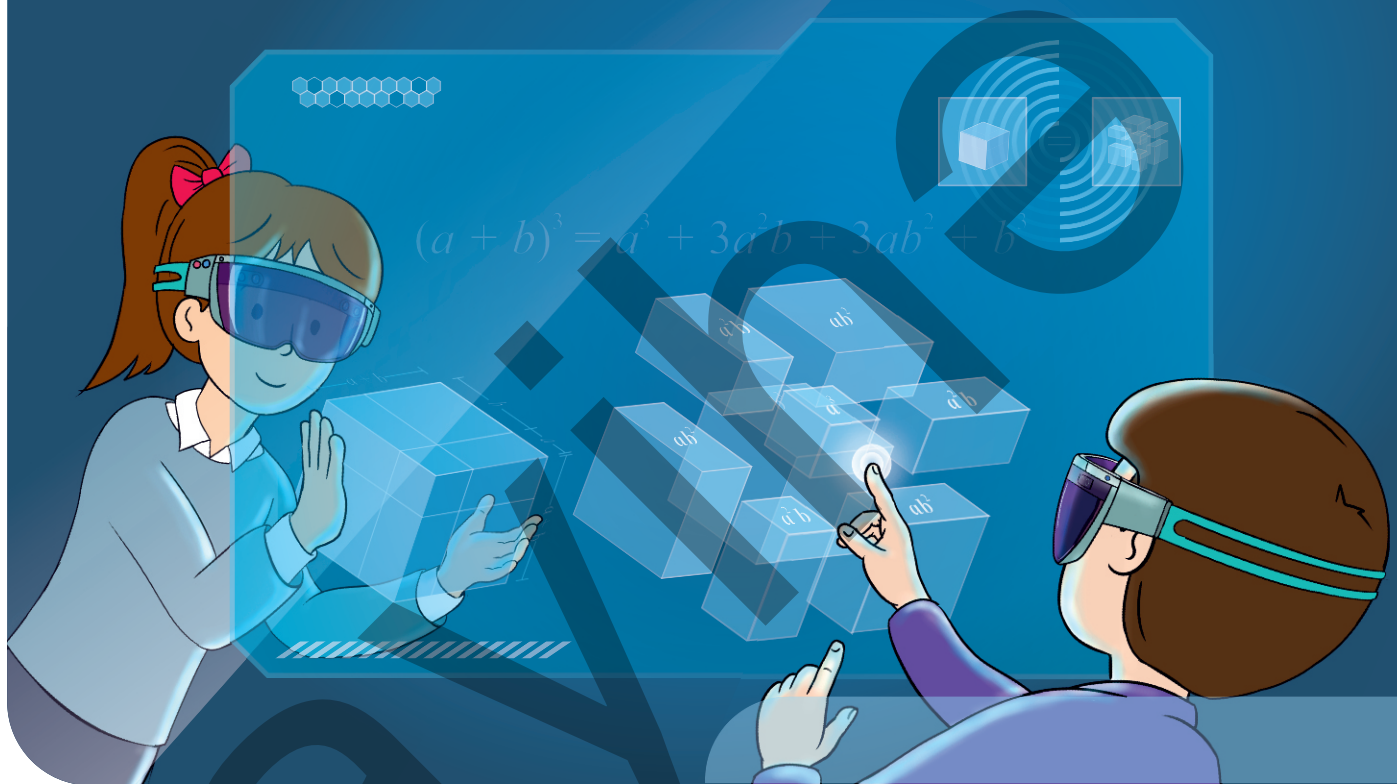


2-я часть

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



# МАТЕМАТИКА

УЧЕБНИК

7



## AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASININ DÖVLƏT HİMNİ

Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin,*  
sözləri *Əhməd Cavadındır.*

Azərbaycan! Azərbaycan!  
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!  
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!  
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!  
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!

Minlərlə can qurban oldu,  
Sinən hər bə meydan oldu!  
Hüququndan keçən əsgər,  
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,  
Sənə hər an can qurban!  
Sənə min bir məhəbbət  
Sinəmdə tutmuş məkan!

Namusunu hifz etməyə,  
Bayrağını yüksəltməyə  
Cümlə gənclər müştəqdir!  
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!  
Azərbaycan! Azərbaycan!



**ГЕЙДАР АЛИЕВ**  
**ОБЩЕНАЦИОНАЛЬНЫЙ ЛИДЕР**  
**АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО НАРОДА**

Levin & Quine

2-я часть

Заур Исаев  
Магомед Керимов  
Гюнай Гусейнзаде  
Агшин Абдуллаев  
Севда Исмаилова  
Ибрагим Махаров

# МАТЕМАТИКА

Учебник по предмету математика для 7-х классов  
общеобразовательных заведений  
(2-я часть)

7

©Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi



**Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)**

Bu nəşr Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International lisenziyası (CC BY-NC-SA 4.0) ilə [www.trims.edu.az](http://www.trims.edu.az) saytında əlçatandır. Bu nəşrin məzmunundan istifadə edərkən sözügedən lisenziyanın şərtlərini qəbul etmiş olursunuz:

İstinad zamanı nəşrin müəllif(lər)inin adı göstərilməlidir. 

Nəşrdən kommersiya məqsədilə istifadə qadağandır. 

Törəmə nəşrlər orijinal nəşrin lisenziya şərtlərilə yayılmalıdır. 

Bu nəşrlə bağlı irad və təkliflərinizi [trm@arti.edu.az](mailto:trm@arti.edu.az) və [derslik@edu.gov.az](mailto:derslik@edu.gov.az) elektron ünvanlarına göndərməyiniz xahiş olunur.  
Əməkdaşlığınız üçün əvvəlcədən təşəkkür edirik!

# СОДЕРЖАНИЕ

## Раздел 6 Функция 5

	Предварительная проверка	6
6.1.	Функция	7
6.2.	График функции	11
6.3.	Линейная функция и ее график	14
	Заключение	19
	Обобщающие задания	20
	STEAM. "Путешествие в галактику Андромеды"	22

## Раздел 7 Окружность, круг и шар 23

	Предварительная проверка	24
7.1.	Окружность	25
7.2.	Центральный угол. Вписанный угол	29
7.3.	Углы между хордами, секущими и касательными	33
7.4.	Длина дуги. Площадь сектора	38
7.5.	Шар. Площадь поверхности и объем шара	42
	Заключение	45
	Обобщающие задания	46
	STEAM. "Планетарий"	48

## Раздел 8 Линейное уравнение. Система уравнений. Неравенство

	Предварительная проверка	50
8.1.	Линейное уравнение с одной переменной	51
8.2.	Линейное уравнение с двумя переменными и его график	54
8.3.	Система уравнений	58
	Задачи и примеры	61
8.4.	Решение системы линейных уравнений способами подстановки и сложения	62
8.5.	Решение задач с помощью системы уравнений	65
8.6.	Уравнения с модулем	69
8.7.	Неравенства	71
8.8.	Приближённые вычисления. Абсолютная и относительная погрешность	74
	Заключение	77
	Обобщающие задания	78
	STEAM. "Умные светофоры"	80

## Раздел 9 Вращение и симметрия. Задачи на построение 81

	Предварительная проверка	82
9.1.	Вращение в координатной плоскости	83
9.2.	Симметрия относительно точки	87
9.3.	Задачи на построение	90
	Заключение	93
	Обобщающие задания	94
	STEAM. "Ковры Азербайджана"	96

## Раздел 10 Статистика и вероятность 97

	Предварительная проверка	98
10.1.	Частота события	99
10.2.	Элементарное событие	103
10.3.	Несовместные события	106
	Заключение	109
	Обобщающие задания	110
	STEAM. "Система электронной очереди"	112

	Обобщающие задания за 7-й класс	113
	Словарь математических терминов	121
	Ответы	123

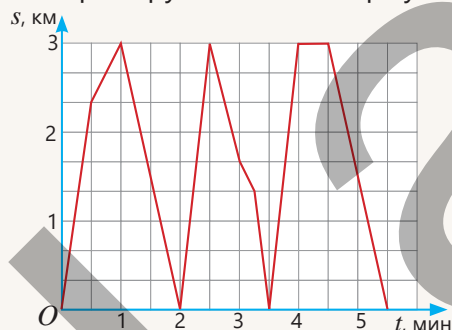
# Функция

## В этой главе вы научитесь:

- выражать зависимости между величинами в виде функции;
- представлять функцию с помощью формулы, таблицы и графика;
- объяснять понятие линейной функции;
- строить график линейной функции;
- решать различные задачи с помощью функций.

## Попытайтесь!

На графике представлена зависимость пройденного расстояния болида (гоночной машины) от времени при прохождении трех кругов гонки "Формула-1".



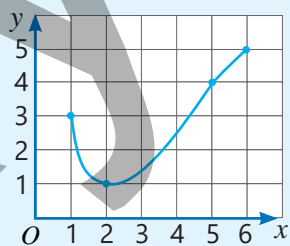
- Сколько км составляет длина одного круга?
- Какова была средняя скорость на первом круге?
- Какой круг болид завершил быстрее? Какова была его средняя скорость на этом круге?
- В какой момент болид заехал на пит-стоп (технический перерыв)? Сколько времени занял технический перерыв?



Во многих природных явлениях одна величина изменяется в зависимости от другой. Например, пройденный путь зависит от времени, площадь квадрата – от его стороны, а оплаченная сумма – от цены и количества приобретенного товара.

Для выражения зависимости одной величины от другой используется понятие "функция". Слово "функция" в переводе с латинского означает "исполнять", "происходить".

Функции помогают понять закономерности между явлениями и величинами, делать определенные прогнозы и проводить моделирование. График функции позволяет наглядно анализировать эти зависимости.



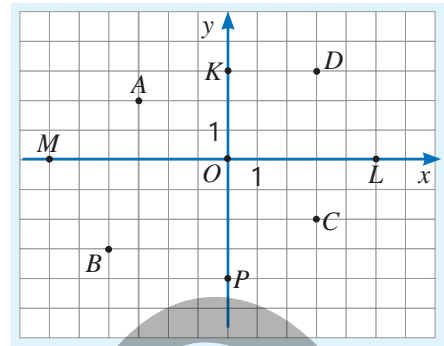
x	y
1	3
2	1
5	4
6	5



Часто функцию представляют в виде правила, преобразующего значения величины на входе в значения на выходе.

# Предварительная проверка

- 1 Определите координаты заданных точек в прямоугольной системе координат.
- а) Какие точки лежат на оси абсцисс, а какие — на оси ординат?
- б) В каких четвертях расположены точки  $A, B, C, D$ ?



- 2 Отметьте заданные точки в прямоугольной системе координат. Проведите прямую через них и запишите координаты точек пересечения этой прямой с осями координат.

а)  $A(-1; 3)$  и  $B(-3; -3)$

б)  $C(3; -2)$  и  $D(-4; 5)$

в)  $E(-2; -4)$  и  $F(4; -1)$

- 3 Найдите значение выражения при данных значениях переменной.

а)  $2a - 1,4$

при  $a = -3,8; -2,4; 0,8$

б)  $3 - 1,5x$

при  $x = -2\frac{4}{5}; 0,4; -2$

- 4 Переменная  $y$  прямо или обратно пропорциональна переменной  $x$ .

- Определите эту зависимость по таблице и дополните таблицу.
- Для прямой пропорциональности найдите коэффициент пропорциональности, запишите соответствующую формулу и постройте график.

а)

$x$	2	3	4	5
$y$	6	9	12	

в)

$x$	1	2	3	
$y$	4	8	12	16

д)

$x$	3	4		18
$y$	12	9	4	

б)

$x$	1	2	3	6
$y$	6	3		

г)

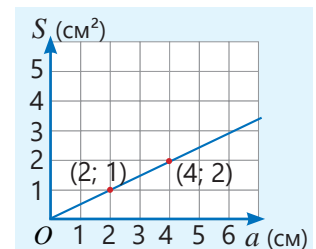
$x$	2	4	8	
$y$	8	4		1

е)

$x$	6		10	12
$y$	3	4	5	

- 5 Площадь прямоугольника ( $S$ ) при заданной ширине прямо пропорциональна его длине ( $a$ ). Используя график, запишите формулу зависимости площади прямоугольника от его длины.

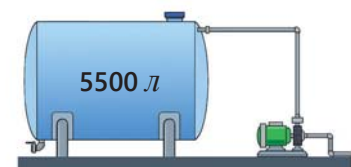
- Чему равна ширина прямоугольника?
- Что обозначают координаты точек, отмеченных на графике?



- 6 Из одного ведра молока получается 0,7 кг масла. Обозначив количество полных ведер молока как  $x$ , а массу полученного масла как  $y$ , выразите зависимость  $y$  от  $x$  формулой.

- Найдите значение  $y$ , если  $x = 10, 15$  и  $24$ .
- Сколько ведер молока потребуется, чтобы получить 9,1 кг масла?

- 7 Насос за 2 часа перекачивает 2400 л воды. Обозначив объем воды через  $V$ , а время работы насоса (в часах) — через  $t$ , выразите  $V$  через  $t$ . Заполнит ли этот насос пустой бак объемом 5500 л за 4,5 часа? Обоснуйте свой ответ.



## 6.1. Функция

### Исследование-обсуждение

Анар отправился в магазин, находящийся на расстоянии 100 метров от дома. Выходя из магазина, он запустил на телефоне приложение, отслеживающее количество шагов. Длина каждого его шага составляет 50 см. Чтобы определить общий пройденный путь, Анар сложил расстояние до магазина и путь, измеренный по числу его шагов.



Число шагов ( $x$ )	Путь в метрах ( $y$ )
20	110
30	115
50	125
60	?
80	?



### Ключевые слова

- диаграмма соответствия
- функциональная зависимость
- аргумент
- функция
- область определения
- множество значений

Объясните соответствие между числами на диаграмме и найдите подходящие числа вместо знаков "?".

Определите подходящие числа для пустых ячеек на вычислительной машине.

Выразите зависимость переменной  $y$  от переменной  $x$  с помощью формулы.



### Изучение Функция

В ряде случаев изменение одной величины приводит к изменению другой. Иными словами, между значениями этих величин устанавливается определенная закономерность. Например, расстояние ( $s$ ), которое проезжает автомобиль со скоростью 70 км/ч, зависит от времени ( $t$ ), затраченного на путь.

$$s = 70t$$

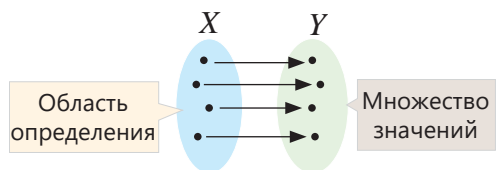
Здесь:  $s$  – зависимая переменная,  $t$  – независимая переменная. Зависимость между величинами можно представить с помощью **диаграммы соответствия**. В приведенном примере каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной.

Диаграмма соответствия  
Время ( $t$ , ч)      Расстояние ( $s$ , км)

1	70
2	140
2,5	175
⋮	⋮

Если каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной, такая зависимость называется **функциональной зависимостью**, или **функцией**. Независимая переменная называется **аргументом**, а зависимая переменная является функцией аргумента. Обычно аргумент обозначается буквой  $x$ , а функция —  $y$ . Функциональная зависимость записывается как  $y(x)$ .

Значения, которые может принимать независимая переменная, образуют **область определения** (множество  $X$ ). А значения, принимаемые зависимой переменной, образуют **множество значений** функции (множество  $Y$ ).



**ОБРАЗЕЦ.** Если обозначить сторону квадрата как  $a$ , а его площадь как  $S$ , зависимость площади от стороны можно записать в виде функции:

$$S(a) = a^2$$

Так как  $a$  – длина стороны квадрата, а  $S$  – его площадь, они могут принимать только положительные значения. Следовательно, и область определения функции, и множество значений функции являются множеством положительных чисел.

Подставляя разные значения  $a$ , можно найти соответствующие значения  $S$ .

$$a = 1 \text{ см} \rightarrow S = 1^2 = 1 \text{ (см}^2\text{)}$$

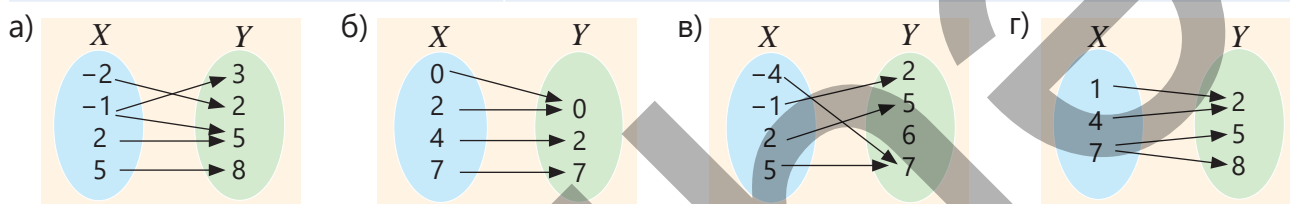
$$a = 1,5 \text{ см} \rightarrow S = 1,5^2 = 2,25 \text{ (см}^2\text{)}$$

## Задания

- 1 Выражает ли соответствие, представленное на диаграмме, функциональную зависимость? Обоснуйте свое мнение.

**ОБРАЗЕЦ** решение пункта а)

Решение	Объяснение
Соответствие между $X$ и $Y$ , представленное на диаграмме, не является функциональной зависимостью. $-1 \rightarrow 3$ и $-1 \rightarrow 5$	Функциональная зависимость — это когда каждому элементу множества $X$ соответствует только один элемент множества $Y$ . Так как элементу $-1$ соответствуют сразу два элемента ( $3$ и $5$ ), данное соответствие не является функциональной зависимостью.



- 2 В вычислительную машину вводится число и на выходе получается противоположное ему число. Запишите числа, которые будут получены на выходе, если на вход подаются числа  $-33$ ;  $45$ ;  $2$ ;  $(6)$ ;  $-7$ ;  $900$ ;  $-125$ . Изобразите их на диаграмме соответствия. Обоснуйте, что эта зависимость является функцией.

- 3 Цена 1 кг яблок составляет 2 маната. Масса купленных яблок равна  $m$  кг, а сумма, которую покупатель заплатил, равна  $s$  манатов. Впишите подходящие числа в пустые клетки. Какая зависимость представлена на диаграмме?



## Изучение Способы задания функции

Функция в основном задаётся тремя способами: формулой, таблицей и графиком.

### 1. Задание функции формулой:

**ОБРАЗЕЦ.** Заработная плата сотрудника состоит из его месячного оклада (2000 манатов) и доплаты по 50 манатов за каждый час сверхурочной работы.

$$P(t) = 2000 + 50t$$

Здесь зависимость зарплаты ( $P$ , манат) от количества сверхурочных часов ( $t$ , час) задана формулой. Если функция задана формулой, то, подставив в неё значение аргумента, можно найти соответствующее значение функции. Например, если сотрудник за месяц отработал дополнительно 20 часов, его месячная заработная плата вычисляется следующим образом:

$$P(20) = 2000 + 50 \cdot 20 = 3000 \text{ (манатов)}$$

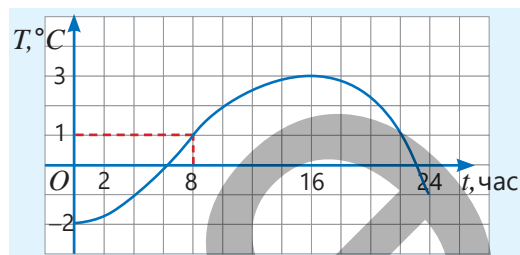
## 2. Задание функции таблицей

**ОБРАЗЕЦ.** В таблице приведена зависимость массы ( $m$ ) тела, изготовленного из чугуна, от его объема ( $V$ ). По таблице можно определить значение функции  $m(V)$  для каждого значения  $V$ . Например, масса тела объемом  $1 \text{ см}^3$  составляет  $7 \text{ г}$ :  $m(1) = 7$ .

$V, \text{ см}^3$	1	2	3
$m(V), \text{ г}$	7	14	21

## 3. Задание функции графиком

**ОБРАЗЕЦ.** На графике изображена зависимость температуры воздуха ( $T$ ) от времени ( $t$ ) в течение дня. По графику можно определить значение функции  $T(t)$  для каждого значения  $t$ . Например, в 8 часов температура воздуха составляет  $1^\circ\text{C}$ :  $T(8) = 1$ .



### Подумай!

На основании графика определите самую высокую и самую низкую температуры воздуха в течение дня. В какое время суток были зафиксированы эти температуры?

4. Функция задана формулой  $y(x) = 0,4x - 8$ .
- Найдите значение функции при значениях аргумента:  $10$ ;  $100$ ;  $0,1$ ;  $-10$ .
  - При каком значении аргумента функция принимает значения:  $10$ ;  $50$ ;  $-0,25$ ?
5. Значение функции получается путем деления аргумента на 3 и прибавления числа  $8,2$ .
- Запишите соответствующую формулу, обозначив аргумент как  $x$ , а функцию – как  $y$ .
  - Заполните таблицу.

$x$	$-12$		$2,7$	
$y$		$8,2$		$0$



### Из истории математики



**Даниил Бернулли**  
(1700–1782)

Термин "функция" впервые встречается в работах Г.В. Лейбница в 1673 году. Лейбниц называл этот термин *relatio*. Определение функции впервые дал швейцарский математик Д. Бернулли в 1718 году.

Позже, в 1748 году, Леонард Эйлер уточнил определение функции. Он предложил обозначать функцию символом  $f$ , и с тех пор функция, зависящая от независимой переменной  $x$ , записывается как  $y = f(x)$ .



**Готфрид Вильгельм Лейбниц**  
(1646–1716)

## Решение задач

6. Длины сторон прямоугольника равны  $2,5 \text{ см}$  и  $x \text{ см}$ . Площадь прямоугольника равна  $S \text{ см}^2$ .
- Запишите зависимость  $S(x)$  в виде формулы.
  - Найдите значение  $S(x)$  при  $x = 4 \text{ см}$ ;  $7 \text{ см}$ ,  $10 \text{ см}$ .

- 7 Выполните задания ( $\pi \approx 3$ ).
- Запишите формулу зависимости длины окружности от ее диаметра. Найдите значение функции при  $d = 3$  см; 4 см; 5,1 см.
  - Запишите формулу функциональной зависимости площади круга от его диаметра. Найдите значение функции при  $d = 1,2$  мм; 3 см; 4,2 дм.

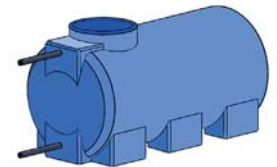
- 8 У Айнур было 3 маната 50 гяпиков. Она купила  $x$  тетрадей по цене 50 гяпиков каждая, после чего у нее осталось  $y$  гяпиков.
- Запишите функцию  $y(x)$  в виде формулы.
  - Составьте таблицу для соответствующих значений  $x$  и  $y$ .



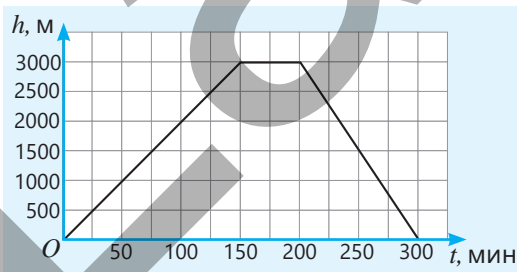
- 9 На уровне моря нормальное атмосферное давление принимается за 1 атмосферу (атм).
- При погружении ниже уровня моря давление увеличивается на 1 атм каждые 10 метров. Впишите подходящие числа в пустые ячейки таблицы.
  - Определите, является ли соответствие между глубиной и давлением функцией.
  - Запишите зависимость между глубиной ( $h$ ) и давлением ( $P$ ) в виде формулы.

$h$ (глубина, м)	$P$ (давление, атм)
0	1
10	2
20	
30	
	5
	6

- 10 В баке содержится 5 тонн воды. Ежедневно используется 0,2 тонны воды.
- Если через  $x$  дней в баке останется  $y$  тонн воды, запишите функцию  $y(x)$  в виде формулы.
  - Найдите значение  $y$  при  $x = 3; 4; 15$ .
  - Через сколько дней в баке останется 1,5; 2,1; 0,5 тонн воды?
  - На сколько дней хватит воды в баке?



- 11 На графике изображена зависимость высоты ( $h$ ), на которую поднялся альпинист, от времени ( $t$ ).
- На какую максимальную высоту поднялся альпинист?
  - С какой скоростью он поднимался на эту высоту?
  - Сколько времени он потратил на то, чтобы вернуться?
  - На основе графика заполните таблицу.



$t$ (время, мин)	$h$ (высота, м)
50	
75	
150	
200	
250	
300	

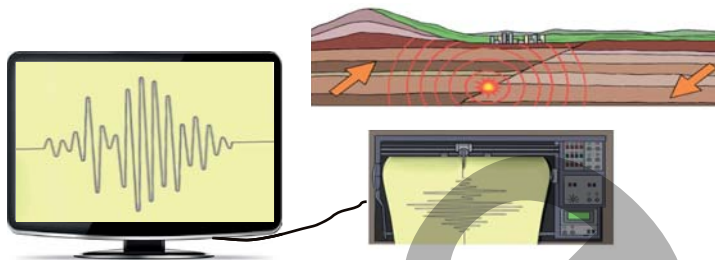
- 12 Предлагаются два тура морской прогулки.
- Запишите формулу зависимости стоимости ( $y$ , манат) от продолжительности ( $x$ , час) для каждого тура.
  - Для 2-часовой и 4-часовой прогулки определите, какой тур выгоднее.
  - При какой продолжительности прогулки стоимость обоих туров будет одинаковой?



## 6.2. График функции

### Исследование-обсуждение

Во время землетрясения для регистрации подземных толчков используется прибор, называемый сейсмографом. Во время толчков часть прибора, удерживающая бумажную ленту, вибрирует, и перо рисует колебания на бумажной ленте.

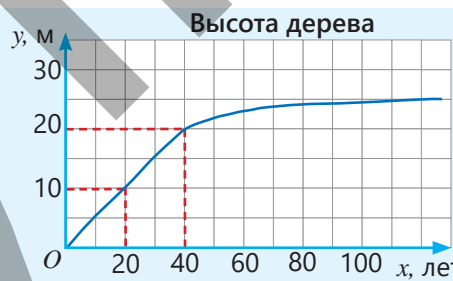


- Чем сильнее подземные толчки, тем больше высота линий на полученном графике. А плотность линий показывает, как часто происходят толчки. Как это можно объяснить?
- Если перо сейсмографа рисует только прямую линию, что это означает?

### Изучение График функции

Графики дают наглядное представление о том, как функция изменяется в зависимости от аргумента. Каждая точка на графике имеет абсциссу, равную значению аргумента, и ординату, равную соответствующему значению функции. На основе графика можно определить (обычно приблизительно) значение функции при определенных значениях аргумента.

**ОБРАЗЕЦ.** Представленный график позволяет увидеть, как высота дерева ( $y$ ) изменяется в зависимости от его возраста ( $x$ ). На основе графика функции  $y(x)$  можно определить высоту дерева по его возрасту или возраст дерева по его высоте. Например, чтобы найти высоту 40-летней елки, на графике находится точка с абсциссой 40 и определяется ее ордината:  $y(40) = 20$ .



Чтобы определить, в каком возрасте высота дерева составляла 10 метров, на графике находится точка с ординатой 10 и определяется ее абсцисса:  $y(20) = 10$ .

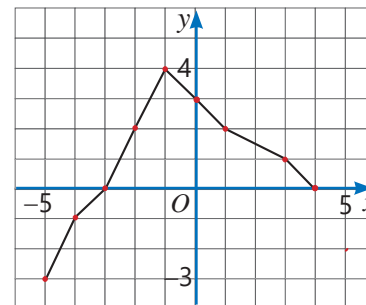


### Подумай!

Какие из точек  $(2; 6)$ ,  $(-1; 3)$ ,  $(4; 8)$ ,  $(-3; -9)$  принадлежат графику функции  $y = 3x$ ? Как это определить по формуле?

### Задания

- 1 На основе графика функции  $y(x)$  выполните задания.
  - а) Найдите  $y$  при  $x = -4; -3; 0; 1; 2; 3$ .
  - б) Найдите такие значения  $x$ , при которых  $y = -1; 0; 2; 4$ .
  - в) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции. Определите, при каких значениях аргумента функция принимает эти значения.



- 2 Определите, принадлежит ли точка с заданными координатами графику функции  $y = -2x$ .

**ОБРАЗЕЦ** а)  $(-1; 2)$  б)  $(2; 4)$

Решение	Объяснение
а) $y(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$ Точка $(-1; 2)$ принадлежит графику функции.	При $x = -1$ получаем $y = 2$ . Это значение функции совпадает с ординатой заданной точки.
б) $y(2) = -2 \cdot 2 = -4$ Точка $(2; 4)$ не принадлежит графику функции.	При $x = 2$ получаем $y = -4$ . Это значение функции не совпадает с ординатой заданной точки.

в)  $(-2; 4)$  г)  $(-1; -2)$  д)  $(0; 1)$  е)  $(1; -2)$  ж)  $(2; -2)$  з)  $(3; -6)$

- 3 Определите, принадлежат ли заданные точки графику функции.

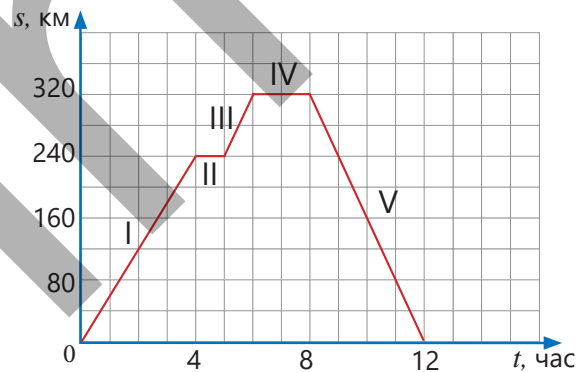
а)  $(-1; -3), (2; -2), (0; -4)$   
 $y = x - 4$

б)  $(1; -1), (-2; 4), (3; 27)$   
 $y = x^2$

в)  $(0; 0), (-1; 1), (2; 8), (-2; -8)$   
 $y = x^3$

## Изучение Чтение графиков

Графическое представление зависимости одной величины от другой позволяет получить различную информацию об этих величинах. Например, на рисунке изображён график изменения расстояния грузовика от склада с течением времени. Согласно графику, грузовик за 12 часов удалился от склада на максимальное расстояние 320 км, а затем вернулся обратно. График условно можно разделить на 5 частей.



Часть I: В течение 4 часов расстояние от склада увеличивается, то есть грузовик удаляется от склада.

Часть II: В течение 1 часа расстояние от склада не изменяется, то есть грузовик стоит на месте.

Часть III: В течение 1 часа расстояние снова увеличивается, то есть грузовик продолжает удаляться.

Часть IV: В течение 2 часов расстояние от склада не изменяется, то есть грузовик стоит на месте.

Часть V: В течение 4 часов грузовик возвращается на склад.

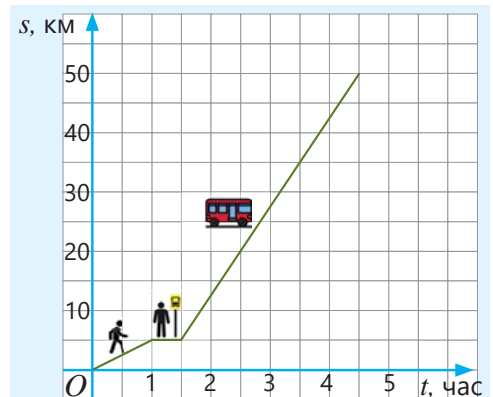


### Подумай!

Зная, что скорость грузовика остается постоянной на каждом участке, как можно определить скорость на этих участках? Если грузовик начинает движение в 22:00, в какое время он будет находиться на расстоянии 240 км от склада?

- 4 Турист вышел из отеля и сначала пешком дошел до остановки, откуда отправился на автобусную экскурсию по городу. На графике изображена зависимость пройденного им пути от времени.

- С какой скоростью турист шел пешком?
- Сколько времени он потратил на ожидание автобуса?
- Какова скорость автобуса?
- Сколько километров, выйдя из отеля, турист прошел за 3,5 часа?



5 На графике изображена зависимость температуры воздуха от времени в течение дня.

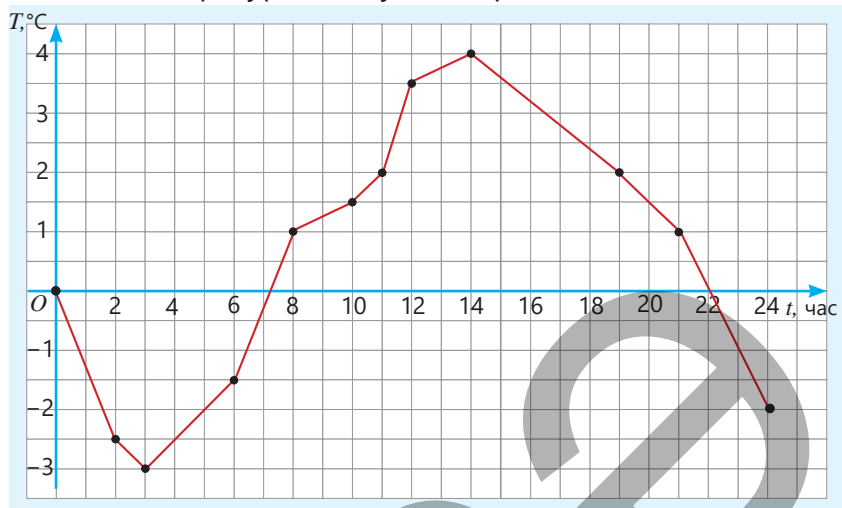
а) Какой была температура воздуха в 2 часа; 8 часов; 12 часов?

б) В какое время суток температура воздуха составляла  $1,5^{\circ}\text{C}$ ?

в) В какое время температура была самой низкой, а в какое — самой высокой? Какой была температура в это время?

г) В какой промежуток времени изменение температуры было больше: между 6 и 8 часами или между 8 и 10 часами?

д) На сколько градусов изменилась температура воздуха к концу дня по сравнению с началом?



### Решение задач

6 На рисунке приведены графики зависимости стоимости поездки от расстояния для такси компаний А и В.

а) Какова начальная плата за такси в каждой из компаний?

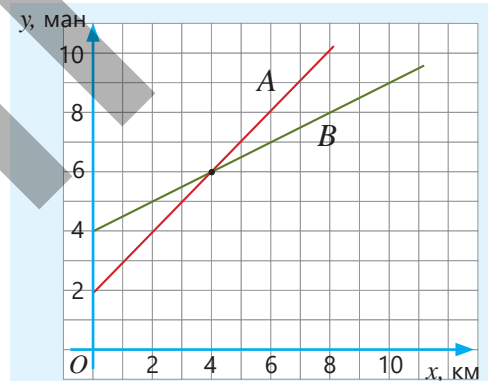
б) Сколько нужно заплатить за 8 км в каждой из компаний?

в) При каком расстоянии стоимость поездки в обеих компаниях будет одинаковой?

г) По какой формуле рассчитывается стоимость поездки для той или иной компании?

$$y = 4 + 0,5x$$

$$y = 2 + x$$



7 На рисунке приведены графики зависимости тормозного пути автомобиля от его скорости на мокрой и сухой дорогах. При одинаковой скорости тормозной путь на мокрой дороге длиннее, чем на сухой.

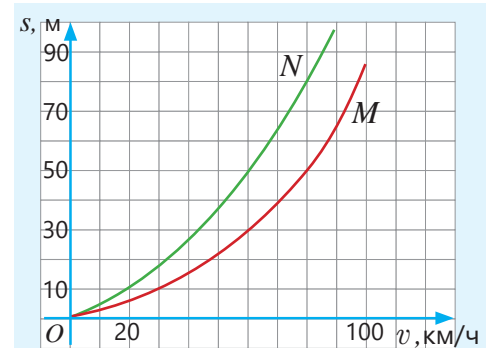
а) Какой из графиков описывает тормозной путь на сухой дороге, а какой — на мокрой?

б) Каков тормозной путь автомобиля, движущегося со скоростью  $60\text{ км/ч}$ , на сухой и на мокрой дороге?

в) С какой скоростью двигался автомобиль, если на сухой дороге тормозной путь составляет  $30\text{ м}$ ? Каков будет тормозной путь на мокрой дороге при этой скорости?

г) Водитель автомобиля, движущегося со скоростью  $80\text{ км/ч}$  по сухой дороге, увидев препятствие впереди на расстоянии  $60\text{ м}$ , нажал на тормоз.

Избежит ли автомобиль столкновения с препятствием?



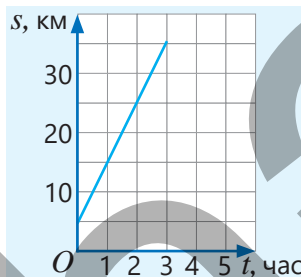
## 6.3. Линейная функция и ее график

### Исследование-обсуждение

Эльхан вышел из дома и дошел до парковки скутеров, расположенной в 5 км от дома. Затем он сел на скутер и продолжил движение в том же направлении. На графике изображена зависимость расстояния от дома ( $s$ ) от времени, проведенного за управлением скутером ( $t$ ).

- На каком расстоянии от дома находился Эльхан через 1 час; 2 часа после начала поездки на скутере?
- С какой скоростью он ехал на скутере? Как это можно определить по графику?
- Определите формулу, которая показывает функциональную зависимость между  $s$  и  $t$ .

$$s = 10t \quad s = 10t - 5 \quad s = 10t + 5$$



### Ключевые слова

- линейная функция
- угловой коэффициент

### Изучение Линейная функция и ее график

Функция, заданная формулой  $y = kx + b$ , называется **линейной функцией**. Здесь  $k$  и  $b$  — заданные числа. Например,  $y = 2x + 5$  — это линейная функция, где  $k = 2$ ,  $b = 5$ .

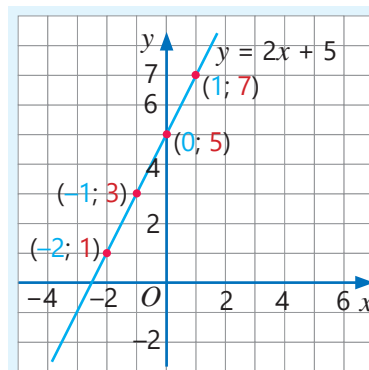
Чтобы построить график линейной функции, находят значения функции для различных значений аргумента, отмечают в системе координат точки с координатами  $(x, y)$  и последовательно соединяют их отрезками.

**ОБРАЗЕЦ.** График функции  $y = 2x + 5$  можно построить следующим образом:

- 1 Найти значения функции для нескольких значений  $x$  и записать в таблицу.

$$\begin{aligned} x = -2 &\rightarrow y = 2 \cdot (-2) + 5 = 1 \\ x = -1 &\rightarrow y = 2 \cdot (-1) + 5 = 3 \\ x = 0 &\rightarrow y = 2 \cdot 0 + 5 = 5 \\ x = 1 &\rightarrow y = 2 \cdot 1 + 5 = 7 \end{aligned}$$

$y = 2x + 5$		
$x$	$y$	$(x; y)$
-2	1	(-2; 1)
-1	3	(-1; 3)
0	5	(0; 5)
1	7	(1; 7)



- 2 В прямоугольной системе координат отметить соответствующие точки. Как видно, эти точки лежат на одной прямой. Провести прямую через эти точки.



### Запомни!

График линейной функции — прямая линия. Чтобы построить график линейной функции, достаточно знать координаты двух точек, лежащих на этой прямой.

### Задания

- 1 Определите, является ли функция линейной. В линейных функциях определите  $k$  и  $b$ .

а)  $y = 2x - 6$

в)  $y = 9 - 3x$

д)  $y = -x + 1$

ж)  $y = x^2 - 1$

б)  $y = \frac{1}{2}x - 1$

г)  $y = \frac{x}{3} - 7$

е)  $y = \frac{5}{x} + 1$

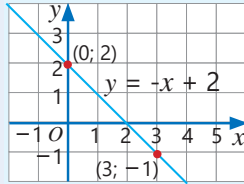
з)  $y = \frac{11x - 3}{2}$

- 2 Линейная функция задана формулой  $y = 0,4x + 8$ .  
 а) Найдите значения функции при  $x = -10; -4; 0; 5$ .  
 б) При каких значениях  $x$  функция принимает значения  $y = 0; 6; 10$ ?
- 3 Постройте график линейной функции.

**ОБРАЗЕЦ**  $y = -x + 2$

**Решение**

$x = 0 \rightarrow y = 0 + 2 = 2$   
 $x = 3 \rightarrow y = -3 + 2 = -1$   
 (0; 2) (3; -1)



**Объяснение**

Для двух произвольных значений  $x$  находят соответствующие значения  $y$ . Отмечаются соответствующие точки в системе координат и проводится прямая через эти точки.

а)  $y = 2x + 1$

б)  $y = 1 - x$

в)  $y = x - 4$

г)  $y = 3x + 2$

д)  $y = \frac{1}{2}x + 1$

### Изучение Угловой коэффициент $k$ графика линейной функции

На рисунке приведены графики функций  $y = x + 2$  и  $y = 0,5x + 2$ . Эти графики пересекают ось абсцисс под разными углами. Угол, который график функции  $y = x + 2$  образует с положительным направлением оси  $Ox$ , больше угла, который образует график функции  $y = 0,5x + 2$ . Угол, образованный прямой, являющейся графиком линейной функции  $y = kx + b$ , с осью абсцисс, зависит от коэффициента  $k$ .

Число  $k$  называется **угловым коэффициентом** прямой  $y = kx + b$ .

Для любых двух точек на графике линейной функции отношение разности значений функции к разности значений аргумента постоянно и равно угловому коэффициенту прямой.

Например, для функции  $y = 2x + 1$  это отношение можно найти следующим образом:

Для точек (0; 1) и (2; 5)

$$\frac{5 - 1}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$

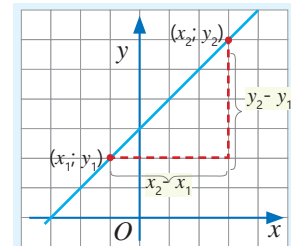
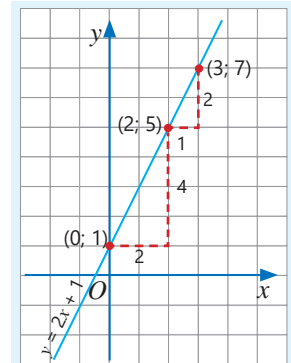
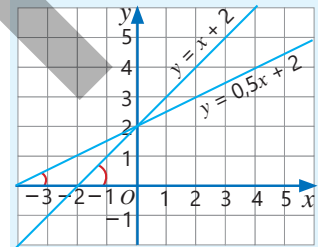
Для точек (2; 5) и (3; 7)

$$\frac{7 - 5}{3 - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

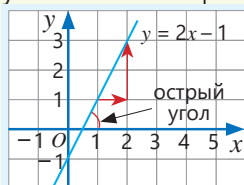
Как видно, найденные отношения постоянны и равны угловому коэффициенту прямой  $y = 2x + 1$   $k = 2$ .

• Угловой коэффициент прямой, являющейся графиком линейной функции, можно найти по двум точкам  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$  на этой прямой.

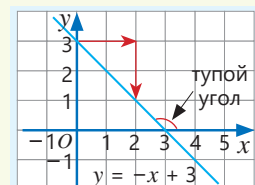
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



При  $k > 0$  график функции представляет собой прямую, которая образует острый угол с осью абсцисс и поднимается вверх слева направо. Другими словами, по мере увеличения значений аргумента соответствующие значения функции также увеличиваются.



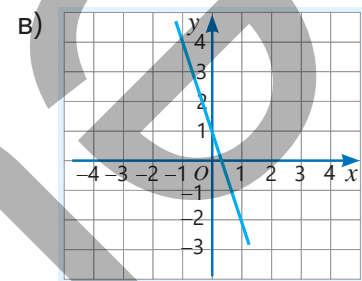
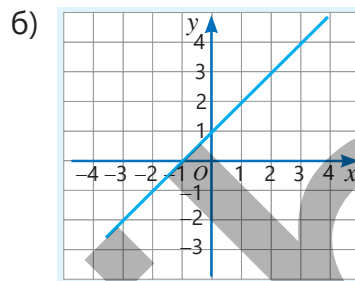
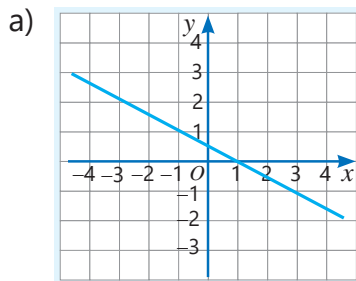
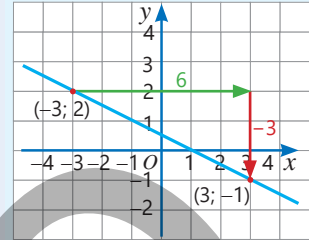
При  $k < 0$  график функции представляет собой прямую, которая образует тупой угол с осью абсцисс и опускается вниз слева направо. Иными словами, по мере увеличения значений аргумента соответствующие значения функции уменьшаются.



- 4 Найдите угловой коэффициент по графику линейной функции.

**ОБРАЗЕЦ** решение пункта а)

Решение	Объяснение
$(-3; 2)$ и $(3; -1)$ $k = \frac{-1-2}{3-(-3)} = \frac{-3}{6} = -0,5.$ Ответ: $k = -0,5$	На графике выбирают две произвольные точки и определяют их координаты. Находят отношение разности значений функции к разности значений аргумента.



- 5 Найдите угловой коэффициент линейной функции, заданной таблицей.

а) 

x	2	4	8
y	6	8	12

б) 

x	-5	0	1
y	-5	10	13

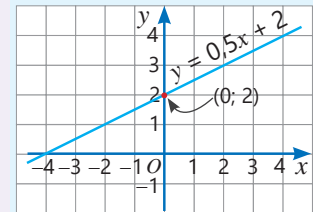
в) 

x	0	1	2
y	2	2	2

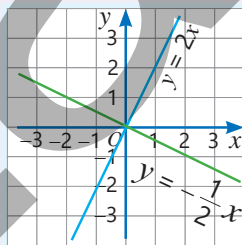


### Запомни!

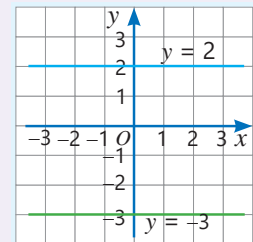
• В формуле  $y = kx + b$  при  $x = 0$  значение  $y = b$ . Таким образом, график функции  $y = kx + b$  пересекает ось ординат в точке  $(0; b)$ . Например, для функции  $y = 0,5x + 2$  при  $x = 0$  значение  $y = 2$ . Следовательно, график пересекает ось ординат в точке  $(0; 2)$ .



• В линейной функции, когда  $b = 0$  и  $k \neq 0$ , функция принимает вид  $y = kx$  (прямая пропорциональность). График функции  $y = kx$  — это прямая, проходящая через начало координат.



• В функции  $y = kx + b$  при  $k = 0$  получается функция  $y = b$  (постоянная функция). График постоянной функции, когда  $b \neq 0$ , является прямой, параллельной оси абсцисс. Если  $b = 0$ , график совпадает с осью абсцисс.



- 6 Найдите точку пересечения графика заданной функции с осью ординат.

а)  $y = 3x + 1$

б)  $y = \frac{x}{2} - 2$

в)  $y = 10 + 2x$

г)  $y = 3 - 2x$

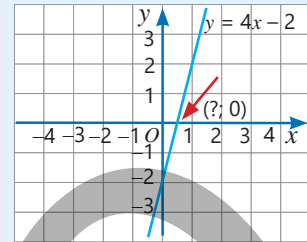
- 7 График линейной функции проходит через начало координат и точку  $A(-2; 10)$ . Запишите формулу этой функции.

- 8 График функции  $y = kx$  проходит через точку  $B(7; 42)$ . Проходит ли этот график через точку  $C(0,5; 3)$ ?

9 Найдите точку пересечения графика заданной линейной функции с осью абсцисс.

**ОБРАЗЕЦ**  $y = 4x - 2$

Решение	Объяснение
$0 = 4x - 2$ $4x = 2$ $x = 0,5$  Ответ: (0,5; 0)	В точке пересечения графика функции с осью абсцисс ордината точки равна нулю ( $y = 0$ ). Определяется значение $x$ , при котором значение функции равно нулю.

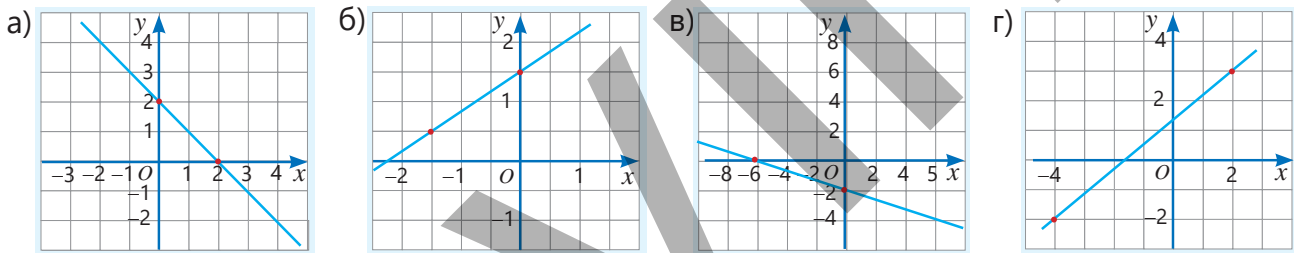


- а)  $y = 2x + 2$     б)  $y = 0,5x - 4$     в)  $y = -3x + 6$     г)  $y = -5x + 4$     д)  $y = -0,1x - 5$

10 Найдите точки пересечения графика функции с осями координат. Постройте график функции, проведя прямую через эти точки.

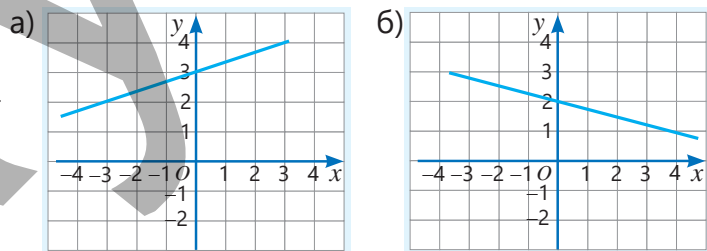
- а)  $y = 3x - 6$     б)  $y = 0,8x + 4$     в)  $y = 2 - 4x$     г)  $y = -x + 0,5$     д)  $y = \frac{x + 4}{2}$

11 Определите координаты двух точек, через которые проходит график функции  $y = kx + b$ . Найдите числа  $k$  и  $b$  и запишите формулу линейной функции.



12 По графику функции  $y = kx + b$  выполните задания.

- Определите точку пересечения графика с осью  $Oy$ .
- Найдите числа  $k$  и  $b$ .
- Запишите формулу функции.
- Найдите точку пересечения графика с осью  $Ox$ .



13 График линейной функции проходит через заданные точки. Постройте график функции и запишите ее формулу.

- а) (0; -3) и (3; 0)    б) (0; 0) и (-1; 3)    в) (-1; 1) и (1; 5)    г) (-2; 3) и (2; 3)



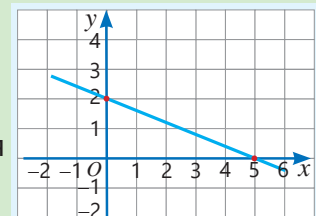
**Исправь ошибку!**

По отмеченным на графике точкам (0; 2) и (5; 0) найдите угловой коэффициент  $k$ .

$$k = \frac{2 - 0}{5 - 0} = 0,4$$

Используя точку пересечения графика с осью абсцисс, определяется значение  $b$ . В данном случае  $b = 5$ . Записывается формула функции.

$$y = 0,4x + 5$$





## Внимание!

При решении задач обычно устанавливают функциональную зависимость между величинами, причём значения аргумента и функции должны соответствовать содержанию задачи. Например, в баке находится 200 литров воды, и каждую минуту расходуется 4 литра воды. Если через  $t$  минут количество оставшейся воды обозначить как  $V$ , то зависимость  $V$  от  $t$  можно выразить функцией  $V = 200 - 4t$ . Очевидно, что время  $t$  не может быть отрицательным. Кроме того, бак опустошается за 50 минут, поэтому аргумент  $t$  не может принимать значения больше 50.

