «попадание в красный, жёлтый или зелёный шар» является событие «попадание в синий шар». Находится вероятность попадания в синий шар и вычитается из 1.
1 – 0,2 = 0,8
Ответ. Вероятность события, что при случайном броске будет попадание в красный, жёлтый или зелёный шар, равна 0,8.
Обсуждение. Ученикам, решившим задачу одним из данных способов, можно предложить проверить ответ, используя другие способы.

Формативное оценивание

Критерии оценивания	**Материалы оценивания**
Объясняет несовместимые события и вычисляет их вероятность.	Рабочие листы, учебник, РТ
Определяет события, противоположные данному событию.	Рабочие листы, учебник, РТ
Вычисляет вероятность события, используя противоположное ему событие.	Рабочие листы, учебник, РТ

ОБОБЩАЮЩИЙ УРОК

Побуждение

В учебнике в заключении раздела повторяются понятия вместе с учениками. Изученные по разделу термины напоминаются ученикам учителем. По мере произнесения каждого понятия ученики объясняют его содержание, приводят примеры.

Среднее арифметическое, мода, медиана, событие, невозможное событие, достоверное событие, равновозможные события, случайное событие, элементарное событие, вероятность события, частота события, таблица частот, возможные исходы, благоприятные исходы, несовместимые события и противоположные события.

На первой странице раздела вспоминается информация о сферах применения методов статистики и теории вероятностей. С помощью резюме проводится общий обзор изученных правил. В задании «Попытайтесь!» обращается внимание на то, что при 20 вращениях стрелки спиннера, разделённого на равные сектора, результаты занесены в таблицу. Вспоминаются данные ответы, способы решения и обсуждается решение исходной задачи.

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

1. По данным составляется таблица частот.

б) Среди учеников класса был проведён опрос о том, какую музыку они любят больше всего: рок (R), поп (P), мугам (M), классическую (K).

Результаты опроса: R, R, R, M, P, R, M, P, K, K, M, P, R, P, P, P, M, K, K, K.

Для каждого вида музыки вычисляются частоты.

Рок: $\frac{5}{20}$ = 0,25   Поп: $\frac{6}{20}$ = 0,3   Мугам: $\frac{4}{20}$ = 0,2   Классика: $\frac{5}{20}$ = 0,25

Вид музыки	Число	Частота
Рок	5	0,25
Поп	6	0,3
Мугам	4	0,2
Классика	5	0,25
Итого	20	1

2. На основе данных сначала заполняется таблица, затем находятся медиана, мода и среднее арифметическое. Для заполнения таблицы можно использовать два способа.

б) Цвет футболок, которые ученики надели на флешмоб.

Цвет футболки	Число	Частота
Зеленый	6	0,24
Голубой	9	0,36
Красный	3	0,12
Синий	7	0,28
Итого	25	1

1-й способ. Общее количество футболок обозначается через x, составляется уравнение и, решив его, находится это число, после чего таблица заполняется.

$\frac{6}{x} = 0{,}24 \rightarrow x = 25$ Количество голубых футболок: 25 – (6 + 9 + 3) = 7

Частота выбора синего цвета: $\frac{9}{25}$ = 0,36   Частота выбора красного цвета: $\frac{3}{25}$ = 0,12

2-й способ астота выбора синей футболки обозначается через x, частота выбора красной футболки — через y, составляются соответствующие уравнения и находятся эти частоты.

$\frac{6}{0{,}24} = \frac{9}{x} \rightarrow x = 0{,}36$ $\frac{6}{0{,}24} = \frac{3}{y} \rightarrow y = 0{,}12$

Количество голубых футболок обозначается через z, составляется уравнение и находится это число.

$\frac{6}{0{,}24} = \frac{z}{0{,}28} \rightarrow z = 7$

Общее количество футболок. 6 + 9 + 3 + 7 = 25

В конце проверяется, что сумма частот равна 1.

Решение задачи разными способами даёт ученикам возможность проверить правильность ответа.

5. Находится вероятность события, происходящего при вращении стрелки спиннера.