## Решение задач

- 14 У покупателя было 20 манатов. Он решил купить  $x$  тетрадей по цене 1,50 маната за каждую и 5 ручек по цене 0,80 маната за каждую.
- Запишите формулу зависимости оставшихся денег от  $x$  в виде  $y = kx + b$ .
  - Мог бы покупатель купить 5, 7, 11 или 12 тетрадей? Какое наибольшее количество тетрадей он мог бы купить?

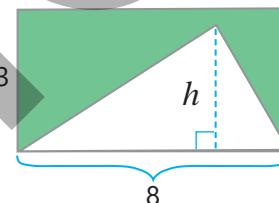
- 15 Из прямоугольника вырезан треугольник, как показано на рисунке.

а) Запишите формулу зависимости площади оставшейся части ( $S$ ) от высоты треугольника ( $h$ ).

б) Найдите значение функции при  $h = 0,8; 1; 1,5; 3$ .

в) Какие из следующих значений может принимать аргумент:  $-1; 0; 2; 2,8; 4$ ?

г) При каком значении  $h$  площадь оставшейся части будет равна 12?



- 16 На графике изображена зависимость высоты ( $h$ ) воздушного шара от времени ( $t$ ) с момента начала снижения.

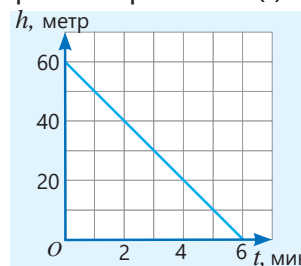
а) С какой высоты начал снижаться воздушный шар?

б) Через сколько минут воздушный шар достиг земли?

в) Запишите формулу для функции  $h(t)$ .

г) Какие значения может принимать аргумент  $t$ ?

д) С какой скоростью снижался воздушный шар?



- 17 Бак объёмом 600 литров заполняется водой. На графике изображена зависимость количества воды ( $y$ ) в баке от времени ( $x$ ).

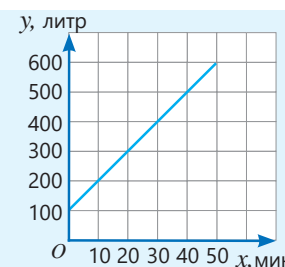
• Сколько воды было в баке изначально?

• Сколько воды будет в баке через 20 минут?

• Сколько литров воды поступает в бак за одну минуту?

• Запишите формулу зависимости количества воды в баке от времени.

• Через сколько минут в баке будет 420 литров воды?



- 18 В результате глобального потепления уровень воды в озере глубиной 42 метра уменьшается на 0,1 метра каждый год.

• Запишите функцию зависимости уровня воды ( $h$ ) от времени ( $t$ ) в годах.

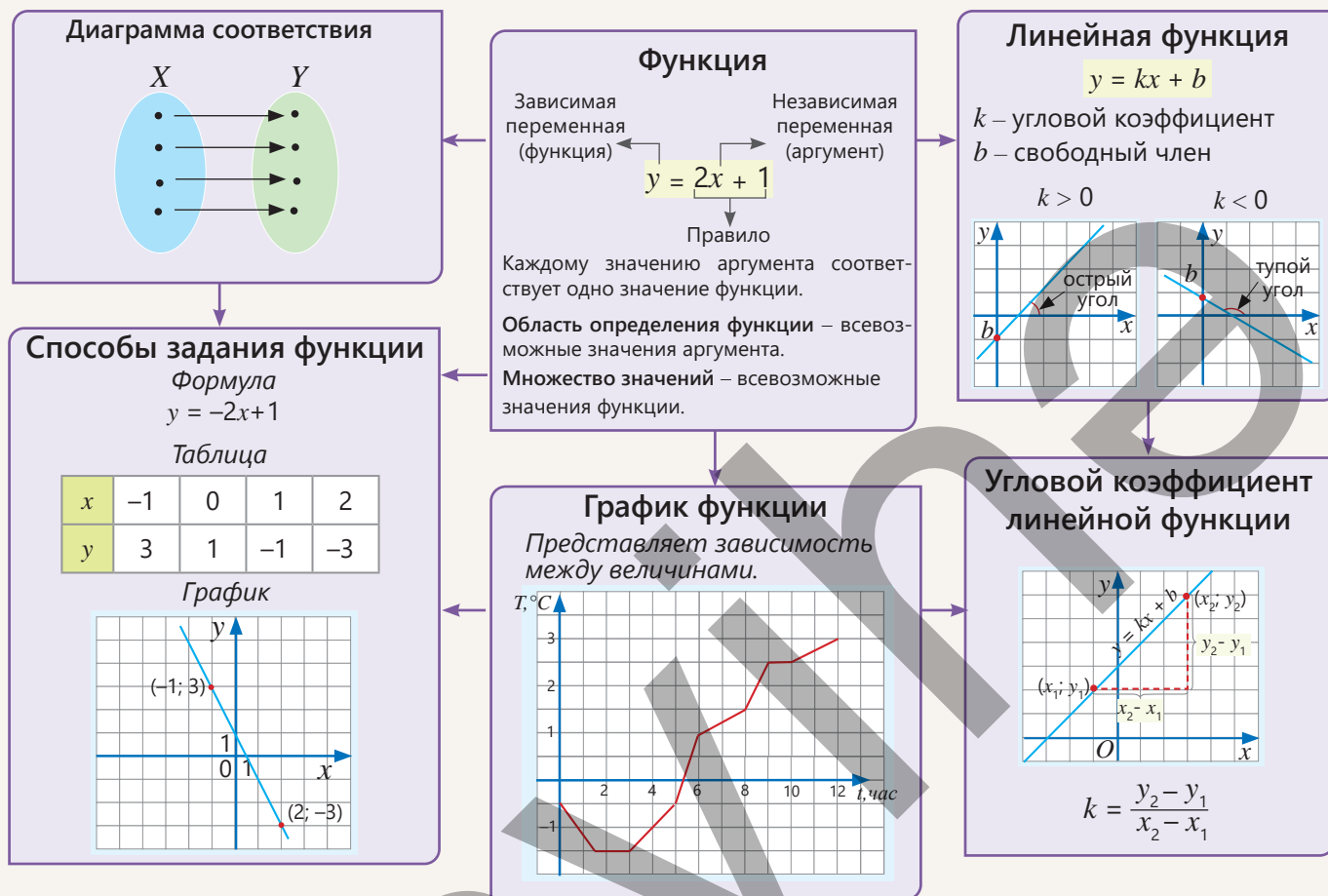
• Каким будет уровень воды в озере через  $t = 1; 2; 5$  лет?

• Через сколько лет уровень воды в озере составит 40 метров?

Организуйте обсуждение последствий снижения уровня воды в морях и океанах, его причин и способов их устранения.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ



### Решение исходной задачи

В гонках "Формула-1" болид удаляется от старта на 3 км за каждый круг и затем возвращается в стартовую точку.

- Вычисляется длина одного круга.

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ (км)}$$

- Болид завершил I круг за 2 минуты. Определяется средняя скорость на I круге.

$$v_{cp} = 6 : 2 = 3 \text{ (км/мин)}$$

- Болид завершил I круг за 2 минуты, II круг – за 1,5 минуты, III круг – за 2 минуты. На II круге он потратил меньше времени. Находится средняя скорость на этом круге.

$$v_{cp} = 6 : 1,5 = 4 \text{ (км/мин)}$$

- Болид заехал на пит-стоп на III круге через 4 минуты после старта. Определяется время, потраченное на технический перерыв.

$$4,5 - 4 = 0,5 \text{ (мин)}$$



## ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

1. Найдите значение функции при заданных значениях аргумента.

**а)**  $x = -1; 0; 1,8$   
 $y = -4x + 1$

**б)**  $x = -2,3; -1,4; 10$   
 $y = 9x - 4$

**в)**  $x = -2; 0; 5,5$   
 $y = 5 - 0,2x$

**г)**  $x = -3; 2; 3,6$   
 $y = -\frac{1}{3}x + 2$

2. Функция задана формулой  $y = -x + 6$ .

**а)** Найдите значение функции при  $2; 5; 3,2; -6$ .

**б)** При каком значении аргумента функция принимает значения  $-3; 0; 5,7$ ?

**в)** Найдите точки пересечения графика функции с осями координат.

3. Определите точки, принадлежащие графику функции.

**а)**  $y = 2,5x + 13$

**A** (0; 13)   **B** (-13; 0)   **C** (-10; -12)   **D** (4; 23)

**б)**  $y = 2 - 0,4x$

**E** (0; -2)   **F** (2,25; 1)   **G** (1; 1,6)   **H** (9; -2)

4. График функции — это прямая, проходящая через точки (3; 9) и (-2; -1).

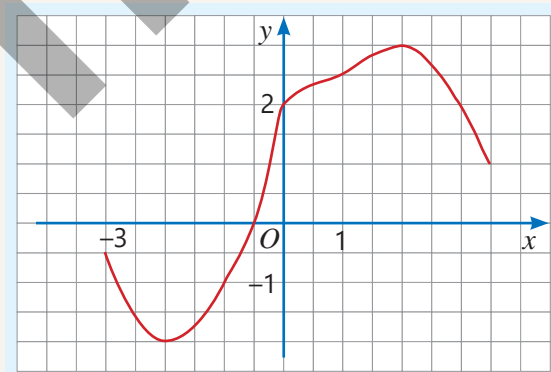
- Запишите формулу для функции.
- Найдите координаты точки пересечения графика с осью абсцисс.
- При каком значении  $a$  точка  $(a; 5)$  принадлежит графику?

5. По графику функции заполните таблицу.

$x$	-3	-2,5		-1		1	2	3,5
$y$			-2		0			

**а)** В каких точках график пересекает оси  $Ox$  и  $Oy$ ?

**б)** При каких значениях аргумента значение функции равно 2?



6. График линейной функции проходит через точку (1; 2) и параллелен оси абсцисс. Постройте график этой функции и запишите ее формулу.

7. Через какие четверти координатной системы проходит график заданной функции?

**а)**  $y = 5x$

**б)**  $y = 6$

**в)**  $y = -8$

**г)**  $y = -2x$

**д)**  $y = x + 2$

**е)**  $y = -4x - 1$

8. Для функции  $y = kx + b$  определите верные утверждения. Обоснуйте свое мнение примерами.

**а)** Если  $k > 0, b > 0$ , график проходит через I, II и III четверти.

**б)** Если  $k > 0, b < 0$ , график проходит через I, II и IV четверти.

**в)** Если  $k < 0, b > 0$ , график проходит через I, III и IV четверти.

**г)** Если  $k < 0, b < 0$ , график проходит через II, III и IV четверти.

9. Постройте графики функций  $y = 2x + 4, y = 4 - x$  и  $y = -2$  в одной системе координат. Найдите площадь треугольника, образованного пересечением этих графиков.

10. Определите формулу линейной функции, заданной таблицей, и заполните пустые ячейки соответствующими числами.

a)

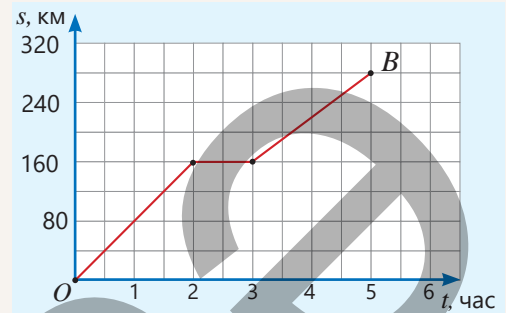
$x$	-1	0	2	
$y$		-3	1	5

б)

$x$	-2	-1	1,5	8
$y$	7			-23

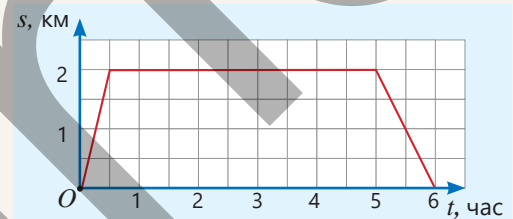
11. На графике показана зависимость расстояния ( $s$ ) автомобиля от заправочной станции от времени ( $t$ ).

- a) На каком расстоянии находился автомобиль через 2 часа после начала движения от станции? С какой скоростью он двигался?  
 б) Водитель остановился на обеденный перерыв. Сколько времени он потратил на обед?  
 в) Каково расстояние между пунктами  $O$  и  $B$ ?  
 г) Какова средняя скорость автомобиля на всем пути?



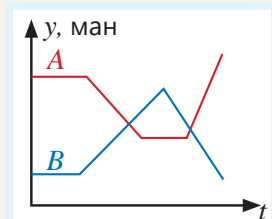
12. Лала пошла в школу и после уроков вернулась домой. На графике изображена зависимость расстояния ( $s$ ) от Лалы до дома от времени ( $t$ ).

- a) Каково расстояние от дома до школы?  
 б) Сколько времени Лала провела в школе?  
 в) С какой скоростью она шла из дома в школу и обратно?  
 г) Сколько всего времени Лала потратила на дорогу?



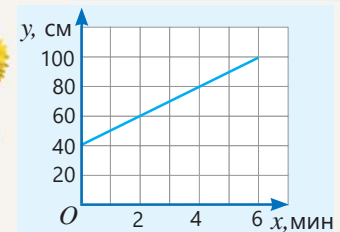
13. На графике показана зависимость цен ( $y$ ) на нефть марок  $A$  и  $B$  от времени ( $t$ ) в течение дня.

- a) Как изменялась цена на каждую марку нефти в течение дня?  
 б) Какая марка нефти была дороже в конце дня?  
 в) Сколько раз в течение дня цены на нефть марок  $A$  и  $B$  были равны?



14. На рисунке представлен график движения муравья по стеблю подсолнуха высотой 1 м. График показывает изменение расстояния муравья от поверхности земли ( $y$ ) в зависимости от времени ( $x$ ), с начала наблюдения. Высота подсолнуха составляет 1 метр.

- a) На какую максимальную высоту поднялся муравей?  
 б) Сколько времени муравей потратил на подъем до максимальной высоты?  
 в) Запишите зависимость расстояния муравья от земли ( $y$ ) от времени ( $x$ ) в виде  $y = kx + b$ . Объясните смысл коэффициентов  $k$  и  $b$ .



15. За услуги такси взимается начальная плата 3 маната и дополнительно 2 маната за каждый километр пути.

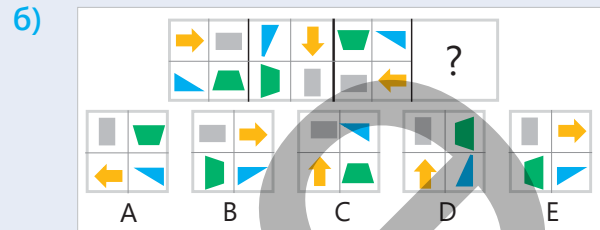
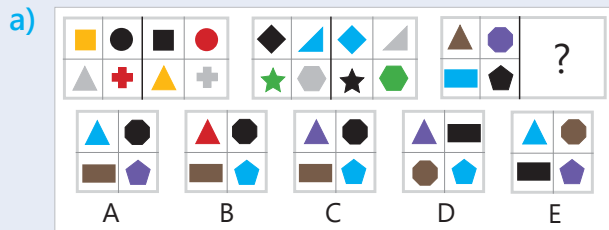
- a) Запишите формулу зависимости стоимости ( $y$ ) от пройденного пути ( $x$ ).  
 б) Сколько нужно заплатить за поездку на 10 км?  
 в) Если пассажир заплатил 35 манатов, сколько километров он проехал?  
 г) Постройте график функции. Найдите ординаты точек с абсциссами 0; 3 и 9. Объясните, что означают координаты этих точек.





## Математический калейдоскоп

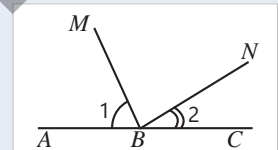
1. Если  $a^2 - 2025b = b^2 - 2025a$  и  $a \neq b$ , найдите значение выражения  $a + b$ .
2. Докажите, что для любого натурального числа  $n$  сумма  $n^3 + 17n$  делится на 6.
3. Какой из предложенных вариантов должен быть в пустой рамке?



4. Масса настоящей золотой монеты составляет 10 г, а масса поддельной монеты – 9 г. В одном из пяти мешков все монеты поддельные. Как можно определить, в каком мешке поддельные монеты, используя весы только один раз?



5. Если  $\angle 1 = 70^\circ + x$  и  $\angle 1 - \angle 2 = 50^\circ + 2x$ , докажите, что  $\angle MBN = 90^\circ$ .



## STEAM

## "ПУТЕШЕСТВИЕ В ГАЛАКТИКУ АНДРОМЕДЫ"

Представьте полет фантастического космического корабля, предназначенного для межгалактических путешествий, в направлении галактики Андромеды, находящейся на расстоянии 2 500 000 световых лет от Земли (1 световой год — это расстояние, которое свет проходит за 1 год).

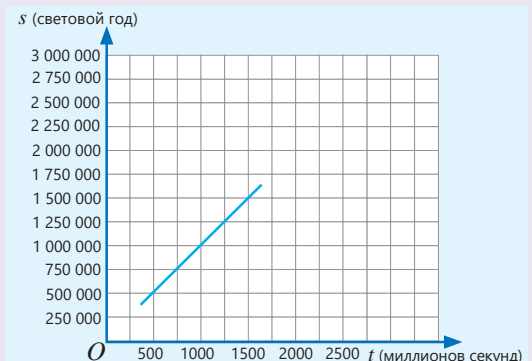


1. Зная, что зависимость расстояния от Земли ( $s$ ) до корабля от времени ( $t$ ) является линейной функцией, запишите соответствующую формулу на основе данного графика.

2. На основе формулы определите скорость космического корабля и найдите время, необходимое для достижения галактики Андромеды в этом путешествии.

3. Используя Интернет, определите, какова максимальная космическая скорость. За какое время можно достичь галактики Андромеды с такой скоростью?

4. Создайте модель межгалактического космического корабля. Опишите форму корабля, его внутреннюю экосистему для длительных полётов, а также предложите гипотезу о видах топлива. Подготовьте презентацию.



# Окружность, круг и шар

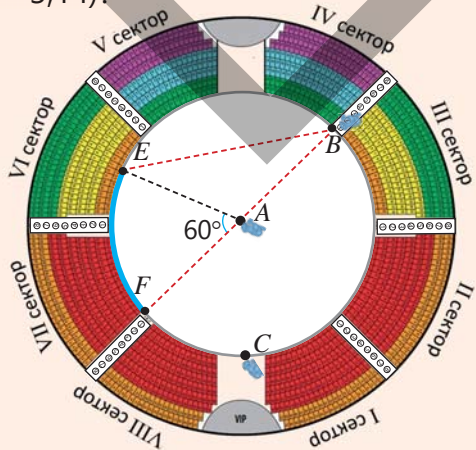
## В этой главе вы научитесь:

- объяснять понятия касательной и секущей к окружности;
- разбирать взаимное расположение двух окружностей;
- применять свойства углов в окружности;
- вычислять длину дуги окружности и площадь сектора круга;
- вычислять площадь поверхности шара и его объем.

## Попытайтесь!

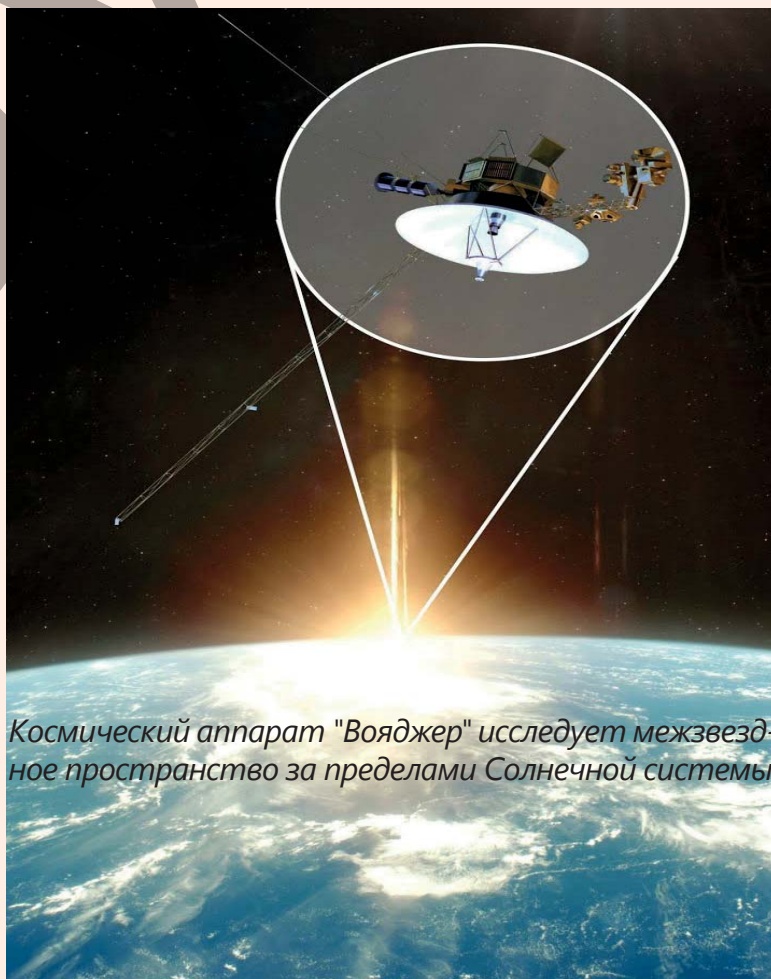
В центре круглой арены установлена камера  $A$ , а на окружности — камеры  $B$  и  $C$ . Камера  $A$  видит участок  $EF$  окружности арены под углом  $60^\circ$ .

- Под каким углом виден участок  $EF$  с камеры  $B$ ?
- Под каким углом виден участок  $EF$  с камеры  $C$ ?
- Если радиус арены равен 12 м, какова длина участка  $EF$  окружности ( $\pi \approx 3,14$ )?



Фигуры в форме круга и шара часто встречаются в окружающем мире. Например, планеты и многие небесные тела имеют форму шара. Для их изучения и получения информации об их размерах отправляются и принимаются сигналы с космических зондов. При обработке этих сигналов и выводе результатов также используются свойства углов между касательными и секущими в окружности.

Часто сжатые газы и жидкости хранят в резервуарах в форме шара. При проектировании этих резервуаров возникает необходимость вычисления площади поверхности и объема шара.

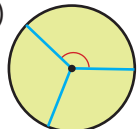


Космический аппарат "Вояджер" исследует межзвездное пространство за пределами Солнечной системы.

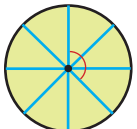
## Предварительная проверка

- Круг разделен на равные части. Найдите градусную меру отмеченного угла.
 

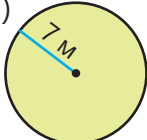
а)



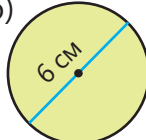
б)


- Найдите длину окружности и площадь круга ( $\pi \approx 3,14$ ).
 

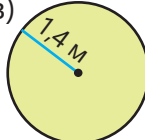
а)



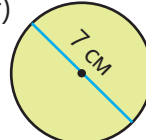
б)



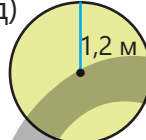
в)

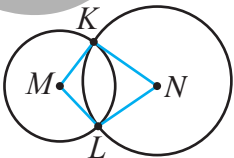


г)

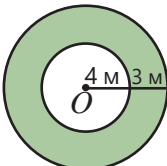


д)

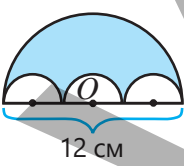

- Найдите радиус и диаметр окружности, длина которой равна 6л см. Чему равна площадь соответствующего круга?
- На плоскости проведите прямую  $AB$ . Отметьте точки  $C$  и  $D$  по разные стороны от этой прямой так, чтобы расстояние от точки  $C$  до прямой  $AB$  было 3 см, а от точки  $D$  до  $AB$  — 4 см.
- Окружности с центрами в точках  $M$  и  $N$  имеют радиусы 2 см и 3 см соответственно. Чему равен периметр четырехугольника  $MKNL$ ?
 


- По данным на рисунке найдите площадь закрашенной фигуры. Точка  $O$  — центр окружности.
 

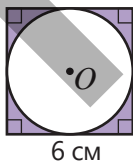
а)

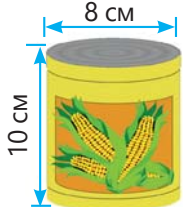



б)

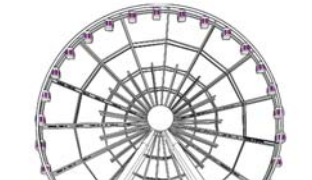


в)


- Боковая поверхность консервной банки оклеивается клейкой бумагой ( $\pi \approx 3,14$ ).
  - Сколько квадратных сантиметров бумаги потребуется, чтобы оклеить 1000 таких банок, как показано на рисунке?
  - Каков объем одной консервной банки?


- Эльхан и Айнур разрезали пиццу по диаметрам на 12 равных частей. Айнур съел 3 куска, а Эльхан съел часть, соответствующую углу в 120 градусов. Кто съел больше пиццы?
- Велосипедист проехал 10 кругов по велотреку круговой формы диаметром 54 м.
  - Какое расстояние он проехал ( $\pi \approx 3$ )?
  - Сколько полных оборотов сделает колесо велосипеда на этом пути, если диаметр колеса равен 72 см?


- Диаметр колеса обозрения равен 30 м. Айнур зашла в кабину с платформы высотой 1 м и совершила 2 оборота.
  - На какой максимальной высоте от земли она находилась?
  - Какое расстояние преодолела кабина Айнур ( $\pi \approx 3$ )?



## 7.1. Окружность

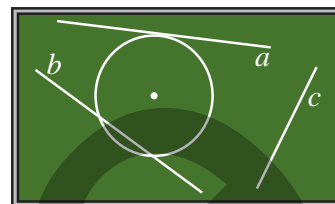
### Исследование-обсуждение

Анар нарисовал на доске окружность и три прямые.

- Какая прямая ближе всего к центру окружности? Как это можно определить?
- Сколько прямых можно провести через заданную точку на окружности, находящуюся на расстоянии, равном радиусу от ее центра? Отметьте точку на окружности и проведите такую прямую.

### Ключевые слова

- секущая окружности
- касательная к окружности
- концентрические окружности



### Изучение Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная

Прямая и окружность друг относительно друга могут находиться в трех различных положениях:

#### 1. Прямая и окружность не имеют общих точек.

Расстояние от центра окружности до прямой  $a$  больше ее радиуса.

$$OK > r$$

#### 2. Прямая и окружность имеют две общие точки.

Расстояние от центра окружности до прямой  $c$  меньше ее радиуса.

$$OM < r$$

Прямая, проходящая через две точки окружности, называется **секущей**.

#### 3. Прямая и окружность имеют одну общую точку.

Расстояние от центра окружности до прямой  $b$  равно ее радиусу.

$$ON = r$$

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной**. Общая точка называется **точкой касания**.

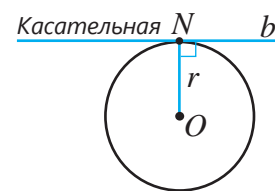
- Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Обратное утверждение также верно:

- Признак касательной: если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она является касательной.

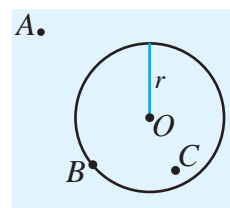


Обычно на рисунках центр окружности обозначается точкой  $O$ .

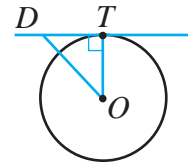


### Задания

- 1 Из точки вне окружности проведите прямые, которые: а) не имеют с окружностью общих точек; б) имеют две общие точки; в) имеют одну общую точку. Какие из них являются касательными, а какие — секущими?
- 2 Определите, верны ли следующие утверждения. Обоснуйте свой ответ с помощью чертежа.
  - а) Через точку вне окружности можно провести только одну касательную.
  - б) Через точку на окружности можно провести две касательные.
  - в) Через точку внутри окружности нельзя провести касательную.
- 3 Отметьте на окружности две точки так, чтобы:
  - а) проведенные из них касательные были параллельны;
  - б) проведенные из них касательные пересекались.

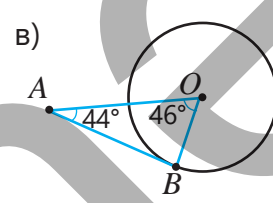
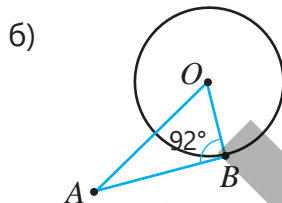
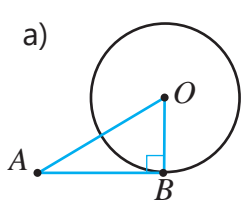


- 4) Прямая проходит через точку  $T$  на окружности и перпендикулярна радиусу  $OT$ . На этой прямой отмечена произвольная точка  $D$ , отличная от  $T$ . Ответьте на вопросы, чтобы доказать, что *прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку, является касательной*.

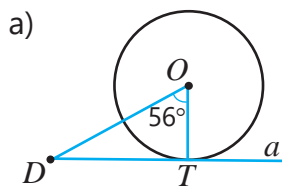


- Почему в треугольнике  $OTD$  выполняется неравенство  $OD > OT$ ?
- Расстояние от центра окружности до любой другой точки на этой прямой больше или меньше радиуса?
- Может ли эта прямая иметь с окружностью еще одну общую точку, кроме  $T$ ?
- Является ли эта прямая касательной? Почему?

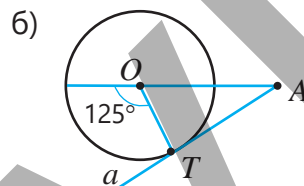
- 5) Является ли  $AB$  на рисунке отрезком касательной к окружности? Объясните.



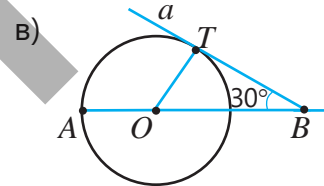
- 6) Прямая  $a$  касается окружности в точке  $T$ . Используя данные на рисунке, найдите градусную меру требуемого угла.



$\angle ODT = ?$



$\angle OAT = ?$



$\angle BOT = ?$

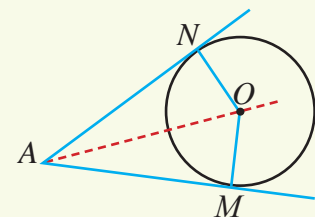
### Т Теорема 1. Свойство касательных, проведенных из одной точки

Если из точки к окружности проведены две касательные, то отрезки от этой точки до точек касания конгруэнтны и центр окружности лежит на биссектрисе угла между этими касательными.

**Дано:** точки  $M$  и  $N$  — точки касания касательных, проведенных из точки  $A$  к окружности, точка  $O$  — центр окружности,  $ON$  и  $OM$  — радиусы окружности.

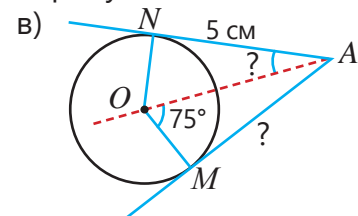
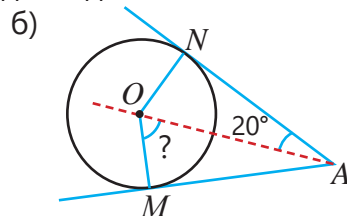
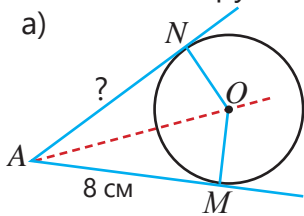
**Доказать:**  $AM \cong AN$ ,  $\angle MAO \cong \angle NAO$

**Доказательство.**



Утверждение	Обоснование
1. $\angle M = \angle N = 90^\circ$	1. Касательная перпендикулярна радиусу в точке касания.
2. $OM \cong ON$	2. Радиусы окружности $ON$ и $OM$ конгруэнтны.
3. $AO \cong AO$	3. Отрезок $AO$ — общая сторона $\triangle MAO$ и $\triangle NAO$ .
4. $\triangle MAO \cong \triangle NAO$	4. Прямоугольные треугольники с конгруэнтными гипотенузами и соответствующими катетами конгруэнтны.
5. $AM \cong AN$ , $\angle MAO = \angle NAO$	5. Соответствующие стороны и углы конгруэнтных треугольников.

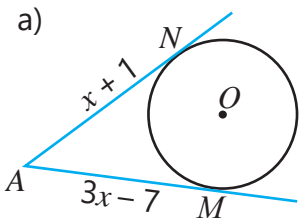
7 Из точки к окружности проведены две касательные. Найдите требуемые величины.



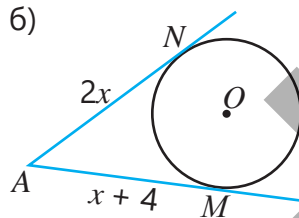
8 Из точки к окружности проведены касательные. Найдите требуемые величины.

**ОБРАЗЕЦ** решение пункта а)

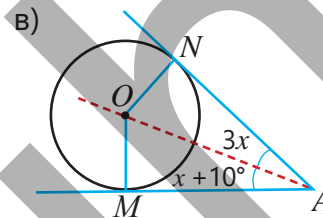
Решение	Объяснение
$3x - 7 = x + 1$ $x = 4$ $AN = 4 + 1 = 5$ $AM = 3 \cdot 4 - 7 = 5$	Из точки $A$ проведены касательные к точкам $N$ и $M$ , причем длины отрезков $AN$ и $AM$ равны: $AN = AM$ . Составляется соответствующее уравнение и решается. Подставляется найденное значение переменной.



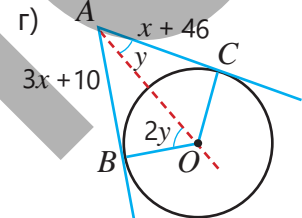
$AN = ?$   $AM = ?$



$AM = ?$   $AN = ?$



$\angle NAO = ?$   $\angle NAM = ?$



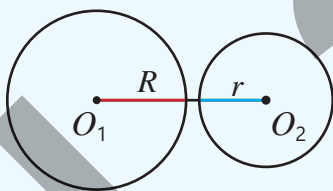
$\angle BAC = ?$   $AC = ?$

## Изучение Взаимное расположение двух окружностей

Две окружности могут не иметь общих точек, иметь одну общую точку или пересекаться в двух точках. На рисунке показаны различные случаи взаимного расположения окружностей с радиусами  $R$  и  $r$ .

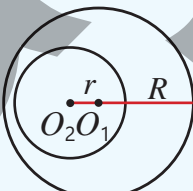
1. Одна окружность находится вне другой.

$$O_1O_2 > R + r$$



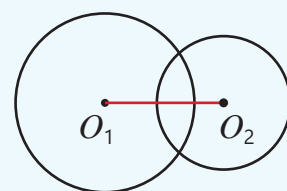
2. Одна окружность находится внутри другой.

$$O_1O_2 < R - r$$



3. Окружности пересекаются.

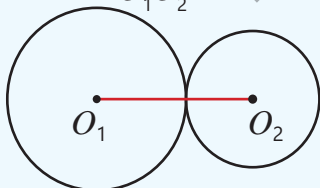
$$O_1O_2 < R + r$$



4. Окружности касаются внешним образом.

Одна окружность расположена вне другой и имеет одну общую точку.

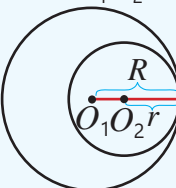
$$O_1O_2 = R + r$$



5. Окружности касаются внутренним образом.

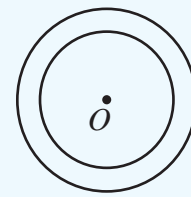
Одна окружность расположена внутри другой и имеет одну общую точку.

$$O_1O_2 = R - r$$



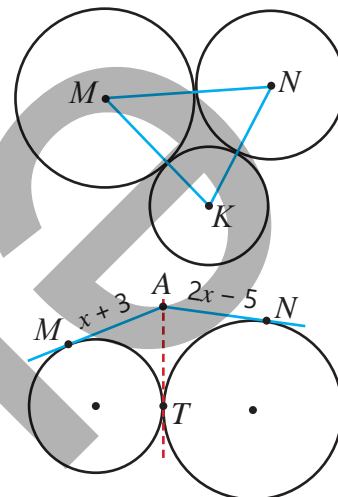
6. Центры окружностей совпадают.

Такие окружности называются концентрическими окружностями.

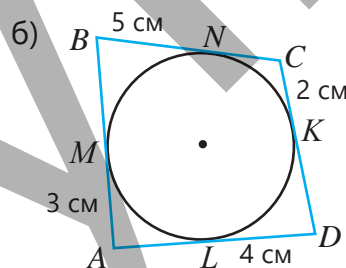
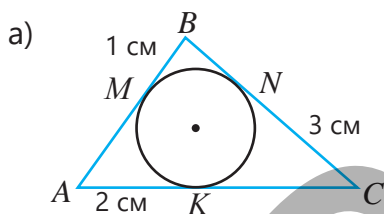


• Точка касания двух касающихся окружностей лежит на прямой, проходящей через их центры.

- 9 Найдите расстояние между центрами двух окружностей с радиусами 5 см и 3 см, если:
- а) окружности касаются внешним образом
- б) окружности касаются внутренним образом
- 10 Расстояние между центрами двух касающихся окружностей составляет 12 см. Если радиус одной окружности равен 8 см, каков радиус второй окружности? Сколько решений имеет задача?
- 11 На рисунке изображены три попарно касающиеся окружности с радиусами 9 см, 12 см и 15 см. Центры окружностей обозначены  $M, N, K$ . Найдите периметр треугольника  $MNK$ .



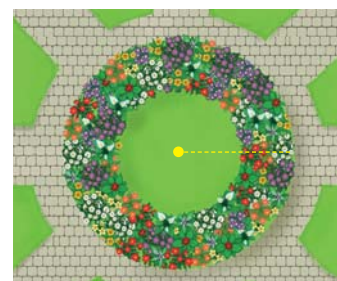
- 12 На рисунке  $M, N$  и  $T$  — точки касания прямых, проведённых из точки  $A$  к соответствующим окружностям. Найдите длину отрезка  $AT$  на общей касательной.
- 13 Окружность касается всех сторон данного многоугольника. Используя данные на рисунке, найдите стороны и периметр фигуры.



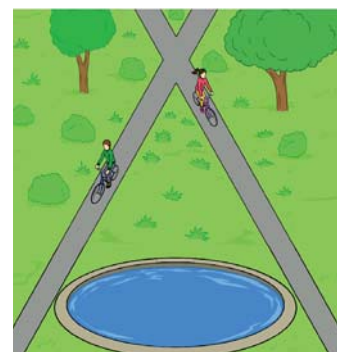
### Решение задач



- 14 Садовник посадил разные цветы между концентрическими окружностями с радиусами 7 м и 5,5 м.
- Чему равна площадь участка, на котором посажены цветы?
  - Какое наибольшее расстояние может быть между двумя цветками, посаженными на радиусе большей окружности?



- 15 От перекрестка расходятся две велосипедные дорожки, направленные по касательным к круглому бассейну. Самир и Лала одновременно начали движение от перекрестка по разным дорожкам. Самир, двигаясь со скоростью 12 км/ч, достиг бассейна за 20 минут, а Лала — на 10 минут позже. С какой скоростью двигалась Лала?



## 7.2. Центральный угол. Вписанный угол

### Исследование-обсуждение

Циферблат часов разделён разметками на 12 равных частей.

- Сколько градусов составляет угол между стрелками часов в 9:00?
- В каком часу угол между стрелками будет таким же, как в 4:00? Как это можно найти?



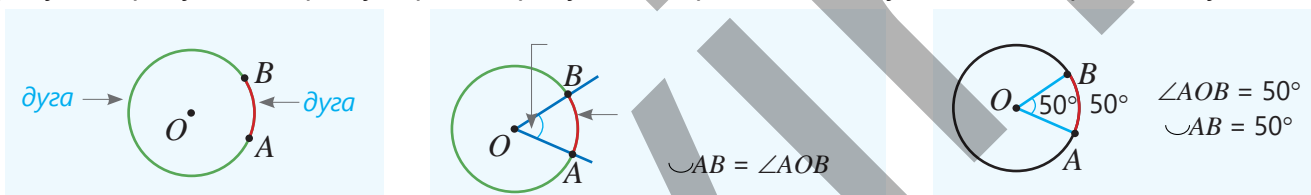
### Ключевые слова

- центральный угол
- дуга
- мажорная дуга
- минорная дуга
- вписанный угол

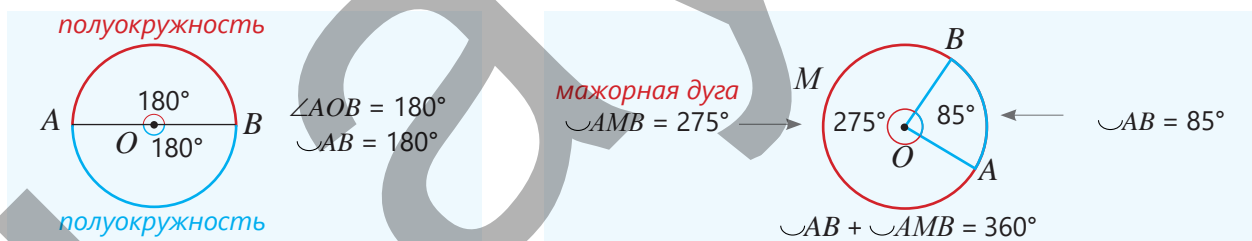
### Изучение Дуга окружности и центральный угол

Любые две точки, взятые на окружности, делят её на две части. Каждая такая часть окружности называется **дугой**. Угол, вершина которого находится в центре окружности, называется **центральный углом**.

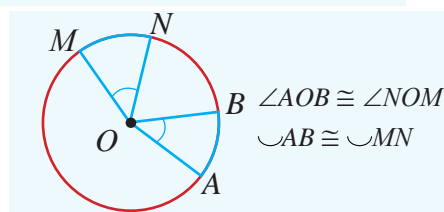
На рисунке точка  $O$  — центр окружности,  $\angle AOB$  — центральный угол. Дуга, соответствующая центральному углу  $AOB$ , записывается как  $\frown AB$ . Дугу окружности также можно измерить в градусах. Градусная мера дуги равна градусной мере соответствующего центрального угла.



- Если две точки на окружности являются концами диаметра, то окружность делится на две полуокружности. В противном случае одна из дуг будет меньшей (**минорной дугой**), а другая — большей (**мажорной дугой**). Иногда для различия дуг одну из них обозначают тремя буквами. Сумма градусных мер минорной и мажорной дуг равна  $360^\circ$ .

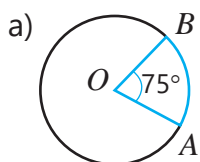


- В окружности дуги, соответствующие конгруэнтным центральному углу, конгруэнтны.

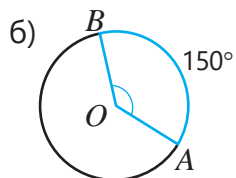


### Задания

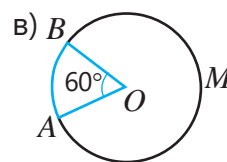
- 1 Найдите градусную меру центрального угла или дуги, используя данные на рисунке.



$\frown AB = ?$

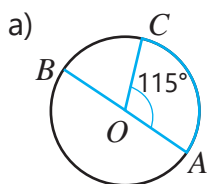


$\angle AOB = ?$

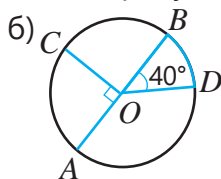


$\frown AB = ?$   
 $\frown AMB = ?$

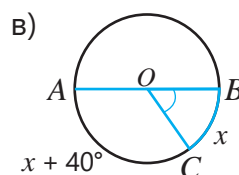
2 На рисунке  $AB$  — диаметр. Найдите градусную меру требуемой дуги или угла.



$\sphericalcap CB = ?$   
 $\sphericalcap AB = ?$   
 $\sphericalcap CAB = ?$



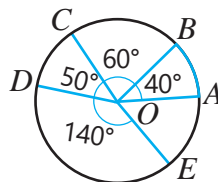
$\sphericalcap BD = ?$   
 $\sphericalcap AD = ?$   
 $\sphericalcap CBD = ?$



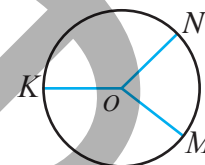
$\sphericalcap BC = ?$   
 $\sphericalcap AC = ?$   
 $\sphericalcap BOC = ?$

3 На рисунке точка  $O$  — центр окружности.

- Найдите градусную меру дуги  $AE$ .
- Какая дуга конгруэнтна дуге  $BCD$ ?

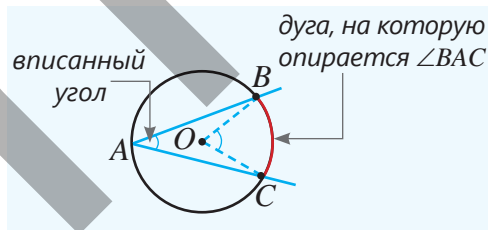


4 В окружности проведены радиусы  $OM$ ,  $ON$  и  $OK$ . Если  $\angle MON : \angle NOK : \angle KOM = 3 : 4 : 5$ , найдите градусные меры дуг  $\sphericalcap MN$ ,  $\sphericalcap NK$  и  $\sphericalcap KM$ .



## Изучение Вписанный угол

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется **вписанным углом**. На рисунке угол  $BAC$  является вписанным углом. Дуга  $BC$  — это дуга, на которую опирается этот угол, а угол  $BOC$  — соответствующий ей центральный угол.



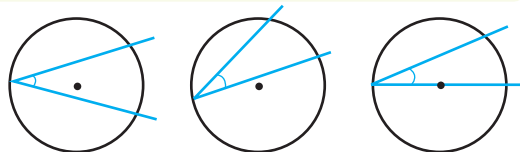
## Т Теорема 2. О вписанном угле

*Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры соответствующего центрального угла или дуги, на которую он опирается.*

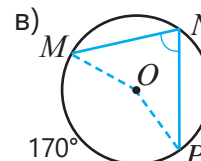
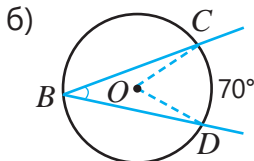
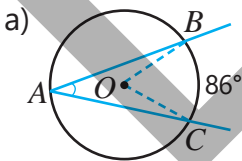
$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC \quad \text{или} \quad \angle BAC = \frac{1}{2} \sphericalcap BC$$

**Доказательство.** Задание 8 (случай, когда сторона угла проходит через центр окружности).

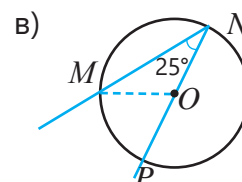
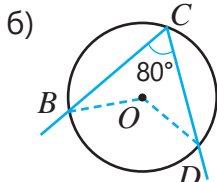
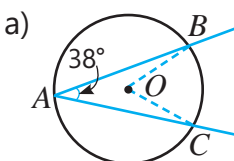
- Центр окружности может находиться внутри вписанного угла, вне вписанного угла или на одной из его сторон.



5 Найдите градусную меру вписанного угла, используя данные на рисунке.



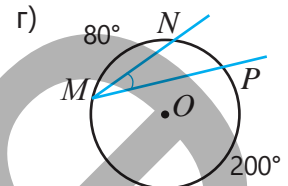
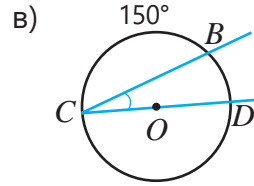
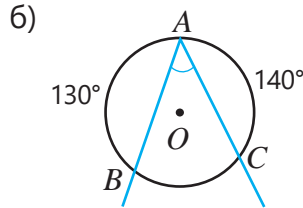
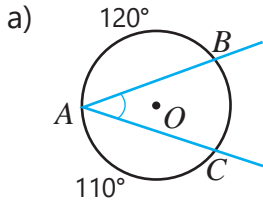
6 Найдите градусную меру дуги, на которую опирается вписанный угол.



7 По данным на рисунке найдите градусную меру вписанного угла.

**ОБРАЗЕЦ** решение пункта а)

Решение	Объяснение
$\overset{\frown}{BC} = 360^\circ - (120^\circ + 110^\circ) = 130^\circ$ $\angle A = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC} = 65^\circ$	Дуга $BC$ дополняет дуги $AC$ и $AB$ до окружности. Вписанный угол равен половине градусной меры опирающейся на него дуги.

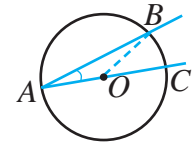


8 Впишите в пропуски соответствующие утверждения, чтобы завершить доказательство теоремы о вписанном угле (теорема 2) для случая, когда одна из сторон угла проходит через центр окружности.

Дано:  $\angle BAC$  – вписанный угол,  $\angle BOC$  – соответствующий центральный угол.

Доказать:  $\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC}$

Доказательство:



Утверждение	Обоснование
1. $OA \cong OB$	1. _____
2. $\angle A \cong \angle B$	2. $AOB$ - равнобедренный треугольник.
3. $\angle BOC = \angle A + \angle B$	3. По свойству внешнего угла треугольника.
4. $\angle BOC = 2\angle A$	4. _____
5. $\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC}$	5. _____



**Подумай!**

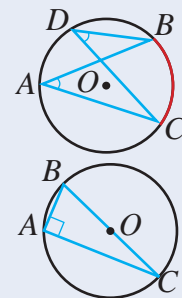
Обоснуйте результаты, полученные из теоремы 2:

1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, конгруэнтны.

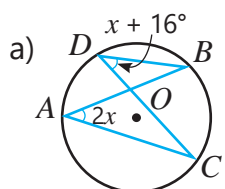
$$\angle A = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC} \text{ и } \angle D = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \angle A \cong \angle D$$

2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, является прямым углом.

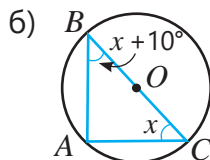
$$\angle BOC = 180^\circ \text{ и } \angle A = \frac{1}{2} \angle BOC \Rightarrow \angle A = 90^\circ$$



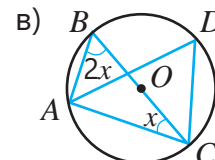
9 По данным на рисунке найдите градусную меру требуемой дуги или угла.



$\angle A = ?$   
 $\angle D = ?$   
 $\overset{\frown}{BC} = ?$

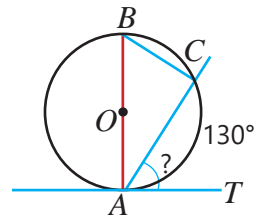


$\angle B = ?$   
 $\angle C = ?$   
 $\overset{\frown}{AB} = ?$



$\angle B = ?$   
 $\angle D = ?$   
 $\overset{\frown}{AC} = ?$

- 10 На рисунке  $AT$  - касательная к окружности,  $AB$  - диаметр. Лала и Эльхан нашли градусную меру угла  $CAT$  разными способами. Исследуйте их методы решения. Проведите обсуждение о градусной мере угла между касательной и секущей, проведенной из точки на окружности.



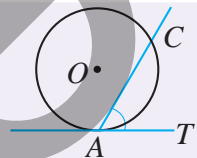
Сначала найду градусную меру дуги:  
 $\overset{\frown}{BC} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$   
 Тогда  $\angle BAC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC} = 25^\circ$ .  
 Поскольку  $AB \perp AT$ ,  
 $\angle CAT = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ .

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой:  $\angle C = 90^\circ$   
 Поскольку  $BC \perp AC$  и  $AB \perp AT$ ,  $\angle ABC$  и  $\angle CAT$  углы с соответственно перпендикулярными сторонами.  $\angle ABC \cong \angle CAT$   
 $\angle ABC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC} = 65^\circ$ , поэтому  $\angle CAT = 65^\circ$ .

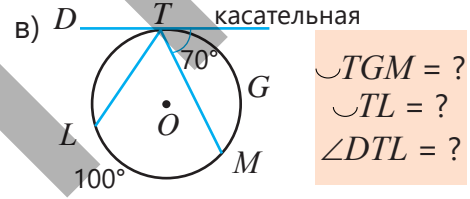
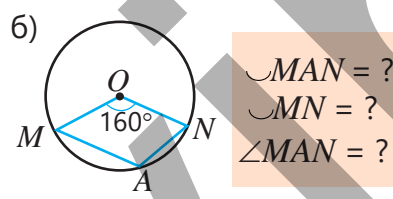
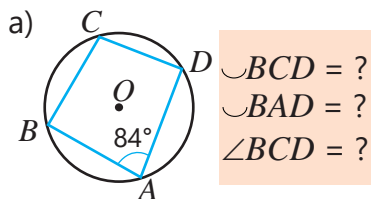


### Запомни!

Если из произвольной точки  $A$  на окружности провести касательную  $AT$  и секущую  $AC$ , то  $\angle CAT = \frac{1}{2} \overset{\frown}{AC}$



- 11 По данным на рисунке найдите градусную меру требуемой дуги или угла.

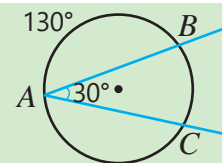


- 12 Ответьте на вопросы.  
 а) Вписанный угол на  $20^\circ$  меньше соответствующего центрального угла. Чему равна градусная мера центрального угла?  
 б) Сумма вписанного угла и соответствующего центрального угла равна  $120^\circ$ . Чему равен вписанный угол?



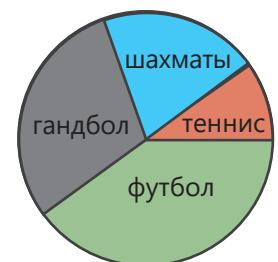
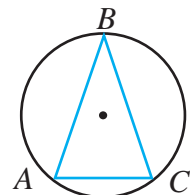
### Исправь ошибку!

$$\overset{\frown}{AC} = 360^\circ - (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}) = 360^\circ - (130^\circ + 30^\circ) = 200^\circ$$



### Решение задач

- 13 Окружность разделена точками  $A, B, C$  на дуги, градусные меры которых относятся как  $1 : 2 : 2$ . Найдите градусные меры углов треугольника с вершинами в этих точках.
- 14 Число учеников 7-го класса, занимающихся теннисом, шахматами, гандболом и футболом, относится как  $1 : 2 : 3 : 4$  соответственно. Каждый ученик занимается только одним видом спорта.  
 а) Найдите соответствующие центральные углы на диаграмме.  
 б) Если гандболом занимаются 6 человек, о скольких учениках представлена информация на диаграмме?  
 в) На сколько больше учеников занимается футболом, чем теннисом?



## 7.3. Углы между хордами, секущими и касательными

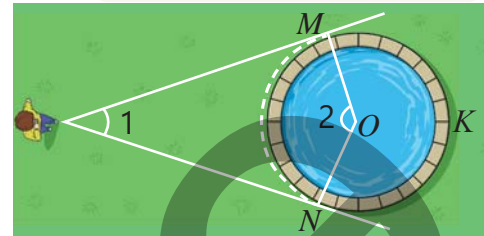


• секущая

### Исследование-обсуждение

Если взглянуть на круглый бассейн сбоку, то из точки наблюдения будет видна дуга  $MN$ , ограниченная касательными, проведёнными к окружности.

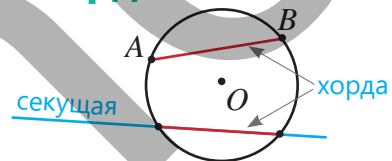
- Какое соотношение существует между градусными мерами углов, обозначенных цифрами на рисунке?
- Если  $\angle 1 = 40^\circ$ , как можно найти градусные меры видимой дуги  $MN$  и невидимой дуги  $MKN$ ?



### Изучение Угол между двумя пересекающимися хордами

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**. Хорду также можно рассматривать как часть секущей, лежащую внутри окружности.

- Секущие окружности могут быть параллельными или пересекаться. Если секущие не параллельны, то их точка пересечения может находиться на окружности, внутри или вне окружности.



Градусную меру угла между секущими можно определить по градусным мерам дуг, которые они отсекают на окружности.

**ОБРАЗЕЦ.** По рисунку найдите градусную меру угла  $BKD$ .

**РЕШЕНИЕ.** Проводится хорда  $AD$ . По свойству вписанного угла:

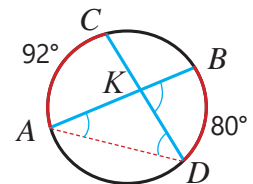
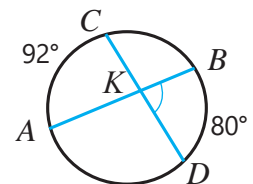
$$\angle A = \frac{1}{2} \text{м. дуг } BD = \frac{1}{2} \cdot 80^\circ = 40^\circ$$

$$\angle D = \frac{1}{2} \text{м. дуг } AC = \frac{1}{2} \cdot 92^\circ = 46^\circ$$

Поскольку внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним, то:

$$\angle BKD = \angle A + \angle D = 40^\circ + 46^\circ = 86^\circ$$

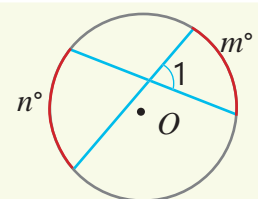
Как видно, угол  $BKD$  между хордами равен половине суммы градусных мер дуг  $AC$  и  $BD$ . Это верно и в общем случае.



### Т Теорема 3. Градусная мера угла между хордами

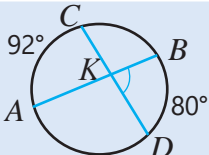
*Градусная мера угла между двумя пересекающимися хордами равна половине суммы градусных мер дуг, заключенных между сторонами этого угла, и его вертикального угла.*

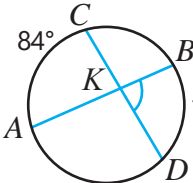
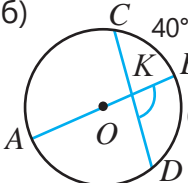
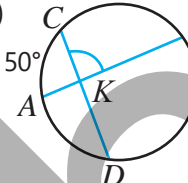
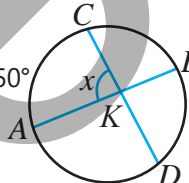
$$\angle 1 = \frac{1}{2} (m^\circ + n^\circ)$$



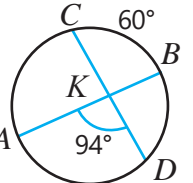
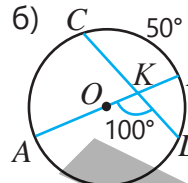
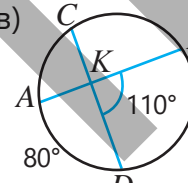
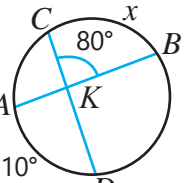
## Задания

- 1 По данным на рисунке найдите градусную меру угла между хордами.

<p><b>ОБРАЗЕЦ</b></p>  <p><math>\angle BKD = ?</math></p>	
<p><b>Решение</b></p> <p><math>\angle BKD = \frac{1}{2} (80^\circ + 92^\circ) = 86^\circ</math></p>	<p><b>Объяснение</b></p> <p>Угол <math>BKD</math> равен половине суммы градусных мер дуг <math>BD</math> и <math>AC</math>.</p>

<p>а)</p>  <p><math>\angle BKD = ?</math></p>	<p>б)</p>  <p><math>\angle BKD = ?</math></p>	<p>в)</p>  <p><math>\angle BKC = ?</math></p>	<p>г)</p>  <p><math>\angle AKC = ?</math></p>
--	--	---	--

- 2 По данным на рисунке найдите градусную меру требуемой дуги.

<p>а)</p>  <p><math>\text{arc } AD = ?</math></p>	<p>б)</p>  <p><math>\text{arc } BD = ?</math></p>	<p>в)</p>  <p><math>\text{arc } BC = ?</math></p>	<p>г)</p>  <p><math>\text{arc } BC = ?</math></p>
---	---	--	---

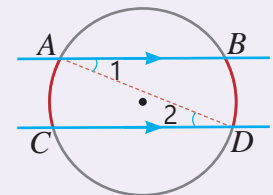


### Запомни!

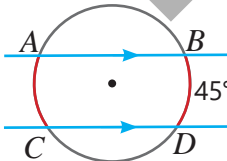
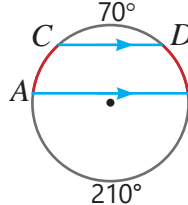
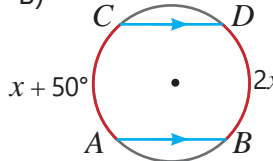
Дуги окружности, заключенные между параллельными секущими (или хордами), конгруэнтны.

$$AB \parallel CD \rightarrow \text{arc } AC \cong \text{arc } BD$$

Действительно, если провести хорду  $AD$ , то углы  $\angle 1$  и  $\angle 2$  будут внутренними накрест лежащими, следовательно,  $\angle 1 \cong \angle 2$ . Если вписанные углы конгруэнтны, то опирающиеся на них дуги также конгруэнтны.



- 3 Хорды  $AB$  и  $CD$  параллельны. Найдите градусные меры требуемых дуг.

<p>а)</p>  <p><math>\text{arc } AC = ?</math></p>	<p>б)</p>  <p><math>\text{arc } AC = ? \quad \text{arc } BD = ?</math></p>	<p>в)</p>  <p><math>\text{arc } AC = ? \quad \text{arc } BD = ?</math></p>
--	---	---

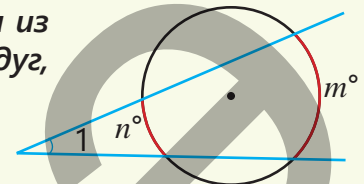
## Изучение Угол между двумя секущими, проведенными из внешней точки окружности

Градусную меру угла между двумя секущими, проведенными из точки вне окружности, можно определить по градусным мерам дуг, которые они отсекают на окружности.

### τ Теорема 4. Свойство угла между двумя секущими, проведенными из внешней точки окружности

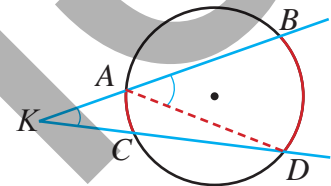
Градусная мера угла между двумя секущими, проведенными из точки вне окружности, равна полуразности градусных мер дуг, лежащих внутри этого угла.

$$\angle 1 = \frac{1}{2}(m^\circ - n^\circ)$$



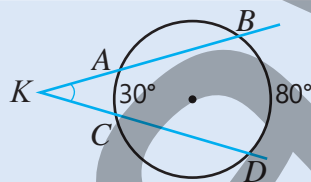
- 4 Из точки  $K$  вне окружности проведены две секущие. Проведите хорду  $AD$  и, отвечая на вопросы, обоснуйте правильность формулы  $\angle K = \frac{1}{2}(\sphericalangle BD - \sphericalangle AC)$ .

- Для какого треугольника угол  $BAD$  является внешним углом?
- Сумме какого угла и угла  $K$  равен угол  $BAD$ ?
- Половине градусной меры какой дуги равен угол  $ADK$ ?
- Половине градусной меры какой дуги равен угол  $BAD$ ?
- Как выразить угол  $K$  через градусные меры дуг  $BD$  и  $AC$ ?



- 5 По данным на рисунке найдите градусную меру угла между секущими.

#### ОБРАЗЕЦ

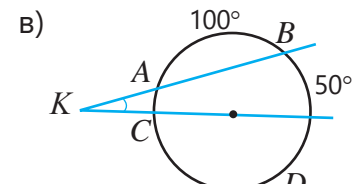
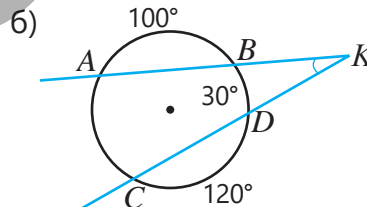
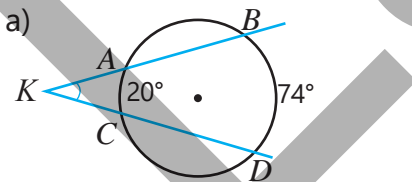


#### Решение

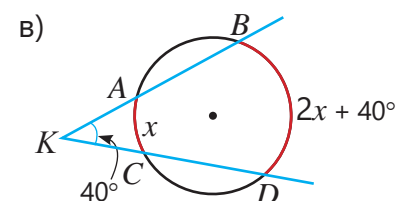
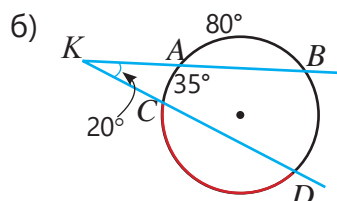
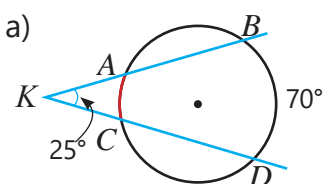
$$\angle K = \frac{1}{2}(80^\circ - 30^\circ) = 25^\circ$$

#### Объяснение

Угол  $K$  равен половине разности градусных мер дуг  $BD$  и  $AC$ .



- 6 Найдите градусную меру дуг, выделенных красным цветом.

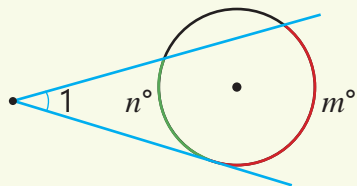




## Запомни!

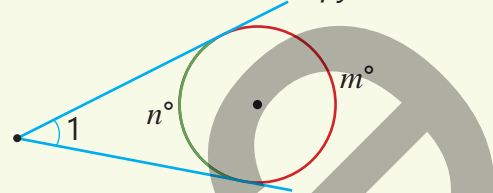
Угол между секущей и касательной, проведенными из точки вне окружности, а также угол между двумя касательными, проведенными из внешней точки, находятся по аналогичному правилу (согласно теореме 4).

*Угол между секущей и касательной, проведенными из точки вне окружности*



$$\angle 1 = \frac{1}{2}(m^\circ - n^\circ)$$

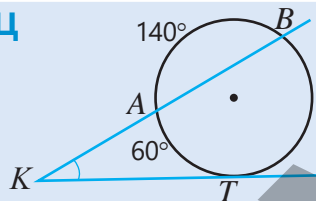
*Угол между двумя касательными, проведенными из точки вне окружности*



$$\angle 1 = \frac{1}{2}(m^\circ - n^\circ)$$

- 7 На рисунке изображены касательные и секущие, проведенные к окружности. По данным найдите градусную меру требуемого угла или дуги.

### ОБРАЗЕЦ

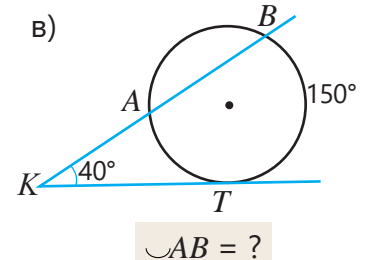
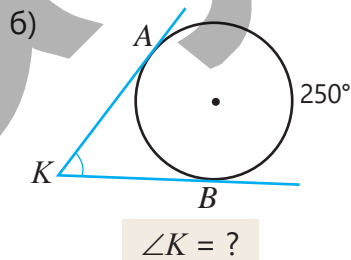
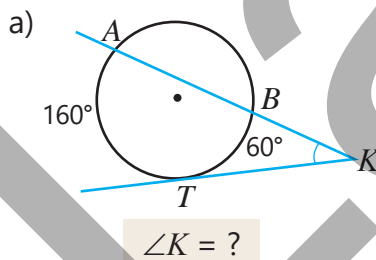


### Решение

$$\begin{aligned} \sphericalcap BT &= 360^\circ - (60^\circ + 140^\circ) = 160^\circ \\ \angle K &= \frac{1}{2}(\sphericalcap BT - \sphericalcap AT) = \frac{1}{2}(160^\circ - 60^\circ) = 50^\circ \end{aligned}$$

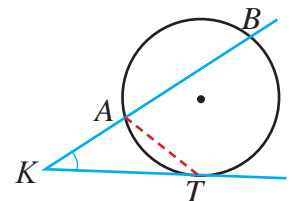
### Объяснение

Полная окружность составляет  $360^\circ$ . Угол  $K$  равен половине разности градусных мер дуг  $BT$  и  $AT$ .



- 8 Из точки  $K$  вне окружности проведены касательная и секущая. Проведите хорду  $AT$  и, отвечая на вопросы, обоснуйте правильность формулы для угла между секущей и касательной  $\angle K = \frac{1}{2}(\sphericalcap BT - \sphericalcap AT)$ .

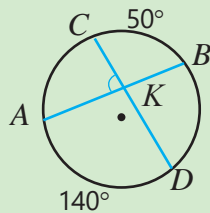
- Угол  $BAT$  равен сумме угла  $K$  и какого еще угла?
- Угол  $ATK$  равен половине градусной меры какой дуги?
- Угол  $BAT$  равен половине градусной меры какой дуги?
- Как выразить угол  $K$  через градусные меры дуг  $BT$  и  $AT$ ?





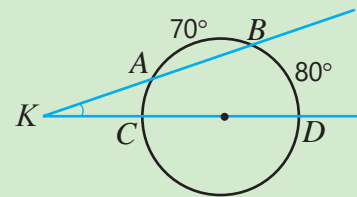
## Исправь ошибку!

a)  $\angle AKC = ?$



$$\angle AKC = \frac{1}{2}(50^\circ + 140^\circ) = 95^\circ$$

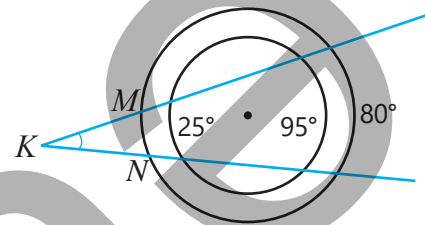
b)  $\angle K = ?$



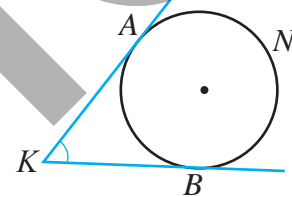
$$\angle K = \frac{1}{2}(80^\circ - 70^\circ) = 5^\circ$$

9 На рисунке изображены концентрические окружности.

- Какова градусная мера угла  $K$ ?
- Какова градусная мера дуги  $MN$ ?

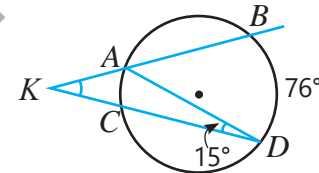


10 Из точки  $K$  к окружности проведены касательные  $KA$  и  $KB$ . Какова градусная мера угла  $K$ , если градусные меры дуг  $AB$  и  $ANB$  относятся как 1 : 2?



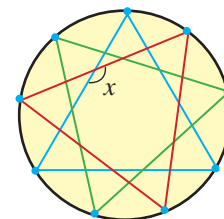
11 Ответьте на вопросы по данным на рисунке.

- Какова градусная мера дуги  $AC$ ?
- Какова градусная мера угла  $BAD$ ?
- Какова градусная мера угла  $K$ ?

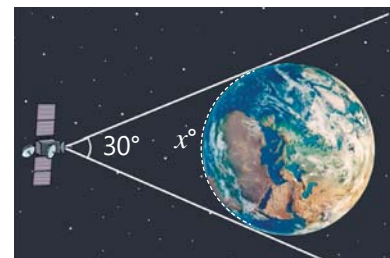


## Решение задач

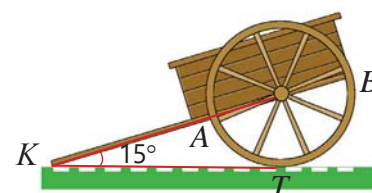
12 Окружность круглой стеклянной панели разделена 9 точками на конгруэнтные дуги, и точки соединены линиями, образуя узор. Какова градусная мера угла, обозначенного переменной?



13 Космическая станция, летящая над экватором, видит земной экватор под углом  $30^\circ$ . Какова градусная мера видимой дуги экватора?



14 Точка касания колеса с землей обозначена буквой  $T$ . Рычаги тележки образуют угол  $15^\circ$  с поверхностью земли и соединены с осью колеса. Какова градусная мера дуг  $\widehat{AT}$  и  $\widehat{BT}$  между землей и рычагами тележки?



## 7.4. Длина дуги. Площадь сектора

### Исследование-обсуждение

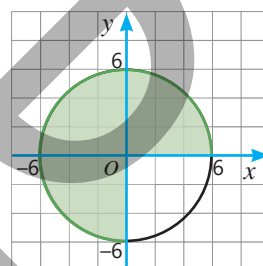
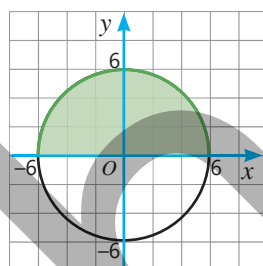
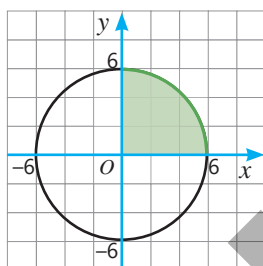
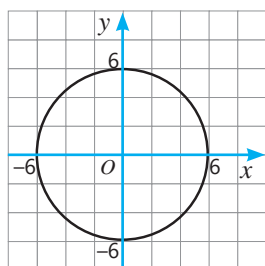


### Ключевые слова

- площадь сектора

Дана окружность с центром в начале координат. На этой окружности построены дуги, соответствующие центральным углам в  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$ .

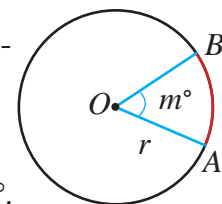
- Какую часть полного угла ( $360^\circ$ ) составляет градусная мера каждой дуги? Как на этом основании найти длину каждой дуги?
- Как найти площадь соответствующих секторов круга?



### Изучение Длина дуги окружности

Отношение длины дуги ( $l$ ) к длине окружности ( $c$ ) равно отношению соответствующего центрального угла ( $m^\circ$ ) к полному углу ( $360^\circ$ ).

$$\frac{l}{c} = \frac{m}{360} \text{ или } \frac{l}{2\pi r} = \frac{m}{360}$$



Из пропорции находится длина дуги, соответствующей центральному углу  $m^\circ$ .

$$l = \frac{m}{360} \cdot 2\pi r \text{ или } l = \frac{m}{180} \cdot \pi r$$



### Подумай!

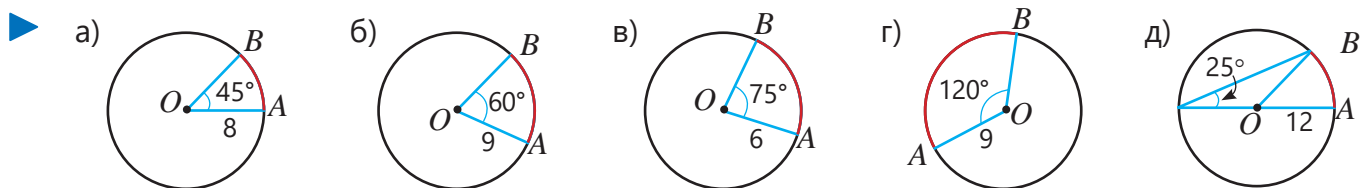
Какую часть длины окружности составляет дуга, соответствующая центральному углу  $60^\circ$ ? Как двумя способами найти длину дуги, соответствующей центральному углу  $60^\circ$ , окружности радиусом 12 см?

### Задания

- 1 По данным на рисунке найдите длину дуги  $AB$ .

**ОБРАЗЕЦ** решение пункта а)

Решение	Объяснение
$\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$ $C = 2\pi \cdot 8 = 16\pi \rightarrow 16\pi \cdot \frac{1}{8} = 2\pi$ $l \cdot 2\pi \cdot 8 = 2\pi$	<p>Центральный угол <math>45^\circ</math> составляет <math>\frac{1}{8}</math> полного угла. Находится <math>\frac{1}{8}</math> часть длины окружности. В формулу длины дуги подставляется <math>m = 45</math>, <math>r = 8</math> и вычисляется значение выражения.</p>



- 2 Найдите длину дуги окружности по заданному радиусу и центральному углу ( $\pi \approx 3,14$ ).
- а)  $r = 10$  см,  $m = 72^\circ$       б)  $r = 6$  см,  $m = 108^\circ$       в)  $r = 5$  см,  $m = 180^\circ$

- 3 Ответьте на вопросы ( $\pi \approx 3$ ).

- а) Сколько сантиметров составляет длина дуги, соответствующая центральному углу  $54^\circ$  в окружности длиной 40 см?  
 б) Сколько метров составляет длина дуги, соответствующая центральному углу  $120^\circ$ , в окружности с диаметром 8 м?

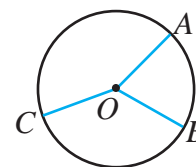
- 4 Обсудите метод решения на приведенном примере. Используя этот метод, выполните задания.

Если длина дуги в  $36^\circ$  на окружности равна  $4\pi$ , найдите длину дуги в  $54^\circ$ .  
 Решение. Длина дуги прямо пропорциональна ее градусной мере.

$36^\circ$	—	$4\pi$	↓	$\frac{36}{54} = \frac{4\pi}{x}$
↓	$54^\circ$	—	$x$	↓
			$x$	$6\pi$

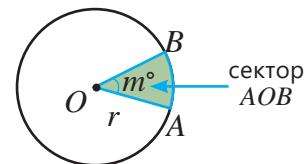
- а) Какова длина дуги в  $70^\circ$ , если длина дуги в  $40^\circ$  равна  $8\pi$ ?  
 б) Какова градусная мера дуги длиной  $18\pi$ , если длина дуги в  $60^\circ$  равна  $12\pi$ ?  
 в) В окружности длиной 30 см найдите градусную меру дуги длиной 6 см.  
 г) Найдите длину окружности, если длина дуги в  $45^\circ$  равна  $7\pi$ .  
 д) Какова длина всей окружности, если длина дуги в  $18^\circ$  равна 3 см?

- 5 Окружность радиусом 6 см разделена точками  $A, B$  и  $C$  на дуги. Градусные меры дуг  $AB, BC$  и  $AC$  относятся как  $2 : 3 : 4$ . Найдите градусные меры и длины дуг  $AB, BC$  и  $AC$ .



## Изучение Сектор круга и его площадь

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и соединяющей их дугой, называется **сектором круга**. Радиус круга является радиусом сектора, соответствующая дуга — дугой сектора, а центральный угол, соответствующий дуге, — углом сектора.



Отношение площади сектора ( $S_{\text{сектор}}$ ) к площади круга ( $S$ ) равно отношению угла сектора ( $m^\circ$ ) к полному углу ( $360^\circ$ ).

$$\frac{S}{S} = \frac{m}{360} \quad \text{или} \quad \frac{S_{\text{сектор}}}{\pi r^2} = \frac{m}{360}$$

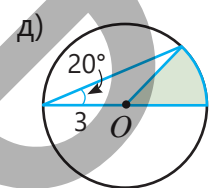
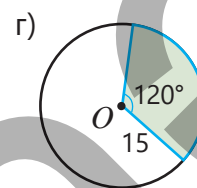
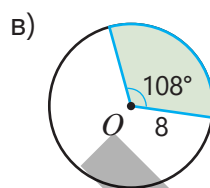
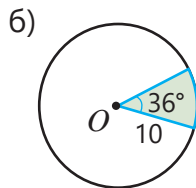
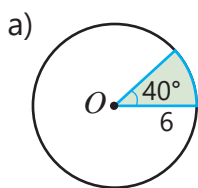
Из пропорции площадь сектора с центральным углом  $m^\circ$  находится следующим образом:

$$S_{\text{сектор}} = \frac{m}{360} \cdot \pi r^2$$

- 6 По данным на рисунке найдите площадь закрашенного сектора.

**ОБРАЗЕЦ** решение пункта а)

Решение	Объяснение
<p>1-й способ. <math>\frac{40}{360} = \frac{1}{9}</math></p> <p><math>S = \pi \cdot 6^2 = 36\pi</math> (см<sup>2</sup>)</p> <p><math>S_{\text{сектор}} = 36\pi \cdot \frac{1}{9} = 4\pi</math></p> <p>2-й способ. <math>S_{\text{сектор}} = \frac{40}{360} \cdot \pi \cdot 6^2 = 4\pi</math></p>	<p>Центральный угол в 40° составляет <math>\frac{1}{9}</math> часть полного угла.</p> <p>Находится <math>\frac{1}{9}</math> часть площади круга.</p> <p>В соответствующую формулу подставляются <math>m = 40</math>, <math>r = 6</math> и вычисляется значение выражения.</p>



- 7 Найдите площадь сектора по радиусу окружности и центральному углу ( $\pi \approx 3,14$ ).

а)  $r = 10$  см,  $m = 54^\circ$

б)  $r = 8$  см,  $m = 270^\circ$

в)  $r = 20$  см,  $m = 126^\circ$

- 8 Ответьте на вопросы ( $\pi \approx 3,14$ ).

а) Чему равна площадь сектора круга с диаметром 8 см и углом 90°?

б) Чему равна площадь сектора круга с радиусом 5 см и углом 36°?

- 9 Ответьте на вопросы.

а) Чему равен угол сектора круга с радиусом 5 и площадью 5π?

б) Чему равен центральный угол сектора круга с диаметром 12, если площадь этого сектора равна 6π?

- 10 Обсудите способ решения, указанный в примере. Используя его, ответьте на вопросы.

а) Чему равна длина дуги сектора с радиусом 4 и площадью 2π?

б) Чему равна площадь сектора с радиусом 3 и длиной дуги 2π?

в) Чему равны радиус и длина дуги сектора с площадью 4π и углом 40°?

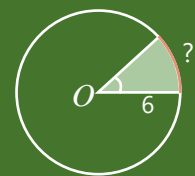
г) Найдите угол и площадь сектора круга с диаметром 16 и длиной дуги 4π.

Чему равна длина дуги сектора с радиусом 6 и площадью 3π?

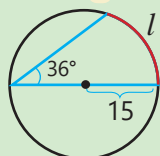
$$\frac{m}{360} \cdot \pi \cdot 6^2 = 3\pi$$

$$m = 30^\circ$$

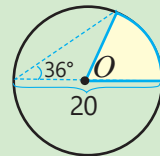
$$l = \frac{30}{360} \cdot 2\pi \cdot 6 = \pi$$



**Исправь ошибку!**

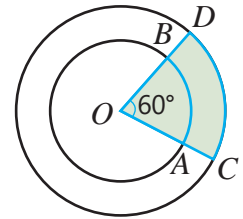


$$l = \frac{36}{360} \cdot 2\pi \cdot 15 = 3\pi$$

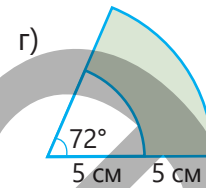
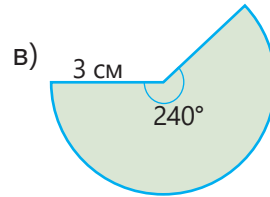
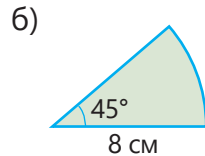
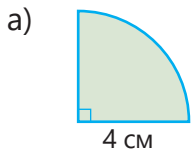


$$S = \frac{72}{360} \cdot \pi \cdot 20^2 = 80\pi$$

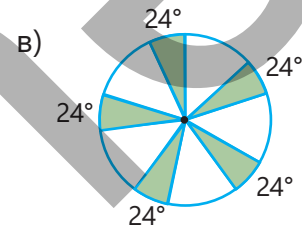
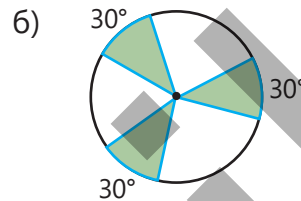
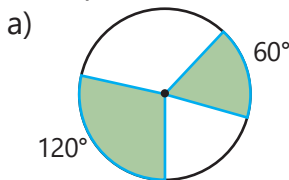
- 11 На рисунке изображены концентрические окружности с радиусами 4 см и 6 см.  
 а) Найдите длины дуг  $AB$  и  $CD$ .  
 б) Найдите площади секторов  $AOB$  и  $COD$ .



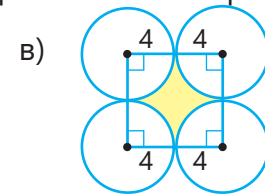
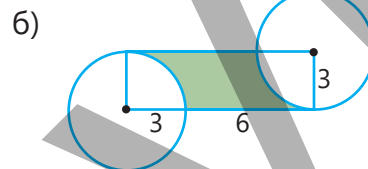
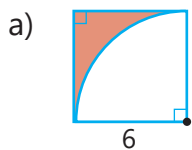
- 12 На рисунке изображен сектор круга. Найдите площадь закрашенной части. Ответ округлите до сотых.



- 13 Площадь круга равна  $120 \text{ см}^2$ . По данным на рисунке найдите сумму площадей зеленых секторов.

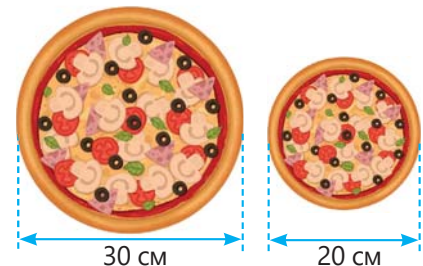


- 14 По данным на рисунке найдите площадь закрашенной части. Выразите ответ через  $\pi$ .

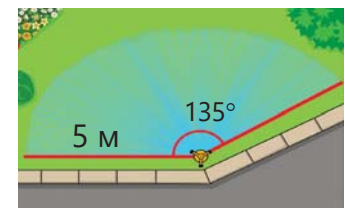


## Решение задач

- 15 Две пиццы одинаковой толщины имеют диаметры 20 см и 30 см. Каждая пицца разрезана на 12 равных кусков. Лала съела 2 куска маленькой пиццы, а Самир съел 1 кусок большой пиццы. Кто съел больше пиццы?



- 16 Распылитель, поворачиваясь на  $135^\circ$ , разбрызгивает воду на расстояние 5 м.  
 • Чему равна площадь полива в квадратных метрах?  
 • Если при снижении давления воды распылитель разбрызгивает воду на расстояние 3 м, то какая площадь в квадратных метрах будет полита? Ответы округлите до целых.



- 17 Садовник для посадки цветов выделил участок в форме сектора круга с радиусом 6 м и углом  $150^\circ$  ( $\pi \approx 3$ ).  
 • Сколько квадратных метров составляет площадь участка для цветов?  
 • Садовник хочет посадить кусты роз вдоль периметра этого участка, оставляя между ними расстояние 50 см. Сколько кустов роз потребуется?



## 7.5. Шар. Площадь поверхности и объем шара

### Исследование-обсуждение

Сабина разрежала апельсин пополам. Она измерила радиус круглой поверхности одной из половинок и нарисовала на бумаге две конгруэнтные окружности с таким же радиусом. Затем она очистила кожуру апельсина, разрежала ее на мелкие части и, не оставляя зазоров, заполнила ими нарисованные окружности. Оказалось, что вся кожура полностью заполнила четыре круга.



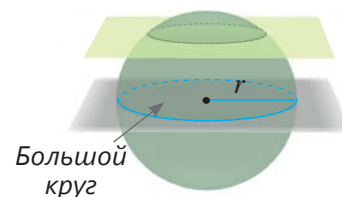
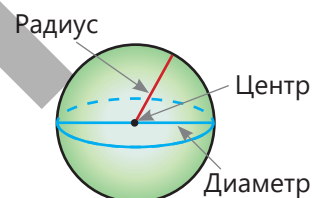
- Как можно найти площадь поверхности апельсина, используя площади кругов?
- Если радиус кругов равен 5 см, чему равна площадь поверхности апельсина?

### Изучение Площадь поверхности шара

Все точки на поверхности шара находятся на одинаковом расстоянии от его центра. Отрезок, соединяющий центр шара с любой точкой на его поверхности (а также его длина), называется **радиусом шара**. **Диаметром шара** называется отрезок, соединяющий две точки на поверхности шара и проходящий через его центр.

• При пересечении шара плоскостью получается круг. Если секущая плоскость проходит через центр шара, образуется круг наибольшего возможного радиуса, который называется **большим кругом шара**. Большой круг делит шар на два полушара. **Диаметр большого круга равен диаметру шара**.

- Площадь поверхности шара в 4 раза больше площади его большого круга.



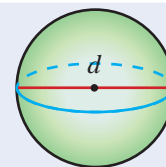
$$S_{\text{шара}} = 4\pi r^2$$

Например: если площадь большого круга равна  $7 \text{ см}^2$ , то площадь поверхности шара будет  $28 \text{ см}^2$ .



### Подумай!

Площадь поверхности шара можно вычислить по формуле  $S_{\text{шара}} = \pi d^2$  (где  $d$  — диаметр шара). Как это можно обосновать?

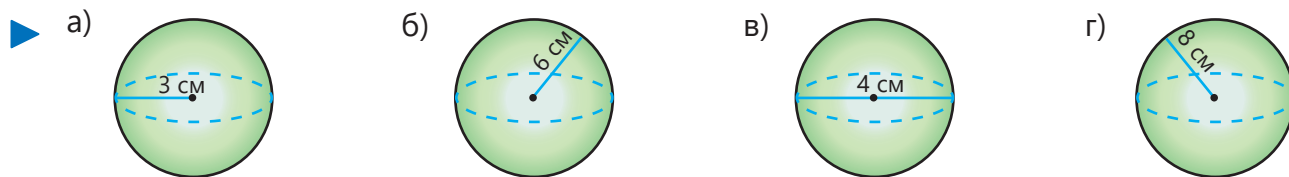


### Задания

- 1 Найдите площадь поверхности шара по заданному радиусу или диаметру. Ответ округлите до целых ( $\pi \approx 3,14$ ).

**ОБРАЗЕЦ** решение пункта а)

Решение	Объяснение
$S = 4\pi r^2 \approx 4 \cdot 3,14 \cdot 6^2 \approx 113,04 \approx 113 \text{ (см}^2\text{)}$	По формуле $S = 4\pi r^2$ вычисляется площадь поверхности шара, и ответ округляется до целых.



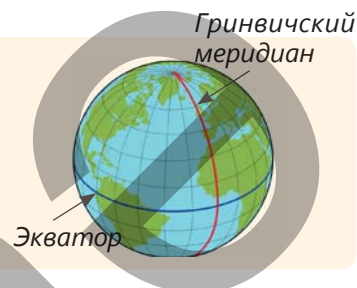
2 Дана площадь большого круга шара. Найдите площадь поверхности шара.

- а)  $6\pi \text{ см}^2$       б)  $5\pi \text{ мм}^2$       в)  $2\pi \text{ м}^2$       г)  $16 \text{ см}^2$       д)  $9 \text{ мм}^2$



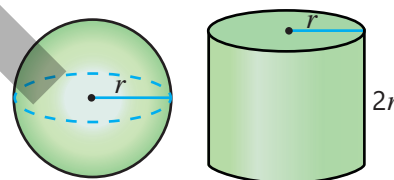
### Внимание!

Наша планета имеет почти шарообразную форму, поэтому ее называют земным шаром. Экватор делит земной шар на Северное и Южное полушария, а Гринвичский меридиан – на Восточное и Западное полушария. Экватор представляет собой большой круг земного шара, а Гринвичский меридиан – его полуокружность.



3 Длина окружности большого круга шара составляет  $12\pi \text{ см}$ .  
 • Найдите диаметр шара.  
 • Чему равна площадь поверхности шара?

4 Площадь поверхности шара радиусом  $r$  равна площади боковой поверхности цилиндра с радиусом  $r$  и высотой  $2r$ . Это впервые установил древнегреческий ученый Архимед. Проверьте правильность этого утверждения, вычислив площади поверхности изображенных на рисунке цилиндра и шара.



## Изучение Объем шара

Объем шара прямо пропорционален кубу его радиуса.

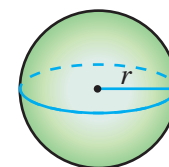
$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Например, объем шара радиусом  $r = 3 \text{ см}$  вычисляется следующим образом:

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot 3^3 = 36\pi (\text{см}^3)$$

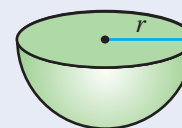
Используя  $\pi \approx 3,14$ , можно приблизительно вычислить объем шара:

$$V \approx 36 \cdot 3,14 \approx 113 (\text{см}^3)$$

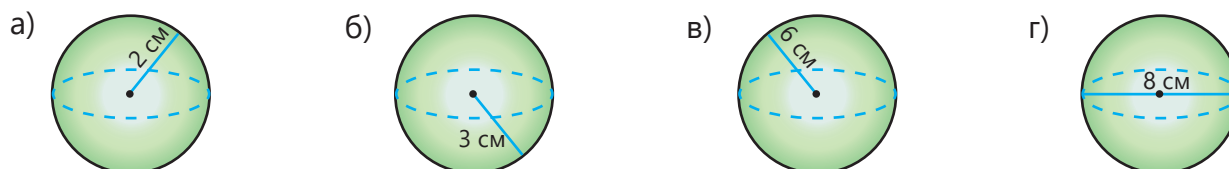


### Подумай!

По какой формуле можно найти объем полушара?



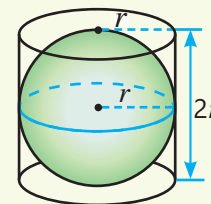
5 По данным на рисунке найдите объем шара ( $\pi \approx 3$ ).





## Из истории математики

В 225 году до н.э. древнегреческий ученый Архимед установил, что площадь поверхности шара в 4 раза больше площади его большого круга. Он также доказал, что площадь поверхности шара, а также его объем составляют соответственно две трети от полной поверхности и две трети от объема описанного вокруг него цилиндра.



- 6 Сколько сантиметров составляет диаметр шара с площадью поверхности  $64\pi$  см<sup>2</sup>? Каков объем этого шара?

## Решение задач

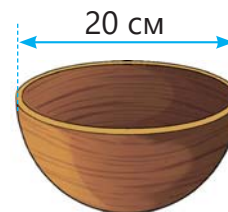
- 7 По данным на рисунке найдите объем и площадь поверхности мяча ( $\pi \approx 3$ ).
- а) футбольный мяч  $d = 26$  см    б) бейсбольный мяч  $d = 8$  см    в) баскетбольный мяч  $r = 12$  см    г) теннисный мяч  $d = 9$  см



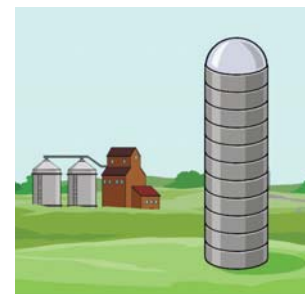
- 8 Радиус Земли составляет примерно 6400 км, диаметр Луны - 3480 км:
- Найдите объем Луны.
  - 75% поверхности Земли покрыто водой. Какова приблизительная площадь суши?
- Ответы округлите до сотен.



- 9 Глиняный сосуд в форме полушара имеет внешний диаметр 20 см и толщину стенок 2 см:
- Каков объем глины, израсходованной на изготовление сосуда?
  - Какова масса сосуда, если плотность глины  $2,74$  г/см<sup>3</sup>?
- Ответы округлите до целых.

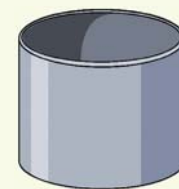


- 10 Зернохранилище (элеватор) цилиндрической формы имеет купол в виде полушара. Диаметр цилиндра 6 м, расстояние от земли до высшей точки хранилища - 15 метров. Необходимо покрасить внешние стены и купол.
- а) Какова площадь внешней поверхности купола?
- б) Какова общая площадь, которую нужно покрасить?
- в) Сколько всего краски нужно для покраски, если на  $1$  м<sup>2</sup> требуется 200 мл?
- Ответы округлите до целых.



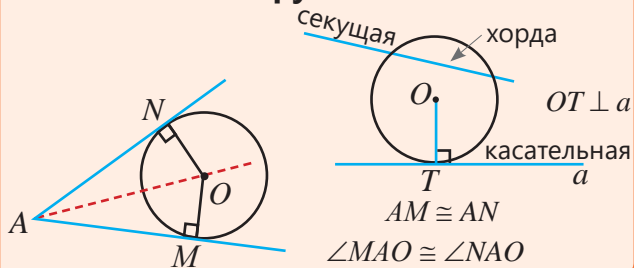
### Практическое задание.

- Найдите объем цилиндра радиусом  $r$  и высотой  $2r$ .
- Заполните полушар, имеющий радиус, равный радиусу этого цилиндра, песком и высыпьте в цилиндр.
- Повторив это 3 раза, убедитесь, что цилиндр заполнился полностью, и на основании этого результата проведите обсуждение, как можно вывести формулу объема шара.

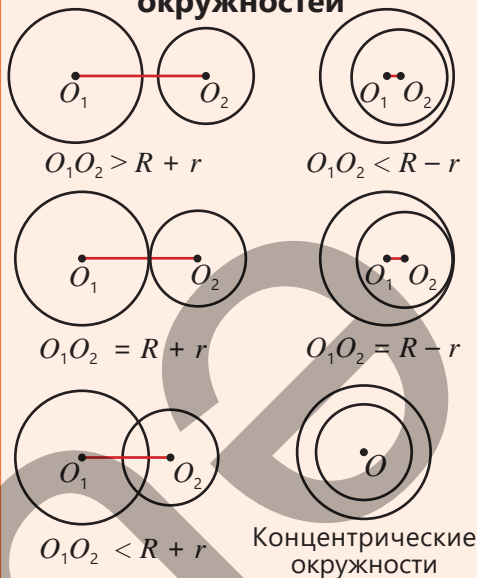


# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

## Взаимное расположение прямой и окружности

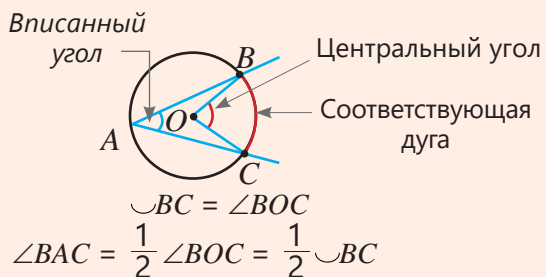


## Взаимное расположение окружностей

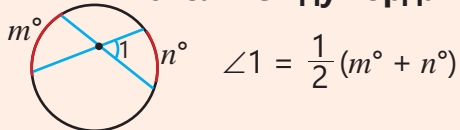


**Окружность  
Круг  
Шар**

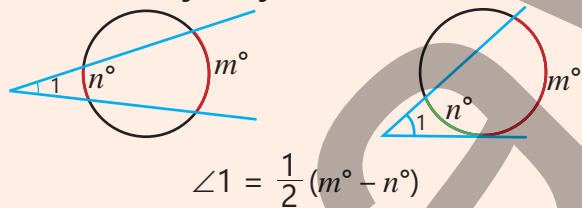
## Центральный угол и вписанный угол



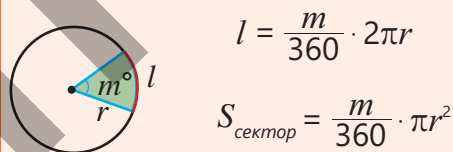
## Угол между хордами



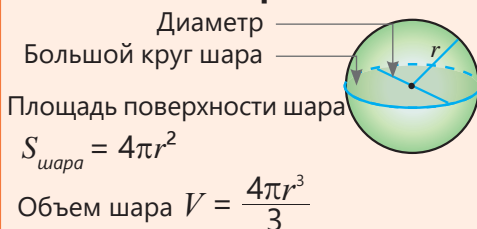
## Угол между секущей и касательной



## Длина дуги окружности и площадь кругового сектора

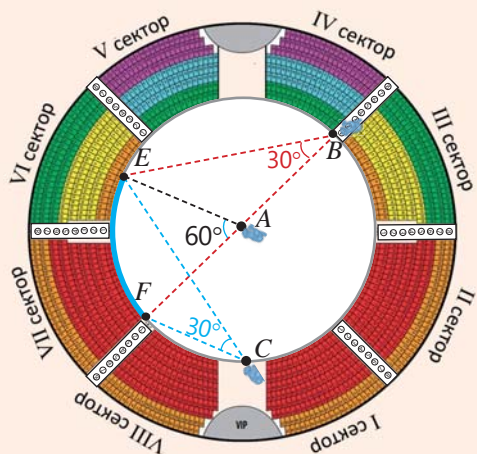


## Шар



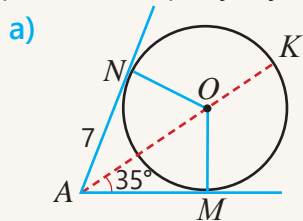
## Решение исходной задачи

- $\triangle ABE$  – равнобедренный треугольник:  
 $AE = AB$  и  $\angle B \cong \angle AEB$ .  
 Внешний угол равен сумме двух внутренних, не смежных с ним углов:  $\angle B + \angle AEB = 60^\circ$ .  
 Следовательно,  $\angle B = \angle AEB = 30^\circ$ .
- Так как  $\sphericalangle EF = \angle A = 60^\circ$  и вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается, то находится  $\angle ECF = 30^\circ$ .
- Вычисляется длина дуги  $EF$ :  
 $\frac{60}{360} \cdot 2\pi \cdot 12 = 4\pi \approx 12,56$  (м)

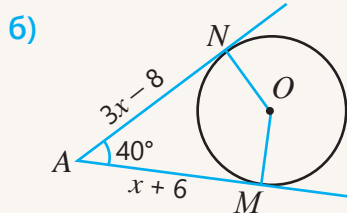


## ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

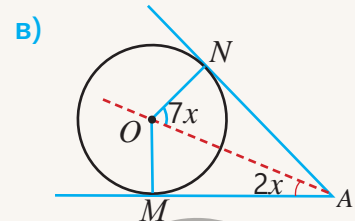
1. К окружности проведены касательные. По данным на рисунке найдите длину требуемого отрезка или градусную меру угла.



$AM = ? \quad \angle KOM = ? \quad \angle AON = ?$

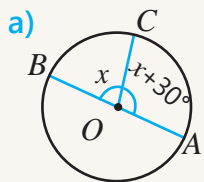


$AM = ? \quad AN = ? \quad \angle NOM = ?$

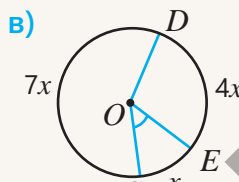


$\angle NAO = ? \quad \angle NOM = ?$

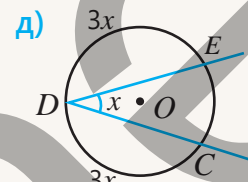
2. На рисунке  $AB$  - диаметр окружности. Определите градусную меру требуемого угла или дуги.



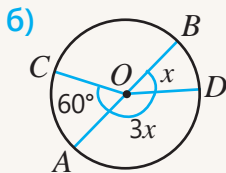
$\angle BOC = ?$   
 $\widehat{BC} = ?$   
 $\widehat{AC} = ?$



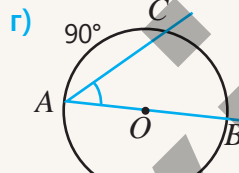
$\angle EOC = ?$   
 $\widehat{DC} = ?$   
 $\angle DEC = ?$



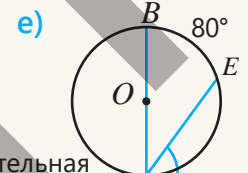
$\widehat{EC} = ?$   
 $\angle CDE = ?$



$\angle BOD = ?$   
 $\widehat{AD} = ?$   
 $\widehat{CBD} = ?$

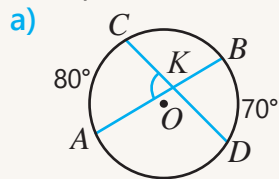


$\widehat{BC} = ?$   
 $\angle BAC = ?$

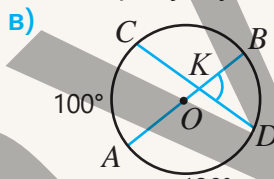


$\widehat{AE} = ?$   
 $\angle EAF = ?$

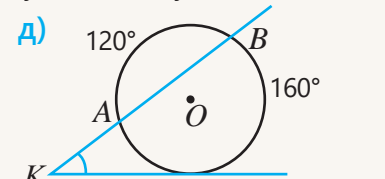
3. По приведенным данным найдите градусную меру искомого угла или дуги.



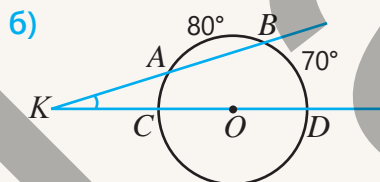
$\angle AKC = ?$



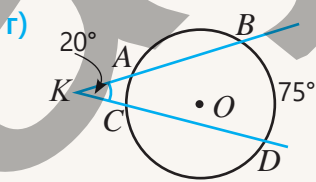
$\widehat{BD} = ? \quad \angle BKD = ?$



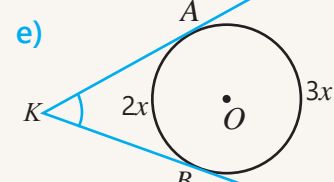
$\widehat{AT} = ? \quad \angle K = ?$



$\widehat{AC} = ? \quad \angle K = ?$



$\widehat{AC} = ?$



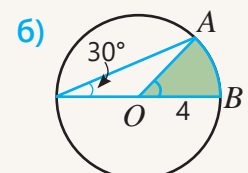
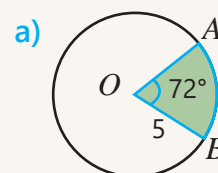
$\angle K = ?$

4. Расстояние между центрами двух касающихся окружностей составляет 12 см, а их радиусы относятся как 1 : 3. Найдите радиусы окружностей, если:

а) окружности касаются внешним образом

б) окружности касаются внутренним образом

5. По данным на рисунке вычислите длину дуги  $AB$  и площадь сектора  $AOB$ .