а) Обозначив событие «стрелка остановится на чётном числе» через A, вероятность вычисляется как отношение числа благоприятных исходов к числу возможных исходов.

$P(A) = \frac{3}{8} = 0{,}375$

б) Вычисляется вероятность события, противоположного событию «стрелка остановится на чётном числе».

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625$

в) Обозначив событие «стрелка остановится на 1 или 2» через B, вероятность можно вычислить так:

$P(B) = \frac{2+3}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625$ или $P(\bar{B}) = \frac{3}{8}$ $P(B) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625$

7. Результаты опроса среди учеников о любимом цвете представлены на диаграмме Эйлера–Венна. Отмечается, что А — событие «случайно выбранный ученик любит красный цвет», В — событие «случайно выбранный ученик любит голубой цвет».

Находится число благоприятных исходов:

6 + 3 + 7 + 4 = 20

Отвечаются вопросы.

• Вероятность события A: $P(A) = \frac{6+3}{20} = \frac{9}{20} = 0{,}45$

• Вероятность события $\bar{A}$: $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$

• Вероятность события $\bar{B}$, то есть события «случайно выбранный ученик не любит голубой цвет», вычисляется аналогично. $P(\bar{B}) = \frac{6+4}{20} = 0{,}5$

• Вероятность события B: $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ или $P(B) = \frac{3+7}{20} = 0{,}5$

• Для события «случайно выбранный ученик не любит ни красный, ни голубой цвет» определяется число возможных исходов и вероятность: $\frac{4}{20} = 0{,}25$

В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания:

https://www.geogebra.org/m/m7pc9urh

К сведению учителя! Иногда ученики испытывают трудности при определении противоположных событий. Например, в задании 7 вероятность события Ā, то есть того, что случайно выбранный ученик не любит красный цвет, можно найти и на основе числа возможных исходов. Иногда ученики считают, что если не выбран красный цвет, то обязательно выбран голубой цвет. С такими учениками целесообразно обсудить, как определяется число возможных исходов. Следует отметить, что под теми, кто не выбирает красный цвет, понимаются не только выбирающие голубой цвет (7 человек), но и те, кто не выбирает ни один цвет (4 человека). В этом случае вероятность вычисляется так:

$P(\bar{A}) = \frac{7+4}{20} = \frac{11}{20} = 0{,}55$

10. Изготовленные на заводе шестеренки упаковываются в коробки. Из 50 шестеренок, помещённых в одну коробку, 2 оказываются бракованными. Сотрудник отдела контроля качества случайно извлекает одну шестеренку для проверки.

Решение задачи

• Вычисляется вероятность события « шестеренка будет бракованной». $\frac{2}{50} = 0{,}04$

• Находится число случаев, когда выбранная шестеренка будет качественной, и вычисляется вероятность.

$50 - 2 = 48$; $\frac{48}{50} = 0{,}96$.

Ответ. 0,04; 0,96

Обсуждение. Поскольку события «шестеренка бракованная» и « шестеренка качественная» являются противоположными, правильность ответа проверяется на основании того, что сумма вероятностей противоположных событий равна 1. 0,04 + 0,96 = 1.

11. Из 27 маленьких кубиков одинакового размера составили большой куб размером 3 × 3 × 3. Все грани полученного куба окрасили в разные цвета, как показано на рисунке. Требуется найти вероятность события для маленького кубика, случайно выбранного из большого куба.

Привлечение

Учитель ставит на стол кубик Рубика и обращается к ученикам:

– Сколько максимум граней может быть окрашено у маленького кубика? Какими способами это можно определить? Есть ли кубик с 1 или 4 окрашенными гранями? Как это объяснить? Как определить количество кубиков с двумя окрашенными гранями, используя общее число кубиков и число кубиков с тремя окрашенными гранями?

Чтобы направить учеников к ответу, что один кубик в центре не окрашен, можно показать изображения, соответствующие раскраске граней, и спросить, почему сумма окрашенных кубиков не равна 27.