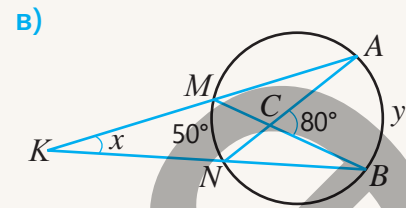
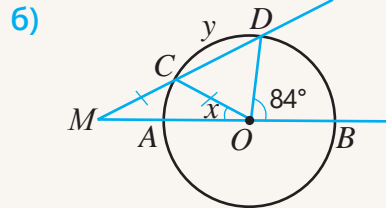
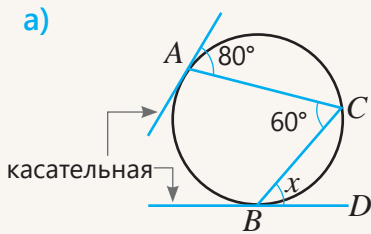
6. Ответьте на вопросы.

а) Какова длина дуги, соответствующей центральному углу  $72^\circ$ , в окружности диаметром 15 см?

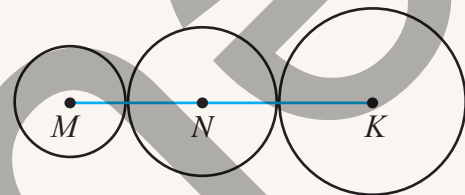
б) Если длина дуги, соответствующей центральному углу  $54^\circ$ , равна 12 см, какова длина окружности?

в) Чему равна площадь сектора с радиусом 4 см и длиной дуги  $\pi$  см?

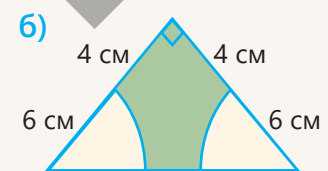
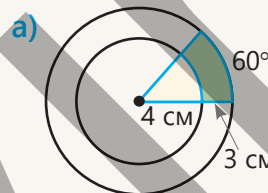
7. Какова градусная мера угла или дуги, обозначенной переменной?



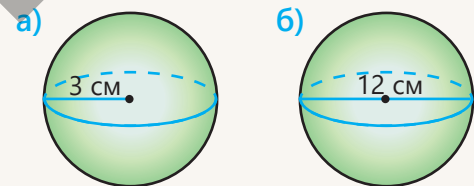
8. Окружности с центрами в точках  $M$ ,  $N$  и  $K$  касаются друг друга внешним образом, как показано на рисунке. Их радиусы относятся как  $2 : 3 : 4$ . Найдите радиусы этих окружностей, если  $MK = 36$  см.



9. Вычислите площадь закрашенной части ( $\pi \approx 3$ ).



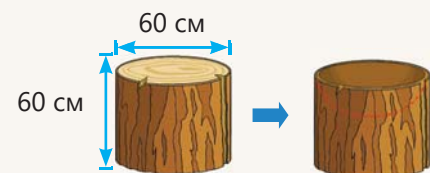
10. По данному радиусу или диаметру вычислите площадь поверхности и объем шара ( $\pi \approx 3$ ).



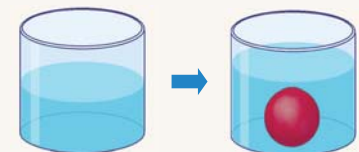
11. Из ствола дерева вырезали бревно в форме цилиндра диаметром и высотой 60 см.

а) Найдите площадь поверхности и объем бревна.

б) Из этого бревна вырезали полушар радиусом 3 см. Найдите площадь поверхности и объем полученной фигуры. Округлите ответ до десятых.



12. Сосуд в форме цилиндра диаметром и высотой 12 см наполовину заполнен водой. До какого уровня поднимется вода, если в него опустить железный шар радиусом 3 см?



13. Иглу для дачных участков из небьющегося стекла имеет форму полушара диаметром 6 м.

• Сколько квадратных метров стекла потребуется для изготовления одного иглу?

• Каков объем иглу?

Ответы округлите до целых.





## Математический калейдоскоп

1. С помощью цифр 5, 7 и 8 Анар записал однозначные, двузначные, трехзначные и четырехзначные числа в порядке возрастания: 5, 7, 8, 55, 57, 58, 75, 77, 78, ...

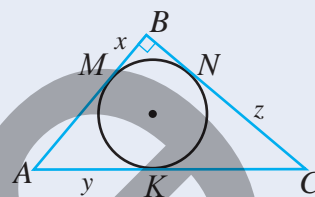
- Какое число будет на 40-м месте в этой последовательности?
- Сколько цифр будет в 100-м числе?

2. Окружность касается сторон прямоугольного треугольника  $ABC$  в точках  $M, N, K$ .  $AB = 6$  см,  $BC = 8$  см,  $AC = 10$  см.

а) Найдите длины отрезков, обозначенных переменными.

б) На отрезки какой длины делятся стороны треугольника точками касания окружности?

в) Длина какого из этих отрезков равна радиусу окружности?



3. Поезд проходит мимо столба за 27 секунд, а через туннель длиной 660 м — за 60 секунд. Какова скорость поезда?



4. На круговой дороге расположены только 4 заправки, обозначенные как  $A, B, C, D$ . Заправки  $A$  и  $B$  находятся на диаметре круга и длина дуги  $AB = 10$  км. Длина дуги  $AC = 8$  км, длина дуги  $CD = 5$  км, а длина дуги  $DA = 7$  км.

а) Каким образом расположены заправки на окружности?

б) Найдите длину дуги  $BC$  и площадь соответствующего сектора. Ответы округлите до сотых.

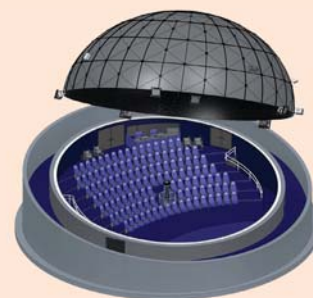


## STEAM "ПЛАНЕТАРИЙ"

Планетарий — это место, где с помощью современных технологий можно наблюдать модель Вселенной со звездами, планетами и кометами.

Иногда планетарий называют и театром. Зрители наблюдают все эти удивительные изображения, глядя на куполообразный потолок.

Форма потолка в виде полушара делает возможным обзор Вселенной со всех сторон и создает ощущение, будто находишься под огромным небом.



1. Купол планетария имеет форму полушара диаметром 12 м. Найдите площадь поверхности и объем купола.

2. На круглом экране изображена группа звезд внутри сектора радиусом 6 м и центральным углом  $90^\circ$ . Найдите площадь сектора и длину соответствующей дуги.



3. Подготовьте модель купола. Если радиус модели составляет 30 см, найдите ее площадь поверхности и объем.

4. Подготовьте презентацию о вашей модели планетария, ее новых возможностях и дополнительных эффектах, которые произведут большее впечатление на зрителей.

# Линейное уравнение. Система уравнений. Неравенство

## В этой главе вы научитесь:

- определять, имеет ли линейное уравнение с одной переменной единственное решение, бесконечное количество решений или не имеет решений;
- решать простые уравнения с модулем;
- записывать уравнение прямой;
- решать системы линейных уравнений с двумя переменными;
- решать простые неравенства;
- находить абсолютную и относительную погрешности результата в измерениях и приближенных вычислениях.

## Попытайтесь!

В 1 литре апельсинового сока содержится 420 мг витамина  $C$ , а в 1 литре яблочного сока — 20 мг витамина  $C$ . В 1 литре смеси апельсинового и яблочного соков содержится 320 мг витамина  $C$ .

- Если количество апельсинового сока в 1 литре смеси обозначить как  $p$ , а количество яблочного сока как  $a$ , какие уравнения можно записать?
- Как определить, сколько апельсинового или яблочного сока содержится в смеси?
- Стоимость 1 литра смеси фруктового сока составляет 1,20 маната. Чтобы прибыль от продажи составляла не менее 30 гяпиков, какова должна быть цена продажи? Запишите соответствующее неравенство.



При решении различных задач из повседневной жизни, экономики, инженерии, медицины и других сфер широко используются линейные уравнения, системы уравнений и неравенства. Например, при решении задач, связанных с производительностью в производстве, величины, влияющие на процесс, заменяются переменными, и задача моделируется с помощью системы линейных уравнений. В строительстве для определения необходимой нагрузки и устойчивости инженерных конструкций к землетрясениям используются неравенства. Для уточнения результатов лабораторных измерений анализируются возможные погрешности. Расчет абсолютной и относительной погрешностей помогает получить более точные результаты.



## Предварительная проверка

- 1 Упростите выражение и найдите его значение при заданных значениях переменных.

а)  $5(1,2x - 3) - (-4x + 15)$   
 $x = -2$

б)  $(a - b)^2 - (b - 3)(b + 3)$   
 $a = -3; b = 0,5$

в)  $(m - 2n)^2 - (m + 2n)^2$   
 $m = 4; n = -\frac{1}{4}$

- 2 Если  $x + y = 5$ , найдите значение данного выражения.

а)  $x - (5 - y)$

б)  $y + (2x + y)$

в)  $(x - 5) + 2x + 3y$

г)  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}(x + y)$

- 3 Решите уравнение.

а)  $3x + 5 = -22$

б)  $\frac{3b - 1}{2} = 2,5$

в)  $2x + 1 = -2x - 6$

г)  $(b + 1)(b - 1) - (b - 3)^2 = 20$

- 4 Найдите точки пересечения графика функции с координатными осями. Постройте график функции, проведя прямую через эти точки.

а)  $y = x + 3$

б)  $y = 1 - 2x$

в)  $y = 0,5x - 1$

г)  $y = -x + 6$

д)  $y = -\frac{x + 2}{4}$

- 5 График линейной функции проходит через точку (2; 5) и параллелен оси абсцисс. Проходит ли график этой функции через точку (2; 3)?

- 6 Найдите числа, соответствующие условию.

а) Разность двух чисел, одно из которых в 5 раз меньше другого, равна 18.

б) Сумма двух чисел, одно из которых на 20% больше другого, равна 110.

- 7 Изобразите решение неравенства на числовой прямой. Найдите четыре целых числа, удовлетворяющих неравенству, и два — не удовлетворяющих.

а)  $x \leq 2$

б)  $y \geq -3$

в)  $a > 5$

г)  $b < 1$

д)  $c \leq 0$

е)  $m > -9$

- 8 При каких из заданных значений переменной неравенство будет верным?

а)  $x + 5 \geq 2$   
-4 -3 0 1 2

б)  $x - 2 \leq -1$   
-3 -1 1 2 4

в)  $2x - 3 > 6$   
-5 -4 0 5 6

- 9 Сравните значения выражений  $|a + b|$  и  $|a| + |b|$  при заданных значениях  $a$  и  $b$ .

а)  $a = 1,4; b = 2,6$

б)  $a = 7; b = -7$

в)  $a = -2,8; b = 1,2$

г)  $a = -0,6; b = -5,3$

- 10 Масса пустой тарелки составляет 300 граммов.

• Сколько фруктов можно положить в тарелку, чтобы общая масса не превышала 1 кг? Обозначив массу фруктов в тарелке буквой  $m$ , запишите соответствующее неравенство.

• Какова наибольшая возможная масса фруктов в тарелке?

500 г

600 г

700 г

800 г



- 11 На поле были посеяны пшеница и кукуруза. Площадь, засеянная кукурузой, в 2 раза больше площади, засеянной пшеницей. Если уменьшить площадь, засеянную пшеницей, на 40 ар, а площадь кукурузы увеличить на 25 ар, то общая площадь посева будет 180 ар. Сколько ар земли засеяно кукурузой?



## 8.1. Линейное уравнение с одной переменной

### Исследование-обсуждение

В таблицах указано, сколько времени дети провели за чтением в выходные дни.



### Ключевые слова

- линейное уравнение с одной переменной (с одним неизвестным)

День Имя	Суббота	Воскресенье
Сабина	$x$	$2x - 1$
Анар	$x + 1$	$x$

День Имя	Суббота	Воскресенье
Самир	$x + 1$	$x + 2$
Айнур	$x + 4$	$x$

- Сколько всего часов за два дня каждый из детей потратил на чтение?
- Если Сабина и Анар провели одинаковое количество времени за чтением в течение двух дней, сколько часов в день они читали?
- Может ли быть, что Самир и Айнур провели одинаковое количество времени за чтением за два дня? Как это можно объяснить с помощью уравнения?

### Изучение Линейное уравнение с одной переменной

Уравнение вида  $ax = b$  называется **линейным уравнением с одной переменной** или с **одним неизвестным**. Здесь  $x$  — неизвестное, а  $a$  и  $b$  — заданные числа. Например:  $4x = 12$ ,  $\frac{1}{2}x = 0$ ,  $x = 5$  — линейные уравнения, а  $2x^2 = 8$  не является линейным уравнением.

- Если выражения в левой и правой частях уравнения с одной переменной являются многочленами первой степени, то, используя свойства равенств, это уравнение можно привести к эквивалентному уравнению вида  $ax = b$  и решить его. Например:

$$\begin{aligned}2x - 7 &= \frac{1}{2}x + 2 \\2x - \frac{1}{2}x &= 7 + 2 \\ \frac{3}{2}x &= 9 \\ x &= 6\end{aligned}$$



### Подумай!

Как объяснить, что уравнение  $4x^2 = 25$  не является линейным уравнением?

### Задания

- 1 Определите, является ли уравнение линейным уравнением с одной переменной.

а)  $4x = 3$    б)  $5x^2 + 7 = 2$    в)  $-2 + y^2 = 1$    г)  $0 \cdot x = 0$    д)  $-2 + y = 4$    е)  $0 = \frac{x}{2} - x$

- 2 Определите, является ли заданное значение переменной корнем уравнения.

а)  $-\frac{x}{4} + 1 = 0$   
 $x = 8$    б)  $\frac{1}{3}y + 0,5y - \frac{1}{4} = 0$   
 $y = 0,3$    в)  $-\frac{a}{3} + \frac{a}{2} = 1$   
 $a = 0$    г)  $\frac{b}{2} + 2b = -2$   
 $b = -2$

3 Определите не решая, какие из данных чисел являются корнями уравнения.

а) $-2x + 5 = 0$ 0 2,5 -2,5 $\frac{2}{5}$	б) $\frac{1}{3}x - 3 = 0$ 3 -9 -3 9	в) $\frac{x+1}{4} - \frac{1}{2} = 0$ 3 1 -9 $-\frac{1}{2}$	г) $0,2x + \frac{1}{5} = 0$ $\frac{1}{5}$ -1 1 $-\frac{1}{5}$
--	--	---	--

4 В пустую клетку впишите такое число, чтобы уравнения были эквивалентны.

а) $\frac{x}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \square$	в) $\frac{2x}{3} - 4 = 1 \Leftrightarrow 2x - \square = 3$	д) $\frac{3a}{4} = -2 \Leftrightarrow 3a = \square$
б) $\frac{y}{2} - \frac{y}{4} = 2 \Leftrightarrow 2y - y = \square$	г) $\frac{y}{4} + y = 1 \Leftrightarrow y + \square y = 4$	е) $\frac{b}{4} + \frac{b}{6} = 1 \Leftrightarrow 5b = \square$

5 Решите уравнение.

а) $\frac{3}{7}x = -6$	в) $4 - \frac{2x}{7} = 0$	д) $2,5y - 4 = 1,5y - 1$	ж) $\frac{y+3}{6} = -1\frac{2}{3}$
б) $\frac{x}{5} = -3$	г) $-\frac{3}{5}a + \frac{1}{4} = -1$	е) $5x - 2 = \frac{1}{2}x + 4$	з) $\frac{a}{2} - \frac{a}{5} + 5 = 1$

## Изучение Решение линейного уравнения с одной переменной

Решить уравнение — значит найти его корень или показать, что корней нет.

В зависимости от значений чисел  $a$  и  $b$  линейное уравнение вида  $ax = b$  может иметь один корень, бесконечно много корней или не иметь корней.

1) Если  $a \neq 0$ , то линейное уравнение с одной переменной имеет один корень,  $x = \frac{b}{a}$ .

Например, в уравнении  $2x = -6$  коэффициент  $a = 2 \neq 0$ . Значит, корнем уравнения является число  $-3$ .

$$x = \frac{-6}{2} = -3$$

2) Если  $a = 0$ ,  $b = 0$ , то уравнение имеет бесконечно много корней. Другими словами, любое число будет корнем уравнения  $0 \cdot x = 0$ .

3) Если  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , то уравнение не имеет решений. Например, уравнение  $0 \cdot x = 5$  не имеет корней.

6 Запишите уравнение в виде  $ax = b$  и определите количество его корней.

**ОБРАЗЕЦ**  $3x + 5 = 3x$

Решение	Объяснение
$3x + 5 = 3x$ $0x = -5$	Уравнение записывается в виде $ax = b$ . Так как $a = 0$ , $b \neq 0$ , уравнение не имеет корней.

$x + 5 = 10$     $x = x + 6$     $0x = 0$     $x + 3 = 4x - 2$     $2(x - 1) = 2x - 2$     $3x + x - 3 = 4x - 4$

7 В пустую клетку впишите такое число, чтобы уравнение не имело корней.

а)  $\square x + 5 = 2x + 6$    б)  $\square x + 3 = 3(x + 5)$    в)  $5x = 6 + \square x$    г)  $\square(x - 1) = 4x - 2$

8 В пустые клетки впишите такие числа, чтобы уравнение имело бесконечно много корней.

$\square x + 2 = 3x + 2$     $\square x + 4 = 4(x + 1)$     $\square(x + 2) = -4x + \square$     $3(x - \square) = \square x - 6$

- 9 Анар записал на доске решение уравнения. Являются ли его рассуждения верными? Объясните.

$$\begin{aligned} 2x + 5 &= 4x + 5 \\ -2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Так как в ответе получился ноль, уравнение не имеет корня.



- 10 Решите уравнение.

**ОБРАЗЕЦ**  $\frac{x+2}{4} = \frac{x}{6} - 3$

Решение	Объяснение
$12 \cdot \frac{x+2}{4} = 12 \cdot (\frac{x}{6} - 3)$ $3x + 6 = 2x - 36$ $x = -42$	Обе стороны уравнения умножаются на НОК(4, 6) = 12.
$\frac{-42+2}{4} = \frac{-42}{6} - 3$ $-10 = -10$	Упрощается, решается полученное эквивалентное уравнение. Находится значение неизвестного.
<p>Ответ: <math>x = -42</math></p>	Найденное число подставляется в уравнение и проверяется.

а)  $\frac{x}{3} + \frac{1}{4} = 6$

в)  $5 - a = \frac{a}{4} + 2$

д)  $\frac{1}{3}b + \frac{1}{4} = 6 + b$

ж)  $\frac{a+1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{a}{6}$

б)  $\frac{y}{2} - \frac{1}{6} = 0$

г)  $\frac{x}{5} + \frac{1}{2} = \frac{x}{2} + 1$

е)  $\frac{3y}{4} - \frac{1}{2} = 2y - 3$

з)  $\frac{x-2}{3} + \frac{x+1}{2} = \frac{x}{4} + 1$

- 11 Определите, существует ли корень уравнения.

а)  $3(x+1) - 4 = 3x - 1$

в)  $y - 3(y - 2(y+1)) = 1$

д)  $\frac{x}{3} = 3(\frac{2x}{3} + 6) - 5$

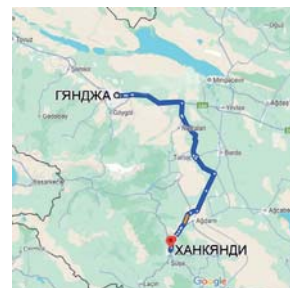
б)  $4t - 2(t + 0,5) = t + 4$

г)  $3x - (x - 2(2 - x)) = 0$

е)  $-\frac{x}{3} - (x+1) + 4 = 3x - 1$

## Решение задач

- 12 Автомобиль проехал из Ханкенди в Гянджу за 2 часа с постоянной скоростью. Возвращаясь по тому же маршруту, он увеличил скорость на 20 км/ч и преодолел путь за 1,6 часа. С какой скоростью автомобиль ехал из Ханкенди в Гянджу?



- 13 Для посева были выделены два участка: один — прямоугольной формы, другой — квадратной.

- Ширина прямоугольника равна  $x - 2$ , длина  $2x - 1$ , а сторона квадрата  $x$ . При каком значении  $x$  периметры этих фигур будут равны?
- Если ширина прямоугольника равна  $a - 1$ , длина  $a + 2$ , а сторона квадрата  $a$ , могут ли периметры этих участков быть равными? Объясните.



## 8.2. Линейное уравнение с двумя переменными и его график

### Исследование-обсуждение

1 кг яблок стоит 2 маната, 1 кг бананов — 3 маната.

• Если покупатель купил  $x$  кг яблок и  $y$  кг бананов и заплатил 12 манатов, как можно записать соответствующее уравнение?

• Если масса купленных яблок составляет 1,5 кг; 3 кг, какова будет масса бананов?



### Ключевые слова

- линейное уравнение с двумя переменными

### Изучение Линейное уравнение с двумя переменными

Уравнение вида  $ax + by = c$  называется линейным уравнением с двумя переменными или двумя неизвестными. Здесь  $x$  и  $y$  — неизвестные,  $a$ ,  $b$  и  $c$  — заданные числа. Например, уравнения  $5x + 2y = 1$ ,  $x - 5y + 3 = 0$ ,  $\frac{x}{2} + 3y = 3$  линейные уравнения с двумя переменными.

А уравнения  $xy = -2$ ,  $x^2 + y = 3$  не являются линейными уравнениями с двумя переменными.

• Решением линейного уравнения с двумя переменными называется такая пара чисел, при подстановке которых в уравнение получается верное числовое равенство. Например, в уравнении  $2x + y = 7$  при  $x = 2$  и  $y = 3$  получается верное равенство:  $2 \cdot 2 + 3 = 7$ . Следовательно, пара (2; 3) является решением данного уравнения.

• Уравнения, имеющие одинаковое множество решений, называются эквивалентными. В линейном уравнении с двумя переменными, используя свойства равенства, можно выразить одну переменную через другую. Полученное уравнение будет эквивалентно исходному. Например, в уравнении  $5x + 2y = 10$  можно выразить  $y$  через  $x$  следующим образом:

$$5x + 2y = 10 \quad \text{Слагаемое } 5x \text{ переносится в правую часть с противоположным знаком.}$$

$$2y = 10 - 5x \quad \text{Обе части уравнения делятся на 2.}$$

$$y = 5 - 2,5x \quad \text{Переменная } y \text{ выражается через } x.$$

Уравнение  $y = 5 - 2,5x$  эквивалентно уравнению  $5x + 2y = 10$ . Подставляя значения  $x$  в уравнение  $y = 5 - 2,5x$  и находя соответствующие значения  $y$ , можно найти сколько угодно решений уравнения  $5x + 2y = 10$ .

$$x = 2 \rightarrow y = 5 - 2,5 \cdot 2 = 0 \quad x = -4 \rightarrow y = 5 - 2,5 \cdot (-4) = 15$$

Пары (2; 0), (-4; 15) являются решениями как уравнения  $y = 5 - 2,5x$ , так и  $5x + 2y = 10$ .



### Подумай!

Как выразить переменную  $x$  через  $y$  в уравнении  $5x + 2y = 10$ ?

### Задания

1 Определите, является ли данное уравнение линейным уравнением с двумя переменными.

а)  $5x + 3y = 0$    б)  $x - 3y = 4$    в)  $x - \frac{1}{y} = 1$    г)  $xy = 6$    д)  $-2x + y = 4$    е)  $2 = \frac{4}{a} + b$

2 Определите, является ли заданная пара чисел решением уравнения.

а)  $-\frac{2}{3}x + y = 2$   
 $x = 3; y = 4$

б)  $2x + 4y = 8$   
 $x = 2; y = 0$

в)  $\frac{m}{3} - \frac{n}{2} + 2 = 0$   
 $m = -3; n = 2$

3 Какая из пар чисел является решением уравнения?

а)  $-x + 3y = 2$

(-2; 0) (2; 3) (1; 1)

б)  $\frac{1}{3}x - y + 5 = 0$

(-3; 2) (6; 1) (0; 5)

в)  $\frac{x}{2} + 2y = -3$

(-2; 2) (2; -2) (0; -1,5)

4 Выразите в уравнении переменную  $y$  через  $x$ .

а)  $-5x + 2y = 0$

б)  $0,5x + y - 1 = 0$

в)  $-x - y = 4$

г)  $2x + \frac{1}{3}y = -6$

5 Выразите в уравнении одну переменную через другую и укажите три решения.

а)  $x$  через  $y$  б)  $y$  через  $x$

$2x + y = 6$

$-3x + 4y = 0$

$1,2x + 2y = 0,6$

$\frac{3}{4}x + 6y = -3$

6 Приведите три примера пар чисел, являющихся решением уравнения.

а)  $-2x + 3y = 0$

б)  $a + b - 6 = 0$

в)  $\frac{3}{4}x + y = -2$

г)  $3a - b = 15$

7 Составьте уравнение с двумя переменными в соответствии с условием.

а) Сумма удвоенного числа  $a$  и числа  $b$  равна 6.

б) Число  $m$  на 4 больше половины числа  $n$ .

в) Цена ручки ( $q$ ) на 6 манатов дешевле, чем цена книги ( $k$ ).

8 Выполните задание.

а) В формуле  $P = 4a$  выразите  $a$  через  $P$ .

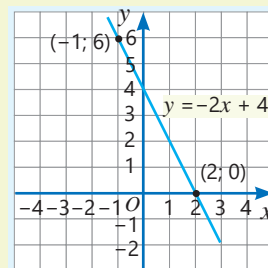
б) В формуле  $F = \frac{9}{5}C + 32$  выразите  $C$  через  $F$ .

## Изучение График линейного уравнения с двумя переменными

Каждую пару чисел, являющуюся решением линейного уравнения с двумя переменными, можно обозначить точкой на координатной плоскости. Все такие точки образуют график уравнения. Если в линейном уравнении с двумя переменными  $ax + by = c$  хотя бы одно из чисел  $a$  или  $b$  не равно нулю, то графиком этого уравнения является прямая линия. Например, графиком уравнения  $2x + y = 4$  является прямая. Эту прямую можно построить следующим образом.

- Переменная  $y$  выражается через  $x$ :  $y = -2x + 4$
- Выбираются координаты двух произвольных точек  
 $x = -1 \rightarrow y = -2 \cdot (-1) + 4 = 6$   
 $x = 2 \rightarrow y = -2 \cdot 2 + 4 = 0$
- Точки отмечаются на координатной плоскости
- Через эти точки проводится прямая

$y = -2x + 4$		
$x$	$y$	$(x; y)$
-1	6	(-1; 6)
2	0	(2; 0)

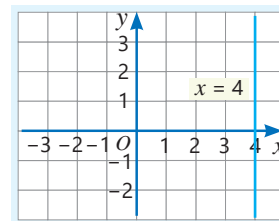


• Угловой коэффициент этой прямой  $-2$ , а ордината точки пересечения с осью  $y$  равна 4

• Удобнее начертить прямую, если найти координаты точек её пересечения с осями абсцисс и ординат.

угловой коэффициент  
 $y = -2x + 4$

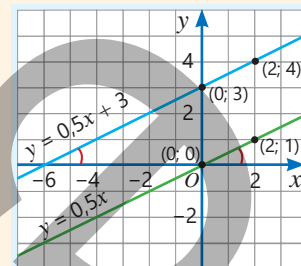
► Если в линейном уравнении с двумя переменными коэффициент при  $y$  равен нулю, а коэффициент при  $x$  не равен нулю, то график такого уравнения — вертикальная прямая. Например, уравнение  $2x + 0y = 8$  имеет решения с абсциссой 4 и произвольной ординатой, то есть координатные пары:  $(4; 0)$ ,  $(4; 3)$ ,  $(4; -1)$  и т.д. Соответствующие точки образуют прямую  $x = 4$ , которая проходит через точку  $(4; 0)$  и параллельна оси  $Oy$ .



• Прямые с одинаковыми угловыми коэффициентами образуют одинаковые углы с осью  $Ox$ , поэтому такие прямые параллельны. Например, угловые коэффициенты прямых  $y = 0,5x + 3$  и  $y = 0,5x$  равны 0,5. Поскольку угловые коэффициенты равны, эти прямые параллельны.

$y = 0,5x + 3$	
$x$	$y$
0	3
2	4

$y = 0,5x$	
$x$	$y$
0	0
2	1



### Подумай!

При каких значениях  $a$ ,  $b$  и  $c$  уравнение  $ax + by = c$  будет параллельно оси  $Ox$ , а при каких значениях совпадет с осью  $Ox$ ?

9 Постройте график по уравнению прямой. Определите, параллельна прямая оси  $Ox$  или  $Oy$  и через какие четверти она проходит.

а)  $y = 2$

б)  $x = 3$

в)  $2y = -5$

г)  $\frac{x}{3} = 1$

д)  $\frac{y}{3} + 2 = 4$

10 Запишите уравнение в виде  $y = kx + b$ . Найдите угловой коэффициент и координаты точки пересечения с осью  $Oy$ , постройте график.

а)  $4x - 2y = 0$

б)  $-x + 4y - 3 = 0$

в)  $1,4x + y = 7$

г)  $x - y = -2$

д)  $5y - x = 0$

11 По уравнениям определите, какие прямые параллельны. Проверьте ответ, построив графики.

а)  $y = 3x + 2$

$y = 3 + 2x$

$y = 3x - 4$

в)  $y + x = 1$

$y - x = 3$

$y + x = -1$

б)  $y = 5 - 1,5x$

$y = 1,5x$

$y = 5 - 1\frac{1}{2}x$

г)  $2y - x = 0$

$y - 2x = 2$

$y - 0,5x = 4$

12 Запишите уравнение прямой и постройте ее график.

**ОБРАЗЕЦ** Прямая, проходящая через точку  $A(2; 3)$  и параллельная прямой  $y = 2x + 3$

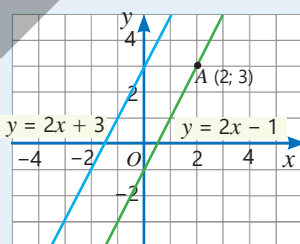
**Решение**

$y = 2x + b$

$3 = 2 \cdot 2 + b$

$b = -1$

$y = 2x - 1$



**Объяснение**

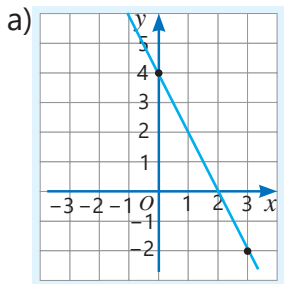
Прямая, параллельная  $y = 2x + 3$ , имеет такой же угловой коэффициент:  $k = 2$

Так как прямая проходит через точку  $A(2; 3)$ , координаты подставляются в уравнение и находится  $b$ .

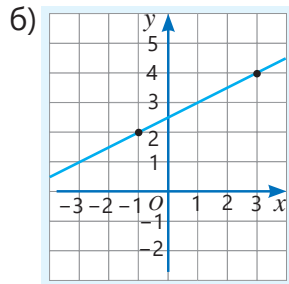
Записывается уравнение прямой и строится ее график.

- ▶ а) Прямая, проходящая через  $A(0; -5)$  и параллельная прямой  $y = x + 3$
- б) Прямая, проходящая через точку  $B(1; 1)$  и параллельная прямой  $y = -3x + 2$
- в) Прямая, проходящая через точку  $C(-0,5; 4)$  и параллельная прямой  $2x + y = 0$

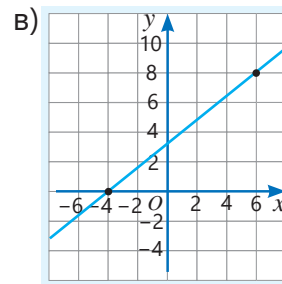
13 Определите, какому из уравнений с двумя переменными соответствует данный график.



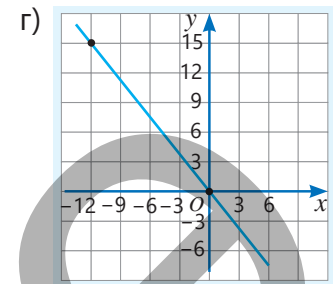
$$x - 2y = -5$$



$$5y - 4x = 16$$



$$\frac{x}{4} + 0,2y = 0$$



$$2x + y = 4$$

14 Найдите точки пересечения прямой с осями абсцисс и ординат и постройте график.

а)  $y = x + 5$

б)  $3x + y = -4$

в)  $x - y = -2$

г)  $\frac{x}{2} - y = 3$

д)  $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$

15 При каком значении  $a$  графики данных линейных уравнений пересекутся на оси  $Ox$ ? Найдите координаты точки пересечения.

а)  $ax - y = 4$  и  $x + 4y = -2$

б)  $5x - y = 1$  и  $2x + y = a$

16 Ответьте на вопросы:

а) Если абсцисса точки на прямой  $2x + y = 4$  равна 1, какова ордината этой точки?

б) Прямая, пересекающая ось  $Oy$  в точке с ординатой  $-3$ , проходит через точку  $(1; 2)$ . Каков ее угловой коэффициент?

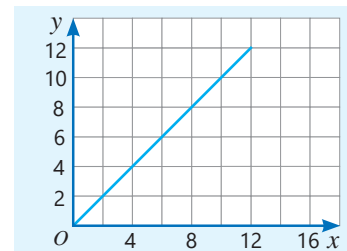
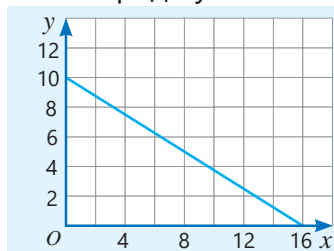
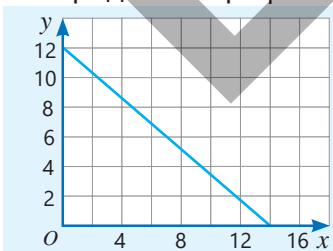
в) В какой точке пересекаются прямые  $x = -2$  и  $2x + 3y = 6$ ?

г) Прямая, проходящая через точку  $(1; 2)$ , пересекает прямую  $y = 2x + 5$  на оси  $Oy$ . Является ли эта прямая параллельной прямой  $y = -3x$ ?

### Решение задач

17 Для доставки помощи в зону стихийного бедствия используется два типа дронов:  $A$  и  $B$ . За один рейс дрон  $A$  перевозит  $x$  кг груза, а дрон  $B$  —  $y$  кг. Планируется, что дрон  $A$  выполнит 10 рейсов, а дрон  $B$  — 16 рейсов.

- Если общая масса доставленного груза составляет 160 кг, составьте соответствующее уравнение с двумя переменными.
- Определите график этого уравнения среди указанных.



- Если дрон  $A$  перевозит 8 кг за рейс, сколько килограммов должен перевозить дрон  $B$  за рейс, чтобы доставить эту же помощь? Как это определить по графику?



## 8.3. Система уравнений

### Исследование-обсуждение

Мастер разрезал провод длиной 10 м на две части. Одна из частей оказалась на 2 м длиннее другой.

- Какова длина каждой части? Как это можно найти?



### Изучение Система линейных уравнений с двумя переменными

Два или более линейных уравнений, для которых требуется найти общее решение, образуют систему линейных уравнений. Система уравнений записывается с помощью фигурной скобки. Например:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

- Решением системы линейных уравнений с двумя переменными является такая пара чисел  $(x; y)$ , которая при подстановке в каждое из уравнений системы превращает их в верные равенства. Например, подставив пары  $(1; 2)$  и  $(3; 1)$  в данную систему уравнений, можно проверить, являются ли они ее решениями.

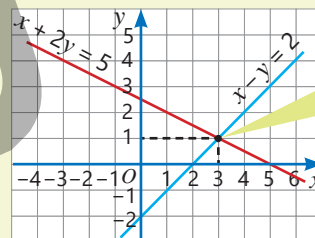
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 = 5 \\ 1 - 2 \neq 2 \end{cases} \quad \text{Пара } (1; 2) \text{ является решением только первого уравнения, поэтому не является решением системы.}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 + 2 \cdot 1 = 5 \\ 3 - 1 = 2 \end{cases} \quad \text{Пара } (3; 1) \text{ является решением обоих уравнений, следовательно, является решением системы.}$$

Решить систему уравнений — это найти ее решение или доказать его отсутствие.

- Решение системы можно также найти графическим способом. Если графики пересекаются, то точка пересечения принадлежит графикам обоих уравнений. Следовательно, пара координат, соответствующая точке пересечения, является решением системы уравнений.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{Прямые пересекаются в точке } (3; 1), \text{ следовательно, эта пара чисел является решением системы.}$$



Точка  $(3; 1)$  — это точка пересечения прямых.

### Задания

- 1 Проверьте, является ли данная пара чисел решением системы уравнений.

а)  $x = 3; y = -3$

$$\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x + y = 0 \end{cases}$$

б)  $x = 1; y = 3$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

в)  $x = -1; y = -3$

$$\begin{cases} y = 4x + 1 \\ y = 3x \end{cases}$$

г)  $x = 2; y = 2$

$$\begin{cases} y = 3 - \frac{x}{2} \\ x + y = 0 \end{cases}$$

- 2 Определите, какая из данных пар чисел является решением системы уравнений.

а)  $\begin{cases} x + 5y = 6 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

$(-2; 2) \quad (-1; 1) \quad (1; 1)$

б)  $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$

$(-3; 1) \quad (2; 1) \quad (2; 3)$

в)  $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$

$(-9; 8) \quad (9; -8) \quad (-8; 9)$

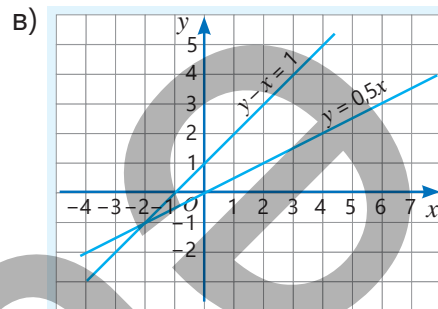
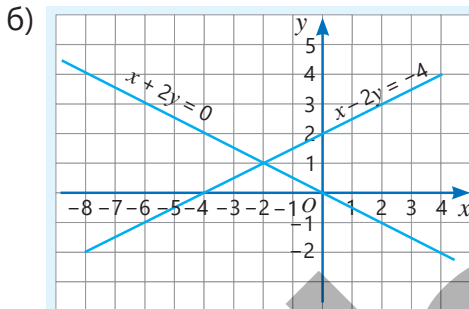
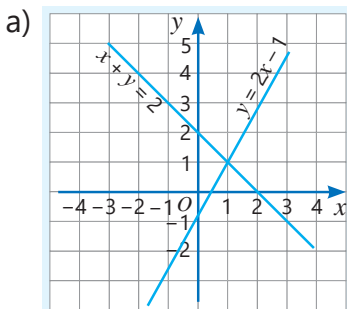
3 В пустые клетки впишите такие числа, чтобы заданная пара чисел была решением системы уравнений.

$$a) \begin{cases} y = x + \square \\ y = 2x \end{cases} \rightarrow (1; 2)$$

$$б) \begin{cases} y = x + \square \\ y = \square x \end{cases} \rightarrow (2; 6)$$

$$в) \begin{cases} y + 2x = \square \\ y = \square - 3x \end{cases} \rightarrow (6; 0)$$

4 На основе графиков составьте систему уравнений и найдите ее решение. Проверьте ответ, подставив координаты точки пересечения.



5 Решите систему уравнений, построив графики.

$$a) \begin{cases} y = 3 + x \\ y = 2x \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y = 1 + 2x \\ y = 2 + x \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x - 1,5y = 0 \\ 3y - 2x = 0 \end{cases}$$

6 Определите прямые, соответствующие заданному условию, и проверьте ответ с помощью графика.

а) Прямые пересекаются на оси абсцисс.

$$y = 3x - 6$$

$$y = x - 2$$

$$y = x + 3$$

б) Прямые пересекаются на оси ординат.

$$y = -2x + 1$$

$$y = 3x - 2$$

$$y = 0,5x + 1$$

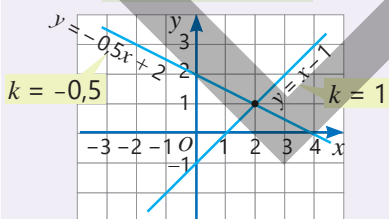


### Запомни!

Система линейных уравнений с двумя переменными может иметь единственное решение, бесконечно много решений или не иметь решений вовсе. Это можно определить, построив графики уравнений, составляющих систему, или используя числа  $k$  и  $b$  каждого уравнения.

1 Прямые пересекаются в одной точке

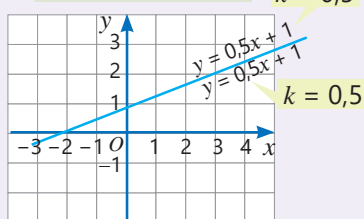
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y + 0,5x = 2 \end{cases}$$



Если угловые коэффициенты прямых разные, то система уравнений имеет единственное решение.

2 Прямые совпадают

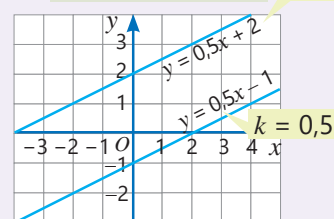
$$\begin{cases} y = 0,5x + 1 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$$



Если угловые коэффициенты и точки пересечения с осью  $Oy$  равны, система уравнений имеет бесконечно много решений.

3 Прямые параллельны

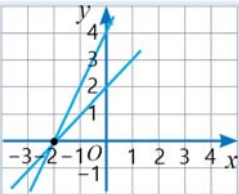
$$\begin{cases} 2y - x = 4 \\ 2y - x = -2 \end{cases}$$



Если угловые коэффициенты одинаковы, но точки пересечения с осью  $Oy$  различны, система не имеет решения.

- 7 Определите количество решений системы, построив графики её уравнений. Проверьте ответ, опираясь на угловой коэффициент и точку пересечения прямых с осью  $Oy$ .

**ОБРАЗЕЦ** 
$$\begin{cases} y - x = 2 \\ y - 2x = 4 \end{cases}$$

Решение	Объяснение
 $\begin{aligned} y - x &= 2 & y - 2x &= 4 \\ y &= x + 2 & y &= 4 + 2x \\ k &= 1 & k &= 2 \end{aligned}$	<p>Строятся графики уравнений, составляющих систему. Определяется, что прямые пересекаются в одной точке. Следовательно, система уравнений имеет одно решение.</p> <p>Для каждого уравнения находятся угловые коэффициенты. Так как <math>1 \neq 2</math> графики пересекаются в одной точке.</p>

а) 
$$\begin{cases} y = 1 + 3x \\ y = 3x \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -1 + 2x \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} x + y = -2 \\ y - x = 4 \end{cases}$$

- 8 Определите, верны ли утверждения, и обоснуйте ответ.

- а) Система уравнений, соответствующая прямым, пересекающим ось абсцисс в одной и той же точке, не имеет решений.  
 б) Система уравнений, соответствующая прямым с одинаковыми угловыми коэффициентами, не имеет решений.  
 в) Система уравнений, соответствующая прямым, пересекающим ось ординат в одной и той же точке и имеющим одинаковые угловые коэффициенты, имеет бесконечно много решений.

### Решение задач

- 9 Для туристов подготовили 5 палаток — трёхместных и четырёхместных, рассчитанных всего на 17 мест.

- Если трёхместных палаток —  $x$  штук, а четырёхместных —  $y$  штук, составьте соответствующую систему уравнений.
- Сколько трёхместных палаток было подготовлено? Найдите ответ графическим методом.



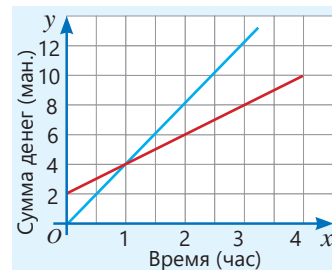
- 10 Компания по аренде велосипедов предлагает два тарифа.

На графике показана зависимость суммы оплаты  $y$  от количества часов  $x$ .

- Сколько нужно заплатить по тарифам А и В за 2 часа езды на велосипеде?
- Постройте график, соответствующий каждому тарифу.
- Составьте систему уравнений, соответствующую тарифам.
- Что означают координаты точки пересечения графиков?

**Тариф А:**  
30 минут — 2 маната

**Тариф В:**  
Начальная цена — 2 маната, за каждые 30 минут — 1 манат



## ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ

- 1 Решите уравнение.
- а)  $1\frac{1}{2}x = -3 + 3,5x$     в)  $-\frac{1}{2}(y + 1) + 1 = 0$     д)  $\frac{y}{2} + \frac{y}{4} + 3 = 4$     ж)  $4p - 2(p + 3) = p$
- б)  $\frac{y + 3}{6} = -1\frac{2}{3}$     г)  $-\frac{1}{4}a + \frac{5}{8} = -2$     е)  $5(x + 1) - 5 = 5x$     з)  $4(y - 2(y - 1)) = 16$
- 2 При каком значении  $a$  уравнение не имеет корней?
- а)  $(a + 2)x = 3x - 1$     б)  $5x - (a - 1)x = a$     в)  $2(a - 1)x = ax + 5$
- 3 При каком значении  $a$  данная пара чисел является решением уравнения?
- а)  $(8; -2)$     б)  $(-2; 1)$     в)  $(4; -5)$   
 $ax + y + 3 = 0$      $\frac{1}{2}x + ay = -1$      $\frac{x}{2} - \frac{ay}{5} = ax + y$
- 4 Найдите решение линейного уравнения с двумя переменными, состоящее из одинаковых чисел.
- а)  $-2x + 9y = 0$     б)  $7x - 3y = -4$     в)  $3x + y = 8$     г)  $x + 5y + 2 = 8$
- 5 Выразите в уравнении переменную  $x$  через  $y$ .
- а)  $-2x + 3y = 0$     б)  $x + y - 6 = 0$     в)  $\frac{3}{4}x + y = -2$     г)  $\frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y + 4 = 0$
- 6 Определите, какие из данных прямых соответствуют условию, и проверьте ответ, построив график.
- $y = x + 2$      $y = 4 - x$      $y = 2 + 1,5x$      $y = -x$      $y = -2 + 3x$
- а) Прямая пересекает ось  $Oy$  в точке  $(0; 2)$ .    в) Прямые параллельны друг другу.  
 б) Прямые пересекаются в точке  $(2; 4)$ .    г) Прямая проходит только через две координатные четверти.
- 7 Решите систему уравнений, построив графики.
- а)  $\begin{cases} y = 2 + x \\ y = 3x \end{cases}$     б)  $\begin{cases} y = 6 - x \\ y = 3 + 2x \end{cases}$     в)  $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - y = 5 \end{cases}$     г)  $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ y - 3x = 1 \end{cases}$
- 8 Определите количество решений системы уравнений без построения графика. Проверьте ответ, построив графики уравнений, входящих в систему.
- а)  $\begin{cases} y = 4 + 5x \\ y = -5x \end{cases}$     б)  $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = -3 + 2x \end{cases}$     в)  $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$     г)  $\begin{cases} x + y = -2 \\ y = x - 4 \end{cases}$     д)  $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ y - x = 4 \end{cases}$
- 9 На фестивале воздушных шаров, проходившем в Шамахе, один из шаров поднялся на некоторую высоту, а затем начал снижаться со скоростью 50 м в минуту. Через 2 минуты после начала снижения шар находился на высоте 400 м.
- На какую высоту поднялся шар?
  - Запишите уравнение, выражающее зависимость высоты воздушного шара ( $h$ ) от времени ( $t$ ) прошедшего с начала снижения, и постройте его график.
  - На какой высоте от земли будет шар через  $t = 4$  минуты?
  - Через сколько минут после начала снижения шар достигнет земли?



## 8.4. Решение системы линейных уравнений способами подстановки и сложения

### Исследование-обсуждение

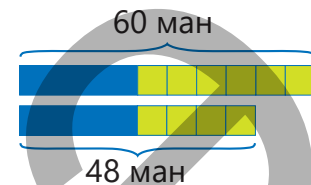
Мама Айнур захотела купить в зоомагазине аквариум и неоновых рыбок. Продавец назвал цену: за аквариум и 4 неоновые рыбки — 48 манатов, за аквариум и 6 неоновых рыбок — 60 манатов.

- Если стоимость аквариума  $x$  манатов, а стоимость одной неоновой рыбки —  $y$  манатов, запишите соответствующую систему уравнений.
- Как можно найти стоимость аквариума и одной рыбки, используя данную модель?



### Ключевые слова

- метод подстановки
- метод сложения



### Изучение Решение системы уравнений способом подстановки

Систему линейных уравнений с двумя переменными можно решить различными способами. Одним из таких способов является **метод подстановки**. При этом в одном из уравнений системы одна переменная выражается через другую, затем в другом уравнении эта переменная заменяется полученным выражением и решается уравнение с одной переменной. После этого находится соответствующее значение второй переменной. Например:

<p><b>1</b> В первом уравнении переменная <math>y</math> выражается через <math>x</math>.</p> $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3y - x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 2x \\ 3y - x = 5 \end{cases}$	<p><b>2</b> Во втором уравнении вместо переменной <math>y</math> подставляется соответствующее выражение.</p> $\begin{cases} y = 4 - 2x \\ 3(4 - 2x) - x = 5 \end{cases}$	<p><b>3</b> Решается полученное уравнение с одной переменной.</p> $\begin{aligned} 12 - 6x - x &= 5 \\ 12 - 7x &= 5 \\ 7x &= 7 \\ x &= 1 \end{aligned}$	<p><b>4</b> Подставляя <math>x = 1</math> в уравнение <math>y = 4 - 2x</math>, находится значение <math>y</math>.</p> $\begin{aligned} y &= 4 - 2x = \\ &= 4 - 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$
---	---	---	---

Таким образом, пара  $(1; 2)$  является решением системы уравнений. Можно проверить ответ, подставив решение в оба уравнения.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3y - x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 + 2 = 4 \\ 3 \cdot 2 - 1 = 5 \end{cases} \quad \text{Так как пара } (1; 2) \text{ удовлетворяет обоим уравнениям, она является решением системы.}$$



### Подумай!

Как можно решить систему уравнений из примера, выразив переменную  $x$  через  $y$ ? В каком уравнении удобнее выполнить эту подстановку для решения системы?

### Задания

- 1** Решите систему уравнений методом подстановки. Проверьте ответ.

а)  $\begin{cases} y = 4 - x \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$

б)  $\begin{cases} a = 1 + b \\ 3b - 2a = 0 \end{cases}$

в)  $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

г)  $\begin{cases} a - b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$

д)  $\begin{cases} x + y = -7 \\ 2y - x = 1 \end{cases}$

2 Решите систему уравнений методом подстановки. Проверьте ответ.

$$\text{а) } \begin{cases} 6a - 5b = 7 \\ 5a + 3b = 13 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - y = 0,4 \\ 2x + 3y = 0,6 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2a = 1 + b \\ 2,5b - a = 7,5 \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{x}{2} + y = 5 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

3 Решите систему уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} 2(x + 2) - y = 1 \\ 5 - (x + 2y) = 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2(m + n) = m - 4 \\ 2n - 3m = -4 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 5(4a + 7) - 2b = 1 \\ 1 - 2(a + 2b) = 4a - 3b \end{cases}$$

4 Не строя графики уравнений, найдите координаты точки пересечения.

$$\text{а) } y = x + 1 \text{ и } x + 3y = 3$$

$$\text{б) } y = -2x \text{ и } 2x + 5y = 12$$

$$\text{в) } 2x - y = 1 \text{ и } x + 3y = 4$$

## Изучение Решение системы уравнений способом сложения

Если в уравнениях системы линейных уравнений с двумя переменными коэффициенты при одной и той же переменной являются противоположными числами, то, сложив эти уравнения почленно, можно получить линейное уравнение с одной переменной. Полученное уравнение решается, и найденное значение переменной подставляется в одно из уравнений системы для нахождения значения другой переменной. Этот метод решения системы уравнений называется **методом сложения**. Например:

1 Коэффициенты при переменной  $y$  являются противоположными числами. Уравнения складываются почленно. Решается полученное уравнение с одной переменной.

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} + \quad (x - y) + (x + y) = 2 + 4$$

$$\begin{cases} 2x = 6 \\ x = 3 \end{cases}$$

2 В одно из уравнений системы подставляется  $x = 3$  и находится значение  $y$ .

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3 - y = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = 4 \\ 3 + y = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Таким образом, пара (3; 1) является решением системы уравнений. Ответ можно проверить, подставив решение в систему.

• Если в системе уравнений коэффициенты при одной и той же переменной не являются противоположными, то обе части уравнений можно умножить на такое число, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными. Например:

1 Чтобы коэффициенты при  $y$  стали противоположными, обе части второго уравнения умножаются на 3.

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 6x + 3y = 6 \end{cases}$$

2 Уравнения складываются почленно. Решается полученное уравнение с одной переменной.

$$(x - 3y) + (6x + 3y) = 1 + 6$$

$$\begin{cases} 7x = 7 \\ x = 1 \end{cases}$$

3 В одно из уравнений системы подставляется  $x = 1$  и находится значение  $y$ .

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 1 - 3y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2 + y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Таким образом, пара (1; 0) является решением системы уравнений. Ответ можно проверить, подставив решение в систему.

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 - 3 \cdot 0 = 1 \\ 2 \cdot 1 + 0 = 2 \end{cases}$$

*Пара (1; 0) является решением системы, так как удовлетворяет обоим уравнениям.*



### Подумай!

Как получить уравнение только с переменной  $y$ , используя метод сложения при решении системы?

5 Решите систему уравнений методом сложения. Проверьте ответ.

а)  $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

б)  $\begin{cases} a - 2b = 3 \\ 5a + 2b = 3 \end{cases}$

в)  $\begin{cases} x + 2y = -7 \\ x - y = 5 \end{cases}$

г)  $\begin{cases} a + b = 1 \\ a - 2b = -2 \end{cases}$

д)  $\begin{cases} 4y - x = -4 \\ y + 2x = -10 \end{cases}$

6 Решите систему уравнений методом сложения. Проверьте ответ.

а)  $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x - 2y = 11 \end{cases}$

б)  $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases}$

в)  $\begin{cases} 3a - 4b = -10 \\ b + 2a = -3 \end{cases}$

г)  $\begin{cases} 3x + 5y = 8,5 \\ 2y - 5x = -9 \end{cases}$

д)  $\begin{cases} 7b - 3a = -4,2 \\ 5a + 2b = 7 \end{cases}$

7 Обоснуйте мнение Лалы. Продолжив решение, найдите решение системы уравнений. Решите данную систему уравнений этим методом.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 29 \\ 2x - 4y = 11 \\ 2x + 5y - (2x - 4y) = 29 - 11 \\ \dots \end{cases}$$

Так как коэффициенты при переменной  $x$  в уравнениях системы равны, я вычту уравнения друг из друга почленно.



а)  $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

б)  $\begin{cases} 3a - 4b = 1 \\ 2a - 4b = 2 \end{cases}$

в)  $\begin{cases} x + 5y = -10 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

г)  $\begin{cases} 3a - 7b = 3 \\ 3a - 2b = -2 \end{cases}$

д)  $\begin{cases} 5x + 3y = -2 \\ 2y + 5x = -6 \end{cases}$

8 Решите систему уравнений. Проверьте ответ.

а)  $\begin{cases} b = 4 + a \\ 2a - 3b = 5 \end{cases}$

б)  $\begin{cases} n = 5m - 2 \\ n = 2m + 4 \end{cases}$

в)  $\begin{cases} m + 3(n - 2) = -1 \\ 12n - 5m = 2 \end{cases}$

г)  $\begin{cases} 2(m + 1,5n) = 7 + 2n \\ -2n + 3m = 0 \end{cases}$

9 Решите систему уравнений. Проверьте ответ.

а)  $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 3 \end{cases}$

б)  $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = -1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 0 \end{cases}$

в)  $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3 \\ \frac{x}{4} - y = 4 \end{cases}$

г)  $\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{3y}{5} = 7 \\ 3x - y = 13 \end{cases}$

д)  $\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 5 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$

10 Запишите уравнение прямой, проходящей через данные точки, в виде  $y = kx + b$ .

а)  $A(-1; 2)$  и  $B(1; 3)$

б)  $C(4; 1)$  и  $D(2; 5)$

в)  $E(2; 1)$  и  $F(5; 2,5)$

г)  $G(-2; 2)$  и  $H(1; 1)$

Указание. Подставьте координаты точек в уравнение и решите полученную систему уравнений.

11 Для нахождения чисел составьте и решите соответствующую систему уравнений.

а) Сумма двух чисел равна 8, а разность равна 2.

б) Разность двух чисел равна 6, а сумма равна 4.

12 Найдите точку пересечения прямых  $2x - y = 4$  и  $3x - 2y = 5$ .

• При каком значении  $a$  прямая  $ax + y = 17$  также будет проходить через эту точку?

### Решение задач

13 Велосипедист ехал на спуске со скоростью 300 м/мин, а на подъеме со скоростью 200 м/мин, преодолев 16 км за 1 час. Сколько минут он потратил на спуск, а сколько — на подъем?



## 8.5. Решение задач с помощью системы уравнений

### Исследование-обсуждение

Билет на морскую прогулку стоит 7 манатов для взрослых и 5 манатов — для детей. За билеты для 6 пассажиров заплатили 34 маната.

- Сколько из купленных билетов было для взрослых, а сколько — для детей? Какими способами можно это определить?
- Какую систему уравнений можно составить, чтобы найти ответ?



### Изучение Решение задачи путем составления системы уравнений

Для решения некоторых задач составляется система линейных уравнений с двумя переменными в соответствии с условиями задачи. Решив систему уравнений, находятся значения необходимых величин и проверяется ответ.

**ОБРАЗЕЦ 1.** Робот-машина движется по белой полосе со скоростью 20 см/с, а по черной — со скоростью 10 см/с. За 30 секунд он преодолел 420 см, перемещаясь по обеим полосам. Сколько секунд робот двигался по белой и сколько секунд по черной полосе?



#### 1. ПОЙМИ ЗАДАЧУ

**Что нужно найти:** сколько секунд робот двигался по белой полосе и сколько по черной.

**Что известно:** Робот двигался по белой полосе со скоростью 20 см/с и по черной — со скоростью 10 см/с, преодолев за 30 секунд расстояние в 420 см.

#### 2. СОСТАВЬ ПЛАН

**Как можно решить:** Если обозначить время движения по белой полосе через  $x$ , а по черной — через  $y$ , можно составить следующую таблицу:

Полосы	Скорость (см/с)	Время (с)	Путь (см)
Белая полоса	20	$x$	$20x$
Черная полоса	10	$y$	$10y$

#### 3. РЕШИ

На основе пройденного роботом расстояния можно записать уравнение  $20x + 10y = 420$ , а на основе времени, затраченного на движение — уравнение  $x + y = 30$ . Полученная система уравнений решается.

$$\begin{cases} 20x + 10y = 420 \\ x + y = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 20x + 10y = 420 \\ 10x + 10y = 300 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 20x + 10y - (10x + 10y) = 420 - 300 \\ 10x = 120 \\ x = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12 + y = 30 \\ y = 18 \end{cases}$$

#### 4. ПРОВЕРЬ

Ответ можно проверить, подставив найденные значения в исходные уравнения и убедившись в верности равенств.

$$\begin{cases} 20 \cdot 12 + 10 \cdot 18 = 420 \checkmark \\ 12 + 18 = 30 \checkmark \end{cases}$$

**Ответ:** Робот-машина двигался 12 секунд по белой полосе и 18 секунд — по черной.



## Подумай!

Какими другими способами можно решить составленную систему уравнений?

### Решение задач

- 1 Черепаха движется по грунтовой дороге со скоростью 8 м/мин, а по гравийной — со скоростью 4 м/мин. Сначала она идет по грунтовой, затем по гравийной дороге и преодолевает расстояние в 140 м за 25 минут.
- За сколько минут черепаха прошла грунтовую и гравийную части пути?
  - Какова длина этих участков пути?



- 2 Лала и Самир задумали по одному числу. Сумма этих чисел равна 12. Утроенное число Лалы на 1 больше, чем удвоенное число Самира. Какое число задумала Лала?



- 3 Айнур и Эльхан купили тетради и ручки в количестве, указанном в таблице. Айнур заплатила 2,8 маната, а Эльхан — 4 маната. Сколько стоит тетрадь и ручка?

Покупатель	Тетрадь	Ручка
Айнур	2	3
Эльхан	4	2

- 4 Во время ремонта дома было потрачено 500 манатов на покупку 3 дверей и 5 окон. Одна дверь и одно окно вместе стоят 150 манатов. На сколько манатов дверь дороже окна?

**ОБРАЗЕЦ 2.** Моторная лодка преодолевает расстояние в 45 км против течения реки за 5 часов, а по течению — за 4,5 часа. Какова скорость лодки в стоячей воде и скорость течения реки?

### 1. ПОЙМИ ЗАДАЧУ

**Что нужно найти:** скорость моторной лодки в стоячей воде и скорость течения.

**Что известно:** моторная лодка преодолевает расстояние 45 км против течения за 5 часов, а по течению — за 4,5 часа.

### 2. СОСТАВЬ ПЛАН

**Как можно решить:** задачу можно решить, составив систему линейных уравнений с двумя переменными. При движении по течению скорость лодки увеличивается, а при движении против течения скорость уменьшается. Если обозначить через  $x$  скорость лодки в стоячей воде, а через  $y$  — скорость течения реки, то скорость лодки по течению будет  $x + y$ , а скорость лодки против течения  $x - y$ .



На основании того, что моторная лодка проходит 45 км против течения за 5 часов, а по течению — за 4,5 часа, можно составить следующую таблицу.

Направление	Скорость (км/час)	Время (час)	Расстояние (км)
Против течения	$x - y$	5	45
По течению	$x + y$	4,5	45

### 3. РЕШИ

Учитывая путь, пройденный лодкой по течению, можно записать уравнение  $4,5(x + y) = 45$ , а против течения — уравнение  $5(x - y) = 45$ . Составляется система уравнений и решается способом сложения.

$$\begin{cases} 4,5(x + y) = 45 \\ 5(x - y) = 45 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + (x - y) = 10 + 9 \\ 2x = 19 \\ x = 9,5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9,5 + y = 10 \\ y = 0,5 \end{cases}$$

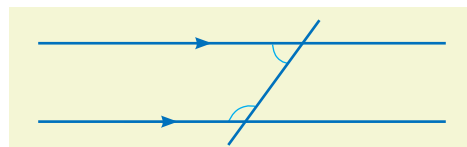
### 4. ПРОВЕРЬ

Ответ можно проверить, подставив найденные значения в уравнения системы и убедившись, что равенства верны.

$$\begin{cases} 4,5(9,5 + 0,5) = 45 \checkmark \\ 5(9,5 - 0,5) = 45 \checkmark \end{cases}$$

Ответ: Скорость моторной лодки в стоячей воде — 9,5 км/ч, а скорость течения — 0,5 км/ч.

- 5 Скорость моторной лодки по течению — 34 км/ч, а против течения — 30 км/ч. Какова скорость лодки в стоячей воде и скорость течения?
- 6 Моторная лодка прошла 80 км по течению за 4 часа, а вернулась обратно за 5 часов. Каковы скорость лодки в стоячей воде и скорость течения?
- 7 Разность градусных мер двух углов с соответственно параллельными сторонами равна  $100^\circ$ . Чему равна величина каждого из этих углов?
- 8 Разность градусных мер внутренних односторонних углов, образованных секущей с параллельными прямыми, равна  $40^\circ$ . Чему равен меньший угол?
- 9 Периметр прямоугольника равен 16 см, а разность его длины и ширины равна 4 см. Чему равна площадь прямоугольника?



- 10 Весы находятся в равновесии, когда на левой чаше лежат 7 одинаковых золотых монет, а на правой — 9 одинаковых серебряных монет. Если поменять местами одну золотую и одну серебряную монету, левая чаша станет на 16 г легче. Какова масса одной золотой и одной серебряной монет?



- 11 Общая масса яблок и груш, собранных в первом саду, 650 кг. Во втором саду собрали на 10% больше яблок и на 20% больше груш, чем в первом. Общая масса фруктов, собранных во втором саду, — 740 кг. Сколько яблок и сколько груш было собрано в каждом саду?



- 12 В копилке Анара есть монеты по 20 и 50 гяпиков. Вскрыв копилку, он подсчитал, что общее количество монет 20, а их общая сумма составляет 7,60 маната. Сколько монет каждого вида было в копилке?



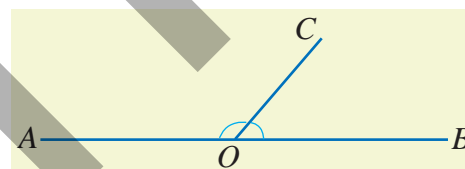
- 13 Гребец на лодке проплыл 20 км: 2 часа против течения и 1 час по течению, а затем проплыл еще 14 км: 1 час против течения и 1 час по течению. Какова скорость лодки по течению?

- 14 Сумма цифр двузначного числа равна 9. Если поменять цифры местами, получится число, на 45 меньше исходного. Найдите исходное число.

- 15 Плотник хотел распилить две доски длиной по 1 метру каждая на одинаковые большие и маленькие части. Одну доску он разрезал на 2 маленькие и 4 большие части, другую — на 4 маленькие и 3 большие. Какова длина одной большой части?

- 16 Два года назад сумма возрастов Айнур и ее брата была равна 10. Сейчас Айнур старше брата на 4 года. Сколько лет Айнур?

- 17 Углы  $AOC$  и  $COB$  являются смежными. Разность их градусных мер равна  $80^\circ$ . Чему равен угол  $AOC$ ?



- 18 Для кружка по рисованию купили наборы цветных карандашей и альбомы. Один набор цветных карандашей и один альбом стоят 5,5 маната. Покупатель заплатил 17 манатов за 4 альбома и 2 набора карандашей. Сколько стоят один альбом и один набор карандашей в отдельности?

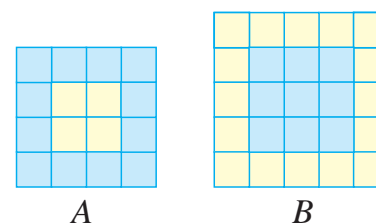


- 19 В двух рулонах вместе было 200 м ткани. После того как из первого рулона продали 20% ткани, а из второго — 40%, всего осталось 150 м. Сколько метров ткани было первоначально в каждом рулоне?

- 20 Анар ответил на 20 вопросов и набрал 17,5 балла. По правилам соревнования за каждый правильный ответ начислялся 1 балл, а за каждые 4 неправильных ответа вычитывался 1 балл.

- На сколько вопросов Анар ответил правильно?
- Самир ответил на 21 вопрос и набрал 16 баллов. Кто из них дал больше правильных ответов?

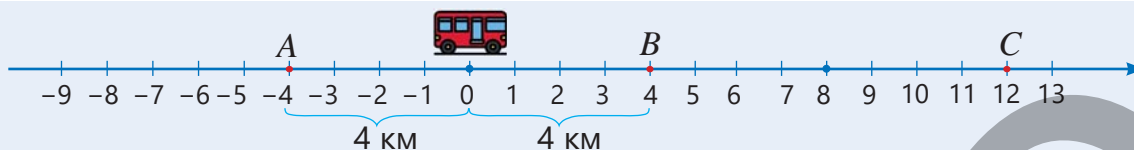
- 21 На рисунке показаны сверху два прямоугольных параллелепипеда  $A$  и  $B$ , составленные из одинаковых по размеру маленьких синих и жёлтых кубиков. Высота каждого прямоугольного параллелепипеда равна длине ребра одного маленького кубика. Масса параллелепипеда  $A$  равна 2200 г, масса параллелепипеда  $B$  — 2950 г. Какова масса одного синего кубика?



## 8.6. Уравнения с модулем

### Исследование-обсуждение

На прямом шоссе остановки  $A$  и  $B$  находятся на одинаковом расстоянии от автобуса.



- Если текущее местоположение автобуса соответствует началу координат, то какое из равенств верно для координат остановок  $A$  и  $B$ ?

$$|a| = 4 \quad |a| = 0 \quad |a| = -4$$

- Если остановка  $B$  находится на одинаковом расстоянии от остановок  $A$  и  $C$ , то какое равенство верно для координат остановок  $A$  и  $C$ ?

$$|a - 4| = 4 \quad |a - 4| = 8 \quad |a - 4| = 0$$

### Изучение Уравнения с модулем

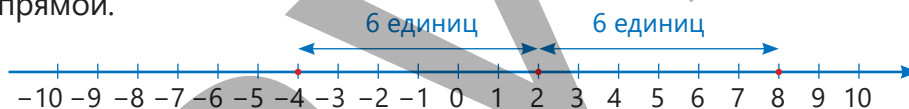
Уравнения с переменной под знаком модуля называются **уравнениями с модулем**.

Например,  $|x| = 1$ ,  $|x - 2| = 3$  — это уравнения с модулем.

Уравнения с модулем можно решать разными способами:

- *С помощью числовой прямой*

Уравнение  $|x - 2| = 6$  показывает, что расстояние между числами  $x$  и  $2$  на числовой прямой равно 6 единицам. Значит,  $x$  — это число, расположенное на 6 единиц правее или левее числа  $2$  на числовой прямой.



Корни уравнения находятся на расстоянии 6 единиц от числа 2.

Числа  $-4$  и  $8$  находятся на расстоянии 6 единиц от  $2$ , следовательно,  $x = -4$  и  $x = 8$ .

- *С помощью определения модуля*

В уравнении  $|x - 2| = 6$  знак модуля раскрывается и уравнение записывается в виде двух уравнений:

$$x - 2 = 6 \quad \text{или} \quad -(x - 2) = 6$$

Оба уравнения решаются и находятся корни уравнения с модулем.

$$x - 2 = 6$$

$$x = 8$$

$$|8 - 2| = 6$$

$$6 = 6$$

К обеим частям уравнений прибавляется 2 и находятся корни.

Корень уравнения вписывается и проверяется.

Ответ:  $x = 8$ ;  $x = -4$

$$x - 2 = -6$$

$$x = -4$$

$$|-4 - 2| = 6$$

$$6 = 6$$



### Запомни!

Для уравнений вида  $|ax + b| = c$  возможны три случая:

1) Если  $c > 0$ , составляются и решаются два линейных уравнения:  $ax + b = c$  и  $ax + b = -c$

2) Если  $c = 0$ , составляется и решается одно линейное уравнение:  $ax + b = 0$

3) Если  $c < 0$ , решений нет, потому что модуль не может быть отрицательным.

Например, уравнения  $|x| = -3$ ,  $|x + 4| = -1$  не имеют корней.

## Задания

- 1 Определите корни уравнения из предложенных чисел.

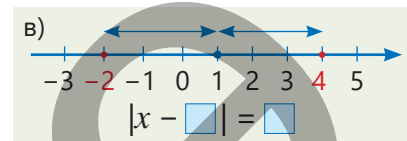
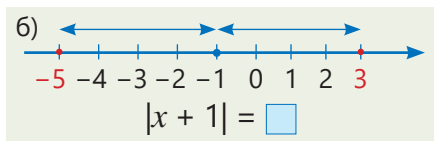
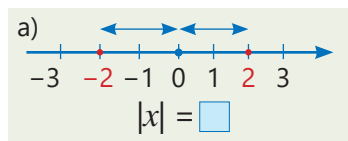
а)  $|x| = 3$   
 0 3 -3  $\frac{1}{3}$

б)  $|x - 2| = 0$   
 0 -2 4 2

в)  $|x + 9| = 0$   
 0 9 -9 -3

г)  $|2x| - 4 = -2$   
 1 -0,5 1,5 -1

- 2 Числа, соответствующие корням уравнения, обозначены красным цветом на числовой оси. На основе рисунка впишите соответствующие числа в пустые клетки.



- 3 Решите уравнения.

а)  $|x| = 6$

в)  $|x + 4| = 8$

д)  $|5 + x| = -7$

ж)  $|3 - x| = 2$

и)  $|1,6 - 4x| = 0$

б)  $|-2x| = 8$

г)  $|x - 6| = 5$

е)  $|2x - \frac{1}{2}| = 0$

з)  $|\frac{x}{2} - 1| = 9$

к)  $|x + 3| = -3$

- 4 Верно ли рассуждение Лалы? Объясните.

$|x - 1| - 2 = -1$

Поскольку правая часть уравнения — отрицательное число, это уравнение не имеет корней.



- 5 Запишите уравнение в виде  $|ax + b| = c$  и решите его.

а)  $|x + 1| - 2 = 2$

б)  $|\frac{x-1}{2}| + 4 = 4$

в)  $2 + |x - 1| = 0$

г)  $5 - |2 - x| = 1$

д)  $4 + |5 - \frac{x}{3}| = 2$

- 6 Определите уравнение, корни которого являются числами, удовлетворяющими условию.

$|x| = 5$

$|x + 5| = 2$

$|x + 2| = 5$

$|x - 5| = 2$

$|x - 2| = 5$

а) Корни находятся на расстоянии 5 единиц от начала координат.

б) Корни находятся на расстоянии 5 единиц от числа  $-2$ .

в) Корни находятся на расстоянии 5 единиц от числа 2.

## Решение задач

- 7 Разность между количеством молока в двух бидонах составляет 3 литра. В одном из бидонов 10 литров молока.

• Какое уравнение нужно решить, чтобы найти количество молока в другом бидоне?

$|x + 10| = 3$

$|x - 3| = 10$

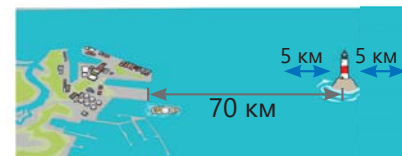
$|x - 10| = 3$

$|x + 3| = 10$

• Сколько молока может быть в другом бидоне?

- 8 Катер вышел из порта и начал движение со скоростью 20 км/ч к маяку, который находится на расстоянии 70 км.

• Какое расстояние будет между катером и маяком через  $t$  часов?



• Катер остановился на расстоянии 5 км от маяка через  $t$  часов.

Какое наименьшее и наибольшее расстояния могут быть от катера до порта?

• Какое уравнение можно записать для этого случая?

$|20t + 70| = 5$

$|20t - 5| = 70$

$|20t - 70| = 5$

## 8.7. Неравенства



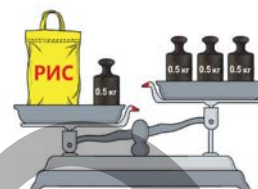
### Ключевые слова

- равносильные неравенства

### Исследование-обсуждение

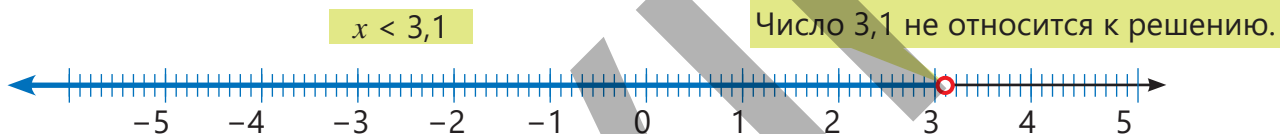
На чаши весов положены мешок с рисом и гири по 0,5 кг. Обозначив массу риса через  $x$ , запишите неравенство, соответствующее рисунку.

- Если с обеих чаш весов убрать по одной гире, какое неравенство можно записать для полученной ситуации?
- Может ли масса риса быть равной 0,5 кг, 0,75 кг, 1,2 кг, 2 кг, 2,5 кг? Как это можно определить по неравенствам?



### Изучение Решение неравенств

Решением неравенства называется множество всех чисел, удовлетворяющих этому неравенству. Например, высказывание "Количество книг меньше 5" можно записать, обозначив количество книг буквой  $n$ , с помощью математических символов в виде:  $n < 5$ . Так как количество не может быть отрицательным, решениями этого неравенства являются числа: 0, 1, 2, 3, 4. Высказывание "Температура воздуха ниже  $3,1^\circ\text{C}$ " можно записать, выразив температуру через  $x$ , в виде:  $x < 3,1$ . На числовой оси это изображается так:



Рациональные числа, расположенные левее числа 3,1, удовлетворяют неравенству  $x < 3,1$ . Например, числа  $-2$ ;  $-0,6$ ;  $1,2$ ;  $2,8$  являются решениями, а числа  $3,2$ ;  $4$  не являются решениями неравенства.



### Подумай!

Какие числа могут быть решениями неравенства  $x \geq -0,9$ ? Приведите несколько примеров рациональных чисел.

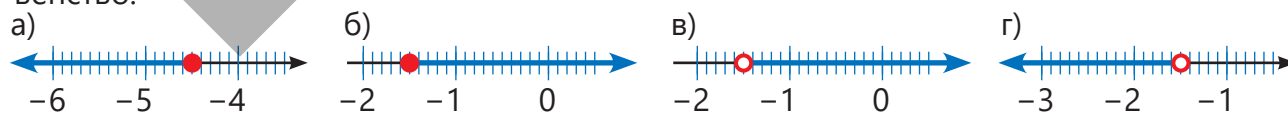
### Задания

- 1 Определите числовую прямую, на которой изображено решение каждого неравенства.

$x \geq -1,8$     $x > -1,8$     $x \leq -1,8$     $x < -1,8$



- 2 По изображенному на числовой прямой решению запишите соответствующее неравенство.



- 3 Выберите из предложенных значений переменной те, которые удовлетворяют неравенству.

$x < 0,3$	$x \geq -2,6$	$x > -3,8$	$x \leq 1,5$
-1,6   -0,5   0,3   0,5	-2,3   1,2   -2,6   -2	-3,7   -3,9   3   -3	-1,3   -3,4   1,5   2

4 Найдите три рациональных числа, удовлетворяющих неравенству, и изобразите решение на числовой прямой.

а)  $x \geq -2,4$

б)  $x < 3,6$

в)  $x \leq 1,2$

г)  $x > -1,4$

5 Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству.

а)  $x \leq 2,8$

б)  $x < -1,5$

в)  $x \leq -5,2$

г)  $x < 0,4$

6 Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству.

а)  $x \geq -1,1$

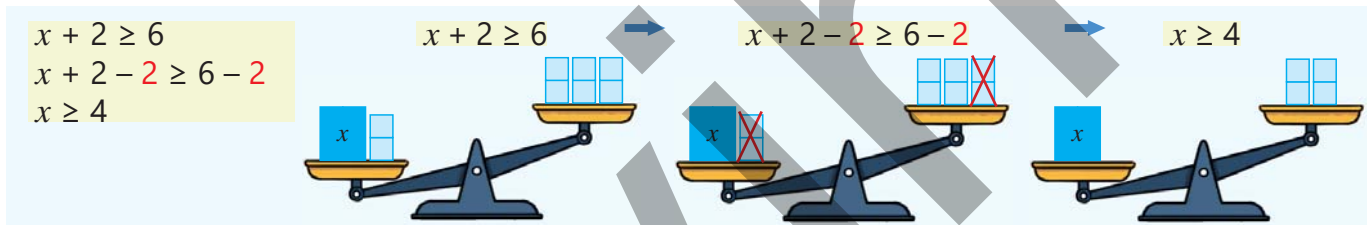
б)  $x \geq 5,9$

в)  $x > 3,7$

г)  $x \geq -1,6$

## Изучение Равносильные неравенства

Неравенства, имеющие одинаковое множество решений, называются **равносильными неравенствами**. Если к обеим частям неравенства прибавить или вычесть одно и то же число, знак неравенства не изменится, и получится равносильное неравенство. Например, из обеих частей неравенства  $x + 2 \geq 6$  можно вычесть 2 и записать равносильное ему неравенство  $x \geq 4$ .



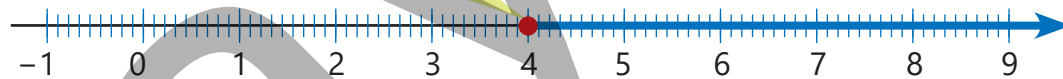
На числовой прямой число 4 и все числа, расположенные правее, являются решением неравенства  $x + 2 \geq 6$ , или  $x \geq 4$ .

Число 4 принадлежит решению.

$x + 2 \geq 6$

или

$x \geq 4$



### Подумай!

Как преобразовать неравенство  $x - 2 \leq -1$  в равносильное, но более простое неравенство? Изобразите его решение на числовой прямой. Приведите несколько чисел, являющихся решениями этого неравенства.

7 Запишите в пустую ячейку такое число, чтобы получились равносильные неравенства.

а)  $x + 1,5 < 0 \Leftrightarrow x < \square$

в)  $b - 3,2 > -1 \Leftrightarrow b > \square$

д)  $n + 5,4 \leq 5,4 \Leftrightarrow n \leq \square$

б)  $a - 2 \geq 1,6 \Leftrightarrow a \geq \square$

г)  $x + 2,7 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \square$

е)  $y - 4,2 \geq -4,8 \Leftrightarrow y \geq \square$

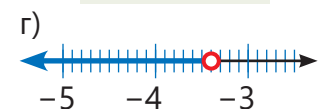
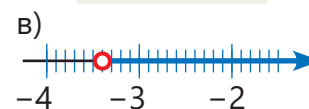
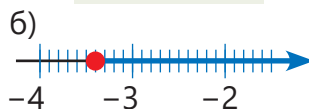
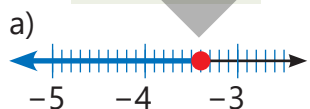
8 Определите числовую прямую, на которой изображено решение данного неравенства.

$x - 2 > -5,4$

$x - 2 < -5,4$

$x - 2 \leq -5,4$

$x - 2 \geq -5,4$



### Исправь ошибку!

$x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

$m - 2 < 6 \Leftrightarrow m > 8$

$2,5 + x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1,5$

$a - 0,4 > 1,6 \Leftrightarrow a \geq 2$

- 9 Из предложенных значений переменной выберите те, которые удовлетворяют неравенству.

$x - 3 \leq -6$	$x + 5 < -1,1$	$x + 3 < -0,3$	$4 + x \geq -1,8$
-2,3 -1,2 -3 -3,5	-6,6 4,5 -6,1 -5,1	-3,3 -4,2 -6 -2,3	-5 -5,8 -4 -0,8

- 10 Решите неравенство и изобразите решение на числовой прямой. Приведите три примера рациональных чисел, которые удовлетворяют неравенству.

а)  $x + 3 > -1$       в)  $a - 1,2 \leq -0,8$       д)  $0,5 + b \geq -2$       ж)  $-2 + y \geq -5$   
 б)  $x + 8,5 \geq 10$       г)  $b - 12,6 > -10,6$       е)  $30,1 + a \leq -30$       з)  $y - 5,9 < -5,9$

- 11 Составьте неравенство в соответствии с условием и изобразите решение на числовой оси.

- а) Сумма числа и 1,2 меньше 2.  
 б) Три года назад возраст отца Самира был больше 30 лет.  
 в) При понижении температуры на  $3^\circ\text{C}$  она будет не выше  $-2,5^\circ\text{C}$ .

## Решение задач

- 12 За 5 минут до времени прибытия поезда по расписанию было объявлено, что он опаздывает.

- Если поезд прибудет на станцию через  $x$  минут после объявления, составьте для  $x$  соответствующее неравенство.
- Какое из изображений на числовой прямой соответствует времени прибытия поезда после объявления?



- 13 Масса пустого чемодана — 1,5 кг. В авиабилете указано, что максимальный вес багажа — 23 кг.

- а) Обозначив массу вещей, помещаемых в чемодан, через  $x$ , составьте неравенство, показывающее общий вес багажа.  
 б) Может ли масса вещей в чемодане быть равной 19,5 кг; 22 кг; 25 кг?  
 в) Какой может быть наибольшая масса вещей, помещаемых в чемодан?



- 14 Чтобы долго хранить продукт в морозильной камере холодильника, температура должна быть не выше  $-18^\circ\text{C}$ . Продукт был помещен в холодильник при определенной температуре. Если охладить его на  $10^\circ\text{C}$ , температура будет подходящей для длительного хранения продукта.

- Если начальную температуру продукта обозначить через  $T$ , составьте соответствующее неравенство.

$T - 10 \geq -18$      $T - 10 \leq -18$      $T - 10 \geq 18$      $T - 10 \leq 18$

- Какой может быть наибольшая начальная температура продукта?



- 15 Покупатель хочет купить 3 тетради по цене 1,20 маната каждая и одну книгу с рассказами. Он планирует потратить на это не более 12 манатов.

- Обозначив цену книги через  $x$ , составьте соответствующее неравенство и изобразите его решение на числовой прямой.
- Может ли покупатель купить книгу по цене 5 манатов; 7,40 маната; 8,90 маната?



## 8.8. Приближённые вычисления. Абсолютная и относительная погрешность

### Исследование-обсуждение

Дети провели некоторые измерения с помощью измерительной ленты. Лала определила, что длина карандаша, равная 10 см, составляет 11 см. Анар определил, что длина доски в 1 метр составляет 101 см.



### Ключевые слова

- абсолютная погрешность
- относительная погрешность

- Насколько отличаются их результаты от точных измерений?
- Чей результат более приемлем?

### Изучение Абсолютная погрешность

При подсчете большого количества объектов, измерении различных величин и выполнении математических вычислений часто используются округления, и получают приближённые значения. Например, невозможно точно определить количество деревьев в лесу, рост и массу человека, температуру воздуха. В результате измерений и вычислений допускаются погрешности. Например, на вопрос: "Примерно сколько деревьев в парке?" Анар ответил: 700, а Айнур: 800. Если в парке 780 деревьев, то Анар дал результат на 80 деревьев меньше, а Айнур — на 20 деревьев больше, допустив тем самым погрешности. Чтобы определить, чей ответ ближе к точному, нужно найти модуль разности между точным и приближенным значениями.



Анар:  $|780 - 700| = 80$                       Айнур:  $|780 - 800| = 20$

Так как во втором случае модуль разности меньше, ответ Айнур ближе к точному значению.

Модуль разности между точным и приближенным значениями величины называют **абсолютной погрешностью** приближенного значения. Если точное значение величины —  $x$ , а приближенное —  $a$ , то абсолютная погрешность находится по формуле:  $|x - a|$ .

**ПРИМЕР.** Округлите число 4,127 до сотых. Найдите абсолютную погрешность полученного приближенного значения.

$$4,127 \approx 4,13$$

$$|4,127 - 4,13| = 0,003$$

*Число округляется до сотых*

*Вычисляется абсолютная погрешность.*

### Задания

1. Может ли указанное значение в задании быть точным или приближенным? Объясните свое мнение.
  - а) На стадионе было 20 000 болельщиков.
  - б) Сумма внутренних углов треугольника равна  $180^\circ$ .
  - в) Расстояние между Баку и Шеки составляет 300 км.

2. Округлите указанные числа до заданного разряда и найдите абсолютную погрешность.

2,45

1,3921

0,159

2,092

2,325

5,132

0,721

3. Представьте данные числа в виде десятичных дробей. Округлите эти дроби: а) до десятых, б) до сотых и найдите абсолютную погрешность.

$\frac{2}{9}$

$2\frac{1}{3}$

$3\frac{5}{6}$

$\frac{7}{12}$

$1\frac{8}{9}$

$\frac{4}{13}$

$1\frac{5}{17}$



- 4 Округлите десятичные дроби до: а) единиц, б) десятых, в) сотых, г) тысячных и найдите абсолютную погрешность.

6,2512

4,2964

3,0306

1,2(3)

2,(7)

0,(26)

1,(151)



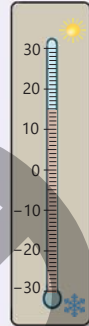
### Запомни!

Если точное значение величины неизвестно, то абсолютную погрешность найти невозможно. Однако если известно, между какими двумя числами находится точное значение, то его можно найти с определенной точностью. Например, если температура воздуха находится между  $14^{\circ}\text{C}$  и  $15^{\circ}\text{C}$ , то ее приближенное значение можно принять как  $14,5^{\circ}\text{C}$ .

$$T \approx 14,5^{\circ}\text{C}$$

В этом случае говорят, что температура воздуха равна  $14,5^{\circ}\text{C}$  с точностью до  $0,5^{\circ}\text{C}$ , и это записывается так:

$$T = 14,5 \pm 0,5 (^{\circ}\text{C})$$



- 5 Найдите, между какими числами находится точное значение величины, исходя из данной записи.

а)  $a = (95,5 \pm 0,5)$  см

в)  $t = (2,6 \pm 1)$  мин

д)  $s = (29,9 \pm 0,1)$  м<sup>2</sup>

б)  $v = (70 \pm 10)$  км/ч

г)  $b = (16 \pm 0,15)$  м

е)  $m = (10,25 \pm 0,25)$  кг

- 6 Может ли указанное в записи число быть точным значением величины? Объясните.

а)  $a = (2,8 \pm 0,2)$  см  $\rightarrow$  2,5 см

б)  $b = (4,85 \pm 0,15)$  л  $\rightarrow$  4,9 л

- 7 Длина предмета указана с точностью до 0,5 см. Чему могут быть равны наименьшее и наибольшее возможные значения длины этого предмета?

а) 15 см



б)



153,5 см

в)



27,3 см

## Изучение Относительная погрешность

Для оценки точности измерений и приближенных вычислений одной абсолютной погрешности недостаточно. Например, масса сахарного песка, измеренная на тех же весах, составила  $(1200 \pm 0,1)$  г, а масса золота —  $(10 \pm 0,1)$  г. Хотя в обоих случаях абсолютная погрешность равна 0,1 г, измерение массы сахарного песка оказывается точнее, чем измерение массы золота. Отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения позволяет более точно оценить эффективность измерения.

Отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения называется **относительной погрешностью** приближенного значения.

Если точное значение величины —  $x$ , а приближенное —  $a$ , то относительная погрешность находится по выражению:  $\frac{|x-a|}{|a|}$ . Чаще всего относительная погрешность выражается в процентах.  $\frac{|x-a|}{|a|} \cdot 100\%$

Расстояние от Баку до города Шуша составляет  $(385 \pm 1)$  км, а расстояние от Земли до Луны  $(384000 \pm 40)$  км. Для определения, в каком случае погрешность больше, нужно найти отношение абсолютной погрешности к приближенному значению и выразить это в процентах. ►

► **Расстояние от Баку до города Шуша**

$$\frac{1}{385} \cdot 100\% \approx 0,26\%$$

**Расстояние от Земли до Луны**

$$\frac{40}{384000} \cdot 100\% \approx 0,01\%$$

Следовательно, при указании расстояния от Земли до Луны была допущена относительно меньшая погрешность.

8 Округлите числа до указанного разряда и найдите относительную погрешность.

2,45

1,3921

0,159

2,092

2,325

5,132

0,721

9 В каком случае относительная погрешность меньше?

а)  $a = 120 \pm 0,2$  или  $b = 2300 \pm 15$

б)  $a = 28,5 \pm 0,5$  или  $b = 52,8 \pm 0,6$



**Из истории математики**

Знаменитый среднеазиатский ученый Гияс-ад-дин аль-Каши впервые вычислил число  $\pi$  с точностью до 16 десятичных знаков:  $\pi \approx 3,1415926535897932$ . Этот результат, представленный в его известной книге "Мифтах аль-Хисаб", долгое время считался самым точным приближением числа  $\pi$ .



**Гияс-ад-дин аль-Каши**  
(1380–1429)

10 Найдите абсолютную и относительную погрешности:

а) Кладовщик записал массу ящика, равную 2,375 кг, приблизительно как 2 кг.

б) Навигатор указал скорость автомобиля, движущегося со скоростью 69,125 км/ч, как 70 км/ч.

в) Доярка отметила объем бидона, равный 1,918 л, приблизительно как 2 л.

**Решение задач**

11 Хозяин дома решил заказать ковер для комнаты, длина которой 5,9 м, а ширина — 4,3 м. Он округлил размеры комнаты до целых и заказал ковер по полученной площади.

- Каковы абсолютная и относительная погрешность при расчете площади?
- Покроет ли заказанный ковер полностью пол комнаты?

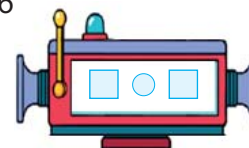


12 Самир и Лала измерили внутренние углы четырехугольника и нашли их сумму. У кого из них абсолютная погрешность полученного результата больше?



13 Вычислительная машина преобразует обыкновенные дроби в десятичные на основе заданных команд и округляет их до сотых, после чего выполняет действия. В машине:

- какой будет абсолютная погрешность при вычислении суммы  $\frac{1}{3} + 3\frac{5}{6}$ ?
- какой будет относительная погрешность при вычислении разности  $2\frac{1}{7} - 3\frac{3}{8}$ ?



# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

## Линейное уравнение с одной переменной

$$ax = b$$

У линейного уравнения с одной переменной:

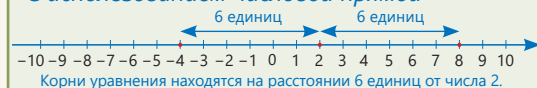
- Если  $a \neq 0$ , то один корень:  $x = \frac{b}{a}$
- Если  $a = 0, b = 0$ , то бесконечное количество корней.
- Если  $a = 0, b \neq 0$ , то корней нет.

## Уравнения с модулем

$$|x + 2| = 6$$

Способы решения модульных уравнений:

- С использованием числовой прямой



Корни уравнения находятся на расстоянии 6 единиц от числа 2.

- С использованием определения модуля:

$$x + 2 = 6 \quad x + 2 = -6$$

$$x = 4 \quad x = -8$$

У уравнения с модулем в виде  $|ax + b| = c$ :

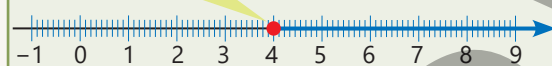
- Если  $c > 0$ , два корня.
- Если  $c = 0$ , один корень.
- Если  $c < 0$ , корней нет.

## Решение неравенств

$$x + 2 \geq 6 \rightarrow x + 2 - 2 \geq 6 - 2 \rightarrow x \geq 4$$



Число 4 принадлежит решению.  $x + 2 \geq 6$  или  $x \geq 4$



## Абсолютная и относительная погрешность

Абсолютная погрешность:  $|x - a|$       Относительная погрешность:  $\frac{|x - a|}{|a|}$  или  $\frac{|x - a|}{|a|} \cdot 100\%$

$x$  — точное значение,  $a$  — приближенное значение

## Линейное уравнение с двумя переменными и его график

$$ax + by = c$$

$$y = kx + b$$

$$2x + y = 4$$

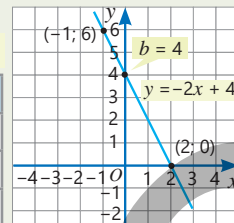
$$k = \frac{6-0}{-1-2} = -2$$

$$y = -2x + 4$$

Угловой коэффициент

$$y = -2x + 4$$

x	y
2	0
-1	6



При  $a \neq 0$  или  $b \neq 0$  графиком уравнения  $ax + by = c$  является прямая.

График — вертикальная прямая линия.

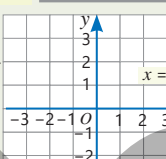
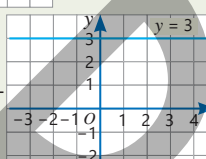
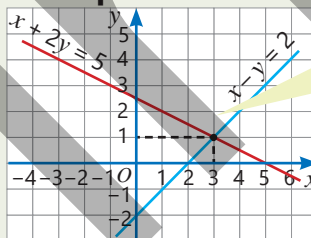


График — горизонтальная прямая линия.



## Система линейных уравнений с двумя переменными

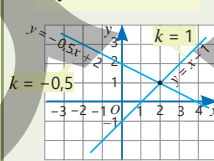
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$



Точка (3; 1) является точкой пересечения прямых

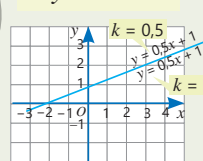
Если угловые коэффициенты прямых различны, то система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y + 0,5x = 2 \end{cases}$$



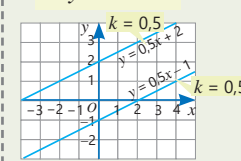
Если угловые коэффициенты одинаковы и пересекаются с осью  $Oy$  в одной и той же точке, то система имеет бесконечно много решений

$$\begin{cases} y = 0,5x + 1 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$$



Если угловые коэффициенты одинаковы, но точки пересечения с  $Oy$  разные, то у системы решений нет

$$\begin{cases} 2y - x = 4 \\ 2y - x = -2 \end{cases}$$



## Решение исходной задачи

- Обозначив количество апельсинового сока в 1 литре смеси через  $p$ , а количество яблочного сока — через  $a$ , можно составить соответствующие уравнения на основе данных.

$$\begin{cases} 20a + 420p = 320 \\ a + p = 1 \end{cases}$$

- Чтобы узнать, сколько в смеси апельсинового или яблочного сока, составляется и решается соответствующая система уравнений. В смеси содержится 0,75 л апельсинового и 0,25 л яблочного сока.

$$\begin{cases} 20a + 420p = 320 \\ a + p = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 0,25 \\ p = 0,75 \end{cases}$$

- Согласно условию, стоимость 1 литра фруктового сока составляет 1,20 маната, а прибыль — не менее 30 гяпиков. Обозначив цену для продажи через  $g$ , составляется и решается соответствующее неравенство. Следовательно, цена продажи 1 литра фруктового сока должна быть не менее 1,50 маната.

$$\begin{cases} g - 1,2 \geq 0,3 \\ g \geq 1,5 \end{cases}$$

## ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

1. Решите уравнения.

а)  $1\frac{1}{2}x = -3 + 3,5x$

в)  $\frac{y}{2} + \frac{y}{4} + 3 = 4$

д)  $-\frac{1}{4}a + \frac{5}{8} = -2$

ж)  $\frac{m-1}{3} + 1 = m$

б)  $|\frac{x}{2}| - 1 = -2$

г)  $|x - \frac{x}{4}| = 9$

е)  $5 - |\frac{x}{3} + 1| = 2$

з)  $6 - |5 - \frac{x}{3}| = 1$

2. Найдите два числа, соответствующих условию.

а) Одно из чисел в 2 раза больше другого. Если увеличить большее число в 2 раза, а меньшее уменьшить в 3 раза, их разность будет равна 22.

б) Одно из чисел в 4 раза меньше другого. Если уменьшить меньшее число на 1 и умножить на 6, получится большее число.

в) Сумма чисел равна 10. Если из утроенного меньшего числа вычесть большее, получится 6.

3. Найдите решение линейных уравнений с двумя переменными, соответствующих условиям:

а)  $x$  и  $y$  равны.

б)  $x$  равен противоположному числу  $y$ .

в)  $y$  в 3 раза больше  $x$ .

г)  $x$  в 2 раза меньше  $y$ .

$$3x + y = 8$$

$$x + 5y + 2 = 0$$

$$-2x + 3y = 0$$

$$6x - 4y + 7 = 3$$

4. Ответьте на вопросы.

а) Чему должны быть равны  $a$  и  $b$ , чтобы уравнение  $(a - 2)x = b - 3$  имело бесконечно много решений?

б) Какова должна быть сумма  $a$  и  $b$ , чтобы уравнение  $(a + b - 5)x = -2$  не имело корней?

в) Чему должно быть равно  $a$ , чтобы корень уравнения  $(a - 2)x = -3$  был равен 6?

5. Решите систему уравнений.

а) 
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} 5a - b = 2 \\ b - 2a = -1 \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} \frac{m}{3} + \frac{n}{4} = 0 \\ n - 2m = -10 \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} 0,4a - b = -8 \\ 1,5b + 1,6a = 1 \end{cases}$$

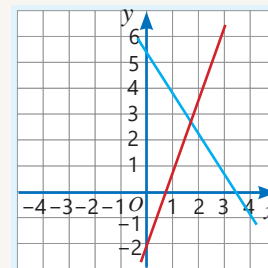
6. Сабина и Анар построили графики прямых и определили абсциссу точки пересечения графиков. Найдите абсциссу точки пересечения графиков по уравнениям. Найдите абсолютную погрешность в результатах Сабины и Анара. Кто допустил большую погрешность?

1,5



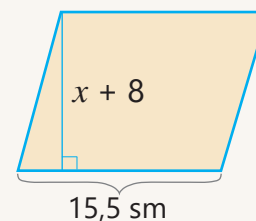
$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -1,5x + 5,02 \end{cases}$$

1,6



7. На рисунке высота параллелограмма не больше стороны, к которой она проведена.

- Составьте и решите соответствующее неравенство.
- Какое наибольшее целое значение может принять  $x$ ?



8. Гюльсюм задумала двузначное число. Сумма цифр этого числа равна 10. Количество десятков в 4 раза больше количества единиц. Какое число загадала Гюльсюм?



9. Решите неравенство. Укажите три рациональных числа, удовлетворяющих неравенству.

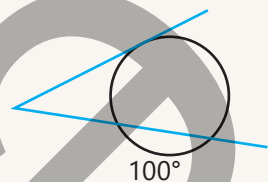
- а)  $a + 2 \geq -5,3$       в)  $x - 0,2 \leq -0,8$       д)  $12,3 + n \geq -5$       ж)  $3 + c \geq -0,5$   
 б)  $b - 2,5 \geq 1$       г)  $y + 10 > 1,5$       е)  $15,8 + m \leq 2,9$       з)  $-5,9 + d < -5,9$

10. Запишите уравнения прямых. Постройте их графики и найдите координаты точки пересечения. Составьте соответствующую систему уравнений и, решив её, проверьте ответ.

Прямая с угловым коэффициентом  $-2$  и ординатой точки пересечения с осью  $Oy$ , равной  $5$

Прямая с угловым коэффициентом  $0,5$  и проходящая через начало координат

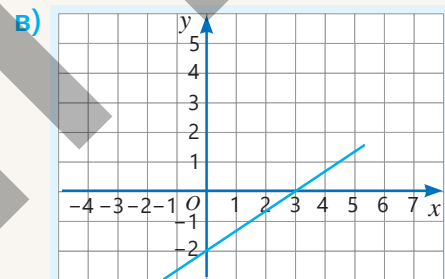
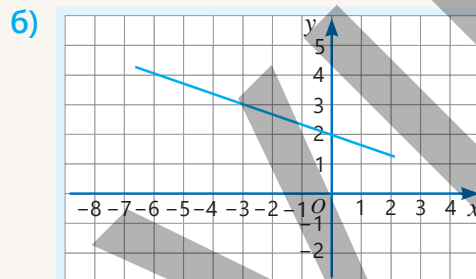
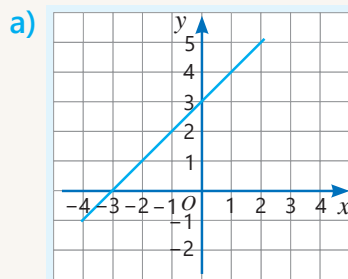
11. 20% градусной меры одной из дуг между касательной и секущей, проведёнными к окружности, составляет 30% градусной меры другой дуги. Какова градусная мера большей дуги?



12. Запишите уравнение прямой, проходящей через заданные точки, в виде  $y = kx + b$ .

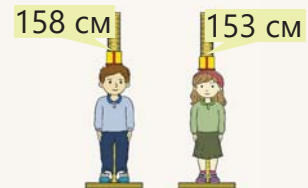
- а)  $A(-5; 0)$  и  $B(0; 5)$       б)  $C(4; 2)$  и  $D(0; 3)$       в)  $A(-1; 2)$  и  $B(5; -2,5)$

13. Запишите уравнение данной прямой.



14. В классе школьники измерили свой рост с точностью до 2 см при помощи прикрепленной к стене измерительной ленты. Айнур сказала, что ее рост 153 см, а у Анара — 158 см.

- Каковы минимальное и максимальное значения роста каждого?
- У кого относительная погрешность измерения больше?



15. Скорость звука в комнате ( $v$ , м/с) зависит от температуры воздуха ( $T$ , °C). Эту скорость приблизительно можно вычислить по формуле  $v = 331 + 0,6T$ . Лала измерила скорость звука в приложении на телефоне при температуре 22°C и получила значение 348 м/с. Затем она вычислила ее по формуле. Предполагая, что значение из приложения точное, найдите абсолютную и относительную погрешности вычислений.



16. В библиотеку привезли словари, книги с рассказами и энциклопедии. Книги с рассказами составляют 30% всех привезенных книг, а энциклопедии — 50%. Энциклопедий на 10 штук больше, чем книг с рассказами. Сколько книг каждого вида было привезено?