Число маленьких кубиков с одной окрашенной гранью: 6

Число маленьких кубиков с двумя окрашенными гранями: 12

Число маленьких кубиков с тремя окрашенными гранями: 8

Решение задачи

• Чтобы найти вероятность события «у маленького кубика одна грань окрашена», число благоприятных исходов (6) делится на число возможных исходов (27): $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

• Вероятность события «у маленького кубика две грани окрашены»: $\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$

• Вероятность события «у маленького кубика три грани окрашены»: $\frac{8}{27}$

• Находится вероятность события «у маленького кубика ни одна грань не окрашена». Так как только центральный кубик не окрашен, число благоприятных исходов равно 1. Следовательно, вероятность того, что ни одна из граней маленького куба не будет окрашена, составляет $\frac{1}{27}$.

Ответ. $\frac{2}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{27}; \frac{1}{27}$

Обсуждение. Проверяется, что сумма вероятностей равна 1. $\frac{2}{9} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{1}{27} = 1.$

Математический калейдоскоп

1. Чтобы найти значение выражения, к знаменателям сначала применяется формула разности квадратов.

$$\frac{4}{5^2-2^2} + \frac{6}{10^2-3^2} + \frac{8}{17^2-4^2} = \frac{4}{(5-2)(5+2)} + \frac{6}{(10-3)(10+3)} + \frac{8}{(17-4)(17+4)} = \frac{4}{3 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 13} + \frac{8}{13 \cdot 21}$$

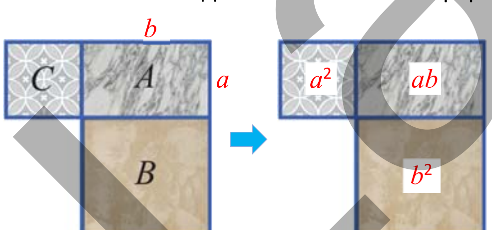
Так как разность множителей в знаменателях записана в числителе, каждую дробь можно представить в виде разности дробей с числителем 1. $\frac{4}{3 \cdot 7} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7}$ $\frac{6}{7 \cdot 13} = \frac{1}{7} - \frac{1}{13}$ $\frac{8}{13 \cdot 21} = \frac{1}{13} - \frac{1}{21}$

Учитывая это в данном выражении, вычисляется его значение.

$$\frac{4}{3 \cdot 7} + \frac{6}{7 \cdot 13} + \frac{8}{13 \cdot 21} = \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{7}} + \cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{13}} + \cancel{\frac{1}{13}} - \frac{1}{21} = \frac{1}{3} - \frac{1}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

2. Площадь прямоугольной плитки A равна 18 дм², периметр 32 дм. Требуется найти сумму площадей квадратных плиток B и C, прилегающих к сторонам плитки A.

Если стороны плитки A равны a и b, то её площадь $ab = 18$, а периметр $2(a + b) = 32$. Сумма площадей плиток B и C находится как $a^2 + b^2$. По формуле квадрата суммы находится значение выражения $a^2 + b^2$.



$2(a + b) = 32$
$a + b = 16$
$(a + b)^2 = 256$
$a^2 + 2ab + b^2 = 256$
$a^2 + 2 \cdot 18 + b^2 = 256$
$a^2 + b^2 = 220$

Обе части выражения возводятся в квадрат.
Учитывается, что $ab = 18$.

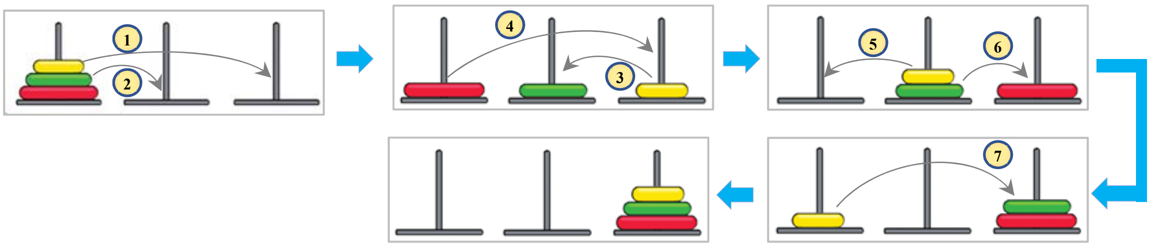
Ответ. Сумма площадей плиток B и C равна 220 дм².