17. Покупатель купил 2 кг яблок и 1 кг граната за 8 манатов. Если цена яблок снизилась бы на 20%, а цена граната — на 30%, то покупатель заплатил бы 6,10 маната. Какова была цена 1 кг яблок?



**18.** В новом жилом доме, состоящем только из двухкомнатных и трехкомнатных квартир, всего 100 квартир. Общее количество комнат в двухкомнатных квартирах равно общему количеству комнат в трехкомнатных квартирах. Сколько в доме двухкомнатных и сколько трехкомнатных квартир?



### Математический калейдоскоп

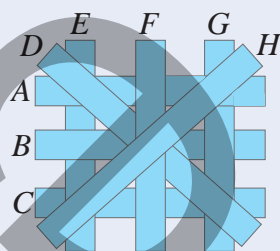
**1.** На основе системы уравнений найдите значение выражения  $x + y + z$ .

а) 
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = -6 \\ x + z = 10 \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 0 \\ x + y - 2z = -4 \\ 2x + 6y + 4z = 11 \end{cases}$$

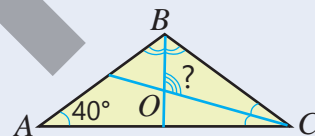
в) 
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2z + y = 5 \\ x + z = 9 \end{cases}$$

**2.** Прямоугольники были наложены друг на друга, как показано на рисунке. Определите, какие прямоугольники последовательно наложены друг на друга, начиная с нижнего.



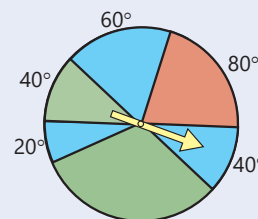
**3.** Машина движется по прямой линии в прямоугольной системе координат от точки с координатами (1; 3) до точки (17; 43). Сколько точек с натуральными координатами она пересечет во время этого движения?

**4.** На основе данных, представленных на рисунке, найдите в треугольнике  $ABC$  градусную меру угла между биссектрисами углов  $B$  и  $C$ .



**5.** Диаметр спиннера 30 см.

- Найдите площадь сектора, на который указывает стрелка.
- Какую часть круга составляет сектор, окрашенный в красный цвет?
- Какова вероятность того, что при одном вращении стрелка укажет на зелёную часть?



### STEAM "УМНЫЕ СВЕТОФОРЫ"

Рост числа автомобилей в больших городах вызывает длительные пробки на дорогах.

Для их предотвращения в рамках Интеллектуальных транспортных систем (ИТС) широко используются "умные светофоры".

Такие светофоры устанавливаются на перекрестках улиц с интенсивным движением.

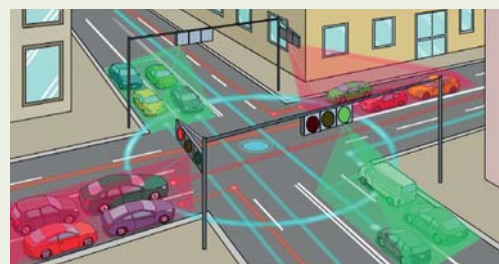
В течение дня длительность горения красного и зеленого света регулируется в зависимости от количества автомобилей, загруженности других улиц, выходящих на эти дороги, и т.д.

**1.** В часы пик зеленый свет "умного светофора" горит каждый раз на 30 секунд дольше, чем красный. За один час желтый свет горит в сумме 2 минуты.

Если за час зеленый и красный свет включаются по 24 раза, сколько секунд горит каждый из них за раз?

**2.** Подготовьте информацию о современных технологиях, используемых для предотвращения пробок в крупных городах.

**3.** Узнайте, когда в Баку была внедрена ИТС. Исследуйте причины возникновения пробок и предложите меры для их устранения. Подготовьте соответствующую презентацию.



# Вращение и симметрия. Задачи на построение

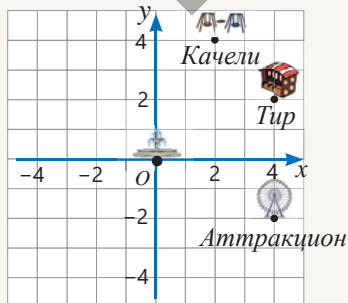
## В этой главе вы научитесь:

- строить фигуру, полученную при вращении данной фигуры вокруг точки;
- определять координаты точки при вращении вокруг начала координат на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ;
- объяснять симметрию относительно точки;
- строить фигуру, симметричную данной относительно точки;
- строить биссектрису угла и серединный перпендикуляр отрезка с помощью циркуля и линейки без делений.

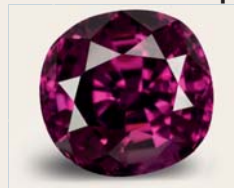
## Попытайтесь!

На плане парка фонтан находится в начале координат, а аттракцион — в точке  $A(4; -2)$ .

- Относительно какой координатной оси симметричны точки, где расположены тир и аттракцион?
- Что находится на 2 единицы левее и 2 единицы выше от тира?
- Киоск симметричен качелям относительно фонтана. В какой точке находится киоск?
- Как можно объяснить, что аттракцион находится на одинаковом расстоянии от киоска и качелей?



Алмаз



Альмандин



Аметист



Ирландский шпат

В природе часто наблюдаются свойства симметрии различных предметов и существ. Симметрия также считается критерием красоты. Симметрия широко используется в различных областях искусства — в ковроткачестве, живописи, архитектуре, а также в быту и технике. Симметричное расположение атомов в кристаллах придает этим веществам особую прочность. Влияние геометрического строения кристаллических решеток на свойства веществ изучает отдельная научная область — геометрическая кристаллография. Хотя циркуль и линейка без делений являются простыми инструментами, они позволяют точно решать некоторые задачи. Поэтому именно эти инструменты считаются основными в инженерии и дизайне.

*Симметричные особенности атомной структуры кристаллов влияют на их физические свойства. Кристаллы широко используются как драгоценные камни и как прочные материалы в технологических процессах.*

# Предварительная проверка

1 Определите количество осей симметрии фигур.

а)



б)



в)



г)

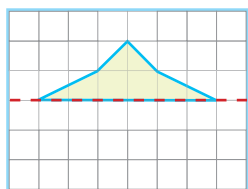
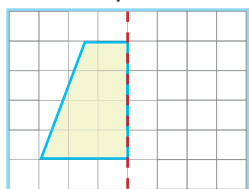


д)

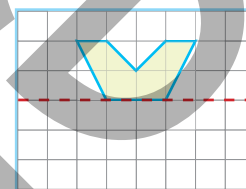
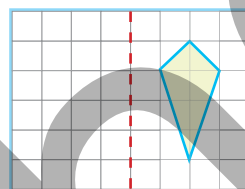


2 Выполните задания в тетради.

а) Дополните фигуру по оси симметрии.

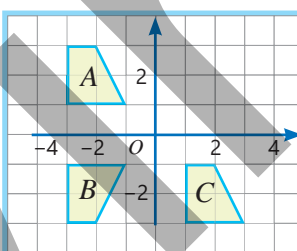


б) Постройте фигуру, симметричную данной, относительно прямой.

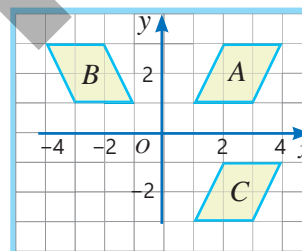


3 Объясните, каким образом были получены фигуры  $B$  и  $C$  из фигуры  $A$ : в результате перемещения или симметрии?

а)



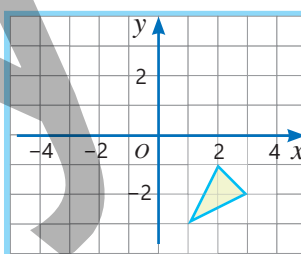
б)



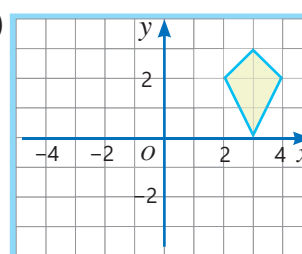
4 Постройте требуемые фигуры. Запишите координаты вершин полученных фигур:

- если фигуру сдвинуть на 4 единицы влево;
- если построить фигуру, симметричную данной, относительно оси абсцисс.

а)



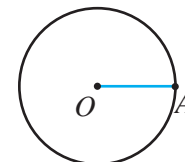
б)



5 Постройте треугольник в соответствии с условием.

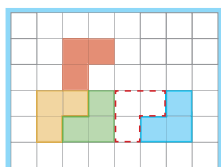
- Стороны 8 см, 5 см, угол между ними  $60^\circ$
- Сторона 10 см, прилежащие к ней углы  $50^\circ$  и  $40^\circ$
- Стороны 6 см, 8 см и 10 см

6 В окружности с центром в точке  $O$  проведен радиус  $OA$ . Как построить равносторонний треугольник с одной стороной  $OA$ ?

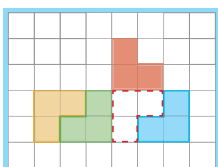


7 В результате каких действий можно перенести красную фигуру в указанное положение?

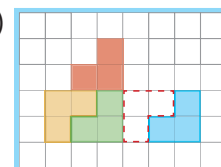
а)



б)



в)



## 9.1. Вращение в координатной плоскости

### Исследование-обсуждение

- Какое время покажут часы после поворота минутной стрелки на  $60^\circ$ ?
- На сколько градусов должна повернуться минутная стрелка, чтобы часы показывали 09:20?

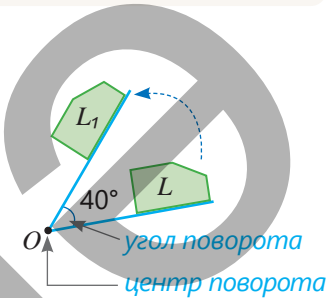


### Ключевые слова

- поворот
- угол поворота
- центр поворота

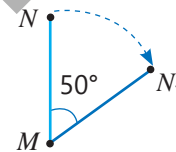
### Изучение Поворот

Если фигура  $L$  на плоскости поворачивается вокруг некоторой точки  $O$  на определенный угол (например,  $40^\circ$ ), то ее положение изменяется. Полученная фигура  $L_1$  будет конгруэнтна фигуре  $L$ . В этом случае говорят, что фигура  $L_1$  получена в результате поворота фигуры  $L$  вокруг центра  $O$ . При повороте фигуры все её точки поворачиваются вокруг центра вращения по дугам окружностей на один и тот же угол.



- Поворот может быть по часовой стрелке (↻) или против часовой стрелки (↺). При этом сам центр поворота не меняет своего положения.

На рисунке изображен поворот отрезка  $MN$  вокруг точки  $M$  по часовой стрелке на  $50^\circ$ : точка  $M$  остается неподвижной, а остальные точки поворачиваются по дуге окружности с углом  $50^\circ$ , в результате чего получается отрезок  $MN_1$ .



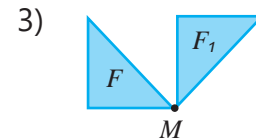
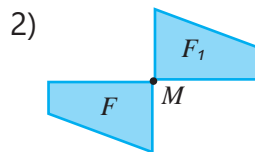
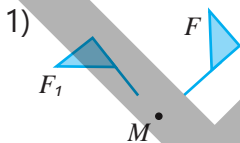
### Подумай!

Как можно объяснить, что при повороте фигуры на  $360^\circ$  (полный оборот) она совпадает со своим первоначальным положением?

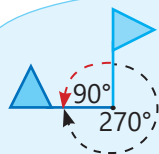
### Задания

- 1 В результате поворота фигуры  $F$  вокруг точки  $M$  получается фигура  $F_1$ . Определите, какой из предложенных углов поворота соответствует данной фигуре:

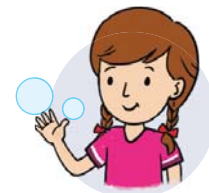
- поворот по часовой стрелке на  $90^\circ$
- поворот против часовой стрелки на  $90^\circ$
- поворот по часовой стрелке на  $180^\circ$



- 2 Обсудите мнение Айнура и ответьте на вопросы:



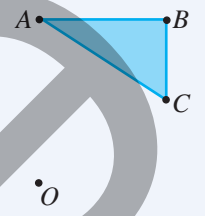
Положение фигуры при повороте по часовой стрелке на  $270^\circ$  и при повороте против часовой стрелки на  $90^\circ$  будет одинаковым.



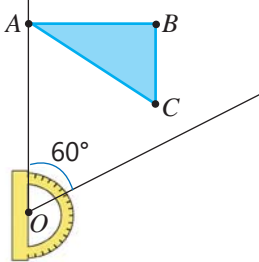
- а) Совпадают ли положения фигуры при повороте на  $180^\circ$  по часовой стрелке и на  $180^\circ$  против часовой стрелки?
- б) Совпадают ли положения фигуры при повороте на  $120^\circ$  по часовой стрелке и на  $120^\circ$  против часовой стрелки?
- в) Какому углу поворота по часовой стрелке соответствует положение фигуры, полученное при повороте на  $200^\circ$  против часовой стрелки?

## Изучение Построение фигуры, полученной в результате поворота

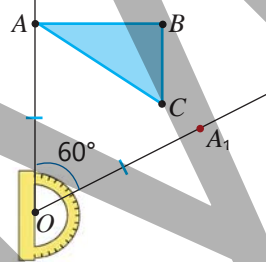
Чтобы построить фигуру, полученную при повороте многоугольника вокруг заданной точки на определенный угол, сначала отмечают точки, в которые переходят вершины, затем последовательно соединяют полученные точки отрезками. Например, фигуру, полученную из треугольника  $ABC$  поворотом вокруг точки  $O$  на  $60^\circ$  по часовой стрелке, можно построить следующим образом.



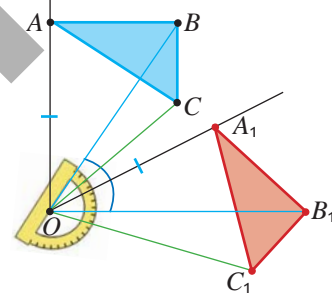
**1** Проводится луч  $OA$  и при помощи транспортира строится угол в  $60^\circ$ , одна сторона которого  $OA$ .



**2** На второй стороне угла отложить отрезок  $OA_1 = OA$ , отметив точку  $A_1$ .

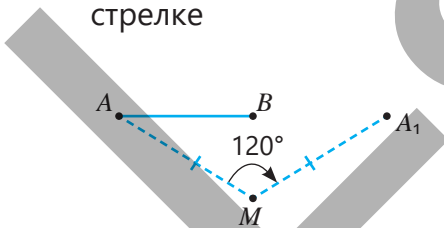


**3** Повторив те же действия для точек  $B$  и  $C$ , отмечаются точки  $B_1$  и  $C_1$ . Соединяются точки  $A_1, B_1, C_1$ .

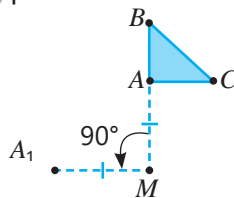


**3** На рисунке изображены синяя фигура и одна из вершин фигуры, полученной ее поворотом вокруг точки  $M$ . Достройте фигуру, полученную в результате поворота.

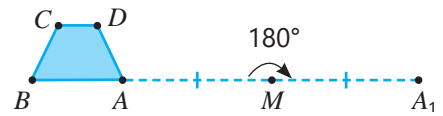
а) на  $120^\circ$  по часовой стрелке



б) на  $90^\circ$  против часовой стрелки



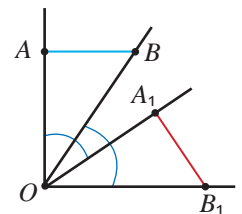
в) на  $180^\circ$  по часовой стрелке



**4** При повороте вокруг точки  $O$  отрезок  $AB$  переходит в  $A_1B_1$ .

Обоснуйте, что  $AB \cong A_1B_1$  ответив на вопросы.

- Как объяснить равенства  $OA = OA_1$  и  $OB = OB_1$ ?
- Почему  $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$ ?
- Как показать, что  $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ ?
- По какому признаку можно установить, что треугольники  $AOB$  и  $A_1OB_1$  конгруэнтны?
- Как обосновать, что отрезки  $AB$  и  $A_1B_1$  конгруэнтны?

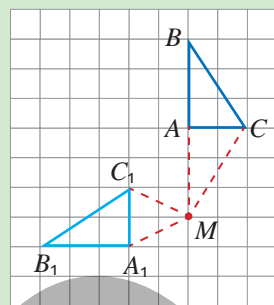




### Исправь ошибку!

Фигура, полученная при повороте треугольника  $ABC$  на  $90^\circ$  по часовой стрелке вокруг точки  $M$ , строится так:

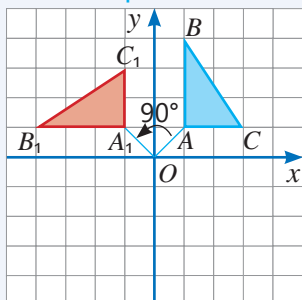
- 1) Проводится луч  $MA$  и строится угол в  $90^\circ$ , одна сторона которого —  $MA$ .
- 2) На второй стороне угла отмечается точка  $A_1$ .
- 3) Аналогично строятся точки  $B_1$  и  $C_1$ . Точки  $A_1, B_1$ , и  $C_1$  соединяются отрезками.



## Изучение Поворот в координатной плоскости

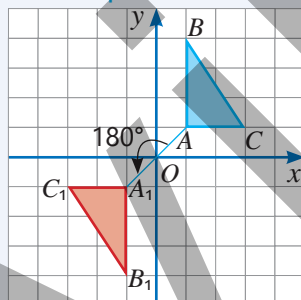
На рисунке изображен поворот треугольника с вершинами  $A(1; 1)$ ,  $B(1; 4)$ ,  $C(3; 1)$  вокруг начала координат на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$  против часовой стрелки. По рисунку можно определить координаты вершин треугольников, полученных при каждом повороте.

Поворот на  $90^\circ$



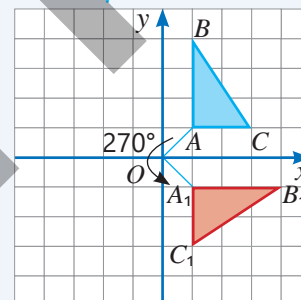
- $A(1; 1) \rightarrow A_1(-1; 1)$
- $B(1; 4) \rightarrow B_1(-4; 1)$
- $C(3; 1) \rightarrow C_1(-1; 3)$

Поворот на  $180^\circ$



- $A(1; 1) \rightarrow A_1(-1; -1)$
- $B(1; 4) \rightarrow B_1(-1; -4)$
- $C(3; 1) \rightarrow C_1(-3; -1)$

Поворот на  $270^\circ$



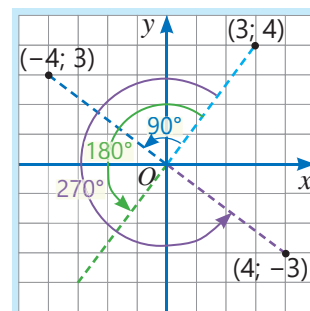
- $A(1; 1) \rightarrow A_1(1; -1)$
- $B(1; 4) \rightarrow B_1(4; -1)$
- $C(3; 1) \rightarrow C_1(1; -3)$

• При повороте вокруг начала координат против часовой стрелки на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$  координаты точки изменяются следующим образом:

Поворот на  $90^\circ$   
 $(3; 4) \rightarrow (-4; 3)$

Поворот на  $180^\circ$   
 $(3; 4) \rightarrow (-3; -4)$

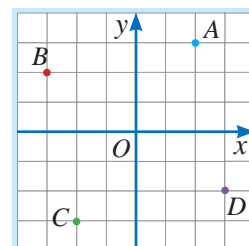
Поворот на  $270^\circ$   
 $(3; 4) \rightarrow (4; -3)$



5

Определите по рисунку координаты данных точек. Ответьте на вопросы о поворотах вокруг начала координат:

- а) На сколько градусов нужно повернуть точку  $A$  против часовой стрелки, чтобы получить точку  $B$ ?
- б) При повороте какой точки против часовой стрелки на  $270^\circ$  получается точка  $D$ ?
- в) Какая точка получается при повороте точки  $C$  на  $180^\circ$ ?



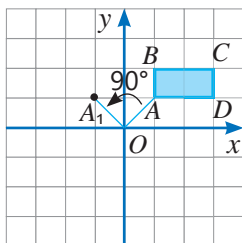


## Внимание!

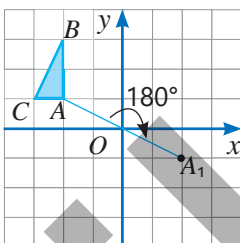
Повернув точку вокруг начала координат по часовой стрелке, можно заменить этот поворот эквивалентным поворотом в противоположную сторону, чтобы найти координаты соответствующей точки.

- 6 На рисунке изображены синяя фигура и одна из вершин фигуры, полученная при повороте этой фигуры вокруг начала координат. Запишите координаты вершин данной фигуры и фигуры, полученной после поворота. Завершите построение фигуры, полученной при повороте.

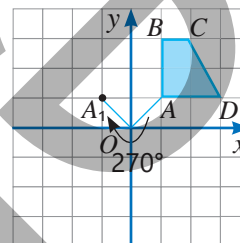
а) Поворот против часовой стрелки на  $90^\circ$



б) Поворот по часовой стрелке на  $180^\circ$

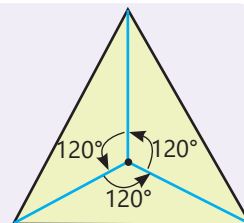


в) Поворот по часовой стрелке на  $270^\circ$

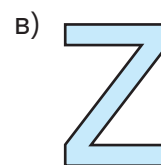
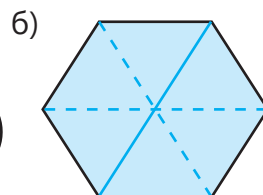
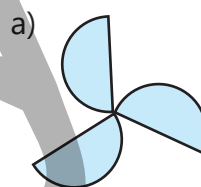


## Запомни!

Некоторые фигуры совпадают сами с собой несколько раз при полном повороте вокруг определенной точки. Такие фигуры называются фигурами с **симметрией вращения**. Например, равносторонний треугольник при повороте вокруг центра тяжести на  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $360^\circ$  совпадает сам с собой.



- 7 Фигура, изображенная на рисунке, обладает симметрией вращения. Укажите центр поворота. При каких значениях угла поворота фигура совпадает сама с собой?

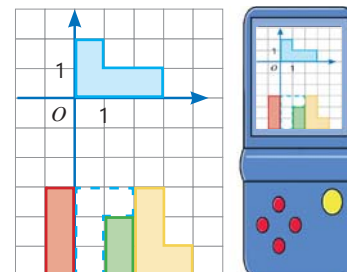


## Решение задач

- 8 На аттракционе "Колесо обозрения" 30 кабин. Пассажиры могут садиться и выходить только в нижней кабине.
- На какой угол должно повернуться колесо, чтобы следующая кабина оказалась внизу?
  - На сколько градусов нужно повернуть колесо, чтобы 6-я кабина заняла нижнее положение?
  - Какая кабина окажется внизу после поворота колеса на  $108^\circ$ ?



- 9 Гюльсюм хочет повернуть в игре тетрис синюю фигуру в указанное положение.
- На сколько градусов она должна повернуть фигуру вокруг начала координат и затем на сколько единиц переместить ее?
  - Запишите координаты вершин фигуры, полученной после поворота.

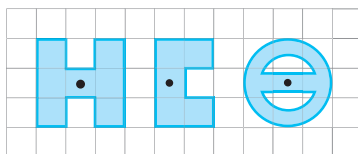


## 9.2. Симметрия относительно точки

### Исследование-обсуждение

Вырежьте фигуры, как показано на бумаге в клетку. Поставив острие циркуля в указанную точку, поверните фигуру на  $180^\circ$ .

- Какая фигура при повороте на  $180^\circ$  вокруг указанной точки совпадает сама с собой?



### Ключевые слова

- центр симметрии
- центрально-симметричная фигура

### Изучение Симметрия относительно точки

Если точка  $O$  является серединой отрезка, соединяющего точки  $A$  и  $B$ , то  $A$  и  $B$  называются симметричными точками относительно точки  $O$ . В этом случае точка  $O$  называется **центром симметрии**. Центр симметрии считается симметричным сам себе.

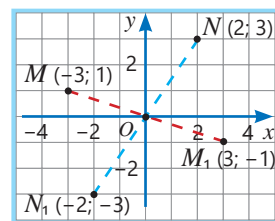
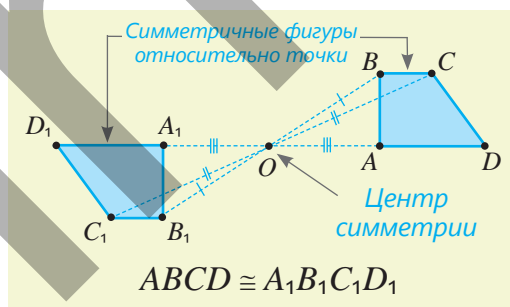
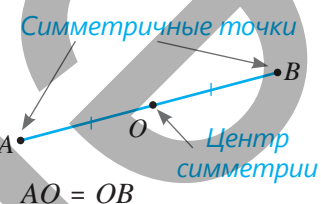
Две фигуры могут быть симметричны относительно точки. В этом случае для каждой точки одной фигуры существует симметричная ей точка относительно заданного центра, принадлежащая другой фигуре.

- Фигуры, симметричные относительно точки, конгруэнтны. Например, на рисунке изображены трапеции  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ , симметричные относительно точки  $O$ .
- Фигуры, симметричные относительно точки, могут быть получены одна из другой путем поворота на  $180^\circ$  вокруг центра симметрии.

- Чтобы найти симметричную точку относительно начала координат, нужно заменить обе ее координаты на противоположные.

$$M(-3; 1) \rightarrow M_1(3; -1)$$

$$N(2; 3) \rightarrow N_1(-2; -3)$$



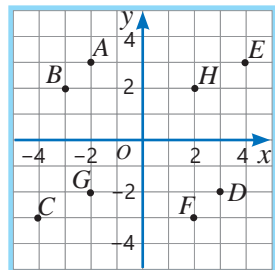
### Подумай!

В какой четверти расположена точка, симметричная точке из первой четверти относительно начала координат?

### Задания

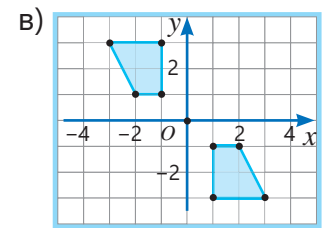
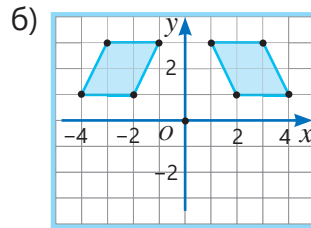
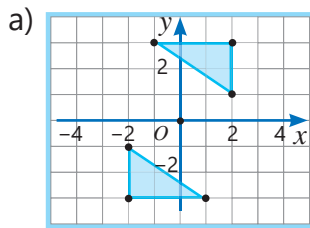
- 1 Определите координаты точек, изображенных на рисунке. Найдите симметричную точку относительно начала координат и запишите ее координаты.

A      C      G      B



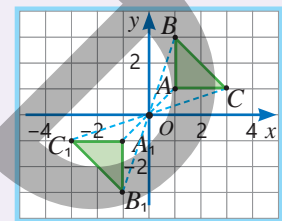
- 2 Отметьте точки  $E(3; 2)$ ,  $F(-4; 0)$ ,  $P(-2; 4)$ ,  $Q(0; 3)$  в системе координат. Для каждой точки определите симметричную ей относительно начала координат точку и запишите ее координаты.

- 3 Определите, симметричны ли фигуры на рисунке относительно начала координат. Обоснуйте свой ответ, сравнивая координаты вершин.



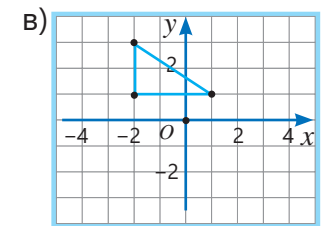
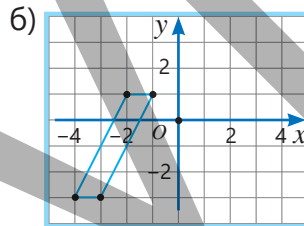
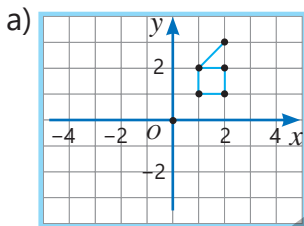
### Запомни!

В координатной системе, чтобы построить фигуру, симметричную данному многоугольнику относительно начала координат, сначала отмечают точки, симметричные вершинам многоугольника, а затем соединяют эти точки отрезками. Например, если построить фигуру, симметричную треугольнику  $ABC$  на рисунке относительно начала координат, получится треугольник  $A_1B_1C_1$ .



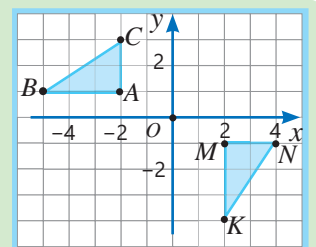
$$A(1; 1) \rightarrow A_1(-1; -1) \quad B(1; 3) \rightarrow B_1(-1; -3) \quad C(3; 1) \rightarrow C_1(-3; -1)$$

- 4 Постройте фигуру, симметричную данной, относительно начала координат. Запишите координаты отмеченных точек и координаты симметричных им точек.



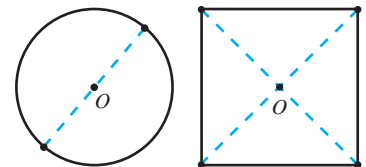
### Исправь ошибку!

Точки  $A(-2; 1)$  и  $M(2; -1)$  симметричны относительно начала координат. Следовательно, фигуры  $ABC$  и  $MNK$  симметричны относительно начала координат.



## Изучение Центральная-симметричная фигура

Если для любой точки фигуры симметричная ей точка относительно одной и той же точки  $O$  также принадлежит этой фигуре, то такая фигура называется *симметричной относительно точки  $O$* . Фигура, симметричная относительно точки, также называется **центрально-симметричной фигурой**. Например, окружность и квадрат являются центрально-симметричными фигурами.



*Центрально-симметричные фигуры при повороте на  $180^\circ$  вокруг центра симметрии совпадают сами с собой.*



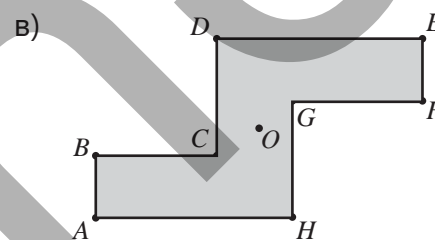
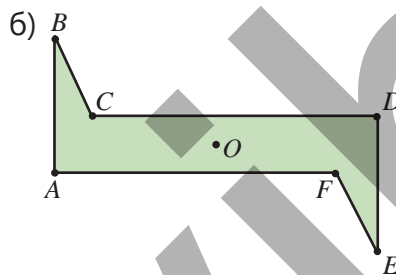
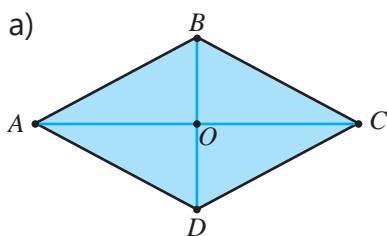
## Подумай!

Как можно объяснить, что отрезок является центрально-симметричной фигурой?

5 Какие фигуры на рисунке имеют центр симметрии?

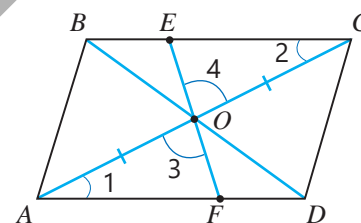


6 На рисунке изображена центрально-симметричная фигура. Точка  $O$  — центр симметрии фигуры. Укажите вершины фигуры, симметричные относительно этой точки.



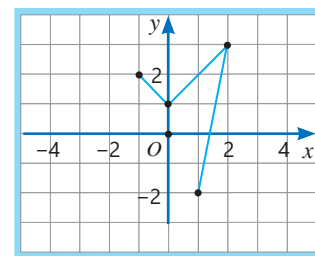
7 На рисунке прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма  $O$ , пересекает его стороны в точках  $E$  и  $F$ . Ответив на вопросы, обоснуйте, что параллелограмм симметричен относительно точки  $O$ .

- Верны ли равенства  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 3 = \angle 4$  и  $AO = OC$ ? Почему?
- По какому признаку треугольники  $AOF$  и  $COE$  конгруэнтны?
- Почему точка  $O$  является серединой отрезка  $EF$ ?
- Как можно объяснить, что при повороте параллелограмма вокруг точки  $O$  на  $180^\circ$  он совпадает сам с собой?



8 На рисунке изображена часть центрально-симметричной фигуры относительно начала координат.

- Запишите координаты отмеченных точек.
- Отметьте на координатной плоскости симметричные этим точкам точки и завершите построение фигуры.



## Решение задач

9 На рисунке изображена фигура, составленная из равносторонних треугольников. Чьё мнение верно?

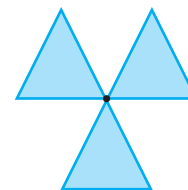


Центрально-симметричная фигура.

Фигура с симметрией вращения.



Анар



## 9.3. Задачи на построение

### Исследование-обсуждение

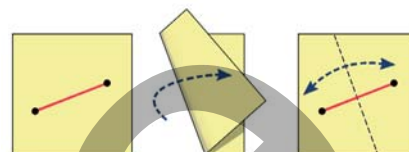
На листе бумаги нарисуйте отрезок  $AB$ . Сложите лист так, чтобы точки  $A$  и  $B$  совпали. Затем разверните листок.

- Как можно обосновать, что линия сгиба делит отрезок  $AB$  пополам?
- Перпендикулярна ли линия сгиба отрезку  $AB$ ? Как это объяснить?



### Ключевые слова

- серединный перпендикуляр



### Изучение Задачи на построение

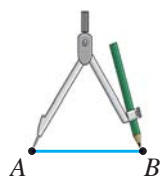
В задачах на построение требуется с помощью только циркуля и линейки без делений строить геометрические фигуры с определенными свойствами. Вместо линейки без делений можно использовать любой предмет, с помощью которого можно проводить прямые линии (карточка метро, кусок картона и т.д.).

- С помощью линейки без делений можно: нарисовать прямую, провести прямую через заданную точку, провести прямую через две точки.
- С помощью циркуля можно: нарисовать окружность с центром в заданной точке и заданным радиусом, отложить на прямой отрезок заданной длины.

**ПРИМЕР.** Постройте отрезок, конгруэнтный заданному отрезку  $AB$ .



**1** Разведите ножки циркуля на длину отрезка  $AB$ .

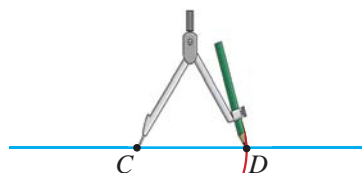


**2** Нарисуйте прямую и отметьте на ней любую точку  $C$ .



**3** Отметьте точку пересечения (точка  $D$ ) дуги окружности с центром в точке  $C$  и радиусом, равным  $AB$ .

$$CD \cong AB$$

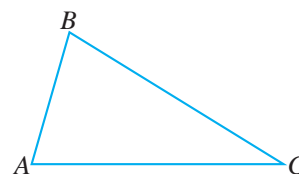


Решение задачи на построение включает в себя: описание метода построения и доказательство того, что полученная фигура соответствует требованиям задачи.

### Задания

**1** Постройте прямую линию и на ней отложите отрезки, конгруэнтные сторонам треугольника, изображенного на рисунке.

- Как можно построить отрезок, длина которого равна периметру треугольника?
- Отметьте любую точку и проведите концентрические окружности с центром в этой точке и радиусами, равными сторонам треугольника.
- Постройте треугольник, конгруэнтный данному треугольнику.





## Из истории математики

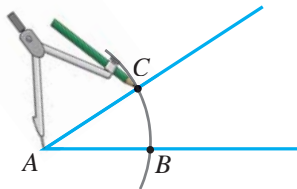
Линейка и циркуль на протяжении тысячелетий были одними из важнейших инструментов геометрии. В Древнем Египте циркуль использовался для измерения расстояний. Евклид (325–265 гг. до н.э.) в своем труде "Начала" определил основные правила построений с использованием циркуля и линейки без делений.



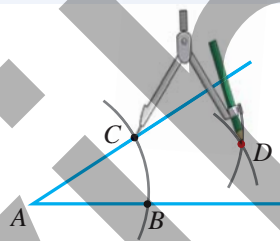
## Изучение Построение биссектрисы угла

С помощью линейки и циркуля можно построить биссектрису угла.

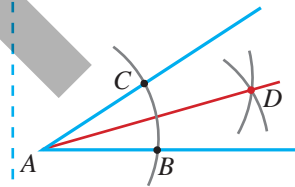
**1** Острие циркуля ставится в вершину угла, проводится дуга произвольного радиуса до пересечения сторон этого угла и отмечаются точки пересечения ( $B$  и  $C$ ).



**2** Проводятся две пересекающиеся дуги окружностей с одинаковыми радиусами, центры которых находятся в точках  $B$  и  $C$ , и отмечается точка пересечения дуг ( $D$ ).



**3** Проводится луч  $AD$ .  
 $\angle CAD \cong \angle BAD$



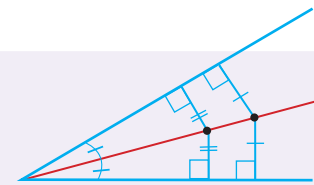
### Подумай!

По какому признаку треугольники  $ABD$  и  $ACD$ , полученные при соединении точек  $B$  и  $C$  с точкой  $D$ , конгруэнтны? Как можно обосновать, что  $AD$  является биссектрисой?

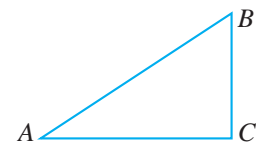


### Запомни!

Любая точка на биссектрисе находится на одинаковом расстоянии от сторон угла.

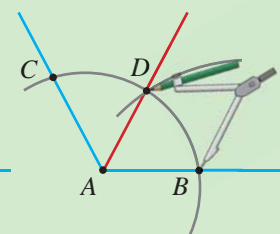
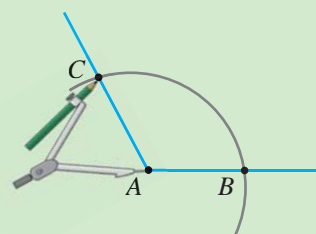


- 2** Выполните построения.
  - а) Нарисуйте острый угол и постройте его биссектрису.
  - б) Нарисуйте тупой угол и постройте его биссектрису.
- 3** Постройте треугольник, конгруэнтный изображенному на рисунке, и проведите биссектрису наибольшего угла этого треугольника.



### Исправь ошибку!

Для построения биссектрисы острие циркуля помещают в вершину угла и проводят дугу произвольного радиуса, отмечая точки пересечения со сторонами угла. Затем проводят дугу, центр которой находится в одной из этих точек. Луч, проходящий через вершину угла и точку пересечения этих дуг, является биссектрисой угла.

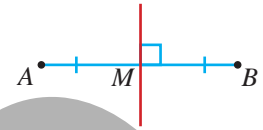


- 4 Постройте параллелограмм  $ABCD$  и проведите биссектрису угла  $A$ . Обозначьте точку пересечения биссектрисы со стороной  $BC$  как  $T$ . Постройте окружность с центром в точке  $B$  и радиусом, равным длине стороны  $AB$  параллелограмма. Проходит ли эта окружность через точку  $T$ ? Проверьте и объясните.

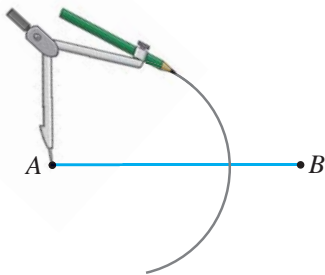
## Изучение Построение серединного перпендикуляра отрезка

Прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная ему, называется серединным перпендикуляром отрезка.

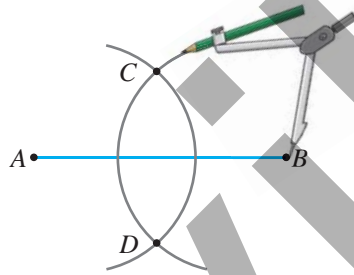
Построение серединного перпендикуляра отрезка  $AB$ :



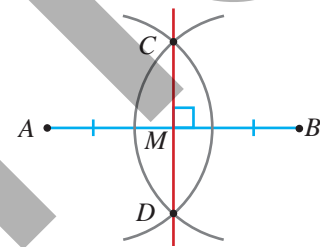
- 1 Проводится дуга с центром в точке  $A$  радиусом, большим половины длины отрезка.



- 2 Проводится дуга с центром в точке  $B$  с тем же радиусом. Отмечаются точки пересечения дуг ( $C$  и  $D$ ).

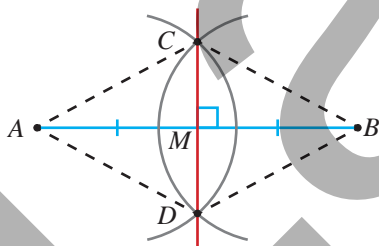


- 3 Проводится прямая через точки  $C$  и  $D$ . Отмечается точка пересечения ( $M$ ) прямой  $CD$  с отрезком  $AB$ .  
 $AM = MB, CD \perp AB$



• Любая точка, лежащая на серединном перпендикуляре отрезка, находится на одинаковом расстоянии от концов этого отрезка.

- 5 Нарисуйте любой отрезок и постройте его серединный перпендикуляр.
- 6 Самир, выполняя вышеуказанные шаги, для некоторого отрезка  $AB$  построил отрезок  $CD$ . Он обосновал, что полученный отрезок  $CD$  является серединным перпендикуляром. Верны ли его рассуждения?

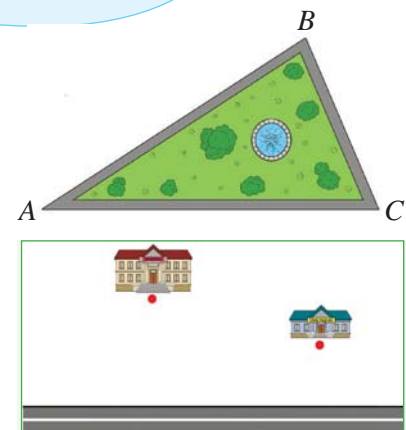


Если соединить точки  $A, C, B, D$  последовательно, получится ромб. Поскольку отрезки  $AB$  и  $CD$  являются диагоналями ромба, они перпендикулярны друг другу и в точке пересечения делятся пополам. Поэтому  $AM = MB, CD \perp AB$ .



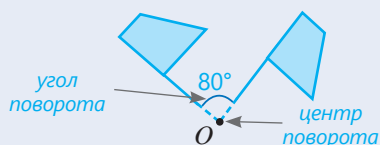
## Решение задач

- 7 На рисунке изображен план парка в форме треугольника. В какой точке нужно расположить круглый фонтан, чтобы он находился на одинаковом расстоянии от дорожек  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ ?
- 8 Остановку автобуса на шоссе нужно построить в таком месте, чтобы она находилась на одинаковом расстоянии от школы и детского сада. Как это можно сделать?

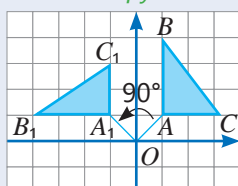


# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

## Поворот

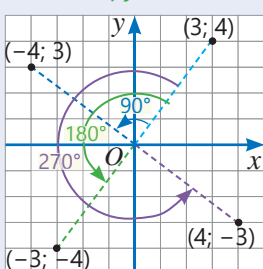


Поворот на  $90^\circ$  против часовой стрелки вокруг начала координат.



$$\begin{aligned} A(1; 1) &\rightarrow A_1(-1; 1) \\ B(1; 4) &\rightarrow B_1(-4; 1) \\ C(3; 1) &\rightarrow C_1(-1; 3) \\ \Delta ABC &\cong \Delta A_1B_1C_1 \end{aligned}$$

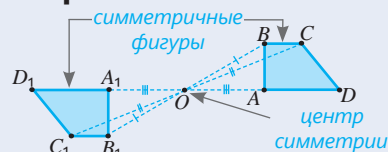
Поворот против часовой стрелки вокруг начала координат.



$$\begin{aligned} \text{Поворот на } 90^\circ & \\ (3; 4) &\rightarrow (-4; 3) \\ \text{Поворот на } 180^\circ & \\ (3; 4) &\rightarrow (-3; -4) \\ \text{Поворот на } 270^\circ & \\ (3; 4) &\rightarrow (4; -3) \end{aligned}$$

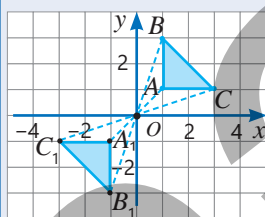
## Поворот и симметрия. Построение

## Симметрия относительно точки



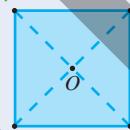
$$ABCD \cong A_1B_1C_1D_1$$

Симметрия относительно начала координат



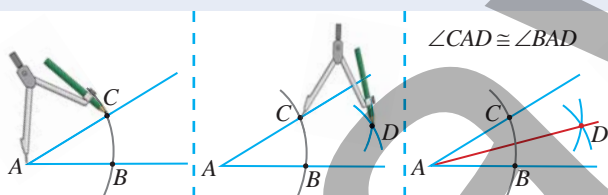
$$\begin{aligned} A(1; 1) &\rightarrow A_1(-1; -1) \\ B(1; 3) &\rightarrow B_1(-1; -3) \\ C(3; 1) &\rightarrow C_1(-3; -1) \\ \Delta ABC &\cong \Delta A_1B_1C_1 \end{aligned}$$

Центрально-симметричная фигура



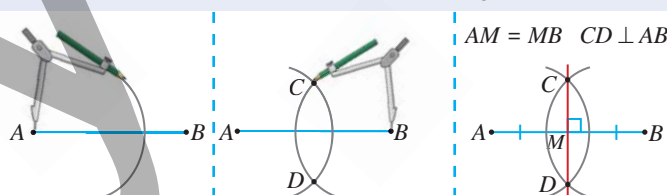
Существует центр симметрии, при котором каждой точке фигуры соответствует симметричная ей точка, также принадлежащая этой фигуре.

## Построение биссектрисы угла



Любая точка, лежащая на биссектрисе угла, находится на одинаковом расстоянии от сторон угла.

## Построение серединного перпендикуляра отрезка

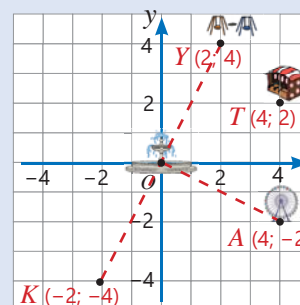


Любая точка, лежащая на серединном перпендикуляре отрезка, находится на одинаковом расстоянии от концов этого отрезка.

## Решение исходной задачи

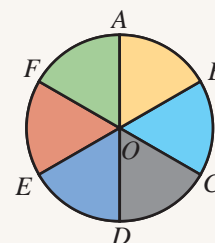
- Атракцион  $A$  находится в точке  $(4; -2)$ , а тир  $T$  — в точке  $T(4; 2)$ . Так как абсциссы точек одинаковые, а ординаты противоположны, эти точки симметричны относительно оси абсцисс.
- Качели установлены в точке  $Y(2; 4)$ , которая на 2 единицы левее и на 2 единицы выше точки  $T$ .
- Фонтан расположен в начале координат. Значит, киоск находится в точке  $K(-2; -4)$ , которая симметрична точке  $Y(2; 4)$  относительно начала координат.
- Точка  $Y(2; 4)$  получается из точки  $A(4; -2)$  поворотом на  $90^\circ$  против часовой стрелки вокруг начала координат. Точка  $O$  является серединой отрезка  $KY$ .

Поскольку точка  $A$  лежит на серединном перпендикуляре, то  $AY = AK$ .



## ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

**1.** Окружность с центром в точке  $O$  разделена на шесть равных дуг. В соответствии с условием определите, какая фигура получится при указанном повороте относительно центра окружности.

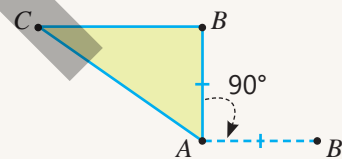


- a) Поворот радиуса  $OA$  на  $120^\circ$  по направлению движения часовой стрелки;
- б) Поворот сектора  $COD$  на  $60^\circ$  против часовой стрелки;
- в) Поворот дуги  $EF$  на  $180^\circ$ .

**2.** По результатам поворота фигуры вокруг заданной точки определите, верно ли утверждение. Объясните, приведя пример.

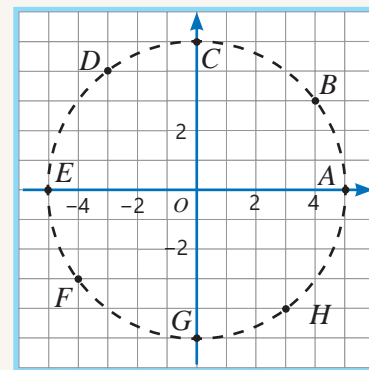
- a) Поворот на  $120^\circ$  по часовой стрелке равен повороту на  $240^\circ$  против часовой стрелки.
- б) Поворот на  $150^\circ$  против часовой стрелки равен повороту на  $150^\circ$  по часовой стрелке.
- в) Поворот на  $180^\circ$  против часовой стрелки отличается от поворота на  $180^\circ$  по часовой стрелке.

**3.** Треугольник  $ABC$  повернут на  $90^\circ$  по направлению движения часовой стрелки вокруг вершины  $A$ . На рисунке показана точка, в которую переходит точка  $B$  при повороте треугольника  $ABC$  на  $90^\circ$  по часовой стрелке вокруг вершины  $A$ . Найдите, в какую точку перейдет точка  $C$ , и завершите в своей тетради построение фигуры после поворота.



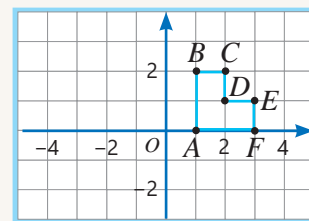
**4.** Запишите координаты точек, изображенных на рисунке. Ответьте на вопросы, основываясь на повороте вокруг начала координат:

- В какие точки перейдут каждая из данных точек при повороте на  $90^\circ$  против часовой стрелки?
- Из каких точек получаются данные точки при повороте на  $270^\circ$  по часовой стрелке?



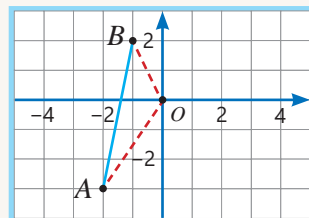
**5.** Запишите координаты вершин фигуры, изображенной на рисунке.

- Постройте фигуру, полученную в результате поворота на  $90^\circ$  против часовой стрелки вокруг начала координат. Определите координаты вершин полученной фигуры.
- Постройте фигуру, симметричную данной относительно начала координат, и запишите координаты ее вершин.



**6.** Точка пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  находится в начале координат.

- Запишите координаты вершин  $A$  и  $B$ .
- Определите координаты вершин  $C$  и  $D$ .
- Завершите построение параллелограмма в тетради.



7. Определите, верно ли утверждение. Объясните свое мнение, приведя пример.
- Точка пересечения диагоналей равнобедренной трапеции — это центр ее симметрии.
  - У квадрата четыре оси симметрии.
  - Ромб — центрально-симметричная фигура.
  - У прямоугольника есть только одна ось симметрии.

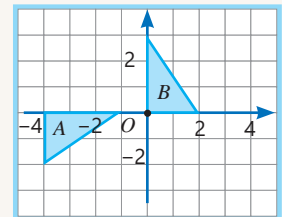
8. Представленная на рисунке фигура обладает симметрией вращения. При каких значениях угла поворота фигура совпадает сама с собой? Является ли она центрально-симметричной фигурой? Объясните ответ.



9. Отрезки  $AB$  и  $CD$ , не лежащие на одной прямой, симметричны относительно точки. Докажите, что эти отрезки конгруэнтны и расположены на параллельных прямых

10. В каком варианте указаны верные шаги, чтобы получить из фигуры  $A$  фигуру  $B$ ?

- 1-й шаг: симметрия относительно оси абсцисс.  
2-й шаг: перемещение на 4 единицы вправо.
- 1-й шаг: перемещение на 1 единицу вправо.  
2-й шаг: симметрия относительно начала координат.
- 1-й шаг: перемещение на 4 единицы вправо.  
2-й шаг: поворот на  $90^\circ$  против часовой стрелки относительно начала координат.



11. Постройте на бумаге в клетку треугольник со сторонами длиной 12, 16 и 20 клеток. Постройте биссектрисы треугольника и покажите, что они пересекаются в одной точке.

12. Нарисуйте тупой угол. Постройте его биссектрису. Выберите любую точку на биссектрисе и докажите, что она находится на одинаковом расстоянии от сторон угла.

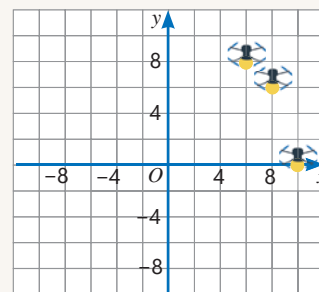
*Указание.* Используйте признаки конгруэнтности треугольников.

13. В парке отдыха и развлечений планируется реконструкция. Используя циркуль и линейку без делений, ответьте на вопросы:

- Как определить место расположения скамейки на отрезке, соединяющем фонтан и аттракцион, если она должна находиться на одинаковом расстоянии от них?
- Как определить место для пикника, если оно должно находиться на одинаковом расстоянии от аттракциона, фонтана и качелей?



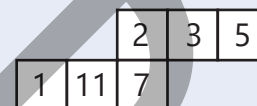
**14.** На мероприятии планируется с помощью световых дронов показывать в небе различные фигуры. Положения трех дронов в системе координат указаны на рисунке. Другие дроны расположены в координатах, соответствующих повороту на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  или  $270^\circ$  от каждого из показанных дронов, в направлении против часовой стрелки.



### Математический калейдоскоп

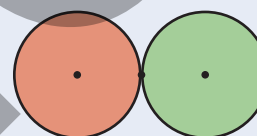
**1.** Докажите тождество  $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$ .

**2.** На рисунке изображена развертка куба с числами на гранях. Каково:



**а)** наибольшее значение; **б)** наименьшее значение произведения чисел, отмеченных на трех гранях, имеющих общую вершину?

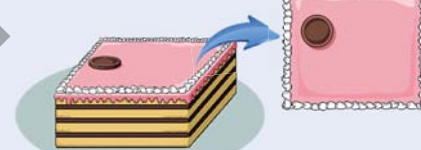
**3.** Два диска с равными радиусами касаются внешним образом. Один из них без скольжения обкатывается вокруг другого и возвращается в исходное положение. Сколько полных оборотов вокруг своего центра он совершит?



**4.** В пустые клетки впишите такие числа, чтобы равенство выполнялось для любого значения переменной.

$$x + 2(x - 1) + 3(x + 1) + 4(x - 1) + 5(x + 1) + \dots + 19(x + 1) + 20(x - 1) = \square x - \square$$

**5.** Торт в форме прямоугольного параллелепипеда имеет круглую шоколадку сверху. Как следует разрезать торт по прямой линии, чтобы и торт, и шоколадка были разделены пополам?



## STEAM

### "КОВРЫ АЗЕРБАЙДЖАНА"

Ковроткачество — это древнее и широко распространенное ремесло. Это ремесло в Азербайджане возникло около 5000 лет назад. На азербайджанских коврах преобладают геометрические орнаменты с символическим значением.

**1.** Исследуйте, есть ли на ковре, изображенном на рисунке, центрально-симметричные фигуры и фигуры с симметрией вращения.

**2.** Приведите примеры ковров, использующих симметрию относительно точки, центральную симметрию и симметрию вращения, которые встречаются в домах или на изображениях в Интернете.

**3.** Используя симметрию относительно центра и симметрию вращения, создайте эскиз ковра с различными узорами.

**4.** Изучите примеры азербайджанского коврового искусства в Интернете и подготовьте презентацию об их типах и узорах.



# Раздел 10

## Статистика и вероятность

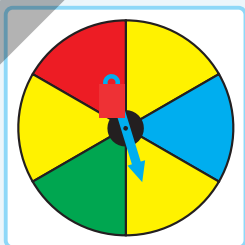
### В этой главе вы научитесь:

- составлять таблицу частот для несгруппированных данных;
- по таблице частот рассчитывать среднее арифметическое, медиану и моду;
- описывать множество элементарных событий, которые могут произойти при испытании;
- рассчитывать вероятность события;
- отличать противоположные события;
- отличать несовместные события и находить их вероятность.

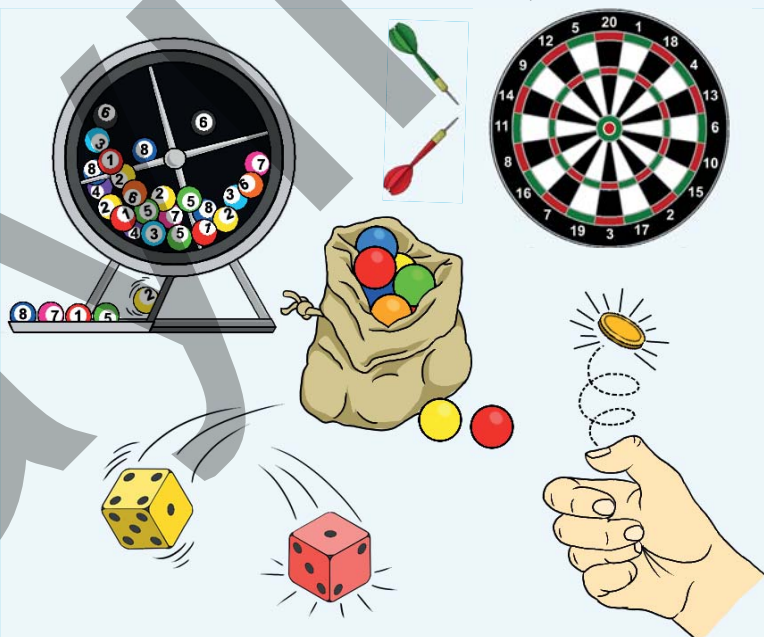
### Попытайтесь!

Анар 20 раз вращал стрелку спиннера, разделенного на конгруэнтные сектора, и записал результаты в таблицу. Заполните таблицу и ответьте на вопросы:

- Какова частота события, при котором стрелка останавливается на красном секторе?
- На каком цветном секторе с наибольшей вероятностью остановится стрелка при следующем вращении? Какова примерная вероятность этого события на основе частоты?
- Какова вероятность того, что стрелка остановится на секторе, не окрашенном в синий цвет?
- Может ли стрелка одновременно остановиться как на красном, так и на зеленом секторе?



Применение методов статистики и теории вероятностей при составлении экономических прогнозов, в сферах массового обслуживания и обработки данных помогает принимать правильные решения. Эти теории также имеют особое значение для оценки рисков при принятии решений в различных сферах.



Результаты эксперимента	Число	Частота
Остановка в красном секторе		2
Остановка в синем секторе		
Остановка в зеленом секторе		
Остановка в желтом секторе		

# Предварительная проверка

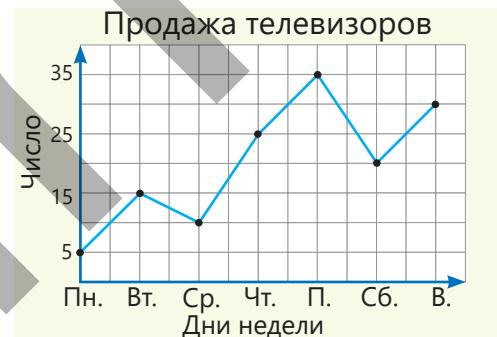
- 1 Найдите моду, медиану и среднее арифметическое данных. Сравните медиану и среднее арифметическое. Какой вывод можно сделать на основе моды, среднего арифметического и медианы этих чисел?
- а) Массы различных гантелей, продаваемых в спортивном магазине: 5 кг, 3 кг, 4 кг, 8 кг, 2 кг, 6 кг, 2 кг;
- б) Количество молока, использованного в школьной столовой в течение 5 дней, начиная с понедельника: 9 л, 11 л, 13 л, 10 л, 13 л.

- 2 При 25 бросаниях игральной кости результаты эксперимента приведены в таблице.

Выпавшее очко	"1"	"2"	"3"	"4"	"5"	"6"
Количество выпадений	5	3	4	5	4	4

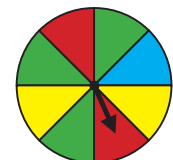
- Найдите частоту выпадения очка "1".
- Найдите частоту выпадения очка "5".
- Найдите частоту выпадения очков больше "4".
- Какова сумма частот событий, представленных в таблице?

- 3 На диаграмме показано количество проданных телевизоров по дням недели.



- Какой процент от всех недельных продаж приходится на пятницу?
- Какова вероятность того, что в субботу будет продан один телевизор?

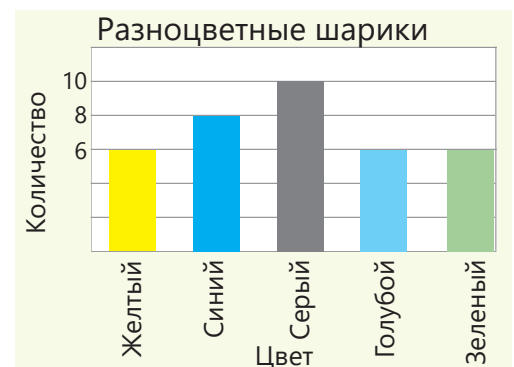
- 4 Спиннер разделен на равные части. Найдите вероятность того, что стрелка остановится на: а) красном; б) зеленом; в) желтом; г) синем секторе.



- 5 Ученики класса записаны в различные спортивные секции.
- Какой процент всех учеников ходит в секцию гандбола?
  - Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик ходит на теннис?
  - Вероятность какого события выше: случайно выбранный ученик ходит на волейбол или ходит на гандбол?



- 6 На диаграмме изображено количество разноцветных шариков, приобретенных для школьной лаборатории.



- Найдите моду данных и объясните ее значение.
- Какова частота события выбора синего шарика?
- Для шариков какого цвета вероятность случайного выбора одинакова?
- Какова вероятность того, что случайно выбранный шарик окажется серого цвета?

## 10.1. Частота события

### Исследование-обсуждение

Среди учеников класса был проведен опрос о том, каким способом они добираются до школы. Каждый ученик поставил одну черту в соответствующей ячейке таблицы.

- Каким способом дети чаще всего добираются до школы?
- Каков наиболее вероятный способ, чтобы добраться в школу, у случайно выбранного ученика? Как определить эту вероятность?

Способ	Кол-во
На автобусе	
На метро	
На машине	
Пешком	

### Изучение Таблица частот

Анализируя статистические данные, можно сделать различные выводы. Для этого сначала составляется таблица частот, а затем проводится статистический анализ.

**ПРИМЕР.** Среди учеников 7-го класса был проведен опрос о том, какой цвет из следующих — красный (*K*), синий (*C*), фиолетовый (*Ф*) и зеленый (*З*) — им нравится больше. Ответы учеников были записаны таким образом:

*K, C, K, C, Ф, C, З, C, Ф, C, K, C, З, C, C, Ф, K, Ф, З, K*

Как видно, опрос проводился среди 20 учеников, и каждый ответ повторялся несколько раз. Эти данные удобнее представить в виде таблицы частот.

Например, если 5 учеников выбрали красный цвет, то количество выборов красного цвета:  $n(K) = 5$ . Частота выбора красного цвета определяется как отношение количества выборов к общему количеству данных ( $n$ ).

$$\frac{n(K)}{n} = \frac{5}{20} = 0,25$$

Цвет	Число	Частота
Красный	5	$\frac{5}{20} = 0,25$
Синий	8	$\frac{8}{20} = 0,4$
Фиолетовый	4	$\frac{4}{20} = 0,2$
Зеленый	3	$\frac{3}{20} = 0,15$
Итого	20	1

Частоту также можно выразить в процентах. Например, частота выбора красного цвета составляет 25%.



### Подумай!

Как объяснить, что сумма всех частот в таблице равна 1?

### Задания

- 1 В таблице приведены результаты опроса учеников о том, в каком кружке они занимаются. Учитывая, что каждый ученик посещает только один кружок, заполните таблицу частот и ответьте на вопросы:
  - Сколько учеников участвовало в опросе?
  - Частота участия в каком кружке является самой высокой?

Кружок	Число	Частота
Музыка	12	
Шахматы	15	
Театр	11	
Искусство	9	
Спорт	10	
Итого		

2 Заполните таблицу частот в соответствии с приведенными данными.

**ОБРАЗЕЦ** В спортивный клуб было куплено 20 футбольных, 14 волейбольных и 16 баскетбольных мячей.

Решение			Объяснение
20 + 14 + 16 = 50			
Кружок	Число	Частота	
Футбол	20	$\frac{20}{50} = 0,4$	
Волейбол	14	$\frac{14}{50} = 0,28$	
Баскетбол	16	$\frac{16}{50} = 0,32$	
Итого	50	1	

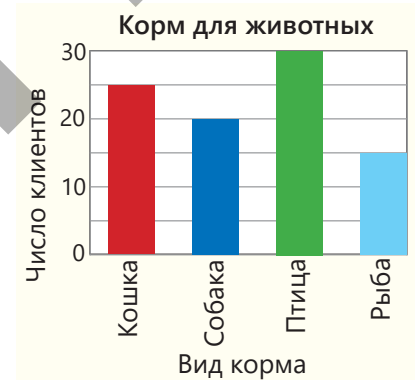
Определяется общее количество мячей. Вычисляется отношение количества футбольных, волейбольных и баскетбольных мячей к общему количеству мячей.

а) Сабина записала цвета глаз своих друзей: черные (Ч), голубые (Г), зеленые (З) и серые (С): Ч, Г, З, С, С, Г, С, Г, С, З, З, Ч, Ч, Ч, Г, Г, С, С.

б) Ученики музыкальной школы занимаются в кружках по игре на таре (Т), кеманче (К), уде (У) и гавале (Г). Результаты опроса о том, в каких кружках они занимаются, приведены. Т, К, Г, Т, У, У, Т, К, Г, Т, К, Г, Г, Т, Т, К, Г, У, К, Т.

3 Диаграмма показывает количество клиентов, купивших корм для животных за одну неделю в зоомагазине. Составьте таблицу частот и ответьте на вопросы:

- Сколько человек всего купили корм за одну неделю?
- Какова частота покупки корма для птиц?
- Какова суммарная частота покупки корма для рыб и собак?
- Если на следующей неделе магазин посетят 126 клиентов, сколько из них, согласно этим данным, вероятнее всего, купят корм для кошек и сколько — для рыб?



## Изучение Нахождение моды, среднего арифметического и медианы по таблице частот

Найти моду по статистическим данным легче с использованием таблицы частот. Мода — это значение, которое встречается чаще всего или имеет наибольшую частоту. Например, если в таблице количество борцов весом 80 кг наибольшее, то мода — 80 кг.

Также по таблице можно найти среднее арифметическое данных. Например, средний вес борцов можно найти так:

Вес борца (кг)	Число	Частота
60	4	$\frac{4}{20} = 0,2$
70	3	$\frac{3}{20} = 0,15$
80	7	$\frac{7}{20} = 0,35$
90	6	$\frac{6}{20} = 0,3$
Итого	20	1

$$\frac{4 \cdot 60 + 3 \cdot 70 + 7 \cdot 80 + 6 \cdot 90}{20} = \frac{4}{20} \cdot 60 + \frac{3}{20} \cdot 70 + \frac{7}{20} \cdot 80 + \frac{6}{20} \cdot 90 = 0,2 \cdot 60 + 0,15 \cdot 70 + 0,35 \cdot 80 + 0,3 \cdot 90 = 77,5 \text{ (кг)}$$

Сумма произведений значений величин на соответствующие частоты равна их среднему арифметическому.

- Чтобы найти медиану данных, их записывают в порядке возрастания.

60, 60, 60, 60, 70, 70, 70, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 80, 90, 90, 90, 90, 90, 90

Так как количество борцов — четное число, медиана равна среднему арифметическому двух средних значений, то есть 80.

$$(80 + 80) : 2 = 80 \text{ (кг)}$$

- 4 По таблице найдите моду данных.

а)

Оценки, полученные учениками	"3"	"4"	"5"
Число	10	12	8

б)

Возраст деревьев в парке	10	14	16
Частота	0,25	0,35	0,4

- 5 Составьте таблицу частот. Используя частоты, ответьте на вопросы.

**ОБРАЗЕЦ** В зернохранилище в течение 12 дней ежедневно поступало по 20 тонн зерна, за следующие 8 дней — по 30 тонн, а за последние 5 дней — по 40 тонн. Сколько тонн зерна в среднем поступало за один день?

Решение			Объяснение
Вес (тонн)	Число	Частота	
20	12	$\frac{12}{25} = 0,48$	Составляется таблица частот. На основе данных в таблицу записываются масса и количество дней. Вычисляется частота.  Числа 20, 30 и 40 умножаются на соответствующие частоты и полученные произведения суммируются.
30	8	$\frac{8}{25} = 0,32$	
40	5	$\frac{7}{25} = 0,20$	
Итого	25	1	

$$0,48 \cdot 20 + 0,32 \cdot 30 + 0,2 \cdot 40 = 27,2 \text{ (тонн)}$$

а) В саду в 12 ящиков уложили по 20 кг фруктов, в 6 ящиков — по 25 кг, в 8 ящиков — по 35 кг и в 4 ящика — по 40 кг. Сколько килограммов фруктов в среднем было уложено в один ящик?

б) В рамках кампании по посадке деревьев за 1 день посадили 50 деревьев, за 4 дня — по 60 деревьев в день, за 2 дня — по 40 деревьев в день и за 3 дня — по 70 деревьев в день. Сколько деревьев в среднем сажали в день?

- 6 На основе таблицы запишите последовательность данных и найдите медиану.

а)

Купюры	5 ₴	10 ₴	20 ₴
Число	2	4	3

б)

Ленты	20 см	30 см	40 см
Число	3	2	5



### Из истории математики

Некоторые математики, жившие в разное время, проводили исследования, связанные с вычислением частоты. Например, в таблице приведены результаты эксперимента по выпадению орла при подбрасывании монеты, проведенного разными учёными.

Было установлено, что при многократном повторении одного и того же эксперимента частота события приближается к вероятности этого события, то есть к 0,5.

Ученые	Число экспериментов	Частота
Буффон	4040	0,5069
Феллер	10000	0,4979
К.Пирсон	24000	0,5005



## Запомни!

В результате многократного повторения одного и того же эксперимента можно приблизительно определить вероятность события на основе его частоты.

- 7 Спиннер поделен на 4 сектора, и сектора пронумерованы. При последовательных 20 вращениях стрелка останавливалась на секторах со следующими числами:

3 1 2 1 3 1 2 1 4 3 2 2 1 4 1 4 3 1 1 2

- а) Какова частота события, что стрелка останавливалась на секторе с нечетным числом?  
б) На основе результатов эксперимента какова приблизительно вероятность того, что при следующем вращении стрелка остановится на секторе с числом 3?



- 8 В мешке находятся шарики трех цветов. Каждый раз из мешка доставали один шарик, отмечали его цвет и возвращали обратно. Результаты эксперимента представлены в таблице.

Шарик	Черный	Белый	Желтый
Число	14	16	10

**ОБРАЗЕЦ** Какова приблизительно вероятность того, что очередной вынутый шарик будет черного цвета?

Решение	Объяснение
$14 + 16 + 10 = 40$	Определяется общее количество вынутых шариков.
$\frac{14}{40} = \frac{7}{20}$	Вычисляется частота извлечения черного шарика.
$P \approx \frac{7}{20} = 0,35$	Определяется приблизительно значение вероятности.

- а) Какова приблизительно вероятность того, что вытянутый шарик будет белым?  
б) Какова приблизительно вероятность извлечения желтого шарика?

- 9 Айнур и Анар проводили опыт с кнопкой. Айнур бросила кнопку 50 раз, а Анар записывал, сколько раз кнопка падала острым концом вниз и сколько — плоской стороной. Сравните частоту событий, при которых кнопка падает острым концом и плоской стороной.

Результаты эксперимента	Число
На острый конец	27
Плоской стороной	23



## Решение задач

- 10 В Бакинском зоопарке среди посетителей был проведён опрос о любимом животном.
- Заполните таблицу.
  - У какого животного частота среди данных ответов наименьшая?

Название животного	Счет	Частота
Лев		
Слон		
Медведь		
Обезьяна		

- 11 В магазине электронной техники за месяц было продано всего 640 мониторов трех видов.
- Сколько мониторов каждого вида было продано за месяц?
  - Какова приблизительно вероятность того, что в следующем месяце будет продан монитор размером 17 дюймов?
  - Если в следующем месяце будет продано 800 мониторов, то сколько из них, предположительно, будут 14-дюймовыми?

Размер монитора	Частота
14 дюймов	0,15
15 дюймов	0,3
17 дюймов	0,55

## 10.2. Элементарное событие



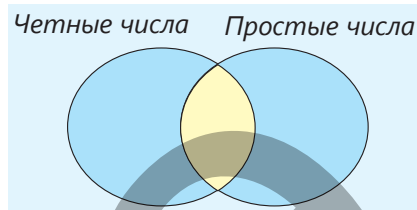
### Ключевые слова

- элементарное событие

### Исследование-обсуждение

Из мешка поочередно извлекаются шарики, пронумерованные от 1 до 14. Ученик, вынувший шарик с четным номером, выигрывает большой приз, а с простым номером — маленький приз.

- Запишите четные и простые числа в соответствующие части диаграммы Эйлера-Венна.
- Какое число при извлечении окажется в общей части диаграммы? Сколько таких событий может произойти?
- При каком событии результат будет отмечен вне кругов? Сколько таких событий возможно?



### Изучение Элементарное событие

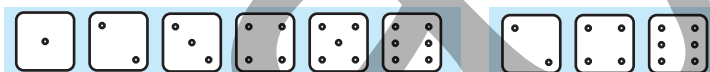
Результат испытания, который нельзя разбить на более простые, называется **элементарным событием**. Например, при броске игрального кубика элементарными событиями являются: "выпало одно очко", "выпало два очка", ..., "выпало шесть очков".

В результате случайного эксперимента происходит только одно элементарное событие.

Два элементарных события не могут произойти одновременно.

Например, если при броске кубика выпало 2 очка, то ни одно другое значение при этом броске выпасть не может.

Каждое событие, являющееся результатом эксперимента, представляет собой подмножество множества всех элементарных событий. Множество всех элементарных событий обычно обозначают буквой  $U$ . Например, если событие  $A$  — это "выпало четное число очков", то оно включает в себя три элементарных события: "выпало 2", "выпало 4", "выпало 6".



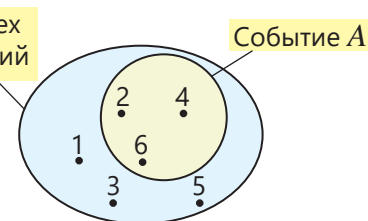
Элементарные события

Выпадение четных чисел

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Событие  $A$  как подмножество множества всех элементарных событий  $U$  можно изобразить с помощью диаграммы Эйлера-Венна.

$U$  — множество всех элементарных событий



### Подумай!

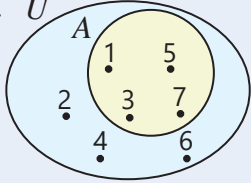
Сколько возможных исходов при подбрасывании монеты? Запишите множество элементарных событий.

### Задания

- 1 В мешке находятся шарики с номерами от 1 до 7. Лала, не заглядывая в мешок, достала один шарик. Для данного эксперимента запишите множество элементарных событий  $U$ . Указанное случайное событие  $A$  покажите как подмножество  $U$  и изобразите на диаграмме Эйлера-Венна.



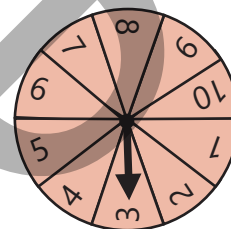
► **ОБРАЗЕЦ** Номер извлечённого шарика — нечетный.

Решение	Объяснение
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $A = \{1, 3, 5, 7\}$ 	Записывается множество элементарных событий $U$ . Чтобы номер выпавшего шарика был нечётным, должно произойти одно из четырёх элементарных событий: $\{1, 3, 5, 7\}$ . Множества $U$ и $A$ изображаются на диаграмме Эйлера–Венна.

- а) Номер извлечённого шарика — простое число;  
 б) Номер извлечённого шарика делится на 3;  
 в) Номер извлечённого шарика — составное число.

2 Запишите возможное случайное событие при вращении стрелки спиннера как подмножество множества элементарных событий и изобразите это на диаграмме Эйлера–Венна.

- а) Выпавшее число — четное.                      в) Выпавшее число больше 7.  
 б) Выпавшее число делится на 4.              г) Выпавшее число меньше 10.



### Запомни!

Если количество элементарных событий, которые могут произойти в результате испытания, равно  $n$ , и все эти события равновозможны, то вероятность каждого элементарного события будет равна:  $\frac{1}{n}$ . Например, при бросании игрального кубика число элементарных событий равно 6, и каждое из них равновозможно. Значит, вероятность каждого из них равна  $\frac{1}{6}$ .



### Подумай!

Как объяснить, что сумма вероятностей всех элементарных событий равна 1?

3 Все элементарные события, являющиеся результатом случайного испытания, равновозможны. Найдите их количество, исходя из вероятности одного элементарного события.

а)  $\frac{1}{15}$

б)  $\frac{1}{16}$

в)  $\frac{1}{24}$

г)  $\frac{1}{50}$

4 В мешке находятся 1 белый, 1 черный, 1 зеленый, 1 синий и 1 желтый шарик. Самир случайно вытягивает один шарик.

- а) Какие элементарные события при этом могут произойти?  
 б) Какова вероятность каждого такого элементарного события?

## Изучение Вероятность события

В испытании с равновозможными элементарными исходами вероятность события  $A$  можно найти так:

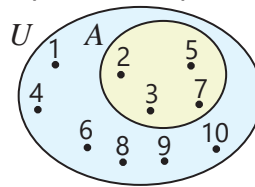
- 1) Определяется количество всех возможных элементарных событий —  $n$ .
- 2) Определяется количество благоприятных для события  $A$  исходов —  $n(A)$ .
- 3) Вероятность события  $A$  равна отношению  $n(A)$  к  $n$ :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

**ПРИМЕР.** Карты с числами от 1 до 10 лежат на столе лицевой стороной вниз. Какова вероятность того, что случайно выбранная карта содержит простое число?

$$P(A) = \frac{4}{10} = 0,4$$

→ Благоприятные исходы – 2, 3, 5, 7  
 → Элементарные исходы – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10



Для невозможных событий, поскольку  $n(A) = 0$ , вероятность  $P(A) = \frac{0}{n} = 0$

Для достоверных событий, поскольку  $n(A) = n$ , вероятность  $P(A) = \frac{n}{n} = 1$



## Подумай!

Как объяснить, что вероятность случайного события удовлетворяет неравенству  $0 \leq P(A) \leq 1$ ?

5 Найдите вероятность события.

**ОБРАЗЕЦ** В спортивный зал доставили 10 футбольных, 8 баскетбольных и 7 волейбольных мячей. Какова вероятность того, что случайно выбранный мяч окажется футбольным.

Решение	Объяснение
$n = 10 + 8 + 7 = 25$ $n(A) = 10$ $P(A) = \frac{10}{25} = 0,4$	Находится общее число всех возможных исходов. Находится количество благоприятных исходов. По формуле вычисляется вероятность события $A$ .

а) В коробке 12 красных и 18 простых карандашей. Найдите вероятность того, что случайно выбранный карандаш окажется простым.

б) Какова вероятность того, что случайно выбранный день для мероприятия будет четным днём недели?

в) Какова вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число меньше 7?

г) Какова вероятность того, что при бросании игральной кости выпавшее число будет делиться на 7?

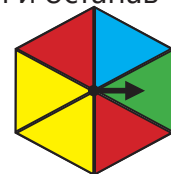
6 На витрине лежат 4 пирога с грушей, 5 – с абрикосами и 3 – с вишней. Найдите вероятность того, что случайно выбранный пирог окажется с абрикосами.



## Решение задач

7 Стрелка спиннера, разделенного на конгруэнтные треугольники, вращается и останавливается на одном из цветных треугольников.

- Запишите множество всех возможных элементарных событий.
- На каких цветных треугольниках остановки стрелки являются равновероятными событиями?



8 В мешке 12 черных, 5 белых, 5 зеленых и 8 красных шариков. Случайным образом извлекается один шарик.

- Извлечения шарика каких цветов являются равновероятными событиями?
- Какова вероятность того, что извлеченный шарик окажется черного цвета?

9 В книжном шкафу 20 художественных книг, 30 книг по математике и 50 книг по естественным наукам. Айнур случайно выбрала книгу из шкафа.

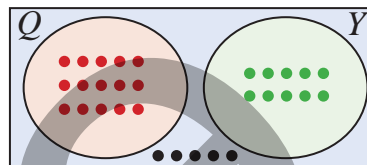
- Вероятность выбора какой книги наибольшая?
- Какова вероятность того, что выбранная Айнур книга относится к математике?

## 10.3. Несовместные события

### Исследование–обсуждение

Из 30 учеников класса часть участников фестиваля заняла красные ( $Q$ ) места, другая часть — зелёные ( $Y$ ) места. На диаграмме Эйлера–Венна представлена информация об их количестве.

- Сколько благоприятных исходов имеет событие, состоящее в том, что случайно выбранный ученик сидит на красном месте?
- Сколько возможных исходов имеет событие, состоящее в том, что случайно выбранный ученик является участником фестиваля?

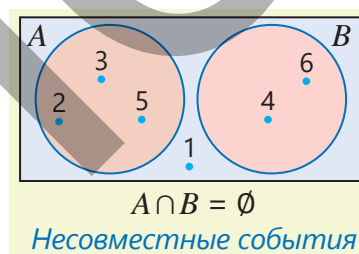


### Изучение Несовместные события

Если события  $A$  и  $B$  не могут произойти одновременно, то их называют **несовместными**. Например, при бросании кубика событие ( $A$ ) – выпало простое число, событие ( $B$ ) – выпало составное число – являются несовместными.

- Суммой событий  $A$  и  $B$  называют событие, при котором происходит хотя бы одно из них, обозначается  $A \cup B$ .

Для событий  $A = \{2, 3, 5\}$  и  $B = \{4, 6\}$  сумма  $A \cup B$  – это событие, при котором выпало простое или составное число.



$$\begin{aligned} A &= \{2, 3, 5\} \\ B &= \{4, 6\} \end{aligned} \Rightarrow A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**ПРИМЕР.** Какова вероятность того, что при бросании игрального кубика выпадет простое или составное число?

Пусть события  $A$  – выпало простое число,  $B$  – выпало составное число, тогда события  $A$  и  $B$  несовместны.



$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ P(B) &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Действительно, при броске кубика существует 5 благоприятных случаев для события "простое или составное число": 2, 3, 5 или 4, 6. Отношение числа благоприятных случаев (5) к общему числу возможных случаев (6), то есть вероятность интересующего нас события, равно  $\frac{5}{6}$ .

### Задания

- Из коробки с шариками, пронумерованными от 1 до 15, случайно вынимают один шарик. Событие  $A$  – номер шарика 8,  $B$  – номер шарика 5,  $C$  – номер шарика нечетное число,  $D$  – номер шарика четное число. Определите несовместные события.

$A$  и  $B$

$A$  и  $C$

$A$  и  $D$

$C$  и  $D$

$B$  и  $C$

- 2 В настольном календаре случайным образом выбирается один из дней июня. Обозначим события:  $A$  — выбранная дата кратна 5;  $B$  — выбранная дата кратна 7;  $C$  — выбранная дата кратна 9.



**ОБРАЗЕЦ** Какова вероятность того, что выбранная дата делится на 5 или на 9?

Решение	Объяснение
$\{1, 2, \dots, 30\}$	Поскольку в июне 30 дней, общее число возможных событий равно 30.
$A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$	Количество благоприятных случаев для события $A$ : 6
$C = \{9, 18, 27\}$	Количество благоприятных случаев для события $C$ : 3
$P(A) = \frac{6}{30}$ $P(C) = \frac{3}{30}$	Находятся вероятности событий $A$ и $C$ .
$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{6}{30} + \frac{3}{30} = 0,3$	Так как эти события несовместны, их вероятности складываются.
<i>Ответ.</i> Вероятность того, что случайно выбранная дата делится на 5 или на 9, равна 0,3.	

- а) Какова вероятность того, что выбранная дата делится на 5 или на 7?  
 б) Какова вероятность того, что выбранная дата делится на 7 или на 9?

## Изучение Противоположные события

При бросании игрального кубика обязательно выпадет одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Если событие  $A$  — выпало 2 очка, то событие "не выпало 2 очка" является **противоположным событием**. Противоположное событие обозначается как  $\bar{A}$ .

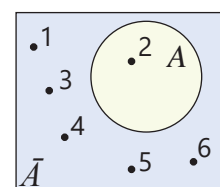
Событие  $A$ :  $P(A) = \frac{1}{6}$

Событие  $\bar{A}$ :  $P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$

В результате каждого эксперимента обязательно происходит либо событие  $A$ , либо событие  $\bar{A}$ . Множества благоприятных исходов событий  $A$  и  $\bar{A}$  являются дополнениями друг друга.

$$A = \{2\}$$

$$\bar{A} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$



Так как в эксперименте обязательно происходит либо  $A$ , либо  $\bar{A}$ , событие  $A \cup \bar{A}$  является достоверным событием.

$$P(A \cup \bar{A}) = 1$$

Поскольку противоположные события несовместны

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

Тогда сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Если известна вероятность события, вероятность противоположного события можно найти таким образом:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- 3 Игральный кубик бросают один раз. Событие  $A$  – выпало 6 очков,  $B$  – выпало число меньше 6,  $C$  – выпало четное число,  $T$  – выпало нечетное число,  $M$  – выпало составное число,  $S$  – выпало простое число. Определите противоположные события.

$A$  и  $B$

$A$  и  $T$

$C$  и  $T$

$T$  и  $M$

$M$  и  $S$



## Исправь ошибку!

Карты с числами от 1 до 15 были разложены на столе лицевой стороной вниз. Вероятность события, что на случайно выбранной карте будет простое число (событие  $A$ ), равна 0,4. Вероятность события, что на случайно выбранной карте будет составное число (событие  $\bar{A}$ ), можно найти следующим образом.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$$

- 4 Если  $M$  и  $\bar{M}$  противоположные события, найдите вероятность соответствующего события.

а)  $P(M) = 0,3; P(\bar{M}) = ?$

б)  $P(M) = 0,8; P(\bar{M}) = ?$

в)  $P(\bar{M}) = 0,2; P(M) = ?$

- 5 У Самира 2 марки на спортивную тему, 8 — на туристическую, 4 — на историческую и 6 — на тему искусства. Из этих марок случайно взяли одну.

**ОБРАЗЕЦ** Найдите вероятность события, что взятая марка не относится к спорту.

Решение	Объяснение
$P(A) = \frac{2}{20} = 0,1$ $P(\bar{A}) = 1 - 0,1 = 0,9$	$A$ – вероятность события, что взятая марка относится к спорту. $\bar{A}$ – событие, что взятая марка не относится к спорту, является противоположным событием к $A$ . По формуле находят вероятность события $\bar{A}$ .

- а) Найдите вероятность события, что взятая марка не относится к туризму.  
 б) Найдите вероятность события, что взятая марка не относится к истории.  
 в) Найдите вероятность события, что взятая марка относится к спорту, туризму или истории.

- 6 Найдите вероятность события, противоположного указанному, при бросании игрального кубика.

а) выпало 6 очков;

в) выпавшее число не является ни простым, ни составным;

б) выпавшее число делится на 3; г) выпавшее число больше 2 и меньше 6.

## Решение задач

- 7 При подъезде к перекрестку возможны элементарные события  $A, B, C$  и  $D$ .

$A$ : "Повернуть направо"

$C$ : "Ехать прямо"

$B$ : "Повернуть налево"

$D$ : "Развернуться"

Если  $P(A) = 0,4, P(B) = 0,3$  и  $P(C) = 0,18$ , найдите  $P(D)$ .



- 8 В теннисном клубе 15 взрослых, 12 молодых участников и 8 подростков. Карты с именами каждого участника положены в ящик регистрации. Найдите вероятность события, что случайно выбранная карта принадлежит:

а) взрослому участнику;

в) молодому участнику;

б) подростку;

г) ни молодому, ни взрослому участнику.

- 9 В игре в дартс на доске висят 6 красных, 4 синих, 5 желтых и 5 зеленых шаров. При броске обязательно будет сбит один шар. Найдите вероятность события, что при случайном броске будет сбит красный, желтый или зеленый шар.



# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

## Частота события

Вес борца (кг)	Число	Частота
60	3	$\frac{3}{10} = 0,3$
70	2	$\frac{2}{10} = 0,2$
80	4	$\frac{4}{10} = 0,4$
90	1	$\frac{1}{10} = 0,1$
Итого	10	1

Нахождение моды, среднего арифметического и медианы по таблице частот  
60, 60, 60, 70, 70, 80, 80, 80, 80, 90.

**Мода:** наиболее часто встречающееся значение — 80 кг

**Среднее арифметическое:**

$$60 \cdot 0,3 + 70 \cdot 0,2 + 80 \cdot 0,4 + 90 \cdot 0,1 = 73 \text{ (кг)}$$

**Медиана:** поскольку количество борцов четное, медиана равна среднему значению двух чисел по середине, то есть 75.

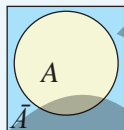
$$(70 + 80) : 2 = 75$$

60, 60, 60, 70, 70, 80, 80, 80, 80, 90.

## Противоположные события

Во время испытания одно из противоположных событий обязательно произойдет.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$



## Вероятность события

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Количество благоприятных исходов  
Общее количество исходов

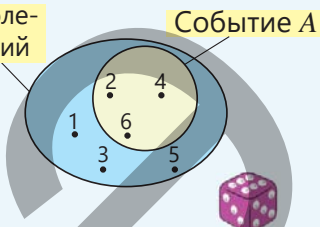
$U$  — множество элементарных событий

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0,5$$

Достоверное событие:  $P(A) = 1$

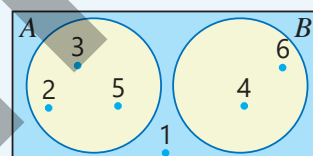
Невозможное событие:  $P(A) = 0$



## Статистика и вероятность

## Несовместные события

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



$$A \cap B = \emptyset$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

## Решение исходной задачи

По данным в таблице определяются соответствующие частоты.

- Частота события, при котором стрелка останавливается на красном секторе, равна 0,1.
- Поскольку частота события, при котором стрелка останавливается на желтом секторе, равна 0,45, его вероятность также приблизительно равна 0,45.

Результат испытания	Число	Частота
Остановка на красном секторе		2 $\frac{2}{20} = 0,1$
Остановка на синем секторе		5 $\frac{5}{20} = 0,25$
Остановка на зеленом секторе		4 $\frac{4}{20} = 0,2$
Остановка на желтом секторе		9 $\frac{9}{20} = 0,45$

- Событие "стрелка останавливается на синем секторе" ( $M$ ) и событие "стрелка останавливается не на синем секторе" ( $\bar{M}$ ) являются противоположными событиями.

Поскольку вероятность того, что стрелка остановится на синем секторе, равна  $P(M) = \frac{1}{6}$ , то вероятность противоположного события можно найти таким образом:

$$P(\bar{M}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

- Эти события несовместны. Невозможно, чтобы стрелка остановилась одновременно и на красном, и на зеленом секторе.

## ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ

1. Составьте таблицу частот по следующим данным.

а) В здании 10 однокомнатных квартир, 14 двухкомнатных, 6 четырехкомнатных и 4 пятикомнатных. Оставшиеся 16 квартир – трехкомнатные.

б) В классе провели опрос о том, какую музыку (рок – *R*, поп – *P*, мугам – *M*, классика – *K*) дети любят больше всего. Результаты опроса: *R, R, R, M, P, R, M, P, K, K, M, P, R, P, P, P, M, K, K, K*.

2. Найдите моду, медиану и среднее арифметическое данных, указанных в таблице.

а) Способы передвижения сотрудников компании на прогулке

Способ	Число	Частота
Пешком	8	
На автобусе	8	
На велосипеде	5	
На автомобиле	10	
Итого		

б) Цвет футболок, в которых ученики участвовали во флешмобе

Цвет футболки	Число	Частота
Зеленый	6	0,24
Голубой	9	
Красный	3	
Синий		0,28
Итого		

3. Во время шоу чтобы раздать подарки 20 детям аниматор бросал игральную кость. Он объявил, что при выпадении четного числа выдается большой подарок, при выпадении нечетного — маленький. Аниматор бросал кость столько раз, сколько было детей. Выполните задания по таблице данных.

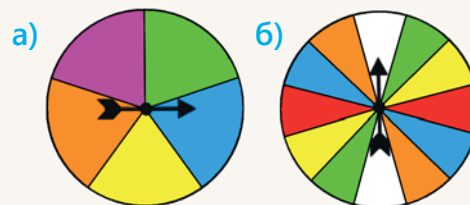
Выпавшее число	"1"	"2"	"3"	"4"	"5"	"6"
Частота	0,1	0,3	0,1	0,2	0,2	0,1



- Определите, сколько раз выпало каждое число.
- Запишите выпавшие значения, найдите моду и медиану.
- Найдите вероятность того, что случайно выбранный ребенок получил большой подарок.

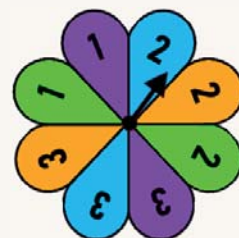
4. Стрелка спиннера, разделенного на конгруэнтные сектора, вращается и останавливается на одном из секторов. Найдите вероятность следующих событий.

- Стрелка остановится на синем секторе.
- Стрелка остановится не на зеленом секторе.
- Стрелка остановится на желтом или зеленом секторе.



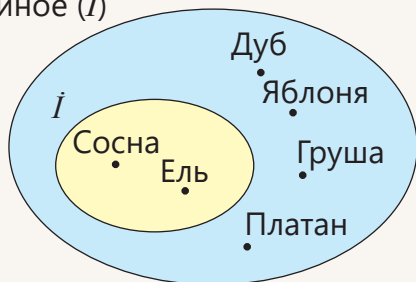
5. Найдите вероятность следующих событий при вращении стрелки на спиннере.

- а) Стрелка остановится на четном числе
- б) Событие, противоположное событию "стрелка остановится на четном числе"
- в) Стрелка остановится на числе 1 или 2

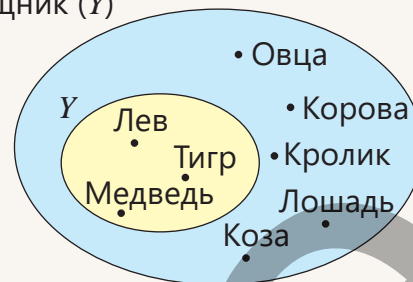


6. Определите по диаграмме элементарные события и благоприятные исходы, найдите вероятность события.

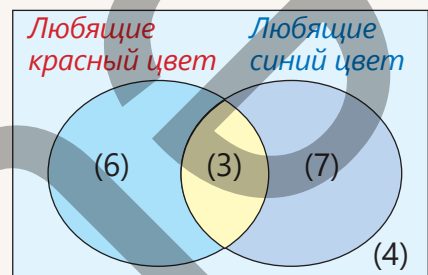
а) Случайно выбранное дерево – хвойное ( $I$ )



б) Случайно выбранное животное – хищник ( $Y$ )



7. На основе результатов опроса среди учеников о любимом цвете была построена диаграмма Эйлера-Венна. Ответьте на вопросы, если событие  $A$  – случайно выбранный ученик любит красный цвет, а событие  $B$  – случайно выбранный ученик любит синий цвет.



- Какова вероятность наступления события  $A$ ?
- Какова вероятность наступления события  $\bar{A}$ ?
- Какова вероятность наступления события  $\bar{B}$ ?
- Какова вероятность наступления события  $B$ ?
- Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик не любит ни красный, ни синий цвет?

8. Игральный кубик подбрасывается один раз. Пусть событие  $A$  – это выпадение 6 очков, событие  $B$  – выпавшее число окажется простым, событие  $C$  – выпавшее число окажется четным, событие  $D$  – выпавшее число окажется нечетным, событие  $E$  – выпадет не более 5 очков.

- Какие события являются несовместными?
- Какие события являются противоположными?

9. Даны четыре палочки длиной 2, 3, 4 и 5 единиц.

- Какие возможные варианты есть для выбора этих палочек по три?
- Какие благоприятные исходы позволяют составить треугольник, выбрав по три из этих палочек?
- Найдите вероятность того, что случайно выбранные три палочки образуют треугольник.



10. На заводе изготовленные шестеренки упаковываются в коробки. Из 50 шестеренок, помещенных в одну коробку, 2 оказываются бракованными. Сотрудник отдела контроля качества случайным образом выбирает одну шестеренку, чтобы оценить ее качество.

- Какова вероятность того, что шестеренка окажется бракованной?
- Какова вероятность, что выбранная шестеренка будет качественной?



11. Из 27 маленьких кубиков был собран большой куб размером  $3 \times 3 \times 3$ . Все грани большого куба были окрашены в разные цвета. Найдите вероятность для случайно выбранного маленького кубика:

- что только одна грань окрашена;
- что только две грани окрашены;
- что три грани окрашены;
- что ни одна грань не окрашена.

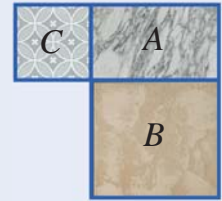




## Математический калейдоскоп

1. Вычислите:  $\frac{4}{5^2 - 2^2} + \frac{6}{10^2 - 3^2} + \frac{8}{17^2 - 4^2}$

2. Плитка *A* прямоугольной формы имеет площадь  $18 \text{ дм}^2$ , а периметр —  $32 \text{ дм}$ . Какова сумма площадей квадратных плиток *B* и *C*, которые примыкают к сторонам плитки *A*?



3. Измените место одной цифры так, чтобы равенство стало верным.

а)  $10 - 11 = 9$     б)  $12 + 3 = 10$     в)  $12 + 1 = 20$

4. По правилам известной игры под названием "Ханойская башня" необходимо перенести кольца, находящиеся на одном стержне, на другой стержень за минимальное количество ходов. При этом разрешается перемещать только одно кольцо за раз, и нельзя класть большее кольцо на меньшее.

- Какое минимальное количество ходов требуется, чтобы переместить три кольца на 2-й стержень?
- Сколько потребуется ходов, если колец будет 4?



## "СИСТЕМА ЭЛЕКТРОННОЙ ОЧЕРЕДИ"

Во многих сферах обслуживания, где существует процесс ожидания, для правильной организации системы ожидания, минимизации его времени и предотвращения перегрузки очереди используется теория очередей. Для этого сначала определяется коэффициент загрузки, а затем ищутся способы его снижения. Коэффициент загрузки показывает, какую часть часа тратит обслуживающий работник на выполнение обращений. Например, если один оператор в среднем тратит 5 минут на одного человека, и за час обращаются 10 человек, то он тратит 50 минут на выполнение всех обращений. Тогда коэффициент загрузки вычисляется так:

$$b = \frac{50}{60} \approx 0,83$$

Это означает, что система загружена на 83%. Другими словами, оператор тратит 0,83 часа, чтобы обслужить 10 человек.

1. В течение одного часа обратилось 15 человек. Если оператор обслуживает одного человека за 3 минуты, каков будет коэффициент загрузки системы?

2. В таблице указано среднее время ожидания по дням недели. На основе этих данных: найдите моду и медиану. Какова вероятность того, что в случайно выбранный день среднее время ожидания не превысит 20 минут?

Дни недели	Пн.	Вт.	Ср.	Чт.	П.	Сб.	В.
Среднее время ожидания	23 мин.	15 мин.	20 мин.	26 мин.	25 мин.	15 мин.	15 мин.

3. Проведите исследование по поводу электронных очередей в Интернете, а также среднего времени ожидания в службе ASAN xidmət. Подготовьте презентацию, в которой предложите способы сокращения времени ожидания на основе собранной информации.



## ОБОБЩАЮЩИЕ ЗАДАНИЯ ЗА 7-Й КЛАСС

Задачи с относительно высокой степенью сложности отмечены знаком "\*\*\*".

1 Найдите значение выражения.

а)  $\frac{(\frac{11}{18} - \frac{1}{15}) : 1,4}{(0,5 - 0, (1)) \cdot 3}$       б)  $\frac{8\frac{4}{7} : 2\frac{26}{77}}{0,5 : 18\frac{2}{3} \cdot 11}$

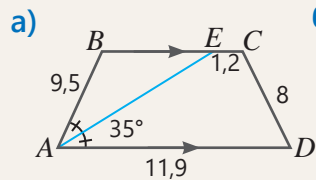
в)  $(16,5 - 13, (7)) \cdot \frac{6}{11} + 2,2 \cdot (0, (24) - 0, (09))$

2 При каком значении  $m$ :

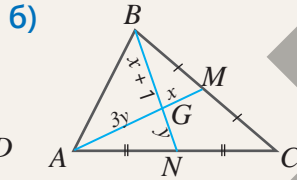
а) уравнение  $m(x + 4) - (5 - m) = 16$  имеет корень  $x = 2$ ?

б) уравнение  $(-m + 6)x + m(x + 2) = 26$  имеет корень  $x = 4$ ?

3 Найдите требуемые значения по данным.



$\angle AEC = ?$   
 $P_{ABCD} = ?$



$x = ?$     $y = ?$   
 $AM = ?$     $BG = ?$

4\* Упростите левую часть равенства. При каком натуральном значении  $n$  данное равенство верно?

а)  $(2^n - 1)(4^n + 2^n + 1) = 511$

б)  $(2^n - 1)(16^n + 8^n + 4^n + 2^n + 1) = 31$

в)  $(3^n + 1)(81^n - 27^n + 9^n - 3^n + 1) = 244$

5 Функция задана формулой  $y(x) = 1,26 - 3x$ .

а) Найдите соответствующее значение функции при значениях аргумента  $-4$ ;  $1,8$ ;  $0$ ;  $(6)$ .

б) При каком значении аргумента функция принимает значения  $-7,2$ ;  $0$ ;  $0,75$ ?

6\* Докажите:

а) Средние точки сторон любого выпуклого четырехугольника являются вершинами некоторого параллелограмма.

б) Если диагональ равнобокой трапеции равна  $d$  см, то периметр четырехугольника, вершины которого – это средние точки сторон этой трапеции, равен  $2d$  см.

7 Решите уравнение.

а)  $\frac{(x^4)^8 \cdot (x^{15})^3}{x^{60} \cdot (x^4)^4} = 5$       б)  $\frac{(x^3)^5 \cdot (x^4)^2 \cdot x^{23}}{x^{50} : (x^2)^4} = 256$

в)  $\frac{(x^8)^3 \cdot x^5 \cdot (x^2)^3}{x^{18} \cdot (x^6)^2} = -243$



8 Клиент положил в банк 20 000 манатов на 3 года. В конце первого года на его счете стало 21 500 манатов. Если вклад ежегодно увеличивается на один и тот же процент по сравнению с предыдущим годом, сколько денег будет на счете в конце третьего года?

9 Первоначальная цена телевизора была 3000 манатов. Цена снизилась на 10% по сравнению с предыдущим годом в первые два года и на 20% — в третий год. Какова будет цена телевизора через 3 года?

10\* Докажите равенство.

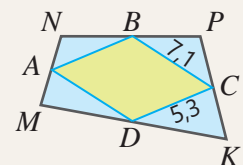
$$(3^2 + 2^2)(3^4 + 2^4)(3^8 + 2^8)(3^{16} + 2^{16}) = 0,2(3^{32} - 2^{32})$$

11 Вычислите удобным способом.

а)  $15,5 \cdot 20,8 + 15,5 \cdot 9,2 - 3,5 \cdot 20,8 - 3,5 \cdot 9,2$

б)  $105 \cdot 5,16 - 5,36 \cdot 25 - 37 \cdot 5,16 + 0,2 \cdot 25$

12 Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  – это середины сторон четырехугольника  $MNPК$ . Найдите длину диагоналей четырехугольника  $MNPК$ .



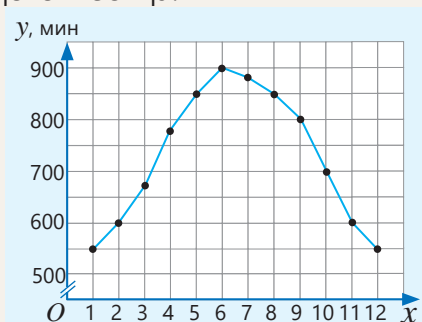
13 Сравните значения функций  $y = \frac{3-x}{20}$  и  $y = 9 - 5x$  при значениях аргумента  $x = -8$ ;  $-3,2$ ;  $0$ ;  $19$ .