3. Требуется изменить положение одной цифры так, чтобы полученное равенство стало верным.

a) $10 - 11 = 9$ ➡ $10 - 1^1 = 9$ b) $12 + 3 = 10$ ➡ $12 + 3^2 = 10$ c) $12 + 1 = 20$ ➡ $12^0 + 1 = 20$

4. “Согласно правилам известной игры «Ханойская башня», требуется перенести кольца, расположенные на одном стержне, на другой стержень за минимальное число ходов. При этом за один раз можно переносить только одно кольцо и нельзя класть большее кольцо на меньшее. Рекомендуется организовать игру среди учеников в классе.

• Три кольца можно перенести на второй стержень минимум за 7 ходов. Это можно найти и по выражению $2^3 - 1$.



• Для 4 колец минимальное число ходов равно $2^4 - 1 = 15$.
В классах с техническими возможностями можно использовать интерактивные задания:
https://www.mathplayground.com/logic_tower_of_hanoi.html

"СИСТЕМА ЭЛЕКТРОННОЙ ОЧЕРЕДИ"

Ученикам сообщается, что теория очередей применяется в сферах обслуживания с процессом ожидания для эффективной организации системы и минимизации времени ожидания. Объясняется способ вычисления коэффициента загрузки.

1. В течение одного часа за обслуживанием обратились 15 человек. Если оператор обслуживает одного человека за 3 минуты, вычисляется коэффициент загрузки системы. $\frac{15 \cdot 3}{60} = \frac{45}{60} = 0{,}75$.

2. Среднее время ожидания по дням недели указано в таблице. На основании этих данных находятся мода и медиана.

Дни недели	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	П.	Сб.	В.
Среднее время ожидания	23 мин.	15 мин.	20 мин.	26 мин.	25 мин.	15 мин.	15 мин.

Мода: 15 мин

Данные располагаются в возрастающем порядке, так как количество данных нечётное, медиана равна числу, находящемуся посередине.

Медиана 15 мин

15 мин, 15 мин, 15 мин, 20 мин, 23 мин, 25 мин, 26 мин

Чтобы найти вероятность события, что в случайно выбранный день среднее время ожидания не превышает 20 минут, число благоприятных исходов (4) делится на число возможных исходов (7). $\frac{4}{7}$

3. В интернете проводится исследование электронных очередей, среднего времени ожидания в «ASAN xidmət», и предлагаются предложения по его сокращению.
Ученикам можно предоставить ссылки на статистические данные по очереди:
https://asan.gov.az/online-queue/chart
Подготовленные презентации демонстрируются и организуется обсуждение.

BURAXILIŞ MƏLUMATI

Ümumi təhsil müəssisələrinin 7-ci sinifləri üçün
riyaziyyat fənni üzrə dərsliyin (qrif nömrəsi: 2026-019)
metodik vəsaiti
rus dilində

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər:	**Günay Hüseynzadə** **Sevda İsmayılova** **Zaur İsayev** **Məhəmməd Kərimov** **Aqşin Abdullayev**
Redaktor:	**Ayhan Kürşat Erbaş**
İxtisas redaktoru:	**İsmayıl Sadıqov**
Bədii redaktor:	**Taleh Məlikov**
Texniki redaktor:	**Zeynal İsayev**
Dizayner:	**Taleh Məlikov**
Rəssam:	**Fərid Quliyev**
Korrektor:	**Aqşin Mənsimov**

ISBN 978-9952-8402-2-3

Hesab-nəşriyyat həcmi: 31,8. Fiziki çap vərəqi: 33.
Səhifə sayı 264. Formatı: 57x82 1/8. Kəsimdən sonra ölçüsü: 195×275.
Şriftin adı və ölçüsü: Calibri 10-11 pt. Ofset kağızı. Ofset çapı.
Bakı – 2026.

Nəşr məhsulunu hazırlayan:
Azərbaycan Respublikasının Təhsil İnstitutu (Bakı ş., A.Cəlilov küç., 86).