14 Постройте график заданной функции.

а)  $y = -6$       в)  $y = x + 5$       д)  $y = -3x + 2$

б)  $y = -2x$       г)  $y = 5x + 1$       е)  $y = 0,2x - 4$

- 15 На рисунке изображён график зависимости продолжительности светлого времени суток ( $y$ ) от месяцев ( $x$ ) в первый день каждого месяца.



- а) В каких месяцах продолжительность светового дня составляла 600 минут, 675 минут, 900 минут?  
 б) В каких месяцах продолжительность светового дня была более 800 минут, но менее 900 минут?  
 в) В каких из месяцев – март, май, сентябрь и ноябрь – продолжительность дня была наибольшей, а в каких – наименьшей?

- 16 Запишите данное равенство в виде  $y = kx + b$ . Определите угловой коэффициент ( $k$ ) данной линейной функции и координаты точки пересечения графика с осью  $Oy$ .

а)  $19x + y = 5$

г)  $y = \frac{8x + 3}{4}$

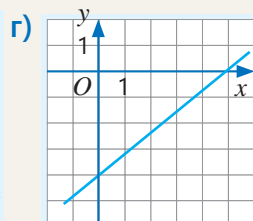
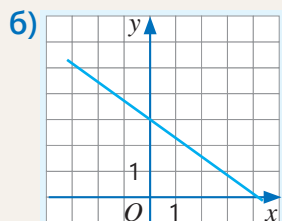
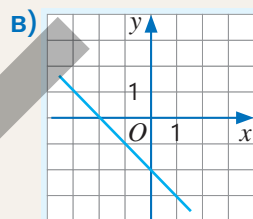
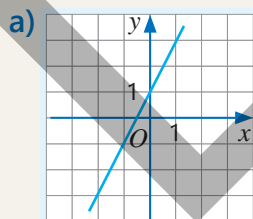
б)  $y - 6x - 11 = 0$

д)  $y = \frac{16 - 4x}{8}$

в)  $y = \frac{12 + 7x}{3}$

е)  $\frac{2x - y}{3} = -2$

- 17 По графику линейной функции  $y = kx + b$  найдите значения коэффициентов  $k$  и  $b$ .



- 18 Поезд дважды в день отправляется из города  $A$  в город  $B$  и возвращается обратно. На рисунке показана зависимость расстояния  $s$  от времени  $t$ .



- а) Каково расстояние между городами  $A$  и  $B$ ?  
 б) Сколько минут поезд стоит каждый раз?  
 в) Какова средняя скорость поезда за одну поездку туда и обратно?  
 г) Сколько часов поезд находился в движении за день?  
 д) Запишите формулу зависимости  $s$  от  $t$  для движения поезда при возвращении.

- 19 Укажите, через какие из данных точек проходит график функции  $y = 3,2x - 5$ ?

$A(2,2; 2,04)$      $B(1,2; 0)$      $C(7,5; 19)$

$D(3; 4,6)$      $E(0; 5)$      $F(-1; -8,2)$

- 20 Заданные точки принадлежат графику функции вида  $y = kx + b$ . Найдите значения  $k$  и  $b$ , запишите формулу функции и постройте ее график.

а)  $A(1; 2)$  и  $B(4; -7)$

б)  $C(0; 0)$  и  $D(-3; -21)$

в)  $E(-2; -13,6)$  и  $F(5; -1)$

- 21 Найдите координаты точки пересечения графиков заданных линейных функций.

а)  $y = x + 5$  и  $y = 3x$

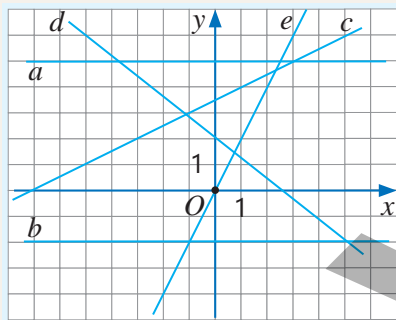
б)  $y = -2x - 1$  и  $y = 4x - 1$

в)  $y = -x$  и  $y = 4 - 3x$

22) Графики линейных функций  $y = kx + b$  и  $y = mx + n$  пересекаются в третьей четверти прямоугольной координатной системы. Известно, что прямая  $y = kx + b$  не проходит через вторую четверть, а прямая  $y = mx + n$  проходит через начало координат. Определите знаки чисел  $k, b$  и  $m$ .

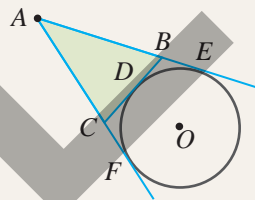
23) Графики линейных функций  $y = kx + b$  и  $y = mx + n$  пересекаются во второй четверти, и обе прямые образуют тупой угол с осью  $Ox$ . Определите знаки чисел  $k, m, b$  и  $n$ . Объясните на примере.

24) Запишите уравнения прямых и найдите координаты точки пересечения.



- а)  $a$  и  $d$                       в)  $c$  и  $e$   
 б)  $d$  и  $e$                       г)  $b$  и  $c$

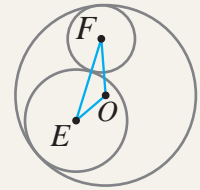
25) Из точки  $A$  к окружности проведены касательные  $AF$  и  $AE$ . Отрезок  $BC$  касается окружности в точке  $D$ . Если периметр треугольника  $ABC$  равен 48 дм, какова длина отрезка  $AF$ ?



26) Определите координаты точек пересечения графика данной функции с координатными осями.

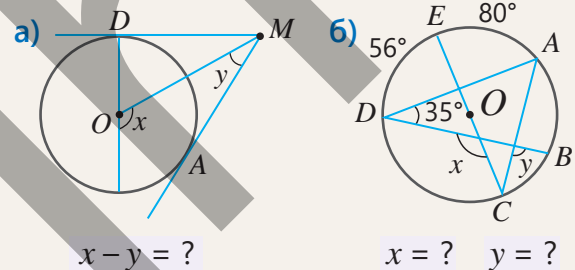
- а)  $y = 6,5x + 30$                       в)  $y = -2,5x + 7,5$   
 б)  $y = 3,4x - 27,2$                       г)  $y = 6,2 - 8,1x$

27) Окружности с радиусом 3 см, 5 см и 9 см касаются друг друга внутренне и внешне, как показано на рисунке. Если точки  $O, E$  и  $F$  – центры соответствующих окружностей, каков периметр треугольника  $OEF$ ?



28) Три одинаковые окружности с центрами в точках  $A, B$  и  $C$  касаются попарно внешним образом. Периметр треугольника  $ABC$  – 36 см. Каковы радиусы и длины окружностей?

29) Найдите требуемые значения по данным, приведенным на рисунке.

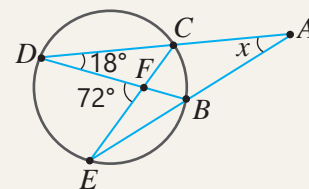


30) Решите систему уравнений.

- а)  $\begin{cases} 40x + 3y = -10 \\ 20x - 7y = -5 \end{cases}$       г)  $\begin{cases} 10x - 9y = 3 \\ 24y - 25x = 21 \end{cases}$   
 б)  $\begin{cases} 2x + 3y = -9 \\ 4x - 6y = 66 \end{cases}$       д)  $\begin{cases} \frac{1}{5}x + 0,25y = -1 \\ 3y - 2x = 54 \end{cases}$   
 в)  $\begin{cases} 12x - 35y = 25 \\ -8x - 15y = -55 \end{cases}$       е)  $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 0,2y = 11 \\ 0,6x - 2y = 8 \end{cases}$

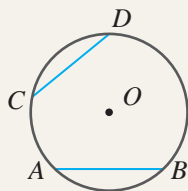
31) Вершины равнобедренного треугольника  $MNK$ , основание которого отрезок  $MK$  и угол при вершине равен  $56^\circ$ , лежат на окружности. Определите градусные меры дуг  $MN$  и  $NK$ .

32) По данным на рисунке найдите градусную меру угла  $DAE$ .

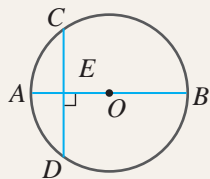


33 Докажите утверждение:

а) Если  $AB \cong CD$ , то  $\sphericalangle AB \cong \sphericalangle CD$ .

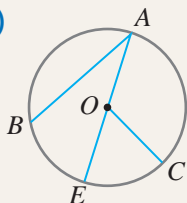


б) Если  $AB \perp CD$ , то  $CE \cong ED$ .



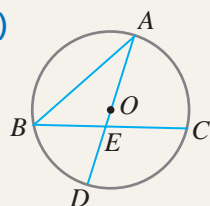
34 Найдите требуемые значения по данным условиям.

а)



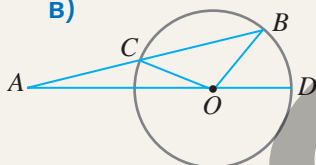
$$\begin{aligned} \angle A &= 28^\circ, \\ \angle COE &= 45^\circ \\ \sphericalangle BE : \sphericalangle EC &= ? \end{aligned}$$

б)



$$\begin{aligned} \angle B : \angle A &= 2 : 1 \\ \sphericalangle AC &= 70^\circ \\ \angle AEC &= ? \end{aligned}$$

в)



$$\begin{aligned} \angle BOC &= 104^\circ \\ \angle BAD &= 15^\circ \\ \angle BOD &= ? \end{aligned}$$

35 Окружность радиусом 28 см разделена дугами  $MN$ ,  $NK$  и  $MK$ . Градусные меры дуг  $MN$ ,  $NK$  и  $MK$  находятся в отношении  $3 : 5 : 4$ . Найдите градусные меры и длины дуг  $MN$ ,  $NK$  и  $MK$ .

36 Ответьте на вопросы:

- а) Если длина дуги окружности в  $20^\circ$  равна  $5\pi$ , то чему равна длина дуги в  $100^\circ$ ?
- б) Если длина дуги в  $45^\circ$  равна  $10\pi$ , чему равна градусная мера дуги длиной  $22\pi$ ?
- в) Чему равна угловая мера дуги длиной 25 см в окружности длиной 125 см?

37 Решите уравнение.

- а)  $\frac{3x-4}{9} + \frac{5x-7}{6} = \frac{4x+5}{18}$
- б)  $\frac{3x-5}{7} + \frac{2x+1}{14} = \frac{2x-3}{2}$
- в)  $\frac{3-x}{6} + \frac{5-3x}{18} = \frac{2x+1}{3}$

38 Ответьте на вопросы:

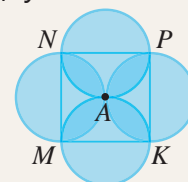
- а) Какова длина дуги сектора диаметром 6 см и площадью  $3\pi$  см<sup>2</sup>?
- б) Какова площадь сектора радиусом 8 дм и длиной дуги 4π дм?
- в) Чему равна градусная мера сектора площадью  $7\pi$  мм<sup>2</sup> в окружности диаметром 14 мм?
- г) Каковы радиус и длина дуги сектора с площадью  $6\pi$  см<sup>2</sup> и углом  $60^\circ$ ?



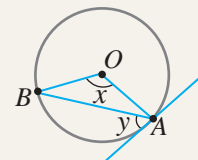
39\* Пять теннисных мячей, каждый радиусом 3,5 см, размещены в цилиндрическом контейнере, как показано на рисунке. Мячи касаются друг друга и стенок контейнера. Каков объем пустого пространства в контейнере ( $\pi \approx 3$ )?



40\* Четыре круга, каждый радиусом 12 см, имеют общую точку, которая совпадает с центром симметрии квадрата  $MNPK$ , как показано на рисунке. Найдите общую площадь фигуры, образованной этими кругами ( $\pi \approx 3$ ).

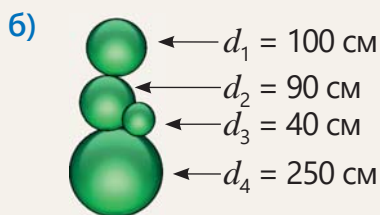
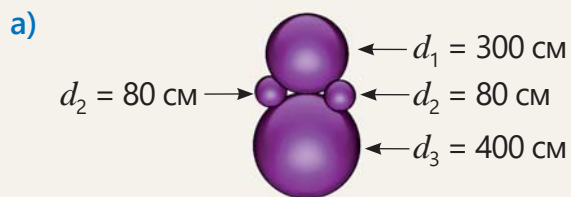


41 На основе заданного значения угла  $x$  установите соответствие.

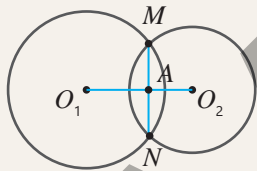


- 1)  $x = 70^\circ$
- 2)  $x = 110^\circ$
- 3)  $x = 96^\circ$
- а.  $y = 55^\circ$
- б.  $y = 48^\circ$
- в.  $y = 35^\circ$
- г.  $\angle BAO = 35^\circ$
- д.  $\angle ABO = 42^\circ$

- 42 Металлические шары из нержавеющей стали как современный элемент дизайна на придают интерьеру особую красоту. На рисунке указаны их диаметры. Найдите объём и площадь поверхности этих металлических шаров ( $\pi \approx 3$ ).



- 43\* Докажите, что отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, перпендикулярен отрезку, соединяющему их точки пересечения.



- 44 Решите уравнение с модулем.

а)  $|x + 1\frac{1}{2}| + 8 = 13$

б)  $17 + |11 - x| = 24$

в)  $|x + \frac{2x}{5}| + 5 = 26$

г)  $12,5 - |20 + 1,2y| = 9,6$

- 45 Решите неравенство и изобразите решение на числовой прямой.

а)  $x - 1,2 \geq 2,5$       д)  $13 + a \geq -9$

б)  $b - \frac{3}{4} \geq 1,25$       е)  $10 - k \leq -1,5$

в)  $y - 0,5 \leq -0,6$       ж)  $1 + m \geq -2$

г)  $b + 21 > 11$       з)  $-8,4 + c < 1,7$

- 46 Прямая с угловым коэффициентом, равным 4, пересекает ось ординат в точке  $(0; -3)$ . Найдите координаты точки пересечения этой прямой с другой прямой, с угловым коэффициентом равным  $-4$ , проходящей через начало координат.

- 47\* Решите систему уравнений.

а)  $\begin{cases} \frac{3x + 4x}{2} = -0,5 \\ \frac{5x - y}{3} = 2 \end{cases}$       б)  $\begin{cases} \frac{y + x}{3} = 2 \\ \frac{9x + 2y}{5} = 0,8 \end{cases}$

в)  $\begin{cases} \frac{x + y}{3} = \frac{x - y}{4} + 4 \\ 3 - \frac{2x - y}{6} = \frac{y + 2x}{9} \end{cases}$

г)  $\begin{cases} \frac{-5y + x}{2} + 1,5 = 1 + \frac{3x - 4y}{3} \\ 2 + \frac{3x - y}{3} = 3x - \frac{y}{4} \end{cases}$

- 48\* Упростив выражения, решите систему уравнений.

а)  $\begin{cases} (a + 3)(b + 5) = (b + 8)(a + 1) \\ (5b + 7)(2a - 3) = (2b + 2)(5a - 6) \end{cases}$

б)  $\begin{cases} (x + 2)(y - 1) = (y - 2)(x + 5) \\ (x - 3)(y + 4) = (x - 4)(y + 7) \end{cases}$

- 49 Решите систему уравнений с помощью графика.

а)  $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -2x \end{cases}$       в)  $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = 3 - 2x \end{cases}$

б)  $\begin{cases} y = 2 - x \\ y = -4x - 1 \end{cases}$       г)  $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 4x + y = 8 \end{cases}$

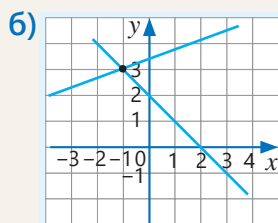
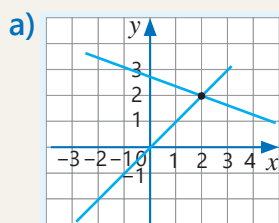
- 50 В копилке находятся  $n$  монет по 10 гяпиков и  $k$  монет по 20 гяпиков, всего 150 монет. Если известно, что всего в копилке 23 маната, найдите, сколько монет каждого вида в копилке.



- 51 В двух шкафах всего 110 книг. Если половину книг из второго шкафа переложить в первый, то в первом шкафу окажется в 4 раза больше книг, чем останется во втором. Сколько книг в каждом шкафу?

- 52 Мастер за 3 часа и ученик за 2 часа вместе изготовили 56 деталей. Если мастер изготавливает на 2 детали в час больше, чем ученик, сколько деталей сделал каждый из них?

- 53 Составьте соответствующие системы уравнений по данным графикам и решите их. На основе этого запишите координаты точки пересечения графиков.



- 54 Найдите числа, соответствующие условию:

а) Одно из двух чисел на 140 больше другого. 60% большего числа на 64 больше, чем 70% меньшего числа.

б) 30% числа  $t$  на 20 больше, чем 25% числа  $n$ . А 30% числа  $n$  на 8 больше, чем 20% числа  $t$ .

в) Одно из двух чисел на 52 меньше другого. Если большее число разделить на меньшее, в частном получится 3, а в остатке 4.

- 55\* Сумма двух натуральных чисел, последняя цифра которых 2, равна 1244. Если к одному из этих чисел приписать справа цифру 3, а у другого стереть последнюю цифру, получатся одинаковые числа. Какие это числа?

- 56 В спортивном клубе волейбольных мячей в 5 раз больше, чем футбольных. После того как в клуб дополнительно привезли мячи, их стало всего 52. Если количество футбольных мячей стало в 6 раз больше, а волейбольных — в 4 раза больше по сравнению с исходным, сколько всего мячей было в клубе изначально?

- 57 Длина одной из стен комнаты прямоугольной формы равна 7,5 м, а высота — 3,2 м.



- Округлите размеры до целых и найдите площадь стены.
- Найдите абсолютную и относительную погрешности вычислений.

- 58 В двух емкостях вместе 18 литров молока. Если 10% молока из первой емкости перелить во вторую, то в обеих емкостях станет одинаковое количество молока. Сколько литров молока было в каждой емкости?



- 59 Катер затратил 4,5 часа на путь между двумя пунктами по течению реки и обратно. Если скорость течения реки равна 2 км/ч, а собственная скорость катера в стоячей воде — 18 км/ч, то каково расстояние между этими пунктами?

- 60\* Из двух пунктов, расстояние между которыми 60 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Через 2 часа после начала движения они встретились. Если бы первый велосипедист выехал на 1 час раньше, то он бы встретился со вторым через 2,6 часа после своего выезда. Какова скорость каждого велосипедиста?

- 61 Теплоход проходит 120 км против течения реки за 5 часов, а 180 км по течению — за 6 часов. Каковы скорость теплохода в стоячей воде и скорость течения?



- 62 Анар заплатил 59 манатов за 5 кг кошачьего и 3 кг собачьего корма. Самир заплатил 46 манатов за 2 кг собачьего и 4 кг кошачьего корма. Сколько стоит один килограмм каждого корма?



63 Запишите дробь  $\frac{3}{7}$  в виде десятичной дроби. Округлите полученное число до десятых, сотых и тысячных. Для каждого случая найдите абсолютную и относительную погрешность.

64 В мешке находятся шарики одинакового размера, пронумерованные от 1 до 15. Случайным образом извлекается один шарик. Найдите вероятность следующего события.

- а) Извлеченный шарик имеет номер, кратный 3;
- б) Извлеченный шарик имеет номер, который является простым числом;
- в) Извлеченный шарик имеет номер, который является составным числом;
- г) Извлеченный шарик имеет номер, который больше 3, но меньше 9.

65 В личной библиотеке количество книг по жанрам указано в таблице. Дополните таблицу частот.

Книга	Кол-во	Частота
Повесть	8	
Роман	12	
Рассказ	20	
Новелла	10	
Очерк	4	
Мемуары	7	

66 При измерении получено приближенное значение 20 кг, относительная погрешность составляет 5%. Найдите абсолютную погрешность.

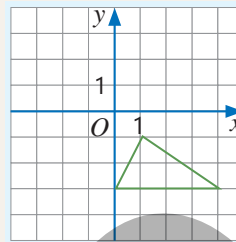
67\* Длина окружности переднего колеса кареты 3 м, заднего — 4,5 м. Если переднее колесо сделала на 200 оборотов больше, чем заднее, то какое расстояние прошла карета?



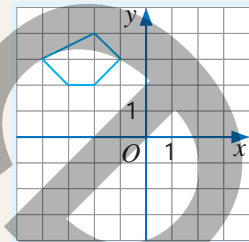
68 Составьте таблицу частот в соответствии с результатами экзамена учеников. На основе таблицы найдите среднее арифметическое, моду и медиану и объясните значение каждого из них.  
3; 4; 3; 3; 3; 4; 5; 5; 4; 5; 3; 2; 5; 5; 4; 5; 5; 4; 4; 3.

69 Дано изображение фигуры. Назовите фигуру и укажите координаты ее вершин. Нарисуйте фигуру, полученную при повороте данной фигуры вокруг начала координат, и запишите координаты ее вершин.

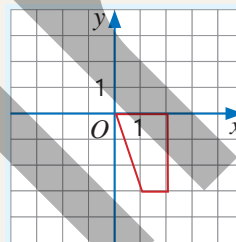
а) На  $180^\circ$  по часовой стрелке



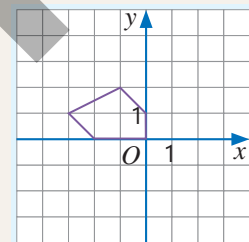
в) На  $90^\circ$  по часовой стрелке



б) На  $90^\circ$  против часовой стрелки



г) На  $270^\circ$  против часовой стрелки



70 В команде учеников 18 мальчиков и 22 девочки. 15% учеников носят очки. Из девочек 18 человек без очков.

- а) Изобразите информацию на диаграмме Эйлера-Венна.
- б) Какую часть от общего количества учеников составляют девочки без очков?
- в) Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик – мальчик в очках?
- г) Какова вероятность того, что случайно выбранный ученик – девочка без очков?

71 Школьная футбольная команда за год сыграла 32 игры. В 18 играх команда победила, в 9 проиграла, а в остальных – сыграла вничью.

- а) Составьте таблицу частот по результатам игр и изобразите ее на круговой диаграмме.
- б) Сколько процентов игр закончились поражением или ничьей?

- 72 Игрок вращает стрелку спиннера, разделенного на равные сектора, и получает количество очков, указанное на секторе, на котором остановится стрелка.



- а) Вероятность какого события выше: получения более 300 очков или менее 300 очков?  
 б) Получение какого количества очков наиболее вероятно? Почему?

- 73 На доске написано 25 слов, относящихся к предмету "Математика":

- а) Составьте таблицу частот по количеству букв в словах.  
 б) По таблице частот найдите среднее арифметическое, моду и медиану и объясните значение каждого из них.  
 в) Случайным образом выбирается одно слово. Найдите вероятность того, что выбранное слово будет состоять из 4, 5, 6, 7 или 8 букв.  
 г) Найдите вероятность того, что выбранное слово будет содержать более 5 букв.

треугольник	теорема	диагональ	круговая
диаграмма	угол	дробь	дуга
прямая	отношение	радиус	медиана
аксиома	переменная	степень	мода
функция	уравнение	фигура	член
погрешность	процент	натуральное	модуль
параллельные			

- 74 Нарисуйте произвольный треугольник  $ABC$ . Постройте медиану  $AD$  этого треугольника.

- 75 Нарисуйте отрезок  $AB$ . Постройте треугольник, у которого боковые стороны равны отрезку  $AB$ , а основание в 2 раза меньше отрезка  $AB$ .

- 76 Из 150 лотерейных билетов 3 выигрывают по 10 манатов, 4 выигрывают по 15 манатов, 10 выигрывают по 20 манатов, остальные – невыигрышные. Найдите вероятность следующих событий при покупке одного билета:

- а) Выигрыш — 15 манатов;  
 б) Выигрыш — 10 или 20 манатов;  
 в) Билет окажется выигрышным;  
 г) Билет окажется невыигрышным.

- 77 Пусть событие  $A$  — рост случайно выбранного ученика больше 165 см. Найдите событие  $\bar{A}$ . Если известна вероятность одного из этих событий, определите вероятность другого.

- а)  $P(A) = 0,12$       $P(\bar{A}) = ?$   
 б)  $P(A) = \frac{5}{7}$       $P(\bar{A}) = ?$   
 в)  $P(A) = 0,7$       $P(\bar{A}) = ?$   
 г)  $P(A) = 32\%$       $P(\bar{A}) = ?$

- 78 В мешке находятся 5 белых, 6 черных, 8 синих, 3 зеленых, 9 красных и 7 желтых шариков. Каждый раз случайным образом извлекается один шарик, его цвет записывается, после чего он возвращается в мешок.

- а) Какова вероятность того, что будет извлечен красный шарик?  
 б) Какова вероятность извлечения желтого или черного шарика?  
 в) Какова вероятность того, что не будет извлечен синий шарик?

- 79 Найдите вероятность того, что при одном броске игрального кубика:

- а) выпавшее число будет больше 2;  
 б) выпавшее число является делителем числа 6;  
 в) выпавшее число будет больше 3 и не больше 5.



- 80 На гранях фигуры в форме кубоида изображены треугольник, прямоугольник, ромб, параллелограмм, трапеция и круг. Какие элементарные события возможны при однократном броске фигуры? Найдите вероятность следующих событий:

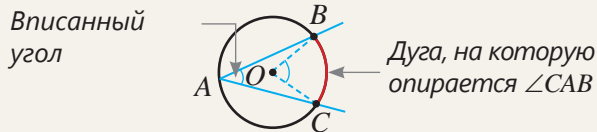
- а) Выпала грань с ромбом;  
 б) Выпала грань с четырехугольником;  
 в) Выпала грань с треугольником или трапецией;  
 г) Выпала грань без круга.



# СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

**Абсолютная погрешность** – модуль разности между точным значением ( $x$ ) и приближенным значением ( $a$ ):  $|x - a|$

**Вписанный угол** – угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

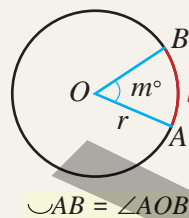


$$\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \overset{\frown}{BC}$$

**График функции** – каждая точка графика имеет абсциссу, равную значению аргумента, и ординату, равную соответствующему значению функции.

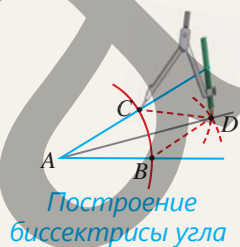
**Длина дуги окружности** –  $l = \frac{m}{360} \cdot 2\pi r$

**Дуга окружности** – часть окружности, ограниченная двумя точками. Градусная мера дуги равна градусной мере центрального угла, опирающегося на эту дугу.



$$\overset{\frown}{AB} = \angle AOB$$

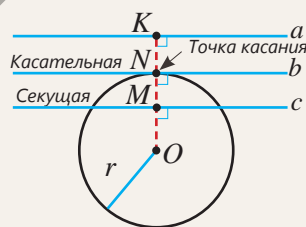
**Задача на построение** – построение геометрической фигуры с определенными свойствами с использованием циркуля и линейки без делений. Например, на рисунке показано построение биссектрисы угла.



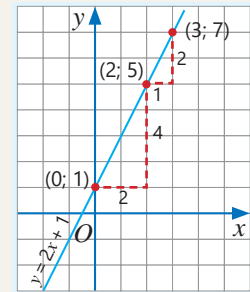
Построение биссектрисы угла

Решение задачи на построение означает указание способа построения и доказательство того, что построенная фигура соответствует требуемой.

**Касательная** – прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку. Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.



**Линейная функция** – функция, заданная формулой  $y = kx + b$  или графиком в виде прямой линии. Здесь  $k$  и  $b$  – заданные числа. График линейной функции  $y = kx + b$  пересекает ось ординат в точке  $(0; b)$ .



**Линейное уравнение с двумя переменными** – уравнение вида  $ax + by = c$ , где  $a, b, c$  – заданные числа,  $x$  и  $y$  – неизвестные. Графиком линейного уравнения с двумя переменными является прямая.

**Линейное уравнение с одной переменной** – уравнение вида  $ax = b$ , где  $a$  и  $b$  – заданные числа,  $x$  – неизвестное.

Если  $a \neq 0$ , то у линейного уравнения существует **одно решение**.

Если  $a = 0, b = 0$ , то у уравнения **бесконечно много решений**.

Если  $a = 0, b \neq 0$ , то у уравнения **нет решений**.

**Несовместные события** – события, которые не могут произойти одновременно. Например, при бросании монеты выпадение герба и цифры – несовместные события.

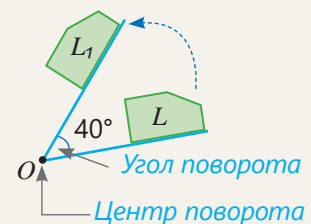
Вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Относительная погрешность** – отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения. Обычно выражается в процентах:  $\frac{|x - a|}{|a|} \cdot 100\%$

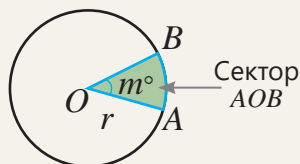
**Площадь сектора круга** –  $S_{\text{сектор}} = \frac{m}{360} \cdot \pi r^2$

**Поворот** – перемещение фигуры вокруг заданной точки на определенный угол, при котором фигура остается конгруэнтной.



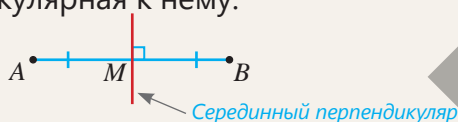
**Противоположные события** – такие два события, при которых в результате эксперимента обязательно происходит только одно из них. Противоположное событие к событию  $A$  обозначается как  $\bar{A}$ .

**Сектор круга** – часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой между их концами.

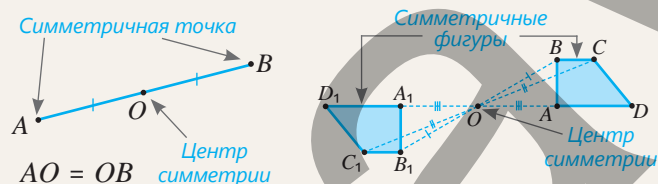


**Секущая** – прямая, проходящая через две точки окружности.

**Серединный перпендикуляр отрезка** – прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему.



**Симметрия относительно точки** – если точка  $O$  является серединой отрезка  $AB$ , то точки  $A$  и  $B$  являются симметричными относительно точки  $O$ . Точка  $O$  называется центром симметрии. Любой точке одной симметричной фигуры соответствует симметричная относительно заданного центра точка другой фигуры.



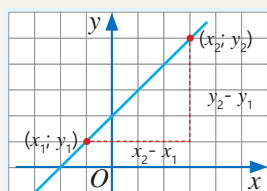
**Система линейных уравнений с двумя переменными** – два или более линейных уравнения, для которых ищется общее решение.

Например, 
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

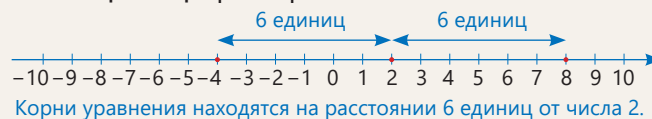
**Случайное событие** – определенное множество случайных элементарных событий, происходящих в результате испытания.

**Угловой коэффициент** – число  $k$  называется угловым коэффициентом прямой  $y = kx + b$ .

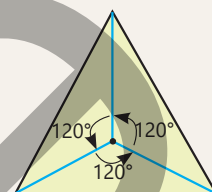
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



**Уравнение с модулем** – уравнение, в котором переменная находится под знаком модуля. Например:  $|x - 2| = 6$

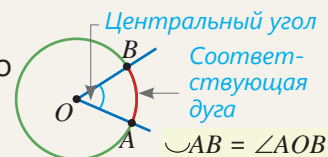


**Фигура с симметрией поворота** – фигура, которая при повороте вокруг определенной точки на углы меньше  $360^\circ$ , несколько раз совпадает сама с собой. Например, равносторонний треугольник совпадает сам с собой при поворотах на  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ , и  $360^\circ$  вокруг центра тяжести.



**Центрально-симметричная фигура** – для любой точки фигуры симметричная ей точка относительно одной и той же точки  $O$  также принадлежит этой фигуре. Например, параллелограмм – центрально-симметричная фигура. Такие фигуры совпадают сами с собой при повороте на  $180^\circ$  вокруг центра симметрии.

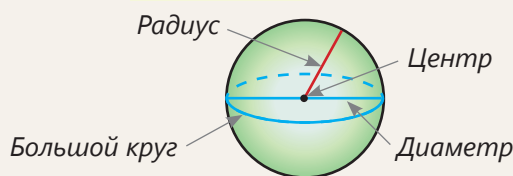
**Центральный угол** – угол, вершина которого находится в центре окружности.



**Шар** – геометрическое тело, все точки поверхности которого находятся на одинаковом расстоянии от центра.

Площадь поверхности шара:  $S_{\text{шар}} = 4\pi r^2$

Объем шара:  $V_{\text{шар}} = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$



**Элементарное событие** – результат случайного эксперимента, который нельзя разделить на более простые события. Например, при броске игральной кости элементарными событиями являются выпадения 1, 2, 3, 4, 5 или 6. При наступлении одного элементарного события другие не происходят.

# ОТВЕТЫ

## 6-й раздел

- стр.9 **6.** а)  $S(x) = 2,5x$
- стр.10 **8.** а)  $y = 350 - 50x$   
**9.** в)  $P = 1 + 0,1h$   
**11.** б) 20 м/мин с) 100 мин  
**12.** а)  $y = 4x, y = 6 + 2x$   
 в) 3 ч
- стр.13 **5.** г) между 6 и 8 часами  
**6.** в) 4 км г) А:  $y = 2 + x$   
 В:  $y = 4 + 0,5x$   
**7.** б) 30 м, 50 м  
 в) 80 км/ч, 80 м
- стр.16 **4.** б)  $k = 1$  с)  $k = -3$   
**5.** б)  $k = 3$  **6.** с) (0; 10)  
**7.**  $y = -5x$  **8.** проходит
- стр.17 **9.** а) (-1; 0) б) (8; 0)  
**11.** а)  $y = 2 - x$   
 б)  $y = \frac{2}{3}x + 1,5$   
**12.** а) (0;3),  $b = 3,$   
 $k = \frac{1}{3}, (-9; 0)$
- стр.18 **15.** а)  $S = 24 - 4h$  г)  $h = 3$   
**16.** а) 60 м б) 6 мин  
 в)  $h(t) = 60 - 10t$   
 г) Числа, которые больше или равны 0 и меньше или равны 6  
 д) 10 м/мин  
**17.** 100 л, 300 л,  
 10 л в минуту,  
 $y = 100 + 10x,$   
 32 минуты
- стр.20 **4.**  $y = 2x + 3, (-1,5; 0),$   
 $a = 1$
- стр.21 **11.** г) 58 км/ч  
**14.** б) 6 мин  
 в)  $y = 40 + 10x$   
**15.** а)  $y = 3 + 2x$  б) 23 ман  
 в) 16 км
- Математический калейдоскоп*  
**1.** -2025 **2.** Подсказка:  
 $n^3 + 17n = n^3 - n + 18n = =$   
 $n(n - 1)(n + 1) + 18n$   
**3.** а) С б) D  
**4.** Пронумеровав мешки, взять из каждого количество монет, равное номеру мешка, и взвесить общую массу на весах.

## 7-й раздел

- стр.24 **1.** а)  $120^\circ$  б)  $135^\circ$   
**5.** 10 м  
**6.** а)  $33\pi$  м<sup>2</sup> б)  $12\pi$  см<sup>2</sup>  
**7.**  $251200$  см<sup>2</sup>,  $502,4$  см<sup>3</sup>  
**9.** 1620 м, 750 оборотов
- стр.27 **7.** в) 5 см,  $15^\circ$   
**8.** г)  $60^\circ, 64$
- стр.28 **9.** а) 8 см б) 2 см  
**10.** 4 м или 20 м  
**11.** 72 см **12.** 11  
**13.** а) стороны 3 см, 4 см,  
 5 см, периметр 12 см  
**14.**  $\approx 59$  м<sup>2</sup>; 1,5 м  
**15.** 8 км/ч
- стр.30 **2.** б)  $40^\circ, 140^\circ, 130^\circ$   
 в)  $70^\circ, 110^\circ, 70^\circ$   
**3.**  $\sphericalangle AE = 70^\circ, \sphericalangle BAE \cong \sphericalangle BCD$   
**4.**  $90^\circ, 120^\circ, 150^\circ$   
**5.** в)  $85^\circ$  **6.** б)  $160^\circ$
- стр.31 **7.** а)  $65^\circ$  в)  $15^\circ$  г)  $30^\circ$   
**9.** б)  $50^\circ, 40^\circ, 80^\circ$   
 в)  $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ$
- стр.32 **11.** а)  $168^\circ, 192^\circ, 96^\circ$   
 б)  $160^\circ, 200^\circ, 100^\circ$   
 в)  $140^\circ, 120^\circ, 60^\circ$   
**12.** а)  $40^\circ$  б)  $40^\circ$   
**13.**  $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$   
**14.** б) 20 в) 6 учеников
- стр.34 **1.** а)  $80^\circ$  в)  $95^\circ$  г)  $100^\circ$   
**2.** а)  $128^\circ$  б)  $30^\circ$  г)  $85^\circ$   
**3.** а)  $45^\circ$  б)  $40^\circ, 40^\circ$
- стр.35 **5.** а)  $27^\circ$  б)  $40^\circ$  в)  $10^\circ$   
**6.** а)  $20^\circ$  б)  $170^\circ$  г)  $40^\circ, 120^\circ$
- стр.36 **7.** а)  $50^\circ$  б)  $70^\circ$  в)  $140^\circ$
- стр.37 **9.**  $35^\circ, 10^\circ$  **10.**  $60^\circ$   
**11.**  $30^\circ, 38^\circ, 23^\circ$  **12.**  $140^\circ$   
**13.**  $150^\circ$  **14.**  $75^\circ, 105^\circ$
- стр.39 **1.** а)  $2\pi$  б)  $3\pi$  в)  $2,5\pi$   
**2.** а) 12,56 см в) 15,7 см  
**3.** а) 6 см б) 8 см  
**4.** а) 14π б)  $90^\circ$  в)  $72^\circ$   
 г) 56π д) 60 см
- стр.40 **6.** а)  $4\pi$  б)  $10\pi$  г)  $75\pi$   
**7.** а)  $47,1$  см<sup>2</sup>, б)  $150,72$  см<sup>2</sup>  
**8.** а)  $12,56$  см<sup>2</sup>  
**9.** а)  $72^\circ$  б)  $60^\circ$   
**10.** а)  $\pi$  б)  $3\pi$  в)  $6, \frac{4}{3}\pi$

- стр.41 **11.** а)  $\frac{4}{3}\pi$  см,  $2\pi$  см  
 б)  $\frac{8}{3}\pi$  см<sup>2</sup>,  $6\pi$  см<sup>2</sup>  
**12.** в)  $18,84$  см<sup>2</sup>, г)  $47,1$  см<sup>2</sup>  
**13.** а)  $60$  см<sup>2</sup> в)  $40$  см<sup>2</sup>  
**14.** а)  $36-9\pi$  б)  $27-4,5\pi$   
 в)  $64-16\pi$   
**16.**  $29,45$  м<sup>2</sup>;  $10,60$  м<sup>2</sup>  
**17.**  $45$  м<sup>2</sup>; 54 кустов
- стр.43 **1.** в)  $50$  см<sup>2</sup>, г)  $804$  см<sup>2</sup>  
**2.** г)  $28$  см<sup>2</sup>, д)  $36$  мм<sup>2</sup>  
**3.** 12 см,  $144\pi$  см<sup>2</sup>  
**5.** а)  $32$  см<sup>3</sup>, б)  $108$  см<sup>3</sup>
- стр.44 **6.** 8 см,  $\frac{256}{3}\pi$  см<sup>3</sup>  
**8.**  $\approx 22\ 066\ 647\ 300$  км<sup>3</sup>,  
 $\approx 128\ 679\ 600$  км<sup>2</sup>  
**9.**  $\approx 1022$  см<sup>3</sup>, 2800 гр  
**10.** а)  $57$  м<sup>2</sup> б)  $283$  м<sup>2</sup>  
 в) 57 л

- стр.46 **1.** а)  $7; 125^\circ; 55^\circ,$   
 б) 13; 13;  $140^\circ$   
**2.** е)  $90^\circ; 45^\circ$  е)  $100^\circ; 50^\circ$   
**3.** в)  $60^\circ; 80^\circ$  д)  $80^\circ; 40^\circ$   
**4.** а) 3 см и 9 см  
 б) 6 см и 18 см  
**5.** а)  $2\pi, 5\pi$
- стр.47 **6.** а) 3π см б) 80 см в)  $2\pi$   
**7.** а)  $40^\circ$  б)  $28^\circ, 68^\circ$   
 в)  $30^\circ, 110^\circ$   
**8.** 6 см, 9 см, 12 см  
**9.** а)  $\approx 16,5$  см<sup>2</sup> б)  $\approx 23$  см<sup>2</sup>  
**10.** б)  $\approx 432$  см<sup>2</sup>,  $\approx 864$  см<sup>3</sup>  
**12.** поднимется на 1 см  
**13.**  $\approx 57$  м<sup>2</sup>,  $\approx 57$  м<sup>3</sup>

## Математический калейдоскоп

- 1.** 5555, четырехзначные  
**2.** а) 2 см, 4 см, 6 см  
**3.** 20 м/с

## 8-й раздел

- стр.50 **2.** в) 10 **3.** г) 5  
**6.** б) 50; 60 **11.** 130 ар
- стр.52 **5.** ж) -13 з)  $-13\frac{1}{3}$
- стр.53 **10.** ж) -3,5 з) 2  
**12.** 80 км/ч  
**13.** при  $x = 3$ ; Нет
- стр.55 **4.** г)  $y = -6x - 18$   
**8.** б)  $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

- стр.56 **10.** в)  $y = -1,4x + 7$ ;  
 $k = -1,4$ ; (0; 7)  
**12.** б)  $y = -3x + 4$
- стр.57 **14.** д) (3; 0), (0; -2)  
**15.** а) -2 б) 0,4  
**16.** а) 2 б) 5 в)  $(-2; 3\frac{1}{3})$
- стр.60 **9.** б) 3 трехместные палатки
- стр.61 **1.** е) Бесконечное количество корней  
**2.** б) 6 в) 2  
**3.** а)  $-\frac{1}{8}$  б) 0  
**5.** г)  $x = -0,4y - 4,8$   
**8.** а) единственное решение  
б) нет решения  
**9.** 500 м;  $h = 500 - 50t$ ;  
300 м; 10 мин
- стр.63 **3.** а) (-0,6; 1,8)  
б)  $m = 0, n = -2$  в)  $(-1; 7)$   
**4.** а) (0; 1) б)  $(-1,5; 3)$
- стр.64 **5.** в) (1; -4) д)  $(-4; -2)$   
**6.** в)  $(-2; 1)$  г) (2; 0,5)  
**8.** в) (2; 1) г) (2; 3)  
**9.** а) (6; 4) в) (4; -3)  
**10.** б)  $y = -2x + 9$   
**12.** (3; 2),  $a = 5$   
**13.** 40 мин, 20 мин
- стр.66 **1.** 10 мин, 15 мин,  
80 м, 60 м **2.** 5  
**3.** 0,8 ₺, 0,4 ₺ **4.** 100 ₺
- стр.67 **5.** 32 км/ч, 2 км/ч  
**6.** 18 км/ч, 2 км/ч  
**7.**  $140^\circ$ ,  $40^\circ$  **9.**  $12 \text{ см}^2$   
**10.** 36 г, 28 г  
**11.** 1-й сад 400 кг, 250 кг  
2-й сад 440 кг, 300 кг
- стр.68 **12.** 12 монет по 50 гяпиков,  
8 монет по 20 гяпиков  
**14.** 72 **15.** 20 см  
**16.** 9 лет **18.** 2,5 ₺, 3 ₺  
**21.** 150 г
- стр.70 **3.** в) -12; 4 ж) 1; 5  
**5.** б) 1 г) -2; 6  
**7.**  $|x - 10| = 3$ ;  
7 л или 13 л  
**8.**  $|20t - 70|$ ;  
65 км, 75 км,  
 $|20t - 70| = 5$
- стр.73 **13.** а)  $x + 1,5 \leq 23$   
в) 21,5 кг  
**14.**  $T - 10 \leq -18$ ;  $-8^\circ\text{C}$

- стр.76 **10.** а) 0,375; 0,1875  
в) 0,072; 0,036  
**11.** 0,37; 1,48%; нет
- стр.78 **1.** д) 10,5 е) 6, -12  
**2.** б) 3 и 12 в) 4 и 6  
**4.** а)  $a = 2, b = 3$  в)  $a = 1,5$   
**5.** в)  $m = 3, n = -4$  г)  $(-5; 6)$

- стр.79 **11.**  $156^\circ$   
**12.** а)  $y = x + 5$   
б)  $y = -0,25x + 3$   
**13.** а)  $y = x + 3$   
б)  $y = -\frac{1}{3}x + 2$   
**15.** 3,8;  $\approx 1,1\%$   
**17.** 2,5 ₺
- стр.80 **18.** 60; 40

#### Математический калейдоскоп

- 1.** а) 3,5 б)  $1\frac{1}{6}$  в) 4  
**3.** 9 **4.**  $110^\circ$   
**5.**  $25\pi \text{ см}^2$ ,  $\frac{2}{9}$ ;  $\frac{4}{9}$

#### 9-й раздел

- стр.82 **1.** а) 1 б) 2 г) 4 д) 3  
**7.** а) на 2 единицы вправо,  
на 2 единицы вниз  
б) симметрия относительно  
оси

- стр.85 **5.** а)  $90^\circ$  в) Точка А

- стр.86 **6.** а) А (1;1), В (1;2),  
С (3;2), D (3;1),  
А<sub>1</sub> (-1;1), В<sub>1</sub> (-2;1),  
С<sub>1</sub> (-2;3), D (-1;3)  
**7.** а)  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $360^\circ$   
б)  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  
 $300^\circ$ ,  $360^\circ$

- 8.**  $12^\circ, 72^\circ$ , 9-я кабина  
**9.**  $90^\circ$ , на 3 единицы вниз,  
(0;0), (2;0), (2;-1),  
(1;-1), (1;-3), (0;-3)

- стр.89 **6.** а) А и С, В и D  
**8.** (-1;2), (0;1), (2;3), (1;-2),  
(1;-2), (0; -1),  
(-2;-3), (-1;2)

- стр.94 **6.** А(-2;-3), В(-1;2),  
С(2;3), D(1;-2)

- стр.95 **7.** а) неверно в) верно  
Математический калейдоскоп

- 2.** а) 385 б) 6 **3.** 2 **4.** 210; 11

#### 10-й раздел

- стр.98 **1.** б) 13; 11; 11,2

**3.** 25%,  $\frac{1}{7}$

**4.** б)  $\frac{3}{8}$

**5.** 25%,  $\frac{1}{12}$

волейбол

- стр.102 **8.** а) 0,4 б) 0,25

**10.**  $\frac{13}{45}$

- стр.105 **5.** а) 0,6 б)  $\frac{3}{7}$

**8.** б) 0,4

- стр.106 **1.** а) А и В, А и С, С и D

- стр.107 **2.** а)  $\frac{1}{3}$  б)  $\frac{7}{30}$

- стр.108 **4.** а) 0,7 б) 0,2 в) 0,8

**5.** а) 0,6 б) 0,8 в) 0,7

**6.** а)  $\frac{5}{6}$  б)  $\frac{2}{3}$  в)  $\frac{1}{6}$  г)  $\frac{1}{2}$

**8.** а)  $\frac{3}{7}$  б)  $\frac{8}{35}$  в)  $\frac{12}{35}$

- стр.110 **4.** а) 0,2; 0,8; 0,4

б)  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$

**5.** а)  $\frac{3}{8}$  б)  $\frac{5}{8}$  в)  $\frac{5}{8}$

- стр.111 **6.** а)  $\frac{1}{3}$  б)  $\frac{3}{8}$

#### Математический калейдоскоп

**1.**  $\frac{2}{7}$  **2.** 220 дм<sup>2</sup>

**4.** 7; 15

#### Обобщающие задания за 7-й класс

- стр.113 **2.** а) 3

**3.** а)  $145^\circ$ , 40,1

**4.** в) 1

**9.** 1944 ₺

- стр.115 **25.** 24 см

**27.** 18 см

**29.** б)  $137^\circ$ ,  $83^\circ$

**32.**  $36^\circ$

- стр.116 **36.** а) 25π

**38.** а) 2π б) 16π дм<sup>2</sup>

**40.** 1440 см<sup>2</sup>

- стр.117 **51.** 66 и 44

**52.** 36 и 20

- стр.118 **55.** 1232 и 12

**58.** 10 л, 8 л

- стр.119 **64.** а)  $\frac{1}{3}$  б)  $\frac{2}{3}$

**67.** 1800 м

- стр.120 **79.** б)  $\frac{2}{3}$  в)  $\frac{1}{3}$

*BURAXILIŞ MƏLUMATI*

*Ümumi təhsil müəssisələrinin 7-ci sinifləri üçün  
riyaziyyat fənni üzrə*

*Dərslük  
rus dilində  
(2-ci hissə)*

**Tərtibçi heyət:**

Müəlliflər

**Zaur İsayev  
Məhəmməd Kərimov  
Günay Hüseynzadə  
Aqşin Abdullayev  
Sevda İsmayılova  
İbrahim Məhərov**

Redaktor

**Ayhan Kürşat Erbaş**

Tərcüməçi

**İradə Şıxəliyeva**

Tərcümə redaktoru

**Naidə İsayeva, Sahib Abdurahimov**

Dil redaktoru

**Aygün Əliyeva**

Bədii redaktor

**Eldəniz Xocayev**

Texniki redaktor

**Zeynal İsayev**

Dizayner

**Eldəniz Xocayev**

Üz qabığı

**Taleh Məlikov**

Rəssam

**Fərid Quliyev, Elmir Məmmədov**

Korrektor

**Olqa Kotova**

© Azərbaycan Respublikası Elm və Təhsil Nazirliyi

Müəlliflik hüquqları qorunur. Xüsusi icazə olmadan bu nəşri  
və yaxud onun hər hansı hissəsini yenidən çap etdirmək, surətini çıxarmaq,  
elektron informasiya vasitələri ilə yaymaq qanuna ziddir.

ISBN 978-9952-550-13-9

Hesab-nəşriyyat həcmi: 14,2. Fiziki çap vərəqi: 15,5.  
Səhifə sayı: 124. Kəşimdən sonra: 220 × 275. Kağız formatı: 57 × 90 <sup>1</sup>/<sub>8</sub>.  
Şriftin adı və ölçüsü: Segoe UI, 12 pt. Ofset kağızı. Ofset çapı.  
Sifariş \_\_\_\_. Tiraj: 800. Pulsuz. Bakı – 2025.

**Pilot siniflərdə istifadə üçün nəzərdə tutulur.**

Əlyazmanın yığıma verildiyi və çapa imzalandığı tarix: 17.09.2025

Çap məhsulunu hazırlayan:

Azərbaycan Respublikasının Təhsil İnstitutu (Bakı ş. A.Cəlilov küç., 86).

Çap məhsulunu istehsal edən:

“CN Poliqraf” MMC

(Bakı şəhəri, Abşeron rayonu, Novxanı qəsəbəsi, İlqar Mirzəyev küçəsi).

# Pulsuz



## Əziz məktəbli !

Bu dərslik sizə Azərbaycan dövləti tərəfindən bir dərs ilində istifadə üçün verilir. O, dərs ili müddətində nəzərdə tutulmuş bilikləri qazanmaq üçün sizə etibarlı dost və yardımçı olacaq.

İnanırıq ki, siz də bu dərsliyə məhəbbətlə yanaşacaq, onu zədələnmələrdən qoruyacaq, təmiz və səliqəli saxlayacaqsınız ki, növbəti dərs ilində digər məktəbli yoldaşınız ondan sizin kimi rahat istifadə edə bilsin.

Sizə təhsildə uğurlar arzulayırıq!

